AVRIL 2012

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Exercice 1

1. a. L'enfant peut obtenir 0, 1, 2 ou 3 boules rouges. Le nombre de cas possibles pour tirer 3 boules rouges est $C_3^{13} = 286$

$$P(X=0) = \frac{C_3^3}{C_3^{13}} = \frac{1}{286}$$
$$P(X=1) = \frac{C_2^3 C_1^{10}}{C_3^{13}} = \frac{30}{286}$$
$$P(X=2) = \frac{C_1^3 C_2^{10}}{C_3^{13}} = \frac{135}{286}$$
$$P(X=3) = \frac{C_3^{10}}{C_3^{13}} = \frac{120}{286}$$

1. b. $E(X) = \sum x_i P(X = x_i) = \frac{30}{13}$

2. a.

$$P(R) = P(R \cap A_1) + P(R \cap A_2)$$
$$P(R) = P(A_1) \times P_{A_1}(R) + P(A_2) \times P_{A_2}(R)$$
$$P(R) = \frac{109}{182}$$

2. b. Il s'agit d'une probabilité conditionnelle $P_R(A_1) = \frac{P(R \cap A_1)}{p(R)} = \frac{70}{109}$

3.a. Il faut s'intéresser à l'événement contraire « ne jamais prendre de bille rouge » au cours de n tirages, dont la probabilité est $\left(1 - \frac{109}{182}\right)^n = \left(\frac{73}{182}\right)^n$

Donc $p_n = 1 - \left(\frac{73}{182}\right)^n$

3. b. En résolvant, on aboutit à n doit être supérieur ou égal à ln(0,01) divisé par ln(73/182), ce qui donne n supérieur ou égal à 5,04.

La plus petite valeur pour laquelle p_n est supérieure à 99% est donc $n = 6$.

<u>**Excercice 2**</u>

Partie A

1. On montre que la limite de f en 0 est $-\infty$ et que celle en $+\infty$ est $+\infty$. En calculant la dérivée de f, on montre que f est strictement croissante sur son intervalle de définition. Le graphe n'est pas reproduit ici (il admet une branche parabolique dans la direction $y = x$).

2. a. la fonction f est continue, strictement croissante sur son intervalle de définition, donc $f(x) = n$ n'admet qu'une seule solution (théorème de cours)

2. b. $\alpha_1 = 1$

2. c. Par définition $f(\alpha_n) = n$ et $f(\alpha_{n+1}) = n+1$, comme n est plus petit que n+1, on a $f(\alpha_n) < f(\alpha_{n+1})$

la fonction f étant strictement croissante, on en déduit que la suite α_n est strictement croissante

3. a. Une équation de la tangente Δ à la courbe Γ au point A est :

$$y = f'(1)(x-1)+f(1) = 2x-1$$

3. b. En étudiant la fonction h en calculant ses limites et sa dérivée, on observe que h est croissante sur l'intervalle 0,1 et décroissante entre 1 et l'infini. Et $h(1) = 0$.

3. c. La position est déterminée par le signe de $f(x)$ - $(2x-1)$ qui est égal à $h(x)$. Or, $h(x)$ est toujours négative (cf. question précédente), donc Γ est au dessous de Δ .

4. En utilisant le fait que la fonction h est négative et la définition de α_n, on a le résultat attendu. On en déduit que la limite de α_n est + l'infini.

Partie B

1. Une suite est majorée s'il existe un réel M supérieur à tous les termes de la suite. Une suite n'est pas majorée si, pour tout réel M, il existe au moins un terme de la suite qui est strictement supérieur à M.

On considère une suite (u_n) croissante et non majorée. On veut montrer que, pour tout réel A, il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont supérieurs à A.

Puisque (u_n) n'est pas majorée, pour tout réel A, il existe au moins un terme de la suite qui est strictement supérieur à A. On note n_0 le rang de ce terme et on a $u_{n_0} > A$. La suite est croissante, donc, pour tout entier $n \geq n_0$, on a $u_n \geq u_{n_0} > A$

A partir du rang n_0, tous les termes de la suite sont donc supérieurs à A. Cette propriété étant vraie pour tout réel A, la suite (u_n) tend donc vers + l'infini.

2. On raisonne par l'absurde pour montrer que la suite (β_n)n'est pas majorée. On la suppose donc majorée. Cette suite étant majorée et croissante, elle converge vers une limite *m*. La fonction *g* étant continue, la suite $(g(\beta_n))$ converge vers $g(m)$.

Or, on a par ailleurs $\lim\limits_{n \to +\infty} g(\beta_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, donc la suite$(g(\beta_n))$ne converge pas. Cela signifie que l'hypothèse selon laquelle la suite (β_n) est majorée est fausse.

La suite (β_n) n'est pas majorée, elle est croissante. D'après la question précédente, elle converge donc vers + l'infini.

Exercice 3

1. a. On montre facilement que $v_{n+1} = \frac{1}{6} v_n$

1. b. Comme la suite v_n est une suite géométrique, on a $v_n = v_1 \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$ avec $v_1 = 1/10$, on en déduit que : $u_n = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} + \frac{2}{5}$

2. a. On trouve $a_1 = 1/2$

2. b. En construisant un arbre des possibilités, on trouve $r_1 = 7/12$

2. c. En utilisant la remarque qui est évidente compte tenu que l'événement R_n peut se produire avec le dé A ou le dé B, et en notant que les évènements $(R_n \cap A_n)$ et $(R_n \cap \overline{A_n})$ sont incompatibles, on a :

$$r_n = P(R_n) = P(R_n \cap A_n) + P(R_n \cap \overline{A_n}) = a_n \frac{1}{2} + (1 - a_n)\frac{2}{3} = -\frac{1}{6} a_n + \frac{2}{3}$$

2. d.Le dé A est utilisé à la n+1 ème partie dans deux cas :

- si on l'a utilisé à la $n^{\text{ème}}$ partie et que l'on a obtenu rouge (événement $(A_n \cap R_n)$);
- si on a utilisé le dé B à la $n^{\text{ème}}$ partie et que l'on a obtenu blanc (événement $(\overline{A}_n \cap \overline{R_n})$).

2. e. En procédant de la même façon qu'à la question 2c, on montre que $n \geq 1, a_{n+1} = \frac{1}{6} a_n + \frac{1}{3}$.

Il s'agit de la même suite que la suite traitée à la question 1, donc $a_n = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} + \frac{2}{5}$

2. f. En utilisant les questions 2c et 2e, on obtient $r_n = -\frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} + \frac{3}{5}$ qui a pour limite 3/5

Exercice 4

u_n peut s'écrire $u_n = \frac{(1-a)n+1}{\sqrt{n^4+n+1}+\sqrt{n^4+an}}$, ce qui montre qu'à partir d'un certain rang, on obtient une série à termes positifs.

En effectuant un développement limité, on a $u_n = \frac{1-a}{2n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

En utilisant la règle de Riemann, la série diverge si a est différent de 1 et converge dans le cas $a = 1$.

Exercice 5

1. On recherche les valeurs propres de p qui sont 0 et 1 en utilisant le fait $p^2 = p$. Le sous espace vectoriel engendré par la valeur propre 0 est Ker p et le sous espace vectoriel engendré par la valeur propre 1 est Im p. Comme Ker p et Im p sont des espaces supplémentaires (on trouvera une démonstration dans les annales du concours ITS voie B Option Economie de l'année 2003), p est diagonalisable.

2. a. évident

2. b. On déduit de la question 2a que $f(f-\lambda Id)(f-\mu Id) = 0$, Id étant la fonction identité. Donc, les valeurs propres sont $0, \lambda, \mu$

- Si $0 = \lambda = \mu$, f est la fonction nulle ;
- Si $0 \neq \lambda \neq \mu$, f est diagonalisable ;
- Si $\lambda = 0, \mu \neq 0$, on a $v^2=v$ donc v est un projecteur donc f est diagonalisable ;
- Si $\lambda \neq 0, \mu = 0$, on a $u^2=u$ donc u est un projecteur donc f est diagonalisable ;
- Si $\lambda = \mu \neq 0$, on a $(u+v)^2=u+v$ donc $u+v$ est un projecteur donc f est diagonalisable.