

AVRIL 2006

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Il est rappelé aux candidats que les 4 exercices sont indépendants.

Exercice 1

Toutes les fonctions considérées dans cet exercice sont des applications de R dans R . On rappelle que tout nombre irrationnel est limite d'une suite croissante et d'une suite décroissante de nombres rationnels.



Question 1

On appelle F l'ensemble des applications continues f de R dans R satisfaisant l'égalité :

$$(1) \quad \forall (x, y) \in R^2 \quad f(x+y)f(x-y) = [f(x)f(y)]^2$$

Soit f un élément de F

- a) Vérifier que la fonction 2^{-x^2} appartient à F
- b) Ecrire ce que devient la relation (1) dans chacun des cas suivants : $x = 0$; $y = 0$
- c) Quelles sont les valeurs possibles de $f(0)$?
- d) Montrer que f est l'application nulle si et seulement si $f(0) = 0$
- e) Montrer que si f s'annule pour une valeur $x = a$, elle s'annule pour $x = 0$ (on pourra considérer les nombres $f(a/2), f(a/4), \dots$, et la question 1b)
- f) Montrer que si f n'est pas l'application nulle, on a $f(R) \subset R_+^*$ ou $f(R) \subset R_-$

Question 2

On appelle G l'ensemble des applications continues g de R dans R satisfaisant à l'égalité :

$$(2) \quad \forall (x, y) \in R^2 \quad g(x+y) + g(x-y) = 2[g(x) + g(y)]$$

- a) Déterminer les éléments de G à partir des éléments de F (on pourra considérer la fonction $g(x) = \ln |f(x)|$, où f est un élément de F distinct de l'application nulle sur R)
- b) Soit g un élément de G
- Montrer que $g(0) = 0$
 - Montrer que g est une fonction paire
 - Démontrer l'égalité $\forall x \in R \quad \forall n \in N \quad g(nx) = n^2 g(x)$
 - Que peut-on en déduire de $g\left(\frac{p}{q}x\right)$, où p appartient à Z et q à N^* (on pourra effectuer une démonstration par récurrence et poser $y = -\frac{qx}{q+1}$ dans la relation (2))
- c) Déterminer l'ensemble G . En déduire l'ensemble F .



Exercice 2

On considère la fonction f définie, pour tout réel x différent de 1, par :

$$f(x) = \frac{e^x}{1-x}$$

$f^{(n)}$ désigne la dérivée $n^{\text{ième}}$ de f ; par convention $f^{(0)} = f$

Question 1

- a) Montrer que, pour tout entier naturel n , on a :

$$f^{(n)}(x) = \frac{e^x P_n(x)}{(1-x)^{n+1}} \quad (x \neq 1)$$

où P_n est un polynôme de degré n dont on précisera le terme de plus haut degré. Exprimer $P_{n+1}(x)$ en fonction de $P_n(x)$ et $P'_n(x)$

- b) Calculer $P_n(1)$, pour n entier naturel
- c) Donner les expressions de P_0 , P_1 et P_2

Question 2

- a) Montrer que, pour tout réel x différent de 1, on a :

$$(x-1)f'(x) - (x-2)f(x) = 0$$

- b) En utilisant la formule de Leibniz, démontrer que, pour tout entier naturel non nul n et tout réel x , on a :

$$P_{n+1}(x) = (n+2-x) P_n(x) + n(x-1) P_{n-1}(x)$$

- c) En déduire, pour tout entier naturel non nul n , la relation :

$$P'_n = -n P_{n-1}$$

Question 3

- a) Soient n et k deux entiers tels que $0 \leq k \leq n$. Trouver une relation entre $P_n^{(k)}$ et P_{n-k} .
En déduire que $P_n^{(k)}(1) = (-1)^k n!$

- b) Appliquer la formule de Taylor à P_n entre 1 et x (x étant au voisinage de 1). En déduire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{P_n(x)}{n!} = e^{1-x}$$



Exercice 3

On joue à pile ou face avec une pièce non équilibrée. On suppose qu'à chaque lancer, la probabilité d'apparition de pile (P) est p , celle de face (F) est q avec $p+q = 1$. Les lancers sont supposés indépendants.

On note X le rang d'apparition pour la première fois de deux résultats « pile » consécutifs. Ainsi, dans la série suivante de 10 lancers, on a $X = 5$:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F	F	F	P	P	F	F	P	P	F

Pour tout entier naturel n différent de 0, on pose $a_n = P(X=n)$

Question 1

Calculer a_1, a_2, a_3 et a_4 en fonction de p et q

Question 2

Montrer, en distinguant suivant le résultat du premier lancer, que, pour $n \geq 3$, on a :

$$a_n = q a_{n-1} + p q a_{n-2}$$

Question 3

On suppose à présent que $p = 2/3$ et $q = 1/3$

a) Etablir que, pour $n \geq 0$, $a_{n+1} = \frac{4}{9} \left[\left(\frac{2}{3} \right)^n - \left(-\frac{1}{3} \right)^n \right]$

b) Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 1$

c) Calculer l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire X

Exercice 4



Soient k un nombre réel et f une application linéaire de R^4 dans R^3 définie par :

$$f(x, y, z, t) = (x + y + kz + t, x + z + t, y + z)$$

Question 1

Déterminer, pour chaque valeur de k , les sous espaces $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$. On en donnera une base et une (ou des) équation(s)

Question 2

Ecrire la matrice de f dans les bases canoniques de R^4 et de R^3