

AVRIL 2010

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

***Note :** l'épreuve est composée d'exercices indépendants qui peuvent être traités dans un ordre indifférent.*

Exercice n° 1

On se propose de calculer les intégrales de Wallis définies pour n appartenant à N , ensemble des entiers naturels, par:

$$I_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n dt \quad J_n = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n dt \quad K_n = \int_{-1}^1 (1-t^2)^n dt \quad L_n = \int_{-1}^1 (t^2-1)^n dt$$

Question 1 : Calcul de I_n

- a) Calculer I_0 et I_1 puis trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}
- b) Donner I_n en fonction de n

Question 2 : Calcul de J_n

- a) Trouver une relation entre J_n et I_n
- b) Donner J_n en fonction de n


ça s'entraîne !
Docs à portée de main

Question 3 : Calcul de K_n

- a) Trouver une relation entre K_n et I_{2n+1}
- b) Donner K_n en fonction de n

Question 4 : Calcul de L_n

- a) Trouver une relation entre L_n et K_n
- b) Donner L_n en fonction de n

Exercice n° 2

Trois personnes A , B et C jouent au ballon.

Si A possède le ballon, il le passe à B avec la probabilité de $1/3$ et à C avec la probabilité de $2/3$.

Si B possède le ballon, il le passe à A avec la probabilité de $1/3$ et à C avec la probabilité de $2/3$.

Si C possède le ballon, il le passe à A avec la probabilité de $1/3$ et à B avec la probabilité de $2/3$.

On note A_n (respectivement B_n , C_n) l'événement « A (resp. B , C) reçoit le ballon après le $n^{\text{ième}}$

échange » et $X_n = \begin{pmatrix} p(A_n) \\ p(B_n) \\ p(C_n) \end{pmatrix}$

On suppose qu'à l'instant initial, A possède le ballon. On a donc $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Question 1 : Déterminer la matrice M telle que $X_{n+1} = MX_n$ et calculer ses vecteurs propres.

Question 2 : Calculer la probabilité que chacun des joueurs possède le ballon après le $5^{\text{ième}}$ échange.

Question 3 : Montrer que la suite (M_n) , définie par $M_n = M^n$, converge vers une certaine matrice M_∞ que l'on calculera. Interpréter $M_\infty X_0$.

Exercice n° 3



Une personne prend le bus pour se rendre à son travail. L'heure de son arrivée à la station de départ est uniformément répartie entre 7 et 8 heures du matin. Pour se rendre à son travail, il a le choix entre la ligne n°4 ou la ligne n°7 dont les heures de passage sont :

n°4 : 7h00 ; 7h15 ; 7h30 ; 7h45 ; 8h00 n°7 : 7h05 ; 7h20 ; 7h35 ; 7h50

Le voyageur monte dans le premier bus (n°4 ou n°7) qui se présente.

Question 1 : On désigne par X l'attente en minutes du voyageur.

- a) Déterminer la fonction de densité f et la fonction de répartition F de X et les représenter graphiquement (conseil : pour calculer f , vous pouvez découper la tranche horaire 7h – 8 h en 12 tranches de 5 minutes).
- b) Calculer la durée moyenne d'attente du voyageur.

Question 2 : La durée du voyage est de 15 minutes avec la ligne n°4 et 20 minutes avec la ligne n°7. Le voyageur met 10 minutes pour se rendre de son domicile à la station de départ, puis un temps négligeable pour se rendre de la station d'arrivée à son lieu de travail. On désigne par Y le temps total mis par le voyageur entre son domicile et son lieu de travail.

Calculer le temps moyen mis par le voyageur pour se rendre de son domicile à son lieu de travail.