AVRIL 2010

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Exercice 1

Question 1 :

a) $I_0 = \dfrac{\pi}{2}\, et\, I_1 = 1$

b) En partant de le définition de I_{n+2} et en intégrant par parties, on trouve la relation $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$

c) Si *n* pair (*n*=*2p*) $I_{2p} = \dfrac{2p-1}{2p} \times \dfrac{2p-3}{2p-2} \times .... \times \dfrac{1}{2} I_0 = \dfrac{(2p)!\pi}{2^{2p+1}(p!)^2}$

Si n impair (n=2p+1) $I_{2p+1} = \dfrac{2p}{2p+1} \times \dfrac{2p-2}{2p-1} \times .... \times \dfrac{2}{3} I_1 = \dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$

Question 2 :

a) En faisant le changement de variable $u = \dfrac{\pi}{2} - t$, on trouve $J_n = I_n$

b) Même réponse que pour la question 1-c

Question 3 :

a) En faisant le changement de variable $u = Arc\sin t$, $K_n = 2I_{2n+1}$

b) $K_n = \dfrac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$

Question 4 :

a) $L_n = (-1)^n K_n$

b) $L_n = \dfrac{(-1)^n\, 2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$

Exercice 2

$$X_n = \begin{pmatrix} p(A_n) \\ p(B_n) \\ p(C_n) \end{pmatrix} \text{ et } X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Question 1 : $M = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 0 \end{pmatrix}$

Calcul des valeurs propres : les valeurs propres sont 1 ; (-1/3) ; (-2/3)

Calcul des vecteurs propres :

Pour la valeur propre 1, un vecteur propre est (5 ; 7 ; 8)
Pour la valeur propre (-1/3), un vecteur propre est (1 ; -1 ; 0)
Pour la valeur propre (-2/3), un vecteur propre est (0 ; 1 ; -1)

Question 2 : Il faut calculer $X_5 = M^5 X_0 = \begin{pmatrix} 20/81 \\ 73/243 \\ 110/243 \end{pmatrix}$

Question 3 : On doit calculer M^n en utilisant la diagonalisation et la formule $M=PDP^{-1}$ où D est la matrice diagonale semblable à M.

$$M^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 7 \\ -1 & 0 & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} (-2/3)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1/3)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 7 \\ -1 & 0 & 8 \end{pmatrix}^{-1} \text{ avec}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 8 & 8 & -12 \\ 15 & -5 & -5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Quand on fait tendre n vers l'infini,

$$M_\infty = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 7 \\ -1 & 0 & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 7 \\ -1 & 0 & 8 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 7 & 7 & 7 \\ 8 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

On calcule alors le vecteur $M_{\infty}\ X_0 = \begin{pmatrix} 0{,}25 \\ 0{,}35 \\ 0{,}40 \end{pmatrix}$

Ce qui donne une tendance à long terme : A a le ballon 25% du temps, B 35% du temps et C 40 % du temps.

Exercice 3

Question 1 : On désigne par *X* l'attente en minutes du voyageur

a) En partageant l'heure (7h-8h) en 12 tranches de 5 minutes, on constate que le voyageur attend entre 0 et 10 minutes maximum. Sur les 12 tranches, il y a 8 pour lesquelles il attendra moins de 5 minutes et 4 pour lesquelles il attendra entre 5 et 10 minutes. Il y a donc 2 chances sur 3 d'attendre moins de 5 minutes et 1 chance sur 3 d'attendre plus de 5 minutes. L'heure d'arrivée étant uniformément répartie entre 7h et 8h, la fonction de densité *f* de *X* est :

$f(t) = \begin{cases} a \ si \ t \in [0;5[\\ b \ si \ t \in [5;10[\end{cases}$ où *a* et *b* sont des constantes qui vérifient $a = 2b$

Comme $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$, on en déduit 5a + 5b = 1, d'où b = 1/15

La fonction de répartition *F* de *X* est : $F(x) = P(X \leq x)$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 0 \ si \ x \in]-\infty;0[\\ 2x/15 \ si \ x \in [0;5[\\ 1/3 + x/15 \ si \ x \in [5;10[\\ 1 \ si \ x \in [10;+\infty[\end{cases}$$

Les représentations graphiques ne sont pas faites.

b) $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t\, f(t)dt = \frac{25}{6}$, soit 4 minutes et 10 secondes

Question 2 : On a $Y = 10 + X + M$ où *M* est la durée du trajet en bus. *E(X)* a été calculé à la question précédente, il reste à calculer *E(M)*.

Sur les 12 tranches de 5 minutes, on remarque que le voyageur prend la ligne n°4 sur 8 tranches, on a donc p(*M*=15) = 2/3 et p(*M*=20) = 1/3

E(M) = 15 x 2/3 + 20 x 1/3 = 50/3

On en déduit que *E(Y)* = 185/6, soit une durée moyenne de 30 minutes et 50 secondes.