

AVRIL 2014

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Note : *Les exercices sont indépendants et peuvent donc être traités dans l'ordre voulu par le candidat.*

Exercice 1

Partie A

Soit f et g deux fonctions définies sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(1+x) - x \quad \text{et} \quad g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$$

Où $\ln$ désigne le logarithme népérien.

1 . Etudier les variations de f et de g sur $[0; +\infty[$



2 . En déduire un encadrement de $\ln(1+x)$

Partie B

On se propose d'étudier la suite (u_n) de nombres réels définie par :

$$u_1 = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = u_n \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}} \right)$$

1 . Montrer que $u_n > 0$ pour tout entier naturel $n \geq 1$

2 . Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$\ln u_n = \ln \left(1 + \frac{1}{2} \right) + \ln \left(1 + \frac{1}{2^2} \right) + \dots + \ln \left(1 + \frac{1}{2^n} \right)$$

3 . On pose $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n}$ et $T_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^n}$

Montrer que :

$$S_n - \frac{1}{2} T_n \leq Ln \quad u_n \leq S_n$$



4 . Calculer S_n et T_n en fonction de n . En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n$

5 . Etude de la convergence de la suite (u_n)

- Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante
- En déduire que (u_n) est convergente. Soit ℓ sa limite
- En déduire un encadrement de ℓ

Exercice 2

Une entreprise confie à une société de sondage par téléphone une enquête sur la qualité de ses produits. Lors du premier appel téléphonique, la probabilité que le correspondant ne décroche pas est de 0,4 et, s'il décroche, la probabilité pour qu'il réponde au questionnaire est 0,3.

1 . On note :

- . D_1 l'évènement : « la personne décroche au premier appel » ;
- . R_1 l'évènement : « la personne répond au questionnaire lors du premier appel »

Calculer la probabilité de l'évènement R_1

2 . Lorsqu'une personne ne décroche pas au premier appel, on la contacte une seconde fois. La probabilité pour que le correspondant ne décroche pas la seconde fois est de 0,3 et la probabilité pour qu'il réponde au questionnaire sachant qu'il décroche est 0,2. Si une personne ne décroche pas lors du second appel, on ne tente plus de la contacter.

On note :

- . D_2 l'évènement « la personne décroche au second appel »
- . R_2 l'évènement « la personne répond au questionnaire lors du second appel »
- . R l'évènement « la personne répond au questionnaire »

Calculer la probabilité de l'évènement R

3 . Sachant qu'une personne a répondu au questionnaire, calculer la probabilité pour que la réponse ait été donnée lors du premier appel.

4 . Un enquêteur a une liste de 25 personnes à contacter. Les sondages auprès des personnes d'une même liste sont indépendants. Calculer la probabilité pour que 20% des personnes répondent au questionnaire.

Exercice 3

Déterminer a et b pour que la partie principale du développement limité en 0 de la fonction

$\cos x - \frac{1+ax^2}{1+bx^2}$ soit de degré le plus grand possible.



Exercice 4

Soit $(v_1, \dots, v_n)$ une famille libre d'un espace vectoriel réel E . Pour $k = 1, \dots, n-1$, on pose $w_k = v_k + v_{k+1}$ et $w_n = v_n + v_1$. Etudier l'indépendance linéaire de la famille $(w_1, \dots, w_n)$.

Exercice 5

Dans C (ensemble des nombres complexes), on appelle polynômes de Legendre les polynômes $P_n(X) = ((X^2 - 1)^n)^{(n)}$. (Remarque : la notation (n) en exposant signifie qu'il s'agit de la dérivée d'ordre n).

1 . Calculer le degré de P_n et son coefficient dominant.

2 . Pour $0 \leq p \leq n$, on pose $Q_p(X) = ((X^2 - 1)^n)^{(p)}$.

a. Donner le degré de Q_p

b. Démontrer que Q_p admet deux zéros d'ordre $n - p$, et p zéros d'ordre 1.

3 . En déduire que P_n s'annule exactement en n points deux à deux distincts de $] -1, 1[$.