AVRIL 2009

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Exercice 1

Question 1 :

$$u_1 = \frac{u_0 + v_0}{2} = \frac{7}{2}, v_1 = \frac{v_0 + u_1}{2} = \frac{15}{4}$$

$$u_2 = \frac{u_1 + v_1}{2} = \frac{29}{8}, v_2 = \frac{v_1 + u_2}{2} = \frac{59}{16}$$

Question 2 :

a. $w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1}$

$$= \frac{v_n + u_{n+1}}{2} - u_{n+1}$$

$$= \frac{v_n - u_{n+1}}{2}$$

$$= \frac{v_n - \frac{u_n + v_n}{2}}{2}$$

$$= \frac{v_n - u_n}{4} = \frac{1}{4} w_n$$

Donc :

La suite (w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de premier terme $w_0 = v_0 - u_0 = 1$.

b. $w_0 = v_0 - u_0 = 1$ donc pour tout entier naturel *n*, $w_n = w_0 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$ soit :

$$\boxed{w_n = \frac{1}{4^n}}.$$

La suite (w_n) converge vers 0 car c'est une suite géométrique dont la raison est strictement comprise entre – 1 et 1 :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} w_n = 0}$$

<u>Question 3</u> :

Pour tout entier *n*, on a $w_n = \frac{1}{4^n}$ donc pour tout entier *n*,

$$w_n = v_n - u_n > 0 .$$

Pour tout entier *n*, $u_{n+1} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2} = \frac{1}{2} w_n$ donc pour tout entier *n*,

$u_{n+1} > u_n$ c'est-à-dire la suite (u_n) est croissante.

Pour tout entier *n*,

$v_{n+1} - v_n = \frac{u_{n+1} - v_n}{2} = \frac{\frac{u_n + v_n}{2} - v_n}{2} = \frac{u_n - v_n}{4} = -\frac{1}{4} w_n$ donc pour tout entier *n*, $v_{n+1} < v_n$ c'est-à-dire la suite (v_n) est décroissante.

L'une des deux suites est croissante, l'autre est décroissante et la suite différence des deux suites a pour limite 0 donc :

Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, elles sont donc convergentes et ont la même limite.

<u>Question 4</u> :

a. Pour tout entier *n*, $t_{n+1} = \frac{u_{n+1} + 2v_{n+1}}{3} = \frac{\frac{u_n + v_n}{2} + v_n + u_{n+1}}{3} = \frac{u_n + 2v_n}{3} = t_n$

La suite (t_n) est constante et pour tout entier *n* : $\boxed{t_n = t_0 = \frac{u_0 + 2v_0}{3} = \frac{11}{3}}$

b. La suite (t_n) étant constante elle est convergente et a pour limite $t_0 = \frac{11}{3}$.

Mais pour tout entier n, on a $t_n = \dfrac{u_n + 2v_n}{3}$. Soit ℓ la limite commune à (u_n) et (v_n).

La suite $\left(\dfrac{u_n + 2v_n}{3}\right)$ est convergente et a pour limite $\dfrac{\ell + 2\ell}{3}$ donc $\dfrac{\ell + 2\ell}{3} = \dfrac{11}{3}$ donc : $\boxed{\ell = \dfrac{11}{3}}$

Exercice 2

Question 1 : On pose $\varphi : (x,t) \mapsto \dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$, φ est de classe C^∞ sur R^2, donc de classe C^1. f est donc de classe C^1 sur R avec :

$$f'(x) = \int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)dt = -2x\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}dt = -2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{-x^2t^2}dt$$

Donc avec le changement de variable défini par $u = xt$, on obtient :

$$f'(x) = -2e^{-x^2}\int_0^x e^{-u^2}du = -2g'(x)g(x).$$

Question 2 : On déduit de la question précédente que $f + g^2$ est constante donc que :

$$\forall x \in \mathrm{R},\ f(x) + g(x)^2 = f(0) + g(0)^2 = f(0) = \frac{\pi}{4} \text{ car } f(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = Arctg\,1 - Arctg\,0$$

Question 3 : On a $g(x)^2 = \dfrac{\pi}{4} - f(x)$ **(1).**

Puisque la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue positive sur $[0,+\infty[$ et vérifie $\forall t \in [1,+\infty[,\quad e^{-t^2} \le e^{-t}$, elle est intégrable sur cet intervalle et on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \lim_{x\to+\infty} g(x).$

Question 4 : En remarquant que pour tout $(x,t) \in \mathrm{R}^2$, on a $0 \le \varphi(x,t) \le \dfrac{e^{-x^2}}{1+t^2}$, on obtient $0 \le f(x) \le e^{-x^2}\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$ et donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

Question 5 : En conséquence la relation **(1)** donne :

$\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt\right)^2 = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} g^2(x) = \dfrac{\pi}{4}$ et en tenant compte de la positivité de la fonction exponentielle, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$

Exercice 3

Question 1 :

a. Si le dé indique 1, on tire une boule dans une urne contenant 4 voyelles et 6 consonnes et on gagne si on tire une voyelle. On obtient :

$$\boxed{p_{D1}(G) = \frac{2}{5}}$$

Si lé dé indique 2, on tire deux boules simultanément et on gagne si on tire deux voyelles. On obtient :

$$\boxed{p_{D2}(G) = \frac{2}{15}}$$

Si le dé indique 3, on tire trois boules simultanément et on gagne si on tire trois voyelles. On obtient :

$$\boxed{p_{D3}(G) = \frac{1}{30}}$$

b. On utilise la formule des probabilités totales, on obtient :

$p(G) = p_{D1}(G)p(D_1)+p_{D2}(G)p(D_2)+p_{D3}(G)p(D_3) = \frac{2}{5}\times\frac{1}{6}+\frac{2}{15}\times\frac{2}{6}+\frac{1}{30}\times\frac{3}{6}$ et donc : $\boxed{p(G) = \frac{23}{180}}$

Question 2 : Il s'agit de calculer la probabilité conditionnelle :

$p_G(D_1) = \frac{p(G\cap D_1)}{p(G)} = \frac{p_{D1}(G)\times p(D_1)}{p(G)}$, soit $\boxed{p_G(D_1)= \frac{12}{23}}$

Question 3 :

a. On fait une succession de six épreuves indépendantes pour lesquelles la probabilité de succès est $p = \frac{23}{180}$. On sait que le nombre X de succès suit une loi binomiale de paramètre (6 ; p).

La probabilité que le joueur gagne exactement deux parties est donc :

$$\boxed{p(X = 2) = C_2^6\, p^2 (1-p)^4 = 0{,}14 \text{ à } 10^{-2} \text{ près}}$$

b. La probabilité de gagner au moins une partie est : $p(X \geq 1) = 1 - p(X=0) = 1 - \left(\frac{157}{180}\right)^n$

On veut $p(X\geq 1) \geq 0{,}9$ soit $\left(\frac{157}{180}\right)^n \leq 0{,}1$.

Et on obtient $\boxed{n \text{ minimal égal à } 17}$

Problème

Partie I

Question 1 : soit f l'endomorphisme associé à la matrice A dans la base canonique de R^n composée des vecteurs (e_1,…..,e_n) :

$$\forall j \in [2,n], \quad f(e_j) \in \text{Vect}(e_1,.......,e_{j-1}), \quad f(e_1) = 0$$

On en déduit, pour $3 \leq j \leq n$:

$$f^2(e_j) \in \text{Vect}(f(e_1),....,f(e_{j-1})) \subset \text{Vect}(e_1,......,e_{j-2})$$

$$\forall j \in [3,n], f^2(e_j) \in \text{Vect}(e_1,...,e_{j-2}), \, et \; f^2(e_1) = f^2(e_2) = 0$$

$$\forall j \in [k+1,n], \, f^k(e_j) \in \text{Vect}(e_1,...,e_{j-k}), \, f^k(e_1) = f^k(e_2) = ... = f^k(e_k) = 0$$

D'où pour $k = n, \, f^n(e_1) = f^n(e_2) = ... = f^n(e_n) = 0,$ c'est-à-dire $f^n = 0$ et donc $A^n = 0.$

Docs à portée de main

Question 2 : on a $M = I_3 + D$ où $D = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

D est nilpotente d'après la question 1 et on a $D^3 = 0$, la formule du binôme donne :

$$M^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k D^k = I_3 + nD + \frac{n(n-1)}{2} D^2$$

d'où $M^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n^2+n \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Partie II

Question 1 : Le système (S) s'écrit : $X' = BX$ avec $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Question 2 : $\det(B - \lambda I_3) = (1-\lambda)^3$. 1 est donc valeur propre triple, B n'est pas diagonalisable, (sinon $B = I_3$), par contre elle est trigonalisable.

Question 3 : Il suffit de calculer $(B-\lambda I_3)\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $(B-\lambda I_3)\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$. Nous trouvons dans les deux cas le vecteur nul.

Question 4 : D'après la question 2, la dimension de $Ker(u-Id)$ est inférieure ou égale à 2 (sinon, B serait diagonalisable). Les deux vecteurs de la question 3 appartiennent au sous-espace vectoriel $Ker(u-Id)$ et ne sont pas liés, ils forment donc une base de $Ker(u-Id)$. La dimension de $Ker(u-Id)$ est donc égale à 2. En conséquence, la dimension de $Im(u-Id)$ est égale à 1. Le rang de $(u-Id)$ est donc de 1.

Question 5 : Evident. La matrice $B-I_3$ est donc nilpotente.

Question 6 : Il suffit de calculer $(B-\lambda I_3)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et de montrer que le résultat n'est pas le vecteur nul.

Question 7 : Evident en utilisant la question précédente et le fait que $(e_1^{'}, e_2^{'})$ forme une base de $Ker(u-Id)$.

Question 8 : La matrice de passage de la base canonique à la base $(e_1, e_1^{'}, e_2^{'})$ est $P=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$

En calculant $P^{-1}BP$, on obtient la matrice désirée T qui est égale à $T=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$

Question 9 : $X^{'}=BX \Rightarrow PX_1^{'}=BPX_1$ en utilisant le changement de variable. En utilisant le fait que P est inversible, on prouve le résultat demandé.

Question 10 : En développant, on a :

$$(S_1) \quad : \quad \begin{cases} x_1^{'} = x_1 & (1) \\ y_1^{'} = 2x_1 + y_1 & (2) \\ z_1^{'} = -x_1 + z_1 & (3) \end{cases}$$

La ligne (1) donne $x_1 = ae^t$. On change dans (2) qui devient $y_1' = y_1 + 2ae^t$ ce qui donne $y_1 = (2at+b)e^t$. De même, avec (3), on trouve $z_1 = (-at+c)e^t$

Question 11 :

On en déduit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ae^t \\ (2at+b)e^t \\ (-at+c)e^t \end{pmatrix}$

$$x = (2at+b+a)e^t \quad , \quad y = (-at+c)e^t \quad , \quad z = (at+b+c)e^t .$$