ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2004

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Exercice n° 1

Question 1

Démontrer par récurrence la relation suivante :

$$\forall n \in ?^{*}, 1^2+2^2+3^2+....+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Question 2

On note (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{3}{2} \\ \text{pour tout entier } n \text{ de } N, \quad u_{n+1} = \dfrac{1}{2} u_n + (n+1)^2 \end{cases}$$

Montrer qu'il existe trois constantes réelles a,b,c telles que la suite (r_n) définie, pour tout entier n de N, par :

$$r_n = an^2 + bn + c$$

vérifie la relation :

$$r_{n+1} = (1/2)\, r_n + (n+1)^2$$

Question 3

On suppose maintenant que a,b,c ont les valeurs trouvées à la question précédente et on pose alors, pour tout entier n de N **:**

$$v_n = u_n - r_n$$

a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique. Donner sa raison et son premier terme.
b) Calculer le terme général de la suite (v_n) en fonction de n
c) En déduire le terme général de la suite (u_n) en fonction de n
d) La suite (u_n) converge-t-elle ?

Question 4

Calculer, pour tout entier n de N :

$$V_n = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_n$$
$$R_n = r_0 + r_1 + r_2 + \ldots + r_n$$
$$U_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

Exercice n° 2

On considère l'espace vectoriel R^3 muni de sa base canonique B composée des vecteurs e_1, e_2, e_3. Soit f un endomorphisme de R^3, défini par :

$$f(e_1) = - e_1$$
$$f(e_2) = e_1 + e_2 + e_3$$
$$f(e_3) = - e_2 - e_3$$

Question 1

Déterminer la matrice A de f dans la base canonique B de R^3

Question 2

Déterminer des bases de Ker f et de Im f, où Ker f désigne le noyau de f et Im f son image.

Question 3

a) L'endomorphisme f est-il injectif ? surjectif ? bijectif ?
b) Quel est le rang de f ?

Question 4

a) Montrer que la valeur 0 est une valeur propre de la matrice A
b) En déduire un vecteur propre associé à la valeur propre 0
c) Calculer les autres valeurs propres de A
d) La matrice A est-elle diagonalisable ? Justifier.

Question 5

Soit la famille de vecteurs B' composée des vecteurs u_1, u_2, u_3 de R^3 définis par : $u_1 = - e_2$; $u_2 = e_1 + e_3$; $u_3 = e_1$

a) Montrer que cette famille forme une base de R^3
b) Ecrire la matrice P de passage de la base B à la base B'
c) Calculer P^{-1}
d) En déduire la matrice A' de l'endomorphisme f dans la base B'
e) Quel est le rang de la matrice A' ?

Exercice n° 3

Question 1

Calculer le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction :

$$g(x) = \sqrt{1+2x} - 1 - x$$

Question 2

Même question pour la fonction :

$$h(x) = e^{3x} - 3e^{x} + 2$$

Question 3

Calculer : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{g(x)}{h(x)}$

Exercice n° 4

En fonction du paramètre m réel, déterminer les points stationnaires de la fonction f ainsi définie : $f(x, y, z) = x^2 - yz^2 - xy^2 + 2mxy$