ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2013

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

***Note* : l'épreuve est composée d'exercices indépendants qui peuvent être traités dans un ordre indifférent.**

Exercice 1 (4 points)

Résoudre dans l'ensemble des nombres réels chacune des équations suivantes, où *ln* désigne le logarithme népérien :

1) $\ln(x+4) = \ln(6-2x)$
2) $\ln(3x+5) + \ln(x-2) = \ln 3$
3) $(\ln x)^2 - 4\ln x \geq 5$
4) $e^{2x} - 5e^{x} + 4 = 0$

Exercice 2 (4 points)

Dans une population, il y a 50% d'hommes et 50% de femmes. On suppose que la population est suffisamment importante pour que le fait d'enlever quelques individus ne modifie pas sa structure. On choisit au hasard un échantillon de 10 personnes.

1) Donner la probabilité des événements suivants :

   A = « Il y a exactement 8 femmes parmi les 10 personnes »
   B = « Il y a au moins 8 femmes parmi les 10 personnes »

2) Donner le nombre n minimum de personnes qu'il faut dans l'échantillon pour que la probabilité qu'il y ait au moins un homme parmi les n personnes soit supérieure à 0,999

<u>Exercice 3</u> (8 points)

Partie A - Construction d'une suite de nombre réels convergeant vers $\sqrt{2}$

1) Vérifier que $\sqrt{2}-1$ est solution de l'équation $x=\frac{1}{2+x}$
2) Représenter graphiquement la fonction *f* définie sur [0,1] par $f(x)=\frac{1}{2+x}$

Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2+u_n} \end{cases}$

3) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \in [0,1]$

4) Montrer que pour tout entier naturel n,

$$\left|u_{n+1}-(\sqrt{2}-1)\right| = \frac{1}{(1+\sqrt{2})(2+u_n)}\left|u_n-(\sqrt{2}-1)\right|$$

5) En déduire que pour tout entier naturel n, $\left|u_{n+1}-(\sqrt{2}-1)\right| \leq \frac{1}{4}\left|u_n-(\sqrt{2}-1)\right|$ puis que pour tout entier naturel n, $\left|u_{n+1}-(\sqrt{2}-1)\right| \leq \frac{1}{4^n}$

6) Quelle est la limite de la suite (u_n+1) ?

Partie B - Propriétés de la suite (u_n)

1) Calculer u_n pour les valeurs 1, 2, 3, 4, 5 de n
2) Montrer que pour tout entier naturel n, u_n est un nombre rationnel
3) Montrer que la suite (u_{2n}) est croissante et que la suite (u_{2n+1}) est décroissante
4) On pose, pour $n \geq 1$, $u_n = \frac{p_n}{q_n}$ où p_n et q_n sont des entiers naturels premiers entre eux (Rappel : deux nombres *p* et *q* sont premiers entre eux s'il existe deux nombres entiers *c* et *d* tels que $cp+dq=1$). Sachant que $p_0 = 0$ et $q_0 = 1$:

   a) Montrer que si a et b sont premiers entre eux alors b et a+2b sont aussi premiers entre eux. Cela revient à montrer qu'il existe deux nombres entiers *u'* et *v'* tels que (a+2b)*u'*+b*v'*=1 sachant qu'il existe deux nombres entiers *u* et *v* tels que a*u*+b*v*=1

   b) En déduire que pour tout entier naturel n, $p_{n+1} = q_n$ et $q_{n+1} = 2q_n + p_n$

   c) Calculer q_n en fonction de n

<u>Exercice 4</u> (4 points)

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \frac{e^{x^2}-1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

1) Montrer que *f* admet une fonction réciproque sur R
2) Donner un développement limité de f^{-1} à l'ordre 3 en 0