

AVRIL 2007

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Tous les problèmes et les exercices sont indépendants.



Problème 1

L'objet du problème est l'étude des polynômes f_n de la variable réelle x tels que l'on ait :

$$(1) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f_n(x) - f_n(x-1) = x^n \text{ et } f_n(0) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

N.B. – Pour n donné, on admettra l'existence et l'unicité du polynôme f_n remplissant les conditions (1).

Question 1 – Démontrer que :

- a) f_n est de degré $(n+1)$.
- b) f_n est divisible par $(x+1)$ pour n supérieur ou égal à 1.
- c) Pour tout entier strictement positif p , on a, quel que soit l'entier naturel n ,

$$(2) \quad f_n(p) = 1^n + 2^n + 3^n + \dots + p^n$$

Question 2 – Soit $f'_n(x)$ la dérivée de $f_n(x)$.

- a) Démontrer que l'on a, pour n supérieur ou égal à 1

$$(3) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f'_n(x) - n f'_{n-1}(x) = f'_n(0)$$

- b) En déduire que l'on a, toujours pour n supérieur ou égal à 1

$$(4) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f_n(x) = n \int_0^x f_{n-1}(t) dt + n x \int_0^{-1} f_{n-1}(t) dt$$

Question 3

- a) Calculer $f_n(x)$ pour $n = 0, 1, 2$ et 3 .
- b) En déduire les expressions des sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{i=1}^{i=p} i \quad S_2 = \sum_{i=1}^{i=p} i^2 \quad S_3 = \sum_{i=1}^{i=p} i^3$$



Problème 2

A tout entier naturel n , n strictement positif, on associe la fonction f_n définie par :

$$\forall x \in [1; +\infty[\quad f_n(x) = \frac{1}{n!} \frac{(\ln x)^n}{x^2}, \text{ ln désignant le logarithme népérien.}$$

Question 1 – Etude des fonctions f_n

- a) Calculer la limite de f_n en $+\infty$.
- b) Calculer la fonction dérivée $f'_n(x)$ sur $[1; +\infty[$.
- c) Quelles sont les valeurs de x pour lesquelles la dérivée f'_n est nulle ?
- d) Donner le tableau de variation de f_n .
- e) Calculer en fonction de n la valeur maximale y_n de f_n .

Question 2 – Etude de la suite y_n , n supérieur ou égal à 1

- a) Calculer, pour $x > 1$, le rapport $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$
- b) Montrer que $y_{n+1} = \frac{1}{2} f_n(e^{\frac{n+1}{2}})$
- c) En déduire que $y_{n+1} \leq \frac{1}{2} y_n$
- d) Montrer que $y_n \leq \frac{1}{2^n e}$
- e) Donner la limite de la suite y_n

Question 3 – Etude des primitives des fonctions f_n

A tout entier naturel n , n strictement positif, on associe l'intégrale $I_n(x) = \int_1^x f_n(t) dt$

- a) β étant un nombre réel supérieur ou égal à 1, montrer que : $0 \leq I_n(\beta) \leq (\beta - 1)y_n$.
- b) En déduire la limite de $I_n(\beta)$ quand n tend vers $+\infty$.
- c) Démontrer que $I_{n+1}(x) = I_n(x) - \frac{1}{(n+1)!} \frac{(\ln x)^{n+1}}{x}$
- d) En déduire que : $I_n(x) = 1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} - \frac{(\ln x)^2}{2!x} - \dots - \frac{(\ln x)^n}{n!x}$
- e) Exprimer, pour n supérieur ou égal à 1 et x supérieur ou égal à 1, $Z_n(x) = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{(\ln x)^i}{i!}$ en fonction de $I_n(x)$
- f) β étant un nombre réel supérieur ou égal à 1, déterminer la limite de $Z_n(\beta)$ quand n tend vers $+\infty$.
- g) En déduire la limite L de la suite S_n de terme général : $\sum_{i=0}^{i=n} \frac{1}{i!}$

Exercice 1



Dans une cage, il y a 5 lions et 7 tigres. On ouvre la porte de la cage, et les félins sortent tous les uns après les autres. On suppose que tous les ordres de sortie sont équiprobables.

- a) Calculer la probabilité que le premier animal qui sorte soit un tigre.
- b) Calculer la probabilité que tous les lions sortent avant les tigres.
- c) Calculer le nombre d'ordres de sortie possibles, si on ne distingue pas les lions entre eux, ni les tigres entre eux.

Exercice 2

Un message expédié par l'émetteur A le jour J arrive à son destinataire B, suivant la loi de probabilité explicitée ci-après :

Arrivée le jour J+1 avec la probabilité 0,1
Arrivée le jour J+2 avec la probabilité 0,3
Arrivée le jour J+3 avec la probabilité 0,4
Arrivée le jour J+4 avec la probabilité 0,2

Tous les messages expédiés suivent la même loi de probabilité, de façon indépendante les uns des autres. On suppose les jours numérotés 0, 1, 2, 3,...

- a) A expédie son message le jour 0. Soit X le jour où B reçoit le message, calculer $E(X)$.
- b) Le jour même de l'arrivée du message, B renvoie immédiatement à A un accusé de réception. Soit Y le jour où A reçoit l'accusé de réception, calculer $E(Y)$ et donner la loi de probabilité de Y.

Exercice 3



On considère les trois équations différentielles suivantes :

$$\frac{dy}{dx} - 2x = 0 \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dx} + 2x = 0 \quad (2)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 4x^2 = 0 \quad (3)$$

On désigne respectivement par S_1 , S_2 et S_3 les ensembles des fonctions réelles solutions sur $\mathbb{R}$ respectivement des équations (1), (2) et (3).

- a) Démontrer l'inclusion $S_1 \cup S_2 \subset S_3$
- b) Démontrer que l'inclusion réciproque est fausse.