

AVRIL 2008

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Note : l'épreuve est composée d'exercices indépendants, ils peuvent être traités dans un ordre indifférent. Un barème indicatif est donné.



Exercice 1 (3,5 points)

On considère l'application f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui à tout complexe z associe le complexe z' tel que :

$$z' = \frac{1+i}{3\sqrt{2}} z$$

On pose : $z_0 = 1$, $z_1 = f(z_0)$, $z_2 = f(z_1)$ et, de façon générale, pour tout entier naturel n : $z_{n+1} = f(z_n)$.

- 1) Calculer le module et un argument du nombre complexe $q = \frac{1+i}{3\sqrt{2}}$
- 2) Calculer z_1 , z_2 , z_3 . On fournira les résultats sous forme algébrique et trigonométrique.
- 3) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $z_n = \left(\frac{1+i}{3\sqrt{2}} \right)^n$.
En déduire le module et un argument de z_n .
- 4) Pour quelles valeurs de l'entier naturel n , z_n est-il :
 - a) réel ?
 - b) imaginaire pur ?
- 5) Calculer la limite, quand n tend vers l'infini, du module de z_n .

Exercice 2 (3,5 points)

On définit, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, l'intégrale :

$$I_n = \int_0^2 \frac{1}{n!} (2-x)^n e^x dx$$



- 1) Calculer I_1 .
- 2) Etablir pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 :

$$0 \leq I_n \leq \frac{2^n}{n!} (e^2 - 1)$$

- 3) Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 :

$$I_{n+1} = I_n - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$$

- 4) Démontrer par récurrence que $e^2 = 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \dots + \frac{2^n}{n!} + I_n$

- 5) On pose, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 : $u_n = \frac{2^n}{n!}$

- a) Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3 :

$$u_{n+1} \leq \frac{1}{2} u_n$$

- b) En déduire que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, $0 \leq u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} u_3$

- 6) En déduire la limite de la suite (u_n) puis celle de la suite (I_n) .

- 7) Justifier enfin que : $e^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \dots + \frac{2^n}{n!} \right)$

Exercice 3 (2 points)

La publicité d'un nouveau véhicule automobile est axée sur sa longévité. L'un des slogans publicitaires est « pas de grosse réparation avant 150 000 km ». Le service des études techniques du constructeur a cependant fourni au service commercial les probabilités d'occurrence avant 150 000 km des 5 grosses pannes classiques, à partir de ses études de fiabilité. Pour les cardans cette probabilité est $p_1 = 0,001$, pour le moteur cette probabilité est $p_2 = 0,05$, pour l'embrayage elle est $p_3 = 0,01$, pour les freins on a trouvé $p_4 = 0,013$ et pour la boîte on a $p_5 = 0,03$. Quelle est la probabilité pour que le banc d'essai des revues spécialisées de l'automobile, ou des associations de consommateurs, prenne à défaut la publicité de ce nouveau modèle, après étude d'une seule voiture ?



Exercice 4 (2 points)

Un test de culture générale comportant 20 questions doit être passé par un candidat à un poste d'agent d'administration. Chaque question vaut 1 point et comporte 5 réponses possibles. Quelle est la probabilité qu'un candidat répondant totalement au hasard obtienne strictement plus de 2, sachant qu'aucune pénalité ne frappe les mauvaises réponses.

Exercice 5 (3 points)

Soient t un réel, X un vecteur de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées (x, y, z) , et f_t la fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ qui associe à tout vecteur X le vecteur de coordonnées $(x, y + tx, z + ty + \frac{1}{2} t^2 x)$

- 1) Donner la matrice F_t de la fonction f_t dans la base canonique.
- 2) Trouver la matrice J telle que $F_t = I + tJ + \frac{1}{2} t^2 J^2$. I est la matrice identité de $\mathbb{R}^3$.
- 3) Montrer que l'ensemble des matrices F_t muni du produit matriciel est un groupe commutatif.
- 4) Etudier la suite $S_n(t) = I + F_t + \frac{1}{2!} F_t^2 + \dots + \frac{1}{n!} F_t^n$
- 5) Donner les valeurs propres de F_t et les vecteurs propres associés.

Exercice 6 (3 points)

Déterminer les fonctions f continues et dérivables qui vérifient :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 \quad \int_a^b f(t) dt = \frac{b-a}{6} \left[f(a) + f(b) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right]$$

Pour vous aider, vous êtes invité à poser $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ et à chercher à résoudre une équation

différentielle de type $x^2 F''(x) + \alpha_1 x F'(x) + \alpha_2 F(x) = \alpha_3 + \alpha_4 x + \alpha_5 x^2$

Exercice 7 (3 points)



Soit la fonction $f(x) = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^x dt$ définie pour tout x , réel positif

- 1) Montrer que la fonction f est une fonction décroissante.
- 2) On pose $g(x) = x f(x) f(x-1)$. Montrer que g est périodique de période 1.
- 3) Calculer $g(n)$, n étant un entier naturel.
- 4) Donner un équivalent de $f(n)$, n étant un entier naturel.
- 5) En déduire que la fonction g est constante.
- 6) En déduire un équivalent de $f(x)$ en $+\infty$.