AVRIL 2006

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Exercice n° 1

Question 1

a) pas de difficulté particulière

b) $Pour\ x=0\ ;\ f(y)f(-y)=\left[f(0)f(y)\right]^2$
$Pour\ y=0\ ;\ f(x)f(x)=\left[f(x)f(0)\right]^2$

c) $f(0)=1$ ou $f(0)=-1$

d) $\Rightarrow\ évident$
$\Leftarrow\ si\ f(0)=0\ alors\ f(x)=0\quad en\ utilisant\ la\ question\ 1-b$

e) Cas 1 : si a=0, c'est fini

Cas 2 : si a est différent de 0 alors on peut écrire $a = a/2 + a/2$. En posant $x=a/2$ et $y=a/2$ et en utilisant la relation (1), on obtient $f(a/2)=0$. En décomposant $a/2$ comme somme de $a/4$ et de $a/4$, on obtient que $f(a/4)$ est nul. En continuant de la sorte, on arrive à montrer que, pour tout n entier naturel $f(a/2^n)$ est nul. La fonction f étant continue, $a/2^n$ tendant vers 0 quand n tend vers + l'infini, $f(0)=0$

f) En utilisant 1-e et 1-d, on sait que la fonction f ne s'annule jamais. En utilisant 1-b, on a, pour tout y, $f(y)f(-y)$ strictement positif, donc, les deux termes sont de même signe. D'où le résultat.

Question 2

a) G = F

b)

i. évident en posant $x = y = 0$ dans la relation (2)

ii. évident en posant $x = 0$ dans la relation (2)

iii. démonstration par récurrence (en posant $x = (n-1)\,x$ et $y = x$ dans la relation (2))

iv. démonstration par récurrence

cas 1 : si q=1, pas de problème pour p appartenant à N (question précédente) Pour passer à Z, il suffit d'utiliser le fait que la fonction est paire.

cas 2 : si q est différent de 1, on est amener à étudier la fonction $g\left(\frac{1}{q+1}x\right)$, et on va utiliser $x = x$ et $y=-\frac{qx}{q+1}$ dans la relation (2) pour montrer que $g\left(\frac{1}{q+1}x\right)=\frac{1}{(q+1)^2}g(x)$

c) L'ensemble G est composé des fonctions ax^2. L'ensemble F est composé des fonctions de type $\pm\mu e^{x^2}$

Exercice 2

Question 1

a) Par récurrence, on démontre la formule demandée où P_n est un polynôme de degré n dont le terme de plus haut degré est $(-1)^{n+1}$. $P_{n+1}(x) = (n+2-x)\,P_n(x) + (1-x)\,P'_n(x)$

b) $P_n(1) = n\,!$

c) $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = -x + 2$, $P_2(x) = x^2 - 4x + 5$

Question 2

a) évident

b) pas de difficulté particulière en utilisant la formule de Leibniz

c) évident en utilisant 1-a et 2-b

Question 3

a) Par récurrence, on démontre que $P_n^{(k)}=(-1)^k\frac{n!}{(n-k)!}P_{n-k}$ Donc $P_n^{(k)}(1)=(-1)^k n!$

b) Pas de problème particulier pour trouver $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{P_n(x)}{n!}=e^{1-x}$

Exercice 3

Question 1

$a_1 = 0,\ a_2 = p^2,\ a_3 = p^2q,\ a_4 = p^3q + p^2q^2$

Question 2

Démonstration par récurrence en utilisant le fait que :

- Si F est le résultat au premier lancer, alors on se retrouve avec l'événement (X = n-1) ensuite ;
- Si P est le résultat au premier lancer, alors il faut F au second lancer ($n \geq 3$), puis on se retrouve avec l'évènement (X = n-2) ensuite.

Question 3

a) évident

b) évident en utilisant, pour $q < 1$, $\sum_{i=0}^{+\infty} q^i = \frac{1}{1-q}$

c) E(X) = 15/4 et V(X) = 93/16

Exercice 4

Question 1

Cas 1 : $k = 2$, Dim Ker f = 2 et Dim Im f = 2.

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \textit{ et } \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \textit{ forment une base de Ker} f.\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \textit{ et } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \textit{ forment une base de } \operatorname{Im} f$$

Cas 2 : k différent de 2 , Dim Ker f = 1 et Dim Im f = 3.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \textit{ forme une base de Ker} f.\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \textit{ et } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \textit{ et } \begin{pmatrix} k \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \textit{ forment une base de } \operatorname{Im} f$$

Question 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$