AVRIL 2013

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Exercice 1

1) Pour que l'équation soit définie, on doit avoir $x > -4$ et $x < 3$. $\ln(x+4) = \ln(6-2x) \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$

2) Pour que l'équation soit définie, on doit avoir $x > 2$. $\ln(3x+5) + \ln(x-2) = \ln 3 \Leftrightarrow x = \frac{1-\sqrt{157}}{6}$ ou $\frac{1+\sqrt{157}}{6}$. La solution est donc $\frac{1+\sqrt{157}}{6}$.

3) Pour que l'inéquation soit définie, on doit avoir $x > 0$. En utilisant $X = \ln x$ et le fait que $X^2 - 4X - 5 = (X+1)(X-5)$, on trouve que l'ensemble des solutions est $]0, 1/e] \cup [e^5, +\infty[$.

4) Les solutions sont 0 et ln4.

Exercice 2

1) La variable aléatoire X donnant le nombre de femmes choisies suit une loi binomiale de paramètres n = 10 et p = 0,5.
P(A) = $\binom{10}{8}(0,5)^{10}$ = 0,044
P(B) = P(X=8)+ P(X=9)+ P(X=10) = 0,055

2) L'événement contraire de l'événement H « Il y a au moins un homme dans l'échantillon de n personnes » est l'événement $\overline{H}$ « Il y a n femmes dans l'échantillon ». On veut $P(H) > 0,999$. C'est à dire $1 - (0,5)^n > 0,999$. On obtient $n \geq 10$.

Exercice 3

Partie A - Construction d'une suite de nombre réels convergeant vers $\sqrt{2}$

1) Evident

2) Graphique non fait ici (le graphe de la fonction est une hyperbole)

3) $u_n \geq 0$: évident de part la fonction f sur le domaine de définition
$u_n \leq 1$: démonstration par récurrence en calculant $u_{n+1} - 1$

4) Evident en faisant le rapport des valeurs absolues

5) Il suffit de montrer que $\frac{1}{(1+\sqrt{2})(2+u_n)} \leq \frac{1}{4}$, ce qui est aisé en utilisant la question 4

6) La limite de la suite $(u_n + 1)$ est $\sqrt{2}$

Partie B - Propriétés de la suite (u_n)

1) $u_0 = 0, u_1 = \frac{1}{2}, u_2 = \frac{2}{5}, u_3 = \frac{5}{12}, u_4 = \frac{12}{29}, u_5 = \frac{29}{60}$

2) Démonstration par récurrence

3) Etape 1 : la suite (u_n) est positive (question A4).
Etape 2 : on montre que $u_{n+2} - u_n > 0$ quand $u_n < \sqrt{2} - 1$ et que $u_{n+2} - u_n < 0$ quand $u_n > \sqrt{2} - 1$
Etape 3 : on montre par récurrence que tous les termes pairs de la suite (u_n) sont plus petits que $\sqrt{2} - 1$ et que tous les termes impairs de la suite (u_n) sont plus grands que $\sqrt{2} - 1$

4) a) En résolvant, on trouve *u'=u* et *v'=v-2u*

b) Evident et la question précédente montre que $p_{n+1} = q_n$ et $q_{n+1} = 2q_n + p_n$ sont bien premiers entre eux

c) Etape 1 : on montre que $q_{n+1} - q_n = q_n + q_{n-1}$
Etape 2 : on résout l'équation $x^2 - 2x - 1 = 0$ qui donne comme racines $1 + \sqrt{2}$ et $1 - \sqrt{2} + 1$
Etape 3 : q_n s'écrit sous la forme $\alpha\,(1 + \sqrt{2})^n + \beta(1 - \sqrt{2})^n$). On résout en utilisant les premières valeurs de la suite (q_n) et on trouve $\alpha = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$ et $\beta = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$

Exercice 4

1) On remarque que $f(x) = x + \frac{x^3}{2} + o(x^3)$. Ainsi, la fonction f est continue en 0 et f est dérivable en 0 avec $f'(0) = 1$. La fonction f est continue sur R. En la dérivant, on constate qu'elle est strictement croissante. De plus, $\lim_{x\to-\infty} f = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f = +\infty$. La fonction f est une bijection strictement croissante de R dans R. Elle admet donc une fonction réciproque définie sur R.

2) Puisque $f'(0) \neq 0$ et que la fonction f est C^∞ au voisinage de 0, la fonction réciproque est indéfiniment dérivable au voisinage de 0. En posant $f^{-1}(x) = ax + bx^2 + cx^3 + o(x^3)$ et en utilisant le fait que $f \circ f^{-1}(x) = x$, on a :

a = 1 , b = 0, c = -1/2