AVRIL 2011

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Exercice 1

1) a. Les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions g définies sur R par : $g(t) = Ce^{\frac{t}{4}}$ où C $\in R$

1) b. $g(0) = 1$ implique que $C = 1$ donc pour tout réel t, on a $g(t) = e^{\frac{t}{4}}$

1) c. L'unité choisie étant la centaine d'individus, la population dépasse 300 rongeurs si et seulement si :$g(t) > 3$ soit $e^{\frac{t}{4}} > 3$ ou encore $\frac{t}{4} >$ ln 3 soit $t > 4 \ln 3 \approx 4{,}3$.
Au bout de 5 ans la population dépassera 300 rongeurs.

2) a. La fonction u est définie sur R^+ et strictement positive, la fonction h définie sur R^+ par $h(t) = \frac{1}{u(t)}$, est définie sur R^+ et strictement positive.

La fonction h est dérivable comme inverse d'une fonction dérivable strictement positive donc non nulle sur R^+ et pour tout réel positif t on a $u(t) = \frac{1}{h(t)}$ soit pour tout réel positif t,

$u'(t) = -\frac{h'(t)}{h^2(t)}$ donc la relation devient pour tout réel positif t :

$-\frac{h'(t)}{h^2(t)} = \frac{1}{4h(t)} - \frac{1}{12h^2(t)}$ soit :

$h'(t) = -\frac{1}{4}h(t) + \frac{1}{12}$ et $h(0) = \frac{1}{u(0)} = 1$

2) b. Les solutions sur R de l'équation différentielle $y' = -\frac{1}{4}y + \frac{1}{12}$ sont les fonctions définies sur R, $t \mapsto \frac{1}{3} + Ce^{-\frac{t}{4}}$ où C $\in$ R.

Comme $h(0) = \frac{1}{3} + Ce^0 = 1$ on a $C = \frac{2}{3}$.

Pour tout réel positif t, $h(t) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}e^{-\frac{t}{4}}$ et $u(t) = \frac{3}{1 + 2e^{-\frac{t}{4}}}$

2) c. $\lim\limits_{t \to +\infty} u(t) = 3$ donc la taille de la population qui sera en augmentation constante tendra vers 300 individus.

Exercice 2

1) a.

- Le nombre de tirages possibles est $C_2^5 = 10$.
- L'évènement V est réalisé lorsque les deux boules vertes de l'urne sont tirées, il y a donc $C_2^2 = 1$ seul tirage réalisant V. Les tirages étant tous équiprobables on a :

  p(V) = nombre de tirages réalisant V / nombre total de tirages possibles = $\frac{1}{10}$.
- L'évènement J est réalisé lorsque deux boules jaunes sont tirées, sachant qu'il y a dans l'urne trois boules jaunes, il y a $C_2^3 = 3$ tirages réalisant J. Les tirages étant équiprobables, on a :

  p(J) = nombre de tirages réalisant J / nombre total de tirages possibles = $\frac{3}{10}$.

1) b. Lorsque le joueur a obtenu deux boules vertes, il fait tourner la roue. La fraction de la roue pour laquelle l'évènement R est réalisé est égale à : $1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$. Donc $p_V(R) = \frac{5}{8}$.

On obtient alors : $p(\mathrm{R} \cap \mathrm{V}) = p(\mathrm{V}) * p_V(\mathrm{R}) = \frac{1}{10} * \frac{5}{8} = \frac{1}{2*8}$. Donc $p(\mathrm{R} \cap \mathrm{V}) = \frac{1}{16}$.

1) c. Les évènements V, J, D formant un système complet d'évènements où D est l'évènement « le joueur a obtenu deux boules de couleurs différentes », on utilise la formule des probabilités totales pour calculer p(R) :

$$p(\mathrm{R}) = p(\mathrm{V}) * p_V(\mathrm{R}) + p(\mathrm{J}) * p_J(\mathrm{R}) + p(\mathrm{D}) * p_D(\mathrm{R}) .$$

D'après le texte $p_J(\text{R}) = 1$ puisque si le joueur obtient deux boules jaunes, il est remboursé de sa participation, et $p_D(\text{R}) = 0$ car si le joueur obtient deux boules de couleurs différentes il a perdu. On obtient donc :

$$p(\text{R}) = \frac{1}{10} * \frac{5}{8} + \frac{3}{10} * 1 = \frac{5}{80} + \frac{3*8}{80} = \frac{29}{80}$$

1) d. La probabilité de l'évènement C : « le joueur gagne 100 E » est :

$p(\text{C}) = p(\text{V} \cap \text{A}) = p(\text{V}) * p_V(\text{A}) = \dfrac{1}{10} * \dfrac{1}{8}$, A étant l'évènement « la roue indique un gain de 100 E »

$$p(\text{C}) = \frac{1}{80}$$

La probabilité de l'évènement T "le joueur gagne 20 euros" est :

$p(\text{T}) = p(\text{V} \cap \text{B}) = p(\text{V}) * p_V(\text{B}) = \dfrac{1}{10} * \dfrac{1}{4}$, B étant l'évènement « la roue indique un gain de 20 E »

$$p(\text{T}) = \frac{1}{40}$$

2) a. Les valeurs prises par X sont :

- m lorsque le joueur a perdu lors du tirage des deux boules, évènement D ;

0 lorsque l'évènement R est réalisé ;

$20 - m$ lorsque l'évènement T est réalisé ;

$100 - m$ lorsque l'évènement C est réalisé.

2) b. La loi de probabilité de X est d'après ce qui précède :

$$p(X = -m) = p(D) = \frac{3}{5}$$

$$p(X = 0) = p(R) = \frac{29}{80}$$

$$p(X = 20 - m) = p(T) = \frac{1}{40}$$

$$p(X = 100 - m) = p(C) = \frac{1}{80}$$

2) c. Le calcul de l'espérance mathématique E(X) de la variable aléatoire X

$$E(X) = \frac{3}{5}(-m) + \frac{29}{80} * 0 + \frac{1}{40}(20 - m) + \frac{1}{80}(100 - m)$$

$$E(X) = \frac{140 - 51m}{80}$$

2) d. $E(X) \leq 0$

D'où $m \geq \frac{140}{51} \approx 2{,}74$

La mise minimale en nombre entier d'euros sera de 3 euros.

3) On désigne par F l'évènement « le joueur perd au moins une fois sa mise » et par $\overline{F}$ l'évènement contraire soit : « le joueur ne perd jamais sa mise ».

$$p(\overline{F}) = p(D) * p(D) * p(D) * p(D) = \frac{2}{5} * \frac{2}{5} * \frac{2}{5} * \frac{2}{5}$$

La probabilité que le joueur perde au moins une fois sa mise au cours des 4 parties est $p(F) = 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^4 = 0{,}9744$

4) Calculons la probabilité de l'évènement D : obtenir deux boules de couleurs différentes. Les tirages de deux boules sont tous équiprobables, le nombre total de tirages possibles est C_2^{n+2} et le nombre de tirages réalisant D est $2n$. D'où :

$$p(D) = \frac{2n}{C_2^{n+2}} = \frac{4n}{(n+2)(n+1)}$$

Si D est réalisé le joueur perd sa mise, si $\overline{D}$ est réalisé le joueur gagne ou est remboursé de sa mise :

$$p(G) = p(\overline{D}) = 1 - \frac{4n}{(n+2)(n+1)}$$

On veut avoir : $p(G) \geq \frac{1}{2}$ donc $n^2 - 5n + 2 \geq 0$.

Le trinôme $x^2 - 5x + 2$ a pour racines $x_1 = \frac{5 + \sqrt{17}}{2}$ et $x_2 = \frac{5 - \sqrt{17}}{2}$.

Les entiers naturels de $\mathbb{N}^*$ solutions sont les entiers supérieurs ou égaux à $\frac{5+\sqrt{17}}{2}$ soit les entiers supérieurs ou égaux à 5.

La valeur minimale de n pour que $p(G)$ soit supérieure à 0,5 est $n = 5$

Exercice 3

1) Pour tout réel t de l'intervalle $[0;1]$, on a : $0 \leq 1-t \leq 1$
On en déduit que pour tout entier n, $(1-t)^n \geq 0$ et puisqu'une exponentielle est toujours positive, pour tout entier n et tout réel t appartenant à $[0;1]$, on a $(1-t)^n e^t \geq 0$
$f_n(t) = (1-t)^n e^t$ est continue et positive sur $[0;1]$, on a $\int_0^1 f_n(t)dt \geq 0$
Pour tout entier n non nul $u_n \geq 0$

2) a. La fonction exponentielle est croissante sur R donc sur $[0;1]$, donc pour tout t appartenant à $[0;1]$, on a : $e^0 \leq e^t \leq e^1$ soit $1 \leq e^t \leq e$
En multipliant les deux membres de l'inégalité $e^t \leq e$ par le réel positif $(1-t)^n$, on en déduit : $(1-t)^n e^t \leq (1-t)^n e$
En intégrant sur $[0;1]$ les deux membres de l'inégalité précédente, on a :

$$\int_0^1 (1-t)^n e^t dt \leq \int_0^1 et(1-t)^n dt$$

$$\text{Or, } e\int_0^1 (1-t)^n dt = e\,\frac{1}{n+1}$$

d'où le résultat demandé.

2) b. On sait que pour tout entier n non nul $0 \leq u_n \leq \frac{e}{n+1}$
Or, $\lim\limits_{n\to-\infty} \frac{e}{n+1} = 0$ donc, par encadrement on a : $\lim\limits_{n\to-\infty} u_n = 0$

3) $u_1 = e - 2$ en intégrant par parties.

En posant $u(t) = (1 - t)^{n+1}$ et $v'(t) = e^t$ et en utilisant l'intégration par parties, on trouve le résultat demandé.

4) On considère la propriété P_n « $v_n = u_n + (n!)(a+2-e)$ » que l'on démontre par récurrence. D'où le résultat demandé.

5) La limite dépend du signe de a + 2 – e

- Si a = e – 2, la limite est nulle
- Si a > e – 2, la limite est égale à + ∞
- Si a < e – 2, la limite est égale à - ∞

Exercice 4

1) $P(\lambda) = -\lambda^3 - a\lambda^2 - b\lambda - c$

2)

   a. Si P(λ) admet 3 racines distinctes 2 à 2, la matrice est diagonalisable (cf. cours)

   b. Soit λ_1 la racine double et λ_2 la racine simple. Pour que la matrice soit diagonalisable, il faut que l'espace propre associé à la valeur propre λ_1 soit de dimension 2, ce qui signifie que le rang de la matrice $A = M - \lambda_1 I_d$ soit 1.
   Cela signifie que tous les déterminants d'ordre 2 sont nuls or il apparaît que le déterminant en haut à gauche de A n'est pas nul et vaut 1

$$\begin{vmatrix} -\lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda_1 & 1 \\ -c & -b & -a-\lambda_1 \end{vmatrix}$$

   donc la dimension de l'espace propre à la valeur propre λ_1 est de dimension 1 donc M est non diagonalisable.

   c. Soit λ_1 la racine triple du polynôme caractéristique. Pour la même raison que précédemment, l'espace propre associé à la valeur propre λ_1 ne peut être 3 donc M est non diagonalisable.

3) On commence par chercher les vecteurs propres associés à λ_1 et à λ_2 (u et v respectivement) qui se calculent via $f(u) = \lambda_1 u$ et $f(v) = \lambda_2 v$ (f étant l'endormorphisme associé à la matrice M)

Donc $u = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \\ \lambda_1^2 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_2^2 \end{pmatrix}$

4) On cherche une base (u, w, v) dans laquelle la matrice M s'ecrive sous le forme demandée. Dans cette base, le troisième vecteur w est donc tel que $f(w) = u + \lambda_1 w$.

On trouve alors $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2\lambda_1 \end{pmatrix}$

On vérifie aisément que (u, w, v) est bien une base.

5) On sait que u et w sont dans la base que l'on cherche et on veut trouver un troisième vecteur w' tel que, dans cette base (u, w, w') : $f(w') = v + \lambda_1 w'$ (puisque f est l'endormorphisme associé à M). On trouve alors $w' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

On vérifie aisément que (u, w, w') est bien une base.