ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2009

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

***Note* : l'épreuve est composée d'exercices indépendants qui peuvent être traités dans un ordre indifférent.**

Exercice 1

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier naturel *n*, par :

$$u_0 = 3 \text{ et } u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \;;\; v_0 = 4 \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2}.$$

Question 1 : Calculer $u_1, v_1, u_2 \text{ et } v_2$.

Question 2 : Soit la suite (w_n) définie, pour tout entier naturel *n,* par $w_n = v_n - u_n$.

a. Montrer que la suite (w_n) est une suite géométrique et calculer la raison.

b. Exprimer w_n en fonction de *n* et préciser la limite de la suite (w_n).

Question 3 : Après avoir étudié le sens de variation des suites (u_n) et (v_n), démontrer que ces deux suites sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?

Question 4 : On considère à présent la suite (t_n) définie, pour tout entier naturel *n*, par $t_n = \frac{u_n + 2v_n}{3}$.

a. Démontrer que la suite (t_n) est constante.

b. En déduire la limite des suites (u_n) et (v_n).

Exercice 2

Soient *f* et *g* deux applications de R (ensemble des réels) dans R définies par : $f(x)=\int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt$ et $g(x)=\int_0^x e^{-t^2}\,dt$

Question 1 : Calculer $f'(x)$ en fonction de $g(x)$ et $g'(x)$.

Question 2 : En déduire que $f+g^2$ est une fonction constante. Calculer cette constante.

Question 3 : Justifier que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$

Question 4 : Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

Question 5 : En déduire $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$

Exercice 3

On dispose d'un dé cubique équilibré dont une face porte le numéro 1, deux faces portent le numéro 2 et trois faces portent le numéro 3. On dispose également d'une urne contenant dix boules indiscernables au toucher, portant les lettres L, O, G, A, R, I, T, H, M, E (soit quatre voyelles et six consonnes).

Un joueur fait une partie en deux étapes.

Première étape : il jette le dé et note le numéro obtenu.

Deuxième étape :

- si le dé indique 1, il tire au hasard une boule dans l'urne. Il gagne la partie si cette boule porte une voyelle et il perd dans le cas contraire ;
- si le dé indique 2, il tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne. Il gagne la partie si chacune de ces deux boules porte une voyelle et il perd dans le cas contraire ;
- si le dé indique 3, il tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne. Il gagne la partie si chacune de ces trois boules porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.

A la fin de chaque partie il remet dans l'urne la ou les boule(s) tirée(s).

On définit les événements suivants :

D_1 : « le dé indique 1 » ;
D_2 : « le dé indique 2 » ;
D_3 : « le dé indique 3 » ;
G : « la partie est gagnée ».

A et B étant deux événements tels que $p(A)$ est différent de 0, on note $p_A(B)$ la probabilité de B sachant que A est réalisé.

Question 1 :

a. Déterminer les probabilités $p_{D1}(G)$, $p_{D2}(G)$ et $p_{D3}(G)$

b. Montrer alors que $p(G) = \frac{23}{180}$

Question 2 : Un joueur a gagné la partie. Calculer la probabilité qu'il ait obtenu le numéro 1 avec le dé.

Question 3 : Un joueur fait six parties.

a. Calculer la probabilité qu'il en gagne exactement deux et en donner une valeur arrondie à 10^{-2} près.
b. Quel nombre minimal de parties un joueur doit-il faire pour que la probabilité d'en gagner au moins une soit supérieure à 0,9 ?

Problème

Une matrice A carrée d'ordre n dans R est nilpotente si et seulement si $A^n=0$

Partie I

Question 1 : Soit M une matrice carrée d'ordre n dans R triangulaire supérieure stricte, c'est-à-dire :

$M = [a_{ij}]$ avec pour $i \geq j$ $a_{ij} = 0$. Montrer que M est nilpotente.

Question 2 : Calculer M^n pour $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Partie II

Il s'agit, dans cette partie, de résoudre le système d'équations différentielles suivant :

$$(S)\begin{cases} x' = 3x + 2y - 2z \\ y' = -x + z \\ z' = x + y \end{cases}$$

Question 1 : Ecrire le système *(S)* sous la forme matricielle : $X' = BX$

Question 2 : La matrice B est-elle diagonalisable ? Justifier.

Question 3 : Montrer que les vecteurs $e_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $e_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de B.

Question 4 : Donner le rang de l'endomorphisme (u – Id) où u est l'endomorphisme de R^3 associé à la matrice B et Id l'endomorphisme identité de R^3.

Question 5 : Calculer $(B - I_3)^2$ où I_3 est la matrice identité d'ordre 3.

Question 6 : Montrer que e_1, vecteur de la base canonique de R^3, n'appartient pas à Ker (u – Id).

Question 7 : Montrer que (e_1, e_1', e_2') est une base de R^3.

Question 8 : Ecrire la matrice B dans la base (e_1, e_1', e_2') que l'on nommera T.

Question 9 : Démontrer qu'avec le changement défini par $X = PX_1$, où P est la matrice de passage de la base canonique à la base (e_1, e_1', e_2') , le système *(S)* devient $X'_1 = TX_1$

Question 10 : Résoudre le système précédent.

Question 11 : En déduire les solutions de *(S).*