AVRIL 2008

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Exercice n° 1

1) Le module de q est 1/3 et un argument de q est π/4.
2) $z_1 = (e^{i\pi/4})/3$, $z_2 = (e^{i\pi/2})/9$, $z_3 = (e^{i\pi})/27$.
3) Pas de difficulté pour la récurrence. Le module de z_n est égal à $(1/3)^n$ et un argument est nπ/4.
4) a) z_n est réel pour les entiers naturels multiples de 4 (de la forme 4k).
   b) z_n est imaginaire pur pour les entiers naturels pairs non multiples de 4 (de la forme 4k+2).
5) La limite, quand tend vers l'infini, du module de z_n est nulle.

Exercice n° 2

On s'intéresse dans cet exercice à une suite de nombres rationnels qui converge vers e^2.
On définit, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, l'intégrale :

$$I_n = \int_0^2 \frac{1}{n!}(2-x)^n e^x \, dx$$

1) Par intégration par partie, on trouve $I_1 = e^2 - 3$
2) Pas de difficulté en partant du fait que x est compris entre 0 et 2 et en utilisant le fait que la fonction puissance est une fonction croissante.
3) Démonstration par récurrence en utilisant l'intégration par parties.
4) Démonstration par récurrence.
5) a) $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est égal à 2/(n+1) qui est inférieur à ½ pour tout pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, d'où le résultat demandé.
   b) Démonstration par récurrence.
6) La limite de la suite (u_n) es nulle, ainsi que celle de la suite (I_n) en utilisant la question 2.
7) En utilisant la question 4 et la question 6, on montre le résultat demandé.

Exercice n° 3

Les pannes sont indépendantes les unes des autres. La probabilité demandée est égale à :

$$1-(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)(1-p_4)(1-p_5) = 10\%$$

Exercice n° 4

Le nombre de réponses justes suit une loi binomiale de paramètre n = 20 et p = 0,2. On cherche P(X > 2) qui est égal à 1 – P(X=0) – P(X=1) – P(X=2). Après calculs, on trouve 0,794.

Exercice n° 5

Soit t un réel, X un vecteur de R^3 de coordonnées (x, y, z), et la fonction f_t de R^3 dans R^3 qui associe à tout vecteur X le vecteur de coordonnées (x, y + tx, z + ty + ½ t^2 x)

1) $F_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ \frac{t^2}{2} & t & 1 \end{pmatrix}$

2) $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3) Pas de difficulté et on démontre que $F_t F_{t'} = F_{t+t'}$

4) On montre que $F_t^k = F_{kt}$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(t) = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ te & e & 0 \\ \frac{t^2 e}{2} & te & e \end{pmatrix}$

5) λ = 1 est valeur propre d'ordre 3. Si t est différent de 0, un vecteur propre est (0, 0, 1). Si t = 0, alors $F_t = I$.

Exercice n° 6

On dérive la formule proposée par rapport à b et par rapport à a et on fait la différence.
On fixe ensuite a=0 et b=x pour obtenir l'égalité suivante :

$$x^2 f'(x) - 6xf(x) + 12\int_0^x f(t)dt = 6xf(0) + x^2 f'(0)$$

En posant $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, il nous faut résoudre l'équation différentielle

$$x^2 F''(x) - 6xF'(x) + 12F(x) = 6\lambda x + \mu x^2$$

On cherche une fonction particulière de la forme F(x) = ax^2 + bx + c. On trouve
$F(x) = \frac{\mu}{2}x^2 + \lambda x$

La solution générale (x^2F''- 6xF'+12F = 0) s'obtient en utilisant la formule d'Euler (F(x) = x$^\beta$). On trouve β=3 ou β=4.

On a $F(x) = \alpha x^4 + \beta x^3 + \frac{\mu}{2}x^2 + \lambda x$
f(x) est donc un polynôme de degré 3. $f(x) = 4\alpha x^3 + 3\beta x^2 + \mu x + \lambda$

Exercice n° 7

Soit la fonction $f(x) = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^x dt$ définie pour tout x, réel positif

1) t fixé, la fonction (sint) puissance x est décroissante, d'où le résultat.

2) Par intégration par parties, on montre que g(x+1)=g(x), car (x+1) f (x+1) = x f (x-1)

3) $g(n) = g(1) = \pi/2$.

4) On montre que $\frac{g(n+1)}{n+1} \leq f^2(n) \leq \frac{g(n)}{n}$. Donc $f(n)$ a pour équivalent $\sqrt{\frac{\pi}{2n}}$

5) On a déjà démontré que g est constante sur l'ensemble des entiers naturels à la question 2. Pour le démontrer sur l'ensemble des réels, on commence par montrer que $f^2(n) \leq f(n)f(n-1) = \dfrac{\pi}{2n}$ et que $f^2(n+1) \geq f(n+1)f(n+2) = \dfrac{\pi}{2(n+1)}$ (vraie du fait de la décroissance de la fonction).

En partant du fait que n ≤ x < n+1, on trouve un encadrement de f(x), donc de g(x).

$$\frac{n\pi}{2\sqrt{n(n+1)}} \leq g(x) \leq \frac{(n+1)\pi}{2\sqrt{n(n-1)}}$$

Ceci permet de trouver la limite de g(x) en $+\infty$ ($\pi/2$ en l'occurrence).

La fonction g étant périodique de période finie non nulle et admettant une limite à l'infini, elle est constante sur R.

6) En utilisant de nouveau qu'il existe n tel que $n \leq x < n+1$ pour x réel, on a $g(x+1) \leq xf^2(x) < g(x)$. D'où l'équivalent de f(x) est $\sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}$.