ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2011

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Note* : *l'épreuve est composée d'exercices indépendants qui peuvent être traités dans un ordre indifférent.

Exercice n° 1

Question 1

On étudie en laboratoire l'évolution d'une population de petits rongeurs. La taille de la population, au temps t, est notée $g(t)$. On définit ainsi une fonction g de l'intervalle $[0 ; +\infty[$ dans R. La variable réelle t désigne le temps, exprimé en années. L'unité choisie pour $g(t)$ est la centaine d'individus. Le modèle utilisé pour décrire cette évolution consiste à prendre pour g une solution, sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, de l'équation différentielle (E_1) $y' = \dfrac{y}{4}$,

où y' désigne la dérivée de la fonction y.

a) Résoudre l'équation différentielle (E_1).

b) Déterminer l'expression de $g(t)$ lorsque, à la date $t = 0$, la population comprend 100 rongeurs, c'est-à-dire $g(0) = 1$.

c) Déterminer après combien d'années la population dépassera 300 rongeurs.

Question 2

En réalité, un prédateur empêche une telle croissance en tuant une certaine quantité de rongeurs. On note $u(t)$ le nombre de rongeurs vivants au temps t (exprimé en années) dans cette région, et on admet que la fonction u, ainsi définie, satisfait aux conditions :

$$(E_2) : \begin{cases} u'(t) = \dfrac{u(t)}{4} - \dfrac{u(t)^2}{12} & \text{pour tout nombre réel } t \text{ positif ou nul,} \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

où u' désigne la fonction dérivée de la fonction u.

a) On suppose que, pour tout réel positif t, on a $u(t) > 0$.

On considère, sur l'intervalle $[0 \,;\, +\infty[$, la fonction h définie par $h = \dfrac{1}{u}$.

Démontrer que la fonction u satisfait aux conditions (E_2) si, et seulement si la fonction h satisfait aux conditions :

$$(E_3) : \begin{cases} h'(t) = -\dfrac{1}{4}h(t) + \dfrac{1}{12} & \text{pour tout nombre réel } t \text{ positif ou nul,} \\ h(0) = 1 \end{cases}$$

Où h' désigne la fonction dérivée de la fonction h.

b) Donner les solutions de l'équation différentielle $y' = -\dfrac{1}{4}y + \dfrac{1}{12}$ et en déduire l'expression de la fonction h, puis celle de la fonction u.

c) Dans ce modèle, comment se comporte la taille de la population étudiée lorsque t tend vers $+\infty$?

Exercice n° 2

Une association organise une loterie pour laquelle une participation m exprimée en euros est demandée.

Un joueur doit tirer simultanément, au hasard, deux boules dans une urne contenant 2 boules vertes et 3 boules jaunes.

Si le joueur obtient deux boules de couleurs différentes, il a perdu.

Si le joueur obtient deux boules jaunes, il est remboursé de sa participation m.

Si le joueur obtient 2 boules vertes, il peut continuer le jeu qui consiste à faire tourner une roue où sont inscrits des gains répartis comme suit :

- sur $\dfrac{1}{8}$ de la roue le gain est de 100 euros,
- sur $\dfrac{1}{4}$ de la roue le gain est de 20 euros,
- sur le reste, le joueur est remboursé de sa participation m.

On appelle V l'évènement « le joueur a obtenu 2 boules vertes ».

On appelle J l'évènement « le joueur a obtenu 2 boules jaunes ».

On appelle R l'évènement « le joueur est remboursé de sa participation et ne gagne rien».

Question 1

a) Calculer les probabilités p(V) et p(J) des évènements respectifs V et J.

b) On note $p_V(R)$ la probabilité pour le joueur d'être remboursé sachant qu'il a obtenu deux boules vertes. Déterminer $p_V(R)$ puis $p(R \cap V)$.

c) Calculer p(R).

d) Calculer la probabilité de gagner les 100 euros, puis la probabilité de gagner les 20 euros de la roue.

Question 2

On appelle X la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur c'est-à-dire la différence entre les sommes éventuellement perçues et la participation initiale m.

a) Donner les valeurs prises par la variable aléatoire X.

b) Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

c) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

d) L'organisateur veut fixer la participation m à une valeur entière en euros. Quelle valeur minimale faut-il donner à m pour que l'organisateur puisse espérer ne pas perdre d'argent ?

Question 3

Un joueur se présente et décide de jouer 4 fois, quels que soient les résultats obtenus. Calculer la probabilité qu'il perde au moins une fois sa mise.

Question 4

On voudrait qu'un joueur ait plus d'une chance sur deux d'être remboursé de sa mise ou de gagner quand il joue une seule fois. On note G cet évènement. Pour cela on garde deux boules vertes dans l'urne mais on modifie le nombre de boules jaunes. On appelle n le nombre de boules jaunes et on suppose $n \geq 1$, calculer la valeur minimale de n pour que la condition précédente soit vérifiée.

Exercice n° 3

Question 1

On se propose d'étudier la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t \, dt$$

Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $u_n \geq 0$

Question 2

a) Montrer que pour tout n non nul $u_n \leq \dfrac{e}{n+1}$

b) Déterminer la limite de la suite (u_n)

Question 3

Calculer u_1 et montrer que $u_{n+1} = (n+1)u_n - 1$

Question 4

Etant donné un réel a, on considère la suite (v_n) définie par $v_1 = a$ et pour tout entier naturel non nul n, $v_{n+1} = (n+1)v_n - 1$. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $v_n = u_n + (n!)(a+2-e)$

Question 5

Etudier le comportement de la suite (v_n) à l'infini suivant les valeurs de a.

Exercice n° 4

On considère dans cet exercice la matrice ci-dessous et nous allons étudier dans quels cas celle-ci est diagonalisable et dans quels cas elle peut être réduite :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -c & -b & -a \end{pmatrix} \text{ où } a, b, c \text{ sont des éléments de } C^3$$

Question 1

Calculer le polynôme caractéristique de la matrice M.

Question 2

Selon le nombre de racines de l'équation précédente, M sera ou non diagonalisable.

a) Si le polynôme caractéristique admet 3 racines distinctes, justifier que M soit diagonalisable.

b) Si le polynôme caractéristique admet 2 racines distinctes, justifier que M ne soit pas diagonalisable.

c) Si le polynôme caractéristique admet 1 racine triple, justifier que M ne soit pas diagonalisable.

Question 3

Donner les vecteurs propres de M lorsque le polynôme caractéristique admet 2 racines distinctes.

Question 4

Dans le cas de la question 2b, donner une base dans laquelle la matrice est de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ où } \lambda_1 \text{ et } \lambda_2 \text{ sont les racines du polynôme caractéristique}$$

Question 5

Dans le cas de la question 2c, donner une base dans laquelle la matrice est de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \text{ où } \lambda_1 \text{ est la racine du polynôme caractéristique}$$