

Exercice 1

Partie A

1 . Les fonctions f et g sont dérivables sur $[0; +\infty[$ et pour $x \geq 0$:

$$f'(x) = \frac{-x}{1+x} \leq 0 \text{ et } g'(x) = \frac{x^2}{1+x} \geq 0$$

Les limites en $+\infty$ sont $-\infty$ pour la fonction f et $+\infty$ pour la fonction g

Remarque : les tableaux de variations ne sont pas faits.

2 . Comme $f(0) = g(0) = 0$, on en déduit que f est négative sur $[0; +\infty[$ et que g est positive sur $[0; +\infty[$.

On a donc pour tout $x \geq 0$,



$$\ln(1+x) - x \leq 0$$

$$\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \geq 0$$

Ce qui donne :

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$$

Partie B

1 . $u_n > 0$ pour $n \geq 1$

On raisonne par récurrence sur n .

On a $u_1 = \frac{3}{2} > 0$ et la propriété est vérifiée pour $n = 1$.

Si $u_n > 0$ alors $u_{n+1} = u_n \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) > 0$, donc d'après le principe de récurrence :

$$u_n > 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

2 . pour tout $n \geq 1$:

$$\ln u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \dots + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) = \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$$

On raisonne par récurrence sur n .

. Pour $n = 1$, $u_1 = \frac{3}{2}$ et $\ln u_1 = \ln\left(1 + \frac{1}{2^1}\right)$ et la propriété est vérifiée au rang 1.

. Supposons que, pour un certain entier n , $\ln u_n = \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$

On a alors par définition :

$$\ln u_{n+1} = \ln\left(u_n \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)\right) = \ln u_n + \ln\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$



$$= \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) = \sum_{k=1}^{n+1} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$$

Et la propriété est vérifiée au rang $n + 1$.

3 . Il résulte de la partie A, question 2 que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{1}{2^k} - \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2^k}\right)^2 \leq \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \leq \frac{1}{2^k}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{4^k} \leq \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}$$

Soit :

$$S_n - \frac{1}{2} T_n \leq \ln u_n \leq S_n$$

4 . Les sommes S_n et T_n sont des sommes de termes de suite géométrique.

$$S_n = 1 - \frac{1}{2^n} \quad \text{et} \quad T_n = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4^n}\right)$$

On en déduit que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 1$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \frac{1}{3}$

5 . a . Variations de u_n

On a pour tout $n \geq 1$, u_n strictement positif :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{1}{2^{n+1}} > 1 \text{ donc } u_{n+1} > u_n$$

La suite (u_n) est donc strictement croissante

b. Etude de la convergence de (u_n)

On a de plus pour $n \geq 1$: $\ln u_n \leq S_n \leq 1$

Donc : $u_n \leq e$

La suite (u_n) est croissante et majorée donc elle converge.

c. Comme la suite (u_n) est croissante et à termes strictement positifs, on a $\ell > 0$. La fonction $\ln$ est continue en ℓ donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln u_n = \ln \ell$



De l'encadrement : $S_n - \frac{1}{2} T_n \leq \ln u_n \leq S_n$

On déduit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(S_n - \frac{1}{2} T_n \right) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

Soit : $1 - \frac{1}{6} \leq \ln \ell \leq 1 \quad \rightarrow \quad e^{\frac{5}{6}} \leq \ell \leq e$

Exercice 2

1. $p(\overline{D_1}) = 0,4$ et donc $p(D_1) = 1 - 0,4 = 0,6$
 $p(R_1 / D_1) = 0,3$

Comme $R_1 \subset D_1$ on a : $p(R_1) = p(R_1 \cap D_1) = p(D_1)p(R_1 / D_1)$
 $p(R_1) = 0,6 \times 0,3 = 0,18$

2. $p(\overline{D_2} / \overline{D_1}) = 0,3$ car pour que la personne ne décroche pas la seconde fois, il faut qu'elle n'ait pas décroché la première fois et ait été rappelée, et $p(R_2 / D_2) = 0,2$

On en déduit $p(D_2 / \overline{D_1}) = 1 - 0,3 = 0,7$ et comme $D_2 \subset \overline{D_1}$,
 $p(D_2) = p(D_2 \cap \overline{D_1}) = p(\overline{D_1}) \times p(D_2 / \overline{D_1}) = 0,4 \times 0,7 = 0,28$

Comme $R_2 \subset D_2$ on en déduit :

$$p(R_2) = p(R_2 \cap D_2) = p(D_2)p(R_2 / D_2) = 0,056$$

Enfin puisque R est la réunion disjointe de R_1 et R_2 , on obtient :

$$p(R) = p(R_1) + p(R_2) = 0,236$$

$$3. P_R(R_1) = \frac{p(R \cap R_1)}{p(R)} = \frac{p(R_1)}{p(R)} = \frac{0,18}{0,236}$$

4. On a un schéma de Bernoulli dans lequel la probabilité de succès est $p = p(R) = 0,236$. Le nombre de personnes qui répondent au questionnaire est une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètre $(25; p)$.

On cherche :

$$p(X = 5) = \binom{25}{5} (0,236)^5 (1 - 0,236)^{20}$$



On obtient :

$$p(X = 5) = 0,179 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}$$

Exercice 3

On écrit : $\frac{1}{1+bx^2} = 1 - bx^2 + b^2x^4 - b^3x^6 + o(x^6)$ et $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^6)$

Ce qui donne par produit $\frac{1+ax^2}{1+bx^2} = 1(a-b)x^2 + (b^2-ab)x^4 + (-b^3+ab^2)x^6 + o(x^6)$

Finalement, le développement limité de la fonction est donné par :

$$\cos x - \frac{1+ax^2}{1+bx^2} = \left(-a+b-\frac{1}{2}\right)x^2 + \left(-b^2+ab+\frac{1}{24}\right)x^4 + \left(+b^3-ab^2-\frac{1}{120}\right)x^6$$

Le terme d'ordre 2 disparaît si $b-a=1/2$, et celui d'ordre 4 disparaît aussi si :

$$-b(b-a) = -\frac{1}{24} \Leftrightarrow b = 1/12$$

Dans ce cas, on trouve $a = -5/12$ et pour ces valeurs de a et b , on trouve une partie principale de degré 6 :

$$\cos x - \frac{1+ax^2}{1+bx^2} = \frac{1}{480}x^6$$

Exercice 4

Supposons qu'il existe n scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $\lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_n w_n = 0$

Ceci se réécrit en : $\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k (v_k + v_{k+1}) + \lambda_n (v_n + v_1) = 0$

Soit encore : $(\lambda_1 + \lambda_n) v_1 + \sum_{k=2}^n (\lambda_{k-1} + \lambda_k) v_k$

Puisque le système $(v_1, \dots, v_n)$ est linéairement indépendant, on en déduit le système :

$$\begin{cases} \lambda_n = -\lambda_1 \\ \lambda_k = -\lambda_{k-1} \text{ pour } 2 \leq k \leq n \end{cases}$$

La deuxième égalité donne facilement par récurrence, pour $2 \leq k \leq n$, $\lambda_k = (-1)^{k-1} \lambda_1$.

En particulier on a $\lambda_n = (-1)^{n-1} \lambda_1$.



On discute maintenant suivant la parité de n :

1. Si n est impair on a à la fois $\lambda_n = \lambda_1$ et $\lambda_n = -\lambda_1$. Ceci impose $\lambda_1 = 0$ et par suite $\lambda_k = 0$ pour tout k . Le système est libre.

2. Si n est pair, la dernière équation est $\lambda_n = -\lambda_1$, qui est la même que la première. Elle se simplifie donc. Pour $\lambda_k = (-1)^k$, on a alors $\lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_n w_n = 0$. Le système est lié.

Exercice 5

1. Le terme de plus haut de degré P_n est obtenu en dérivant n fois X^{2n} . Il vaut donc $\frac{2n!}{n!} X^n$.

2.

a. Le terme de plus haut de degré Q_p est obtenu en dérivant p fois X^{2n} . Il est de degré $2n-p$. Il a donc au plus $2n-p$ racines.

b. Prouvons comme Q_p est continue par récurrence finie sur p dans $\{1, \dots, n\}$ que Q_p admet exactement p racines distinctes dans $] -1, 1[$.

Pour $p = 1$ on sait que $Q_0(-1) = Q_0(1) = 0$, et le théorème de Rolle donne l'existence d'une racine dans $] -1, 1[$.

Supposons le résultat prouvé au rang p , et prouvons-le au rang $p+1$ avec $p+1 \leq n$. On note $-1 < \alpha_1 < \dots < \alpha_p < 1$ les p racines de Q_p dont l'existence est donnée dans $] -1, 1[$. Remarquons en outre que puisque 1 et -1 sont racines d'ordre n de Q_0 , et que $p \leq n-1$, ces deux nombres sont encore racines de Q_p . Il suffit alors d'appliquer le théorème de Rolle $p+1$ fois : une fois entre -1 et α_1 , $p-1$ fois entre α_k et α_{k+1} et une fois entre α_p et 1.

3 . On a donc prouvé que $P_n = Q_n$ a au moins n racines distinctes dans $] -1, 1[$. Comme il est de degré n , il a au plus n racines et donc P_n s'annule exactement en n points deux à deux distincts de $] -1, 1[$.