AVRIL 2007

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Problème 1

Question 1

a) Soit p le degré de f_n

Si p est nul alors $\forall x \in R \qquad f_n(x) - f_n(x-1) = 0 \neq x^n$ donc impossible

Si p est non nul, on pose $a_p x^p$ comme terme de plus haut degré de f_n avec a_p différent de 0

On recherche le terme de plus haut degré de $f_n(x) - f_n(x-1)$ qui est $pa_p x^{p-1}$

On en conclut que $n = p$-1 et que $pa_p = 1$

f_n est donc bien de degré n+1

b) D'après (1), on a $f_n(0) - f_n(-1) = 0$, or $f_n(0)=0$ donc $f_n(-1)=0$. la valeur -1 est donc racine de f_n , donc f_n est divisible par x+1

c) Démonstration par récurrence en utilisant la formule (1)

Question 2

a) En utilisant la formule (1), on a :

$\forall x \in R \qquad f_n^{'}(x) - f_n^{'}(x-1) = nx^{n-1}$

Mais $\quad x^{n-1} = f_{n-1}(x) - f_{n-1}(x-1)$ toujours en utilisant (1)

Donc $\quad f_n^{'}(x) - nf_{n-1}(x) = f_n^{'}(x-1) - nf_{n-1}(x-1)$

Donc $\quad \forall x \in N \quad f_n^{'}(x) - nf_{n-1}(x) = f_n^{'}(0)$

Cette propriété, vraie sur N, est vraie aussi sur R compte tenu que $f_n^{'}(x) - nf_{n-1}(x) - f_n^{'}(0)$ est un polynôme de degré n au plus qui admet un nombre fini de racines.

Pour démontrer (4), il suffit de démontrer que $f_n^{'}(0) = n\int_0^{-1} f_{n-1}(t)dt$ (par intégration de la formule (3) entre 0 et x).

De même, par intégration de la formule (3) entre 0 et -1, on a :

$f_n(-1) = 0 = n\int_0^{-1} f_{n-1}(t)dt - f_n^{'}(0)$, d'où le résultat.

Question 3

a) $f_0(x) = x$
$f_1(x) = x(x+1)/2$
$f_2(x) = x(x+1)(2x+1)/6$
$f_3(x) = x^2(x+1)^2/4$

b) $S_1 = \sum_{i=1}^{i=p} i = \dfrac{p(p+1)}{2}$ $\quad S_2 = \sum_{i=1}^{i=p} i^2 = \dfrac{p(p+1)(2p+1)}{6}$ $\quad S_3 = \sum_{i=1}^{i=p} i^3 = \dfrac{p^2(p+1)^2}{4}$

Problème 2

Question 1

a) La limite de f_n en $+\infty$ est 0

b) La fonction dérivée $f_n^{'}(x)$ est $f_n^{'}(x) = \dfrac{(\ln x)^{n-1}}{n!x^3}(n - 2\ln x)$

c) $x = 1$ ou $x = e^{n/2}$

d) La fonction f_n est positive

e) La fonction f_n est maximale pour $x = e^{n/2}$. y_n est égal à $\dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{n}{2e}\right)^n$

Question 2

a) On trouve $\dfrac{\ln x}{n+1}$

b) Evident en écrivant

c) Evident car y_n est le maximum de f_n

d) Démonstration par récurrence

e) Comme $0 \le y_n \le \dfrac{1}{2^n e}$, la limite est nulle

Question 3

a) En utilisant le fait que y_n est le maximum de f_n, on montre que : $0 \leq I_n(\beta) \leq (\beta - 1) y_n$

b) La limite de $I_n(x)$ quand n tend vers $+\infty$ est nulle

c) En intégrant $I_{n+1}(x)$ par parties (en posant u(t)=ln$t$ et $v'(t)=f_n(t)$), on démontre que $I_{n+1}(x) = I_n(x) - \frac{1}{(n+1)!}\frac{(\ln x)^{n+1}}{x}$

d) Démonstration par récurrence

e) $Z_n(x) = x - x\, I_n(x)$

f) La limite de $Z_n(\beta)$ quand n tend vers $+\infty$ est β

g) L = e

Exercice 1

a) La probabilité est égale à 7 / 12, soit 58,3%

b) La probabilité est égale à (5/12) x (4/11) x (3/10) x (2/9) x (1/8), soit à 0,126%

c) $C_{12}^{5} = 792$

Exercice 2

a) E(X) = 2,7 jours

b) E(Y) = 5,4 jours. La loi de probabilité de Y est la suivante :
P(Y=2)=0,01 P(Y=3)=0,06 P(Y=4)=0,17 P(Y=5)=0,28
P(Y=6)=0,28 P(Y=7)=0,16 P(Y=8)=0,04

Exercice 3

a) Soit f appartient à $S_1 \cup S_2$, donc f appartient à S_1 ou à S_2. Si f appartient à S_1, alors f est solution de (1), donc dérivable et $f'(x) - 2x = 0$, il est évident que f est alors solution de S_3. Idem si f appartient à S_2.

b) Soit la fonction $g(x) = 2|x|$. g est continue et admet donc une primitive G sur R. G est dérivable et, pour tout x réel, $G'(x)=g(x)$. G est solution de (3) et appartient à S_3.
On a, par ailleurs, G'(-1) – 2(-1) différent de 0, donc G n'appartient pas à S_1 sur R
G'(1) + 2(1) différent de 0, donc G n'appartient pas à S_2 sur R