ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2005

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Il est rappelé aux candidats que les exercices sont indépendants.

Exercice n° 1

Le parc des compteurs d'eau des abonnés d'une commune se répartit de la façon suivante :

10% des compteurs ont moins de deux ans et se trouvent de ce fait encore sous garantie ;

60% des compteurs ont entre deux et vingt ans ;

30% des compteurs ont plus de vingt ans.

Lors du passage de l'agent chargé de relever les compteurs, la probabilité de trouver le compteur défectueux est la suivante :

1% s'il s'agit d'un compteur sous garantie ;

5% s'il s'agit d'un compteur âgé de deux à vingt ans ;

10% s'il s'agit d'un compteur âgé de plus de vingt ans.

On notera les événements :

A : « le compteur est sous garantie »

B : « le compteur a entre deux et vingt ans d'âge »

C : « le compteur a plus de vingt ans d'âge »

D : « le compteur est défectueux »

Question 1

Calculer la probabilité de l'événement suivant « le compteur se trouve encore sous garantie et il est défectueux ».

Question 2

Calculer la probabilité de l'événement D.

Question 3

L'agent constate qu'un compteur est défectueux. Calculer la probabilité qu'il soit encore sous garantie.

Question 4

L'agent trouve huit compteurs défectueux. Quelle est la probabilité pour que l'un au moins d'entre eux soit encore sous garantie ?

Exercice n° 2

Une urne contient trois pièces de 50 centimes d'euro et sept pièces de 10 centimes d'euro. On tire simultanément deux pièces. On suppose que les tirages sont équiprobables.

Question 1

Déterminer les probabilités des événements suivants :

A : « on tire deux pièces de 50 centimes d'euro »

B : « on tire deux pièces de 10 centimes d'euro »

C : « on tire une pièce de 10 centimes d'euro et une pièce de 50 centimes d'euro »

Question 2

Le total des valeurs des deux pièces définit une variable aléatoire X. Calculer la loi de probabilité de X, puis l'espérance de X.

Question 3

On procède à trois tirages successifs de deux pièces, les deux pièces étant remises dans l'urne après chaque tirage. Calculer la probabilité de l'événement « on tire deux fois une somme supérieure à 50 centimes d'euro ».

Exercice n° 3

On considère l'application f de C dans C qui à tout complexe z associe le complexe z' tel que :

$$z' = \frac{1+i}{3\sqrt{2}} z = f(z)$$

On pose $z_0 = 1$, $z_1 = f(z_0)$, $z_2 = f(z_1)$ et, de façon générale, pour tout entier naturel n, $z_{n+1} = f(z_n)$.

Question 1

Calculer le module et un argument de z_1.

Question 2

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :

$$z_n = \left(\frac{1+i}{3\sqrt{2}}\right)^n$$

En déduire le module et un argument de z_n.

Question 3

Pour quelles valeurs de l'entier naturel n, z_n est-il :

a) réel ?
b) imaginaire pur ?

Question 4

Calculer la limite, quand n tend vers l'infini, du module de z_n.

Exercice n° 4

Trouver un équivalent, au voisinage de 2, de l'expression :

$$y = \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3} - \frac{3}{2}$$

Exercice n° 5

Calculer l'intégrale indéfinie suivante :

$$I = \int \frac{\sqrt{1+x^2}+1}{\sqrt{1+x^2}-1}\,dx$$

Exercice n° 6

Soit f_a l'application linéaire de R^3 dans R^3 définie par :

$$f_a(x,y,z) = (ax+y+z,\ 2y+z,\ y+2z)$$

où a est un paramètre réel fixé.

Question 1

Trouver le noyau et l'image de f_a. Donner leurs dimensions.

Question 2

Donner la matrice M associée à f_a , par rapport à la base :

$$\{ (1,1,1) ; (1,0,0) ; (0,1,0) \} \text{ de } R^3$$