

AVRIL 2015

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Note : *Les exercices sont indépendants et peuvent donc être traités dans l'ordre voulu par le candidat.*



Exercice 1

Question 1

Une urne contient quatre jetons numérotés de 1 à 4. On tire au hasard un jeton de l'urne, on lit le numéro, noté a , porté sur le jeton puis on remet le jeton tiré dans l'urne. On tire ensuite un deuxième jeton de l'urne et on note b le numéro du jeton tiré.

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées respectives $(a, -5, 1-a)$ et $(1+b, 1, b)$.

Calculer la probabilité que ces vecteurs soient orthogonaux.

Question 2

Deux personnes A et B jouent au jeu suivant, constitué d'un certain nombre de parties identiques décrites ci-après : au cours d'une partie, chaque joueur effectue le tirage de deux jetons décrit à la première question.

Si A obtient des vecteurs orthogonaux et B des vecteurs non orthogonaux, A est déclaré vainqueur, le jeu s'arrête.

Si A obtient des vecteurs non orthogonaux et B des vecteurs orthogonaux, B est déclaré vainqueur, le jeu s'arrête.

Dans les autres cas, les joueurs entreprennent une nouvelle partie. Le jeu continue.

Pour tout entier n , on désigne par :

- A_n l'évènement : « A gagne la n -ième partie » ;
- B_n l'évènement : « B gagne la n -ième partie » ;
- C_n l'évènement : « le jeu continue après la n -ième partie ».

- a) Calculer les probabilités $p(A_1)$, $p(B_1)$, et $p(C_1)$.
- b) Exprimer $p(C_{n+1})$ en fonction de n .
- c) Exprimer $p(A_{n+1})$ en fonction de n .

Question 3

- a) Déterminer la limite de $p(A_n)$ quand n tend vers $+\infty$.
- b) Déterminer le plus petit entier n tel que $p(A_n)$ soit inférieur ou égal à 0,01.

Exercice 2

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de coordonnées respectives (1, -1, 1), (2, -2, 2), (2, -1, 2).

Question 1

Peut-on trouver un vecteur $\vec{z}$ tel que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$ soit un système libre ? Si oui, construisez-en un.

Question 2

Même question en remplaçant $\vec{v}$ par $\vec{w}$.

Exercice 3

Déterminer a et b pour que la partie principale du développement limité en 0 de la fonction $\cos x - \frac{1+ax^2}{1+bx^2}$ soit de degré le plus grand possible.

Exercice 4

Soient x et y deux nombres réels strictement positifs. On définit :

- Leur moyenne arithmétique, notée m , par la relation $m = \frac{x+y}{2}$;
- Leur moyenne géométrique, notée g , par la relation $g = \sqrt{xy}$;
- Leur moyenne harmonique, notée h , par la relation $\frac{1}{h} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$

Question 1

Montrer que $h \leq g \leq m$ et vérifier que $\sqrt{mh} = g$.

Question 2

On définit deux suites (u_n) et (v_n) par récurrence par la donnée de u_0 et v_0 avec $0 < v_0 \leq u_0$ et par les relations de récurrence suivantes :

- u_{n+1} est la moyenne arithmétique de u_n et v_n ;
 - v_{n+1} est la moyenne harmonique de u_n et v_n .
- a) Montrer que pour tout entier n , on a $0 < v_n \leq u_n$.
 - b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante et que la suite (v_n) est croissante.
 - c) Montrer que les deux suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite notée b .
 - d) Montrer que b est la limite géométrique de u_n et v_n .

Exercice 5

Un berger possède un troupeau de 101 moutons et remarque par hasard la propriété suivante : pour chaque mouton, il peut trouver une façon de scinder le troupeau des 100 autres moutons en deux troupeaux de 50 moutons et de même poids total. Il en déduit que tous les moutons ont le même poids. Comment a-t-il fait ?

Question 1

- a) Montrer par récurrence que le déterminant de toute matrice carrée, dont les éléments diagonaux sont des nombres impairs, et dont tous les autres sont des nombres pairs, est un nombre impair.
- b) En déduire qu'une matrice de cette forme est inversible.

Question 2

On note M la matrice carrée de taille 101 construite de la manière suivante : on numérote les moutons de 1 à 101. Quand le berger retire le i -ième mouton du troupeau, il sépare alors le reste du troupeau en deux troupeaux égaux (troupeau A, troupeau B) et de même poids. On note alors $M_{i,j}$ les coefficients de la i -ième ligne et de j -ième colonne de la matrice M de la façon suivante :

$$M_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{si le } j - \text{ième mouton se trouve dans le troupeau A} \\ 2 & \text{si le } j - \text{ième mouton se trouve dans le troupeau B} \end{cases}$$

On note X la matrice uni-colonne de taille 101 constituée des poids des moutons :

$$X = \begin{pmatrix} \text{poids du mouton 1} \\ \text{poids du mouton 2} \\ \vdots \\ \text{poids du mouton 100} \\ \text{poids du mouton 101} \end{pmatrix}$$

a) Calculer $M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) Calculer MX .

c) Montrer que la matrice M est inversible.

d) En déduire X .

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Économie

CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES



Exercice 1

Question 1

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si $a + b = 5$. Pour obtenir 5, il faut tirer 1 et 4, ou 4 et 1, ou 2 et 3, ou 3 et 2, soit 4 tirages favorables sur les 4 x 4 possibles. La probabilité que les vecteurs soient orthogonaux est donc de $1/4$.

Question 2

- a) $p(A_1) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = 3/16$; $p(B_1) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = 3/16$; $p(C_1) = 1 - p(A_1) - p(B_1) = 5/8$
- b) $p(C_{n+1}) = p(C_n) \times p(C_1)$
 $p(C_{n+1}) = (5/8)^{n+1}$
- c) $p(A_{n+1}) = p(C_n) \times p(A_1) = 3/16 \times (5/8)^n$

Question 3

- a) $5/8$ étant inférieur à 1, la limite de A_n est nulle.
- b) $p(A_n)$ est inférieur ou égal à 0,01 si et seulement si $3/16 \times (5/8)^{n-1}$ est inférieur ou égal à 0,01. En poursuivant le calcul, on trouve que n doit être supérieur ou égal à 7,24. La solution pour avoir un entier est donc $n = 8$.

Exercice 2

Question 1

On a $\vec{v} = 2\vec{u}$. La famille $(\vec{u}, \vec{v})$ est donc liée. Quel que soit le vecteur $\vec{z}$, la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$ restera liée.

Question 2

La famille $(\vec{u}, \vec{w})$ est libre. Le théorème de la base incomplète nous dit qu'on peut compléter la famille libre de deux vecteurs pour en faire une base de $\mathbb{R}^3$. Par exemple, on prend un vecteur de la base canonique pour compléter. Ici, le vecteur $\vec{z}$ de coordonnées (1,0,0) convient.

Exercice 3

$$\frac{1}{1+bx^2} = 1 - bx^2 + b^2x^4 - b^3x^6 + o(x^6)$$

$$\frac{1+ax^2}{1+bx^2} = 1 + (a-b)x^2 + (b^2-ab)x^4 + (-b^3+ab^2)x^6 + o(x^6)$$

$$\begin{aligned} \cos x - \frac{1+ax^2}{1+bx^2} &= \left(-a+b-\frac{1}{2}\right)x^2 + \left(-b^2+ab+\frac{1}{24}\right)x^4 + \left(b^3-ab^2-\frac{1}{720}\right)x^6 + o(x^6) \end{aligned}$$

Les termes d'ordres 2 et 4 disparaissent si $a = -\frac{5}{12}$ et $b = \frac{1}{12}$

Dans ce cas, on trouve comme partie principale de degré 6 : $\frac{1}{480}x^6$

Exercice 4

Question 1

Evident

Question 2

- a) Démonstration par récurrence que les suites sont bien définies jusqu'à l'ordre n et vérifient la propriété demandée : c'est vrai au rang 0 et, en utilisant la question précédente, si c'est vrai au rang n , c'est vrai aussi au rang $n+1$.
- b) Puisque $v_n \leq u_n$, on sait que :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \leq \frac{u_n + u_n}{2} = u_n$$

De même, on a

$$\frac{1}{v_{n+1}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n} \right) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{v_n} + \frac{1}{v_n} \right) = \frac{1}{v_n}$$

Ce qui prouve que la suite u_n est décroissante et que la suite v_n est croissante.

- c) La suite v_n est croissante et majorée par u_0 (car $v_n \leq u_n \leq u_0$), donc convergente vers une limite notée b_1 . De même, la suite u_n est décroissante et minorée par v_0 , donc convergente vers une limite notée b_2 . En utilisant que $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$, on a $b_2 = \frac{b_2 + b_1}{2}$. Ceci prouve que b_1 est égal à b_2 .

- d) Soit G la moyenne géométrique de u_0 et v_0 . On montre par récurrence que G est la moyenne géométrique de u_n et de v_n en utilisant la question 1 ($\sqrt{mh} = g$). Passant à la limite, on a : $\sqrt{b^2} = G$, ce qui est le résultat souhaité.

Exercice 5

Question 1

- a) Si la matrice est de taille 1, le résultat est évident. On suppose le résultat vrai pour toute matrice carrée de taille $n-1$ vérifiant les conditions de l'énoncé, et on doit le prouver pour toute matrice carrée de taille n . Soit $A = (a_{i,j})$ une telle matrice carrée. On calcule son déterminant en développant par rapport à la première colonne, et on note D_i le déterminant obtenu en barrant la i ème ligne et la première colonne. On a donc :

$$\text{Det}(A) = a_{1,1}D_1 + \sum_{i=2}^n a_{i,1}(-1)^{i+1}D_i$$

Chaque D_i est un nombre entier d'après la formule qui permet de calculer le déterminant. Pour tout $i \geq 2$, $a_{i,1}$ est pair par définition et par conséquent, $a_{i,1}(-1)^{i+1}D_i$ est aussi un nombre pair. La somme de nombres pairs est un nombre pair et donc, $\sum_{i=2}^n a_{i,1}(-1)^{i+1}D_i$ est pair. De plus, $a_{1,1}$ est impair, et par hypothèse de récurrence D_1 aussi, donc $a_{1,1}D_1$ est impair. En réunissant tout, on obtient que $\text{Det}(A)$ est un nombre entier impair.

- b) Un entier impair est non nul, le déterminant de la matrice A est donc différent de zéro. La matrice A est inversible.

Question 2

- a) Un tel calcul donne une matrice colonne dont chaque ligne porte la somme des nombres de la ligne correspondante de la matrice M . Comme il y a toujours autant de moutons dans chaque troupeau, la somme vaut en regroupant les termes : $50 \times 0 + 50 \times 2 + 1 = 101$. Les résultats sont donc la matrice à 101 lignes

$$\begin{pmatrix} 101 \\ 101 \\ \vdots \\ 101 \\ 101 \end{pmatrix}$$

b) Un tel calcul donne une matrice colonne dont chaque ligne i est :

$$\text{poids mouton } i + 2 \times \sum_{\text{mouton dans } B} \text{poids mouton} + 0 \times \sum_{\text{mouton dans } A} \text{poids mouton}$$

Ce qui fait encore : poids mouton i + 2 x poids des moutons du troupeau B .

Maintenant, soit P le poids total du troupeau de mouton vaut :

$$P = \text{poids mouton } i + \text{poids des moutons dans } A + \text{poids des moutons dans } B.$$

Comme, par hypothèse, le poids des moutons dans A est égal au poids des moutons dans B , la matrice recherchée est :

$$\begin{pmatrix} P \\ P \\ \vdots \\ P \\ P \end{pmatrix}$$

c) C'est évident en utilisant la question 1.

d) D'après les questions 2.a et 2.b, on a :

$$MX = \mu M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Où $\mu = \frac{P}{101}$. Puisque M est inversible, on obtient en multipliant par M^{-1} à gauche le résultat :

$$X = \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \\ \vdots \\ \mu \\ \mu \end{pmatrix}$$

C'est bien que tous les moutons ont le même poids.