

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE  
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE  
ENSEA – ABIDJAN

AVRIL 2016

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

**ITS Voie B Option Économie**

**MATHÉMATIQUES**

**(Durée de l'épreuve : 4 heures)**

**Note :** Les exercices sont indépendants et peuvent donc être traités dans l'ordre voulu par le candidat. Dans toute l'épreuve  $R$  désigne l'ensemble des nombres réels.

**Exercice 1**

Soient  $a, b \in R$  et soit  $f$  la fonction définie sur  $R$  par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} & \text{si } x > 0 \\ ax + b & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

où  $\ln$  désigne le logarithme népérien.

1. Pour quelle(s) valeur(s) de  $a$  et  $b$  la fonction  $f$  est-elle continue en 0 ?
2. Pour quelle(s) valeur(s) de  $a$  et  $b$  la fonction  $f$  est-elle dérivable en 0 ?
3. Pour quelle(s) valeur(s) de  $a$  et  $b$  la fonction  $f$  est-elle de classe  $C^1$  sur  $R$  ?

**Exercice 2**

On considère dans  $R^4$  :

$$v_1 = (1, 3, -2, 2) \quad v_2 = (2, 7, -5, 6) \quad v_3 = (1, 2, -1, 0)$$

$$w_1 = (1, 3, 0, 2) \quad w_2 = (2, 7, -3, 6) \quad w_3 = (1, 1, 6, -2)$$

Soit  $F$  le sous-espace vectoriel de  $R^4$  engendré par  $(v_1, v_2, v_3)$  et  $G$  celui engendré par  $(w_1, w_2, w_3)$ .

1. Montrer que  $v_3$  est une combinaison linéaire de  $v_1$  et  $v_2$ . En déduire une base de  $F$ .
2. Montrer que  $w_3$  est une combinaison linéaire de  $w_1$  et  $w_2$ . En déduire une base de  $G$ .
3. Montrer que la famille  $(v_1, v_2, w_1, w_2)$  est liée. En déduire une base de  $F + G$ .
4. Soit  $E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4; 4x_1 - 2x_2 + x_4 = 0\}$ . Donner une base de  $E$ .
5. Montrer que  $F + G = E$ . La somme est-elle directe ? Donner la dimension de  $F \cap G$ .

**Exercice 3**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $R$  par  $f(x) = x - x^2$ , et  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 \in ]0, 1[$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$

1. Étudier les variations de la fonction  $f$ .
2. Montrer que, pour tout  $n$  entier naturel,  $0 < u_n < \frac{1}{n+1}$ .
3. En déduire, pour tout  $n$  entier naturel, que la suite  $(v_n)$  définie par  $v_n = nu_n$ , est croissante.
4. Montrer que la suite  $(v_n)$  admet une limite  $l$  appartenant à  $]0, 1[$  (on ne demande pas de calculer  $l$  pour le moment).
5. On pose  $w_n = n(v_{n+1} - v_n)$ . Montrer que la suite  $(w_n)$  converge vers  $l(1 - l)$ .

6. Soit  $(t_n)$  une autre suite telle que, pour  $n \geq n_0$ , on a

$$t_{n+1} - t_n \geq \frac{a}{n} \text{ avec } a > 0$$

Montrer que  $t_{2n} - t_n \geq \frac{a}{2}$  pour  $n \geq n_0$  puis que la suite  $(t_n)$  est divergente.

7. Montrer que si  $l \neq 1$ , la suite  $(v_n)$  vérifie les mêmes conditions que la suite  $(t_n)$  de la question précédente. En déduire la valeur de  $l$ .

#### Exercice 4

Soit  $A$  la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- Démontrer que cette matrice est diagonalisable et donner une matrice  $P$  inversible et une matrice  $D$  diagonale telles que  $A = PDP^{-1}$ .
- En déduire la valeur de  $A^n$  pour tout  $n$  entier naturel.

#### Exercice 5

Un livre contient 4 erreurs, numérotées de 1 à 4, et est relu par une suite de relecteurs pour correction. A chaque relecture, chaque erreur est corrigée avec une probabilité de  $1/3$ . Les erreurs sont corrigées de manière indépendante les unes des autres, et les relectures sont indépendantes les unes des autres.

- Donner la probabilité que l'erreur 1 ne soit pas corrigée à l'issue de la  $n$ -ème lecture.
- Donner la probabilité que le livre soit entièrement corrigé à l'issue de la  $n$ -ème lecture.
- Combien faut-il de relectures pour que la probabilité obtenue à la question précédente soit supérieure à 0,9 ?

#### Exercice 6

Un questionnaire à choix multiples propose  $m$  réponses à chaque question. Soit  $p$  la probabilité qu'un étudiant connaisse la bonne réponse à une question donnée. S'il ignore la réponse, il choisit au hasard l'une des réponses proposées. Donner la probabilité qu'un étudiant connaisse vraiment la bonne réponse lorsqu'il l'a donnée.

## CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

**Exercice 1**

1. La fonction  $f$  est continue en 0 si et seulement si  $f$  admet une limite à droite en 0, une limite à gauche en 0, et si ces deux limites coïncident.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = b$$

Un développement limité de la fonction  $f$  en 0 est  $f(x) = \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} = -\frac{1}{2} + o(1)$ , donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\frac{1}{2}$$

La fonction  $f$  est donc continue en 0 si et seulement si  $b = -1/2$  et  $a$  un réel quelconque

2. Pour que la fonction  $f$  soit dérivable, il faut déjà qu'elle soit continue. D'après la question précédente, il est nécessaire que  $b = -1/2$ .

Pour la dérivabilité, il faut étudier la continuité de la fonction  $g(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$  en 0. La limite à gauche de la fonction  $g$  est égale à  $a$ .

La limite à droite de la fonction  $g$  est égale, en effectuant un développement limité, à  $1/3$

La fonction  $f$  est donc dérivable en 0 si et seulement si  $b = -1/2$  et  $a = 1/3$

3. Pour que la fonction  $f$  soit de classe  $C^1$ , il faut qu'elle soit dérivable en 0. D'après la question précédente, il est donc nécessaire que  $b = -1/2$  et  $a = 1/3$ . Il faut en outre vérifier que  $f'$  est continue en 0.

$$f'(x) = \frac{\frac{x}{1+x} - x - 2 \ln(1+x) + 2x}{x^3}$$

En faisant un développement limité de cette fonction, on obtient une limite en 0 égale à  $1/3$ , ce qui est aussi le résultat obtenu à la question précédente. Ceci montre bien la continuité de la fonction  $f'$ .

**Exercice 2**

- On a  $v_3 = 3v_1 - v_2$ . Ainsi,  $F$  est engendré par  $v_1$  et  $v_2$ . Comme ces deux vecteurs ne sont pas proportionnels, ils forment une famille libre de  $F$ . C'est donc une base de  $F$ .
- On a  $w_3 = 5w_1 - 2w_2$ . Ainsi,  $G$  est engendré par  $w_1$  et  $w_2$ . Comme ces deux vecteurs ne sont pas proportionnels, ils forment une famille libre de  $G$ . C'est donc une base de  $G$ .
- Comme  $v_1 - w_1 = v_2 - w_2$ , la famille composée des 4 vecteurs est liée. On sait que ces 4 vecteurs forment une famille génératrice de  $F + G$ . Comme  $w_2$  est une combinaison linéaire des 3 autres, ces 4 vecteurs ne forment pas une base de  $F + G$ . En revanche, on démontre facilement que les 3 vecteurs  $(v_1, v_2, w_1)$  forment une famille libre. C'est donc une base de  $F + G$ .
- Une famille génératrice de  $E$  est  $((1,0,0,-4), (0,1,0,2), (0,0,1,0))$ . On démontre facilement que ces 3 vecteurs forment une famille libre. C'est donc une base de  $E$ .

5. On remarque que  $\dim(F + G) = \dim E = 3$ . Pour montrer que  $F + G = E$ , il suffit de montrer que  $F + G$  est inclus dans  $E$ . Comme  $F + G$  est engendré par  $(v_1, v_2, w_1)$ , il suffit de démontrer que ces 3 vecteurs sont éléments de  $E$ . Cette démonstration est immédiate et non faite ici.
- La somme n'est pas directe car on devrait avoir  $\dim E = \dim F + \dim G$ . Or, ce n'est pas le cas ( $3 \neq 2 + 2$ ). Comme  $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$ , on obtient  $\dim(F \cap G) = 1$ .

### Exercice 3

1. On dérive  $f: f'(x) = 1 - 2x$ , fonction qui s'annule en  $1/2$ , positive sur  $] -\infty, 1/2]$ , négative sur  $[1/2, +\infty[$ . Ainsi  $f$  est croissante sur  $] -\infty, 1/2]$ , décroissante sur  $[1/2, +\infty[$ , et  $f(1/2) = 1/4$ . On obtient une parabole concave.
2. Démonstration par récurrence : on remarque que le résultat est vrai pour  $n = 0$ . Il est aussi vrai pour  $n = 1$ . En effet si  $u_0 \in ]0, 1[$ , d'après l'étude des variations de  $f$ ,  $u_1 = f(u_0)$  est dans l'intervalle  $]0, 1/4]$ . Supposons le résultat vrai au rang  $n$ , et prouvons le au rang  $n + 1$ .

Puisque  $u_n \in ]0, \frac{1}{n+1}] \subset ]0, 1/2]$  et que la fonction  $f$  est strictement croissante sur cet intervalle, on obtient :

$$0 < u_n < \frac{1}{n+1} \rightarrow f(0) = 0 < f(u_n) = u_{n+1} < f\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

Pour conclure on remarque que :

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)^2} = -\frac{1}{(n+1)^2(n+2)} < 0$$

Ainsi on a bien :

$$0 < u_n < \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n+2}$$

3. On calcule  $v_{n+1} - v_n$  et on trouve :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= (n+1)u_{n+1} - nu_n \\ &= u_n(1 - (n+1)u_n). \end{aligned}$$

Or comme  $0 < u_n < \frac{1}{n+1}$  : on a  $u_n > 0$  et  $1 - (n+1)u_n > 0$ , et donc  $v_{n+1} - v_n \geq 0$  : la suite  $(v_n)$  est donc croissante.

4. Puisque  $v_n$  est croissante, il suffit de prouver qu'elle est majorée pour démontrer qu'elle est convergente. Mais, en utilisant la question précédente,  $v_n = nu_n \leq \frac{n}{n+1}$ . Ainsi,  $v_n \leq 1$  et la suite  $(v_n)$  est donc convergente vers une limite notée  $l$ . De plus, pour tout  $n > 1$ , on a  $v_1 \leq v_n \leq 1$ . Par passage à la limite, on en déduit que  $v_1 \leq l \leq 1$ . Il suffit enfin de remarquer que  $v_1 > 0$ .

5. On va exprimer  $w_n$  en fonction de  $v_n$  et de  $u_n$  puisqu'on sait que ces deux suites convergent. On a :

$$w_n = n(v_{n+1} - v_n) = nu_n(1 - (n+1)u_n)$$

D'après le calcul fait à la question précédente, soit :

$$w_n = v_n(1 - nu_n - u_n) = v_n(1 - v_n - u_n).$$

Puisque la suite  $(u_n)$  converge vers 0, que la suite  $(v_n)$  converge vers  $l$ , on en déduit, par les opérations usuelles sur les suites convergentes, que la suite  $(w_n)$  est convergente vers  $l(1 - l - 0) = l(1 - l)$ .

6. Pour  $n \geq n_0$  on écrit :

$$\begin{aligned} t_{2n} - t_n &= (t_{2n} - t_{2n-1}) + (t_{2n-1} - t_{2n-2}) + \dots + (t_{n+1} - t_n) \\ &\geq \frac{a}{2^{n-1}} + \frac{a}{2^{n-2}} + \dots + \frac{a}{n} \\ &\geq \frac{a}{2^n} + \frac{a}{2^n} + \dots + \frac{a}{2^n} \\ &\geq \frac{a}{2} \end{aligned}$$

Si la suite  $(t_n)$  était convergente de limite  $r$ , la suite  $(t_{2n})$  serait convergente de même limite et on aurait  $0 = r - r \geq \frac{a}{2} > 0$  ce qui est absurde donc  $(t_n)$  est divergente.

7. Supposons  $l \neq 1$ . Alors  $l(1 - l)$  est strictement positif (puisque  $l \in ]0,1[$ ). Posons  $a = l(1 - l)/2$  de sorte que  $a < l(1 - l)$ . Puisque la suite  $(w_n)$  converge vers  $l(1 - l) > a > 0$ , il existe un entier  $n_0$  tel que pour  $n \geq n_0$ , on a :

$$w_n > a \rightarrow v_{n+1} - v_n \geq \frac{a}{n}$$

Ainsi par la question précédente, on sait que  $(v_n)$  diverge. Or, ce n'est pas le cas. L'hypothèse de départ est donc fausse et la suite  $(v_n)$  converge vers 1.

#### Exercice 4

1. Le polynôme caractéristique est  $(2-x)(4-x)^2$ . 2 et 4 sont donc les valeurs propres. Pour la valeur propre 4, il faut s'assurer que le sous-espace propre associé soit bien de dimension 2 pour dire que la matrice est diagonalisable.

Pour la valeur propre 2, le sous-espace propre est engendré par le vecteur  $(1, -2, 1)$

Pour la valeur propre 4, le sous-espace propre est engendré par les vecteurs  $(0, 1, 0)$  et  $(1, 0, -1)$ .

Ils forment une famille libre donc une base de ce sous-espace.

La matrice  $A$  est donc bien diagonalisable et on a  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  et  $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

2. On sait que  $A^n = PD^nP^{-1}$ .

$$D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2^n + 4^n & 0 & 2^n - 4^n \\ 2(4^n - 2^n) & 2 \cdot 4^n & 2(4^n - 2^n) \\ 2^n - 4^n & 0 & 2^n + 4^n \end{pmatrix}$$

#### Exercice 5

1. On note  $A_i$  l'évènement « l'erreur numéro 1 n'est pas corrigée à l'issue de la  $i$ -ème relecture ». Les évènements  $A_i$  sont indépendants et  $P(A_i) = 2/3$ . On s'intéresse à la probabilité de l'évènement  $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ .

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = \prod_{i=1}^n \frac{2}{3} = 2^n / 3^n$$

2. On note  $B_j$  l'évènement « l'erreur numéro  $j$  n'est pas corrigée à l'issue de la  $n$ -ème relecture ». D'après la question précédente, on  $P(B_j) = 2^n / 3^n$  pour  $j = 1, 2, 3, 4$ . Le livre est entièrement corrigé après la  $n$ -ème relecture si l'évènement  $\bigcap_{j=1}^4 \overline{B_j}$  est réalisé. Les évènements  $B_j$  étant

indépendants, le livre est entièrement corrigé après  $n$  relectures avec une probabilité valant  
 $= \prod_{j=1}^4 (1 - \frac{2^n}{3^n}) = (1 - \frac{2^n}{3^n})^4$

3. La probabilité calculée à la question précédente est supérieure à 0,9 si et seulement si  $n \geq \frac{\ln(1-0,9^{\frac{1}{4}})}{\ln(\frac{2}{3})}$ , ce qui donne  $n \geq 10$

### **Exercice 6**

On note  $B$  l'évènement « l'étudiant donne la bonne réponse » et  $C$  l'évènement « l'étudiant connaît la bonne réponse ». On cherche  $P_B(C)$ .

On connaît  $P(C) = p$ ,  $P(B \text{ sachant } C) = 1$ ,  $P(B \text{ sachant } \bar{C}) = 1/m$

D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(B) = P(C)P(B \text{ sachant } C) + P(\bar{C})P(B \text{ sachant } \bar{C}) = \frac{(m-1)p + 1}{m}$$

D'après la formule de Bayes, la probabilité cherchée est :

$$P(C \text{ sachant } B) = \frac{P(B \text{ sachant } C)P(C)}{P(B)} = \frac{mp}{1 + (m-1)p}$$