ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE
APPLIQUÉE
ENSEA–ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE
APPLIQUÉE
ISSEA–YAOUNDE

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE–DAKAR

AVRIL 2018

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

1$^{\text{ère}}$ Composition de Mathématiques

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Exercice.

On considère le système différentiel de fonctions inconnues x, y et de variable $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t) \\ y'(t) = x(t) + 3y(t) \end{cases}$$

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice A et en déduire que la matrice $B = A - 2I_2$ est nilpotente, où I_2 est la matrice identité.
2. En utilisant sans démonstration l'égalité $e^{tA} = e^{2t}e^{t(A-2I_2)}$, valable pour tout réel t, donner l'expression de la matrice e^{tA}.
3. En utilisant ce qui précède, trouver la solution du système différentiel vérifiant

$$\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 2\,. \end{cases}$$

Problème.

On désigne par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et par $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

Partie I

On considère la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}\, z^n$ de la variable complexe z, où s est un nombre réel donné.

1. Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.
2. On suppose que $z = e^{i\theta}$ est un nombre complexe de module 1. Étudier la convergence de $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s} z^n$ dans le cas où $s > 1$ ainsi que dans le cas où $s \leq 0$.
3. On suppose que $0 < s \leq 1$. Étudier la convergence de $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s} z^n$ pour $z = 1$.
4. On suppose toujours que $0 < s \leq 1$ et $z = e^{i\theta}$ est un nombre complexe de module 1. On suppose de plus que $z \neq 1$. On pose $S_0 = 0$ et pour tout nombre entier $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} z^k$.

   (i) Montrer que $|S_n| \leq \frac{1}{|\sin \frac{\theta}{2}|}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (ii) En écrivant z^k sous la forme $S_k - S_{k-1}$ pour tout nombre entier $k \in \mathbb{N}$, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} k^{-s}\, z^k = \sum_{k=1}^{n-1} S_k \left[k^{-s} - (k+1)^{-s}\right] + S_n\, n^{-s}.$$

   (iii) Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} S_n \left[n^{-s} - (n+1)^{-s}\right]$ est convergente et en déduire que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}\, z^n$ est convergente.

Nous noterons dorénavant $\varphi(z, s)$ la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}\, z^n$ pour tout couple $(z, s) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ pour lequel cette série est convergente :

$$\varphi(z, s) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}\, z^n \,. \tag{1}$$

5. On note I l'intervalle ouvert $I =]-1, 1[$ de $\mathbb{R}$.

   (a) Montrer que pour tout $(x, s) \in I \times \mathbb{R}$ on a $\varphi(x, s+1) = \int_0^x \frac{\varphi(t, s)}{t} dt$.

(b) Calculer $\varphi(x,0)$ et $\varphi(x,1)$ pour tout $x \in I$.

6. On suppose dans cette question que $s > 1$. On définit alors $\Gamma(s)$ par l'intégrale

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{s-1} dt.$$

(i) Calculer $\Gamma(2)$.

(ii) Soit f_n la fonction définie sur $[0,+\infty[$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $f_n(t) = e^{-nt}t^{s-1}$. Montrer que f_n est intégrable sur $[0,+\infty[$ et exprimer $\int_0^{+\infty} f_n(t)dt$ à l'aide de n, s et l'intégrale $\Gamma(s)$.

(iii) Soit z un nombre complexe de module inférieur ou égal à 1. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} z^n f_n(t)$ de fonctions de la variable réelle t est intégrable terme à terme sur $]0,+\infty[$.
En déduire que pour tout $s > 1$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \leq 1$, on a

$$\varphi(z,s) = \frac{z}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - z} dt.$$

Partie II

Pour tout nombre réel $s > 1$, on pose $\zeta(s) = \varphi(1,s) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}$, où φ a été définie dans la partie **I** par la formule (1).

1. Montrer que ζ est une fonction indéfiniment dérivable de la variable s sur $]1,+\infty[$.
2. Montrer que ζ est strictement décroissante sur $]1,+\infty[$.
3. Montrer que pour tout $s \in]1,+\infty[$, on a :

$$0 \leq \zeta(s) - 1 \leq \int_1^{+\infty} t^{-s} dt \leq \zeta(s).$$

En déduire la limite de $\zeta(s)$ lorsque s tend vers $+\infty$. Déterminer un équivalent de $\zeta(s)$ lorsque s tend vers 1 par valeurs supérieures à 1.

Partie III

1. Soit g la fonction de la variable réelle x définie par :

$$(i) \quad g(x) = \left(\frac{\pi - x}{2}\right)^2 \text{ pour tout } x \in [0, 2\pi[$$

$$(ii) \quad g \text{ est périodique de période } 2\pi.$$

a- Montrer que g est paire.

b- Développer g en série de Fourier réelle.

c- Étudier l'égalité entre g et la somme de sa série de Fourier.

d- Calculer les valeurs de $\zeta(2)$ et $\zeta(4)$, où ζ est la fonction définie dans la partie précédente.

2. Soit θ un nombre réel. On note $R_\varphi(\theta)$ la partie réelle de $\varphi(e^{i\theta}, 2)$, où φ est la fonction définie dans la partie **I** par la formule (1).

a- Exprimez $R_\varphi(\theta)$ à l'aide de $g(\theta)$.

b- En déduire que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t(e^t \cos\theta - 1)}{e^{2t} - 2e^t \cos\theta + 1} \, dt = g(\theta) - \frac{\pi^2}{12}.$$

c- Déduire de ce qui précède la valeur des intégrales :

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} \, dt \qquad I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t + 1} \, dt\,.$$

d- On rappelle que sh désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\operatorname{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.
Calculer l'intégrale $I_3 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{\operatorname{sh}(t)} \, dt$
Indication : on pourra considérer $I_1 + I_2$.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

AVRIL 2018

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

ORDRE GÉNÉRAL
(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

Modernité et tradition, clivage ou complémentarité ?

Sujet n° 2

Explicitez la citation de Simone Weil, philosophe française, *« La joie est notre évasion hors du temps »*. (La connaissance surnaturelle - 1942)

Sujet n° 3

Les frontières sont-elles nécessaires ?

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

AVRIL 2018

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES
(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Les exercices sont indépendants. Dans toute la composition, R désigne l'ensemble des nombres réels.

Exercice n° 1

On considère la fonction numérique f définie sur R^+ par : $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$

1. Etudier les variations de f et tracer son graphe.

2. Pour $x>0$ et tout entier naturel n, on pose : $u_n(x)=\sqrt{\dfrac{x^n}{x+1}}$. Etudier la suite $(u_n(x))$ selon les valeurs de x.

3. Calculer $I=\int_0^1 f(x)\,dx$

Exercice n° 2

Pour $a\in R$, on définit la matrice $M(a)$, carrée d'ordre 3, par : $M(a)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ a & 1 & -a^2/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Pour $b\in R$, calculer le produit $M(a)M(b)$

2. Pour tout entier naturel n, calculer $M^n(a)$

3. La matrice $M(a)$ est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse.

4. La matrice $M(a)$ est-elle diagonalisable ? Si oui, préciser sa matrice diagonale semblable.

Exercice n° 3

Pour $t \in R$, on définit la matrice $M_t = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 \\ t & t^2 & t^3 \\ t^2 & t^3 & t^4 \end{pmatrix}$

1. Déterminer les valeurs propres de M_t

2. On justifiera la réponse à chacune des questions suivantes :
- M_t est-elle diagonalisable ?
- M_t est-elle inversible ?
- M_t peut-elle être associée à une projection orthogonale dans R^3 ?
- M_t peut-elle être associée à une symétrie dans R^3 ?

3. On considère la suite de matrices $(M_n(t))$ définie par :

$M_1(t) = M_t$ et $M_n(t) = \begin{pmatrix} 1 & t^n & t^{n+1} \\ t^n & t^{n+1} & t^{n+2} \\ t^{n+1} & t^{n+2} & t^{n+3} \end{pmatrix}$

Etudier cette suite.

Exercice n° 4

On considère la fonction numérique f définie sur R par : $f(x) = \sqrt{1+x^2}\, Ln(1+x^2)$, où Ln désigne le logarithme népérien.

1. Etudier les variations de f et tracer son graphe.

2. Calculer $I = \int_0^1 x\, f(x)\, dx$

3. Résoudre l'équation : $f(x) = 1 + x^2$

Exercice n° 5

Pour n entier strictement positif, on considère la fonction f_n définie sur $[0,1]$ par $f_n(x) = x^n - (1-x)^2$

1. Etudier la monotonie de f_n
2. Montrer que f_n admet une unique racine, que l'on notera α_n
3. Quel est le signe de $f_{n+1}(\alpha_n)$?
4. On considère la suite de terme général α_n

- Montrer que la suite (α_n) est convergente.
- Déterminer la limite de la suite (α_n).

5. Donner l'allure du graphe de f_n pour n>2 (on précisera la convexité et l'évolution du graphe quand $n \to \infty$).
6. Soit $I_n = \int_{\alpha_n}^{1} f_n(x)dx$. Calculer I_n ainsi que sa limite quand $n \to \infty$

Exercice n° 6

Soit f une fonction numérique définie et continue sur R, vérifiant la relation suivante :

$$\forall (x,y) \in R^2, |f(x) - f(y)| \geq |x - y|$$

1. Etudier la monotonie de f

2. En supposant que f est strictement croissante, montrer que f est une bijection de R dans R.

3. On suppose, dans cette question, qu'il existe un couple (a,b) de R^2, avec $a<b$, et tel que $f([a,b]) \subset [a,b]$

- Montrer que f admet un point fixe sur $[a,b]$
- On suppose que f est croissante, en déduire la forme de la restriction de f à l'intervalle $[a,b]$ (qui sera notée $f_{[a,b]}$)
- On suppose f décroissante, déterminer $f_{[a,b]}$

4. On suppose que f est croissante.

- On suppose de plus que pour tout x, $f(x) < x$. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$
- Que peut-on dire si pour tout x, $f(x) > x$?

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

AVRIL 2018

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

CONTRACTION DE TEXTE
(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Ce texte est tiré du livre de Monsieur Jean-Louis SERVAN-SCHREIBER, intitulé : « C'est la vie ! », paru aux éditions Albin Michel en avril 2015.

Il doit être résumé en 250 mots (plus ou moins 10%). Il sera tenu compte de l'orthographe, de la ponctuation et de la présentation de votre copie.

MON MONDE : unique

Même au milieu des autres, j'habite un monde qui n'appartient qu'à moi. Il est contenu en totalité dans mon cerveau et dans mon corps ; il est le produit de mes perceptions, de mes sensations, de mes pensées, de mes sentiments, de mes souvenirs, de mes connaissances et de mes ignorances. Fait de tout ce que je reçois du monde extérieur. Il est mon équipement pour y vivre. Il en est ainsi dans mon rapport à tout autre être humain, comme à tout ce que j'ai rencontré et expérimenté, au gré des jours, depuis que je suis né.

Une illusion est commune à tous : il semble si naturel de croire que les autres perçoivent le même monde que moi. Or ce qui me semble évident, aller de soi, ne l'est pas pour un autre. Comprendre cela désoriente d'abord, remet en cause mes idées reçues. Mais, une fois que je l'ai admis, je suis devenu plus tolérant en même temps que plus intéressé par l'infinie diversité de nos points de vue.

Mon cerveau est fort limité en mémoire comme en capacité à manier les idées. Mais ce qu'il a emmagasiné depuis ma naissance, ou produit en combinant tout ce qu'il a perçu, compris, retenu, est déjà si foisonnant en moi, que je ne peux en exprimer, en décrire, en partager avec d'autres qu'une infime partie. Laquelle est filtrée par celui qui m'écoute ou me lit selon ses propres critères, différents des miens. Je pense souvent que c'est une chance et une prouesse improbable de se comprendre entre nous autrement que par bribes.

Quelle que soit ma richesse intérieure, je ne peux tenter de la communiquer que par le maigre filet de mes mots, mes intonations, mes gestes ou mes intonations de visage. Il en est de même pour chacun de nous, puisque nous sommes tous porteurs de notre univers, complexe, unique, et qui restera largement inexploré, y compris par nous. Je ne prends pourtant pas cette évidence au tragique. Elle est constitutive de nous tous, humains, et nous parvenons bien à vivre ainsi. Ces mondes élaborés par chaque bipède de notre espèce pour son propre usage, sont plus ou moins originaux, intéressants ou agréables à habiter. Toutefois, c'est là que nous passons nos vies, seuls dans notre monde, mais en compagnie des autres.

Mon monde est l'œuvre de ma vie. Je le meuble, le complète, le modifie chaque jour, au gré de mes expériences et de mes idées. Au début, une cire vierge. Mes premiers souvenirs, à partir de trois ou quatre ans, étaient en forme de point d'interrogation. Qui sont ces gens qui viennent voir mes parents ? Comment répondre à ce que l'on me dit ? Qu'est ce qui est important ? Qu'est-ce que j'ai le droit de faire ? Et toujours et encore : comment ça marche, depuis les rapports avec les autres jusqu'aux objets que je les vois utiliser ?

En thérapie, on commence par explorer l'enfance, car dans nos débuts de la vie tout s'inscrit plus durablement. Puis ce que l'on apprend en vivant s'empile et forme vite un humus si épais que chaque nouvelle couche recouvre et occulte une partie de celles qui l'ont précédée. Mais le socle des impressions d'enfance reste le plus déterminant pour notre avenir.

Etudes, relations, responsabilités, découvertes, déceptions, joies, mon monde s'est ensuite constamment élargi, approfondi. Souvent en désordre et sans que j'aie toujours pu prendre le temps de bien comprendre ou situer ce qui se déposait ainsi en moi. Le résultat de cette imprégnation est forcément personnel, puisque j'en suis l'auteur et l'acteur. En même temps, le processus en est banal, car c'est ainsi que chacun s'élabore lui-même.

Nous construisons tous notre propre monde à partir des éléments communs à tous les autres, ceux du réel extérieur, trié par nos goûts, intérêts et valeurs. Le tout pimenté par les hasards de notre vécu. Comme nous ne pouvons connaître qu'une fraction de la complexité des autres et que nous ne sommes que partiellement conscients de la nôtre, on mesure combien communiquer mobilise une part essentielle de nos énergies et de nos talents. Et que les résultats ne peuvent en être qu'approximatifs.

Ce monde, le mien, est déterminé par mes capacités à savoir, comprendre, mémoriser, voir, écouter. Lesquelles sont restreintes. Nous les humains, qui nous désignons comme des semblables, sommes surtout dissemblables, par nos capacités et nos cheminements si différents.

Nos mondes ont-ils des richesses et des profondeurs variées selon nos aptitudes ? A l'évidence oui. Nous connaissons nombre de nos semblables dont nous admirons l'univers intérieur, plus large et nourri que le nôtre. Mais aussi d'autres dont le monde nous paraît bien étriqué. Chacun se construit une demeure à la mesure de ses moyens et de ce qui l'entoure, comme la chèvre broute autour de son piquet.

Certains astrophysiciens avancent des théories, dites des « multivers », selon lesquelles notre univers ne serait qu'un parmi d'autres. Je le constate à ma toute petite échelle personnelle. Mon propre univers existe dans ma tête, mais il y en a autant que d'humains vivant en même temps que moi. Si je ne pouvais concevoir au-delà du mien, j'y resterais enfermé. Heureusement mon monde personnel tient aussi compte, au moins un peu, de l'existence de ceux de tous mes semblables. Pas étonnant que l'on réalise aujourd'hui qu'il faut prendre de plus en plus en compte la complexité.

Cette singularité me rend unique, donc seul, même si je suis entouré par d'autres, dont la présence m'est agréable autant que vitale. Raison pour laquelle nous parvenons à bien vivre tous côte à côte. Une proximité n'est pas une connaissance, mais elle nous aide à palier notre solitude existentielle. Il n'y a pas là de quoi dramatiser cette condition, puisque la solitude est constitutive de notre condition d'humains autonomes. Mais si nous sommes par nature seuls, nous nous efforçons d'éviter d'être isolés.

En fait cette singularité/solitude est providentielle, car si les autres étaient et voyaient exactement comme moi, que pourraient-ils m'apporter ? Quand on fait une rencontre, on se raconte, on échange des informations et des impressions. C'est alors que je peux choisir soit d'aller plus loin dans la relation, soit, le cas le plus fréquent, d'en rester là. Mais en même temps que j'en apprends plus sur nos différences, j'explore les éventuelles similitudes et affinités. Une relation féconde se nourrit à la fois de nos dissemblances, grâce auxquelles l'autre nous complète, et de nos ressemblances qui rendent tentants les rapprochements. Là, comme dans tant de situations de la vie, j'essaye de trouver le juste équilibre entre des pôles qui peuvent paraître inconciliables.

Cet effort même rend ma vie plus intéressante. Que l'autre vive dans un monde qui lui est propre en fait à la fois sa complexité et sa richesse. Entrer en relation avec quiconque fait de moi un explorateur.

[…] L'AUTRE : un peu moi

Je dois tout aux autres. Parce que certains sont un peu moi, parce que tout ce que je sais, tout ce qui me permet de vivre me vient d'eux. Surtout dans une société d'aujourd'hui, produite et entretenue par un travail collectif incessant de milliards d'entre nous.

Seul, je ne peux pas me nourrir, me loger, me déplacer, m'instruire, me soigner, me divertir, ni surtout échapper à l'isolement. Ceux du passé ont construit ce pays où je me sens à l'aise. Ils m'ont légué des pensées, des traditions, des principes, des inventions qui rendent ma vie agréable ou simplement possible. Mes contemporains créent et fabriquent tout ce dont je peux avoir besoin et que je serais bien incapable de faire seul. Vivre grâce à tout ce qui me vient d'eux me remet à ma juste place : celle d'une minuscule partie d'un ensemble infiniment complexe.

Au-delà de ces évidences utilitaires mais nécessaires, les autres sont surtout pour moi les sources d'émotion, de stimulation, de désirs parfois, bref de vie. Parce qu'ils sont mes semblables, ils me complètent, parce qu'ils sont différents, ils m'enrichissent.

Donc, tout autre m'intrigue et m'importe. Il m'est par nature, inconnaissable. Il me reste à le découvrir constamment, par bribes. En même temps l'autre me permet de mieux me définir ; par effet miroir, par contraste, par comparaison, voire par antagonisme. Le désir que je peux aussi avoir de l'autre comporte l'espoir d'aménager ma solitude, et même, par instants de l'oublier.

D’ailleurs cette solitude existentielle est-elle une infortune ? Il est convenu de s’en plaindre, alors qu’elle découle de ma singularité de naissance, qui fonde ma liberté de vivre. Je suis seul du fait même que je suis vivant. S’en arranger est la grande affaire. Déplorer l’inévitable ne produit qu’une peine stérile. D’autant que je peux choisir librement d’être seul, quand j’en ressens le besoin. C’est d’être privé de ma solitude qui peut alors devenir une infortune.

Mais l’autre ne m’offre pas seulement sa compagnie, je suis partiellement fait de lui et il est aussi fait de moi. De bien des manières. D’abord génétique puisque, de même que nous sommes tous issus de poussières d’étoiles, je suis un cocktail des gènes de ma chaîne familiale biologique. N’est-il pas toujours troublant de retrouver en soi, dans son aspect ou son comportement, des traits que l’on pouvait constater chez nos ascendants ou collatéraux ? Si j’agis par instants comme mon père, est-ce génétique ou mimétique ? Souvent les deux à la fois. Mais ça signe aussi ce qui, dans mon destin, ne dépend pas de ma seule volonté et assure une continuité, même à mon insu.

L’essentiel de ce que j’ai appris, en bien et en moins bien, m’a été transmis par d’autres. Mes valeurs, mes références, mes exemples me sont venus d’eux, dès le début de mon existence, puis au long de mon parcours. Même en négatif. Ne pas vouloir ressembler à tel autre contribue tout autant à me définir. On se comprend soi-même autant par nos différences avec les autres que par nos similitudes.

[…] LE NOUS : il revient

S’il existe autant de mondes que d’individus singuliers, comment vivre ensemble ? La focalisation de nos contemporains sur la liberté de l’individu comme valeur fondamentale ne trouve-t-elle pas déjà ses limites ? Chacun a l’expérience plus ou moins occasionnelle, que plus je m’affirme comme individu, plus je ressens ma solitude. Cette dernière n’est pas négative par essence, mais demande, au long de ma vie, à être compensée, soutenue, complétée, bref, aménagée.

Le moment semble venu de retrouver le « nous », car l’individu triomphant, dont les droits légitimes ont été enfin reconnus, actés en loi, quasi sacralisés, a peut-être passé son apogée.

Un peu de bon sens suffit pour comprendre que mon autonomie est une fiction. L’individualisme dont se grisent les modernes que nous sommes rappelle nos illusions d’adolescents qui croyaient pouvoir s’affranchir de leurs parents. Il fallait probablement que cette soif d’émancipation s’exprime historiquement dans nos sociétés pour que nous prenions concrètement conscience de ses limites. Le moment semble venu de la dépasser pour aller plus loin en humanité.

[…] Il en était de même dans la principale cellule du nous et du vivre ensemble, la famille. Partout cette dernière reposait sur des hiérarchies méticuleuses, régissant les droits des hommes sur les femmes, comme ceux des parents sur les enfants. Les coutumes comme les religions étaient imposées dès le plus jeune âge et pérennisées une génération après l’autre. La première entrave à toute liberté, en particulier pour les femmes était familiale avant d’être politique ou sociale. Et trop rares encore sont les pays où cette contrainte s’est réellement desserrée. Dans nos nations où la parité entre les hommes et les femmes a fait de réels progrès, nous l'avons un peu vite oublié.

L'idée neuve que chacun puisse vivre pleinement sa liberté d'être, formulée en Europe dès les Lumières, s'est déployée depuis le milieu du siècle dernier. Au moment même où les idéologies collectives s'effondraient et où les technologies de communication mettaient presque le monde entier à la portée de chacun, l'individualisme trouvait là son terrain fertile. Nous voici d'autant plus autonomes qu'hyperconnectés.

Mais un nouvel isolement en a résulté. Exemple banal : dans nos rapports de travail, les liaisons électroniques sont la règle courante. Nous envoyons couramment un même message à la fois à un collègue basé à Londres et à un autre dans le bureau mitoyen. Pour le premier, c'est une plus grande proximité ; pour le second, une plus grande mise à distance. Les mêmes adolescents qui échangent constamment des messages entre eux se rencontrent moins souvent en personne.

La propagation vertigineuse de nos contacts instantanés s'est faite au détriment de leur profondeur. En s'industrialisant, la relation à l'autre s'est diluée. Notre rayon d'action et notre solitude ont progressé au même rythme. A force de se vouloir cool, le rapport à l'autre s'est refroidi. Pourtant le besoin de chaleur et de proximité humaine reste aussi présent dans chaque individu, même émancipé. Par un habituel balancier de l'histoire, l'heure du retour au « nous » se rapproche. Mais sur des bases à réinventer.

Le nous, le groupe, la communauté, la famille, sont potentiellement, à la fois oppressant et chaleureux. L'individu récemment émancipé n'est pas encore prêt à aliéner sa toute nouvelle liberté, mais commence à ressentir l'attrait de liens non hiérarchiques, non pyramidaux, pour se rapprocher des autres. L'essor actuel des formes associatives et bénévoles en témoigne. D'autant que les Etats se désengagent de plus en plus de leurs tâches et responsabilités. Face à quoi les individus comprennent tout l'intérêt pratique de se regrouper, sur la base d'une coopération librement acceptée. Est-ce si nouveau que ça ?

Comment croire en effet que l'ensemble des créations humaines n'aient pu être réalisées que par des systèmes de contrainte ? Les villages, les villes, toutes les modalités de vie commune regroupant des populations sans cesse croissantes ont demandé une capacité de coopération et une imagination qu'aucune loi, aucune hiérarchie n'aurait pu imposer. Le monde actuel est tissé d'une infinité de cellules humaines de taille variable, non hiérarchisées mais où chacun reconnaît sa dépendance aux autres et en a besoin.

[…] Le nous s'impose là au moi, du simple fait que chacun comprend qu'il en est de son intérêt. Si on y ajoute que les réseaux sociaux permettent de mettre en faisceaux les intelligences et les créativités avec une efficacité sidérante, cette numérisation du nous peut amplifier un pas en avant dans la modernité.

Le progrès de nos sociétés libres passera par l'association d'individus libres dans des actions communes qui surpassent de loin les résultats de chacun. Nous sommes en train de passer des liens imposés par la tradition et la loi, aux associations et coopérations d'autant plus fructueuses qu'elles sont consenties. Dans la morale contemporaine, la prise en compte des autres s'est, heureusement, substituée aux injonctions venues du Ciel.

Avril 2018

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

Corrigé de la $1^{\text{ère}}$ Composition de Mathématiques

Exercice.

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

$$\chi_A(X) = (1-X)(3-X) + 1 = X^2 - 4X + 4 = (X-2)^2.$$

D'après le Théorème de Caley Hamilton, $(A - 2I_2)^2 = 0$ donc $A - 2I_2$ est nilpotente.

2. Posons $B = A - 2I_2$, pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$e^{tA} = e^{2t}e^{tB} = e^{2t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(tB)^n}{n!} = e^{2t}\left(I_2 + tB + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{t^nB^n}{n!}\right) = e^{2t}\left(I_2 + tB\right).$$

Car $B^2 = 0$, ce qui implique $B^n = 0$, $\forall n \geq 2$.

3. En notant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, notre système d'équations se réécrit sous la forme matricielle

$$X'(t) \;=\; AX(t) \quad \text{avec condition initiale} \quad X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Cette équation différentielle homogène de première ordre admet pour unique solution, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall t \in \mathbb{R}, X(t) = e^{tA}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Simplifions cette dernière expression.
Soit $t \in \mathbb{R}$. $e^{tA}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = e^{2t}(I_2 + tB)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = e^{2t}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + tB\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = e^{2t}\begin{pmatrix} 1-3t \\ 2+3t \end{pmatrix}$.
Conclusion : l'unique couple solution est le couple $(t \mapsto e^{2t}(1-3t); t \mapsto e^{2t}(2+3t))$.

Problème.

Partie I

On considère la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}\, z^n$ de la variable complexe z, où s est un nombre réel donné.

1. Posons $a_n = n^{-s}$, $n \geq 1$. On a

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^s = 1.$$

On déduit de la règle de d'Alembert que le rayon de convergence de la série entière est $R = 1$.

2. Si $s > 1$, $|n^{-s}z^n| = n^{-s}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}$ est une série à termes positifs convergente car $s > 1$ (règle de Riemann). La convergence absolue de la série entraine donc sa convergence.
Si $s \leq 0$, $|n^{-s}z^n| = n^{-s} \geq 1$. La suite $(n^{-s}z^n)$ ne tend pas vers 0 et la série diverge.

3. Pour $z = 1$, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}$ diverge car $s < 1$ (règle de Riemann).

4. On suppose toujours que question que $0 < s \leq 1$ et $z = e^{i\theta} \neq 1$. On pose $S_0 = 0$ et pour tout nombre entier $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} z^k$.

(i) S_n est la somme des termes d'une suite géométrique de raison $z \neq 1$. Donc $S_n = z\dfrac{1-z^n}{1-z}$. Ce qui donne par l'inégalité triangulaire $\left|S_n\right| \leq \dfrac{2}{|1-z|}$. Or $1 - z = (1 - \cos(\theta)) + i\sin(\theta)$ et $|1-z| = \sqrt{(1-\cos(\theta))^2 + \sin^2(\theta)} = \sqrt{2 - 2\cos(\theta)} = \sqrt{4\sin^2(\theta/2)}$.
D'où $|S_n| \leq \dfrac{1}{|\sin(\theta/2)|}$.

(ii) On a $z^k = S_k - S_{k-1} \Longrightarrow \sum_{k=1}^{n} k^{-s}\, z^k = \sum_{k=1}^{n} k^{-s}\, S_k - \sum_{k=1}^{n} k^{-s}\, z^{k-1}$, puis par changement d'indices, $\sum_{k=1}^{n} k^{-s}\, z^k = \sum_{k=1}^{n} k^{-s}\, S_k - \sum_{k=1}^{n-1} (k+1)^{-s}\, z^{k-1}$. En regroupant les termes de même indice, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} k^{-s}\, z^k = \sum_{k=1}^{n-1} S_k \left[k^{-s} - (k+1)^{-s}\right] + S_n\, n^{-s}.$$

(iii) D'après la question précédente, la suite (S_n) est bornée, comme $s > 0$, $\lim_{n\to+\infty} n^{-s}S_n = 0$. D'autre part pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \left|S_k\left[k^{-s} - (k+1)^{-s}\right]\right| &\leq \frac{1}{|\sin(\theta/2)|} \sum_{k=1}^{n} \left[k^{-s} - (k+1)^{-s}\right] \\ &= \frac{1}{|\sin(\theta/2)|}\left(1 - (n+1)^{-s}\right),\end{aligned}$$

comme $\lim_{n\to+\infty} (n+1)^{-s} = 0$, la dernière inégalité prouve que $\sum_{k=1}^{n} S_k\left[k^{-s} - (k+1)^{-s}\right]$ est une série absolument convergente, donc convergente.
Conclusion : la série $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}\, z^n$ est convergente.

Nous noterons dorénavant $\varphi(z, s)$ la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}\, z^n$ pour tout couple $(z, s) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ pour lequel cette série est convergente :

$$\varphi(z, s) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}\, z^n\,. \tag{1}$$

5. On note I l'intervalle ouvert $I =]-1, 1[$ de $\mathbb{R}$.

(a) Posons $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\varphi(t,s)}{t}dt$. On utilise les résultats sur les séries entières : la fonction $f : t \mapsto \dfrac{\varphi(t,s)}{t} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}\, t^{n-1}$ a un développement en série entière de rayon de convergence $R = 1$ et on cherche une primitive F de f telle que $F(0) = 0$. On sait que dans le disque de convegence, toute primitive de f a un développement en série entière $F(x) = F(0) + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}\,\frac{x^n}{n} = F(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-(s+1)}\, x^n = \varphi(x, s+1)$. On aboutit au résultat demandé car $F(0) = 0$.

Remarque : On pourrait aussi utiliser l'intégration terme à terme d'une série de fonction.

(b) $\varphi(x,0) = 0$ et $\varphi(x,1) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$.

6. On suppose dans cette question que $s > 1$. Pour $s > 1$, on définit $\Gamma(s)$ par l'intégrale $\Gamma(s) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{s-1}dt$.

(i) On calcule $\Gamma(2)$ en utilisant une intégration par parties : on pose $u(t) = t \Rightarrow u'(t) = 1$, $v(t) = -e^{-t} \Rightarrow v'(t) = e^{-t}$ et on obtient

$$\Gamma(2) = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1\,.$$

(ii) Soit f_n la fonction définie sur $[0,+\infty[$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $f_n(t) = e^{-nt}\, t^{s-1}$.
Fixons $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est continue sur l'intervalle $[0,+\infty[$ en particulier au point 0, car $s-1 > 0$, il suffit alors de vérifier que f_n est intégrable au voisinage de $+\infty$.
Puisque $n \geq 1$, au voisinage de $+\infty$, $f_n = O(1/t^2)$; or $t \mapsto 1/t^2$ est positive est intégrable sur tout intervalle de type $[a,+\infty[$, $a > 0$. Soit $a > 0$, f_n est intégrable sur $[a,+\infty[$, continue sur $[0,a]$, donc intégrable sur $[0,+\infty[$.
Pour calculer l'intégrale de f_n, on effectue le changement de variables affine $u = nt$, ce qui donne

$$\int_0^{+\infty} f_n(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-u}\left(\frac{u}{n}\right)^{s-1}\frac{du}{n}\,du = \frac{1}{n^s}\Gamma(s)\,.$$

(iii) Soit z un nombre complexe de module inférieur ou égal à 1.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = z^n f_n(t)$. Montrons que les hypothses du théorème d'interversion série-intégrale sont satisfaites :
• Pour tout $n \geq 1$, u_n est continue sur $[0,+\infty[$ et $|u_n| = |z^n f_n| \leq |f_n|$. D'après la question précédente, u_n est intgrable sur $[0,+\infty[$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
• $u_n(t) = \left(ze^{-t}\right)^n t^{s-1}$ qui est une suite géometrique de raison $r = ze^{-t}$ telle que $|r| \leq e^{-t} < 1$ pour tout $t \in]0,+\infty[$. Donc la série $\sum u_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(t) = ze^{-t}t^{s-1}\dfrac{1}{1-ze^{-t}}$.
• g est continue sur $]0,+\infty[$.
• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} |u_n(t)|dt = |z^n| \int_0^{+\infty} f_n(t)dt \leq \frac{\Gamma(s)}{n^s}$; il s'en suit par la règle de Riemann que $\displaystyle\sum \int_0^{+\infty} |u_n(t)|dt$ converge car $s > 1$.

On peut alors utiliser le théorème d'interversion série-intégrale : la fonction g est intégrable sur $]0,+\infty[$ et $\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} u_n(t)dt = \int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t)\right)dt = \int_0^{+\infty} g(t)dt$. Soit

$$z\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}t^{s-1}}{1-ze^{-t}}\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} z^n\frac{\Gamma(s)}{n^s} = \Gamma(s)\varphi(z,s)\,.$$

En multipliant numérateur et dénominateur dans l'intégrale par e^t, on obtient la formule demandée :

$$\varphi(z,s) = \frac{z}{\Gamma(s)}\int_0^{+\infty}\frac{t^{s-1}}{e^t - z}\,dt.$$

Partie II

Pour tout nombre réel $s > 1$, on pose $\zeta(s) = \varphi(1,s) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}$, où φ a été définie dans la partie **I** pa la formule (1).

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application $h_n :]1,+\infty[$ définie par $h_n(s) = \frac{1}{n^s} = e^{-s\ln n}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$ et pour tous $k \in \mathbb{N}$ et $s \in]1,+\infty[$, $h_n^{(k)}(s) = \frac{\big(-\ln n\big)^k}{n^s}$.
   Soit $1 < a < +\infty$ fixé. Puisque la série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\big(\ln n\big)^k}{n^a}$ est convergente, les séries $\sum_{n\geq 1} h_n^{(k)}$, $k \geq 1$ sont normalement, donc uniformément convergentes sur $[a,+\infty[$. D'après le théorème de dérivation terme à terme des séries de fonctions, il en résulte que ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[a,+\infty[$ et que $\zeta^{(k)}(s) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\big(-\ln n\big)^k}{n^s}$ pour tout $s \in]a,+\infty[$. Comme $1 < a < +\infty$ est arbitraiment pris, on en déduit que ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1,+\infty[$ et que $\zeta^{(k)}(s) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\big(-\ln n\big)^k}{n^s}$ pour tout $s \in]1,+\infty[$.

2. D'après la question précédente, la fonction ζ est dérivable sur $]1,+\infty[$ et

$$\zeta'(s) = -\sum_{n\geq 1}\frac{\ln n}{n^s} < 0\,.$$

   Donc la fonction ζ est strictement décroissante sur $]1,+\infty[$.

3. On utilise une comparaison entre série et intégrale : en considérant la fonction $t \to \frac{1}{t^s}$ sur l'intervalle $[k,k+1[$ $(k \geq 1)$, on a $\frac{1}{\big(k+1\big)^s} \leq \int_k^{k+1}\frac{1}{t^s}dt \leq \frac{1}{k^s}$. D'où, en additionnant ces inégalités membre à membre $(k = 1,\cdots,k = n)$ on obtient,

$$\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k^s} \leq \int_1^{n+1}\frac{1}{t^s}dt \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^s}\,.$$

La fonction $t \mapsto t^{-s}$ est intégrable sur $]1, +\infty[$ (l'intégrale sur $]1, +\infty[$ est de même nature que la série $\zeta(x)$). Lorsque $n \to +\infty$, on obtient $\zeta(s) - 1 \leq \displaystyle\int_1^{+\infty} t^{-s} dt \leq \zeta(s)$. De plus $\zeta(s) - 1 = \sum_{n=2}^{+\infty} n^{-s} \geq 0$ ce qui complète l'encadrement

$$0 \leq \zeta(s) - 1 \leq \int_1^{+\infty} t^{-s} dt \leq \zeta(s). \tag{2}$$

Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{-s} dt = \lim_{t \to +\infty} \frac{t^{1-s}}{1-s} = \frac{1}{s-1}$, ce qui donne $1 \leq \zeta(s) \leq 1 + \frac{1}{s-1}$. Losque $s \to +\infty$, on obtient $\displaystyle\lim_{s \to +\infty} \zeta(s) = 1$.
De même, en multipliant par $s - 1 > 0$ tous les membres de l'inégalité (2), on obtient $0 \leq (s-1)\zeta(s) - (s-1) \leq 1 \leq (s-1)\zeta(s)$. Losque $s \to +\infty$, on oboutit à $\lim_{s \to 1}(s-1)\zeta(s) = 1$ soit $\zeta(s) \sim 1/(s-1)$ au voisinage de 1.

Partie III

1. Soit g la fonction de la variable réelle x définie par :

$$(i) \quad g(x) = \left(\tfrac{\pi - x}{2}\right)^2 \text{ pour tout } x \in [0, 2\pi[$$

$$(ii) \quad g \text{ est périodique de période } 2\pi.$$

a- Comme g est périodique de période 2π, il suffit de montrer qu'elle est paire sur $[-\pi, \pi]$. Or pour tout $x \in [-\pi, 0[$, $x + 2\pi \in [0, 2\pi[$ et $-x \in]0, \pi]$, ce qui implique

$$g(x) = g(x + 2\pi) = \left(\frac{\pi + x}{2}\right)^2 = g(-x).$$

D'où la parité de g.

b- La fonction g est continue sur $[0, 2\pi]$ et périodique, elle est donc continue sur $\mathbb{R}$. Calculons sa série de Fourier. g étant paire ses coefficients $b_n(g) = \displaystyle\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin(nt)\, dt = 0$ et $a_n(g) = \displaystyle\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(t)\cos(nt)\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} (t - \pi)^2 \cos(nt)\, dt$. Pour $n \geq 1$, on effectue une double intégration par parties.
- Première intégration par parties : on pose $U = (t - \pi)^2 \Rightarrow U' = 2(t - \pi)$, $V' = \cos(nt) \Rightarrow V = \frac{1}{n}\sin(nt)$,

$$a_n(g) = \frac{1}{2\pi}\Big[(t-\pi)^2 \frac{1}{n}\sin(nt)\Big]_0^{\pi} - \frac{1}{n}\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} 2(t-\pi)\sin(nt) = -\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}(t-\pi)\sin(nt)dt\,.$$

- Deuxième intégration par parties : on pose $X = (t - \pi) \Rightarrow X' = 1$, $Y' = \sin(nt) \Rightarrow Y = -\frac{1}{n}\cos(nt)$,

$$\begin{aligned} a_n(g) &= \frac{1}{n\pi}\Big[(t-\pi)\frac{1}{n}\cos(nt)\Big]_0^{\pi} + \frac{1}{n^2\pi}\int_0^{\pi}\cos(nt)dt \\ &= \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2\pi}\Big[\sin(nt)\Big]_0^{\pi} = \frac{1}{n^2}\,. \end{aligned}$$

Il reste à calculer $a_0(g) = \displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(t-\pi)^2\, dt = \frac{\pi^2}{6}$.

c- g est continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 par morceaux. On peut alors appliquer le théorème de Dirichlet, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g(t) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(g)\cos(nt)$ et en particulier, pour tout $t \in [0, 2\pi]$

$$g(t) = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\cos(nt) = \Big(\frac{\pi - x}{2}\Big)^2. \tag{3}$$

d- En prenant $t = 0$ dans la relation (3), on a $\dfrac{\pi^2}{4} = \dfrac{\pi^2}{12} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, ce qui donne

$$\zeta(2) \;=\; \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \;=\; \frac{\pi^2}{6}.$$

Pour calculer $\zeta(4)$, on utilise l'inégalité de Parseval : puisque g est continue et l'intervalle fermé sur $[0, 2\pi]$, on a $\displaystyle\int_0^{2\pi} \big(g(t)\big)^2\,dt \;<\; +\infty$, comme de plus elle est 2π-périodique, par la formule de Parseval

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Big(\frac{\pi - x}{2}\Big)^4 dx \;=\; \frac{1}{16\pi}\int_0^{\pi} \big(\pi - x\big)^4 dx \;=\; \Big(\frac{a_0}{2}\Big)^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \big(a_n(g)\big)^2$$

car g est 2π-périodique et paire. En effectuant dans l'intégrale le changement de variable $u = \pi - x$, on obtient

$$\frac{\pi^2}{12^2} + \frac{1}{2}\zeta(4) = \frac{1}{16\pi}\int_0^{\pi} u^4 du = \frac{\pi^4}{80},$$

ce qui donne

$$\zeta(4) \;=\; \frac{\pi^4}{90}\,.$$

2. Soit θ un nombre réel. On note $\mathrm{Re}(\varphi(\theta))$ la partie réelle de $\varphi(e^{i\theta}, 2)$ où φ est la fonction définie à la question I.2.

a- On a

$$R_\varphi(\theta) = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in\theta}}{n^2}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{Re}(e^{in\theta})}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n^2} = g(\theta) - \frac{\pi^2}{12}\,.$$

b- D'après la formule de la question **I**.6.(iii)

$$\begin{aligned} R_\varphi(\theta) = \mathrm{Re}(\varphi(\theta, 2)) &= \mathrm{Re}\left(\frac{e^{i\theta}}{\Gamma(2)}\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - e^{i\theta}}\,dt\right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(2)}\int_0^{+\infty} \mathrm{Re}\left(\frac{t\,e^{i\theta}}{e^t - e^{i\theta}}\right) dt. \end{aligned}$$

Considérons la fonction dans l'inégrale, en multipliant numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur, on a

$$\frac{t\,e^{i\theta}}{e^t - e^{i\theta}} = \frac{t\,e^{i\theta}\big(e^t - e^{-i\theta}\big)}{\big(e^t - e^{i\theta}\big)\big(e^t - e^{-i\theta}\big)} = \frac{t\,\big(e^{t+i\theta} - 1\big)}{e^{2t} - 2e^t\cos\theta + 1}\,.$$

La partie réelle du membre de droite de cette dernière égalité est $\dfrac{t\,\big(e^t\cos\theta - 1\big)}{e^{2t} - 2e^t\cos\theta + 1}$. D'autre part, d'après la question **I**.6.(i), $\Gamma(2) = 1$. On obtient donc

$$R_\varphi(\theta) = \int_0^{+\infty} \frac{t(e^t\cos\theta - 1)}{e^{2t} - 2e^t\cos\theta + 1}\,dt = g(\theta) - \frac{\pi^2}{12}.$$

c- On calcule I_1 et I_2 en donnant des valeurs particulières à θ :

- Pour $\theta = 0$, on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\big(e^t - 1\big)}{e^{2t} - 2e^t + 1}\, dt \;=\; \frac{\pi^2}{6}$,

  or $\dfrac{t\big(e^t - 1\big)}{e^{2t} - 2e^t + 1} \;=\; \dfrac{t\big(e^t - 1\big)}{\big(e^t - 1\big)^2} = \dfrac{t}{e^t - 1}$. D'où $I_1 \;=\; \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1}\, dt \;=\; \frac{\pi^2}{6}$.

- De la même manière, pour $\theta = \pi$, on a $-\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\big(e^t + 1\big)}{e^{2t} + 2e^t + 1}\, dt \;=\; -\frac{\pi^2}{12}$, et $\dfrac{t\big(e^t + 1\big)}{e^{2t} + 2e^t + 1} \;=\; \dfrac{t\big(e^t + 1\big)}{\big(e^t + 1\big)^2} \;=\; \dfrac{t}{e^t + 1}$. D'où $I_2 \;=\; \dfrac{\pi^2}{12}$.

d- Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\dfrac{t}{e^t - 1} \;+\; \dfrac{t}{e^t + 1} \;=\; \dfrac{t}{\mathrm{sh}(t)}$; ainsi $I_3 = I_1 + I_2 = \dfrac{\pi^2}{4}$.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

AVRIL 2018

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

CORRIGÉ DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Les exercices sont indépendants. Dans toute la composition, *R* désigne l'ensemble des nombres réels.

Exercice n° 1

On considère la fonction numérique *f* définie sur R^+ par : $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$

1. Etudier les variations de *f* et tracer son graphe.

La dérivée est égale à (pour *x* non nul): $f^{'}(x)=\dfrac{1}{2(1+x)^2\sqrt{x/(x+1)}}>0$

La fonction est continue et strictement croissante de R^+ sur $[0,1[$, elle admet la droite *y*=1 comme asymptote, une tangente verticale à l'origine et elle est concave.

2. Pour *x*>0 et tout entier naturel *n*, on pose : $u_n(x)=\sqrt{\dfrac{x^n}{x+1}}$. Etudier la suite $(u_n(x))$ selon les valeurs de *x*.

On obtient :

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x)=\begin{cases}0 & si\ \ x<1\\ 1/\sqrt{2} & si\, x=1\\ +\infty & si\ \ x>1\end{cases}$$

3. Calculer $I=\int_0^1 f(x)\,dx$

On pose $t=\sqrt{x+1}$, d'où $dx=2t\,dt$ et $x=t^2-1$ pour obtenir $I=2\int_1^{\sqrt{2}}\sqrt{t^2-1}\;dt$

Puis on pose $t = ch\,u$ pour obtenir : $I = \int_{Argch1}^{Argch\sqrt{2}} sh^2(u)du$ (on rappelle que $ch^2(u) - sh^2(u) = 1$, $shu = \frac{e^u - e^{-u}}{2}$ et $Argchu = Ln(u + \sqrt{u^2 - 1})$).

Puis

$$I = \frac{1}{2}\int_{Argch1}^{Argch\sqrt{2}} (e^{2u} + e^{-2u} - 2)\,du = \left[\frac{e^{2u} - e^{-2u}}{4} - u\right]_{Argch1}^{Argch\sqrt{2}} = \frac{1}{4}\left((\sqrt{2}+1)^2 - \frac{1}{(\sqrt{2}+1)^2}\right) - Ln(1+\sqrt{2})$$

Après simplification, on obtient : $I = \frac{4+3\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}} - Ln(1+\sqrt{2}) = \sqrt{2} - Ln(1+\sqrt{2})$

Autre méthode : On pose $t = \sqrt{\frac{x}{x+1}}$, d'où $x = \frac{t^2}{1-t^2}$ et $d\,x = \frac{2t}{(1-t^2)^2}dt$.

Puis $I = \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{2t^2}{(1-t^2)^2}dt = \int_0^{1/\sqrt{2}} t \times \frac{2t}{(1-t^2)^2}dt$ que l'on intègre par parties en posant : $u = t \;\; et \;\; v' = \frac{2t}{(1-t^2)^2}$ pour obtenir

$$I = \left[\frac{t}{1-t^2}\right]_0^{1/\sqrt{2}} - \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{1}{(1-t^2)}d\,t = \sqrt{2} - \frac{1}{2}\int_0^{1/\sqrt{2}}\left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right)d\,t = \sqrt{2} - \frac{1}{2}Ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right) = \sqrt{2} - Ln(1+\sqrt{2})$$

Exercice n° 2

Pour $a \in R$, on définit la matrice $M(a)$, carrée d'ordre 3, par : $M(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ a & 1 & -a^2/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Pour $b \in R$, calculer le produit $M(a)M(b)$

On obtient $M(a)M(b) = M(a+b)$

2. Pour tout entier naturel n, calculer $M^n(a)$

On déduit de la question précédente que : $M^2(a) = M(2a)$ et par récurrence que $M^n(a) = M(na)$

3. La matrice $M(a)$ est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse.

Soit $b=-a$, on a : $M(a)M(-a)=M(0)=I$ donc la matrice est inversible et $M^{-1}(a)=M(-a)$

4. La matrice $M(a)$ est-elle diagonalisable ? Si oui, préciser sa matrice diagonale semblable.

On a de façon triviale $\det(M(a)-\lambda I)=(1-\lambda)^3$ et $\lambda=1$ est une valeur propre triple. La matrice sera diagonalisable si et seulement si la dimension du sous-espace propre associé est égale à 3, ce qui est possible seulement pour a=0 et la matrice unité est la matrice diagonale semblable.

Exercice n° 3

Pour $t\in R$, on définit la matrice $M_t=\begin{pmatrix}1 & t & t^2\\ t & t^2 & t^3\\ t^2 & t^3 & t^4\end{pmatrix}$

1. Déterminer les valeurs propres de M_t

On peut remarquer que les 3 colonnes sont dépendantes, donc zéro est une valeur propre double.

Le déterminant de $M_t-\lambda I$ est donc de la forme : $-\lambda^2(\lambda-a)$. La trace étant invariante par changement de base, on obtient comme troisième valeur propre : $1+t^2+t^4$

2. On justifiera la réponse à chacune des questions suivantes /

- M_t est-elle diagonalisable ? Oui, car symétrique
- M_t est-elle inversible ? Non, car des colonnes dépendantes
- M_t peut-elle être associée à une projection orthogonale dans R^3 ? Pour une matrice de projection orthogonale 0 et 1 sont des valeurs propres. Comme 0 est une valeur propre double, cela ne peut être qu'une projection orthogonale sur une droite à condition que : $1+t^2+t^4$ soit égal à 1. Il faut donc $t=0$ et on a une projection orthogonale sur l'axe Ox, dont la matrice est

$$P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

- M_t peut-elle être associée à une symétrie dans R^3 ? Non, car -1 ne peut pas être une valeur propre.

3.On considère la suite de matrices $(M_n(t))$ définie par :

$$M_1(t)=M_t \text{ et } M_n(t)=\begin{pmatrix}1 & t^n & t^{n+1}\\ t^n & t^{n+1} & t^{n+2}\\ t^{n+1} & t^{n+2} & t^{n+3}\end{pmatrix}$$

Etudier cette suite.

Si t=1, la suite est constante $M_n(1)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Si $|t|<1$, la suite est convergente vers P

Dans les autres cas, la suite est divergente.

Exercice n° 4

On considère la fonction numérique f définie sur R par : $f(x)=\sqrt{1+x^2}\,Ln(1+x^2)$, où Ln désigne le logarithme népérien.

1. Etudier les variations de f et tracer son graphe.

La fonction est paire et il suffit donc de l'étudier sur R^+ et son graphe est symétrique par rapport à l'axe Ox. Sa dérivée est égale est : $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}(Ln(1+x^2)+2)$. Cette dérivée est positive et la fonction est strictement croissante de R^+ sur R^+. Son graphe admet une branche parabolique dans la direction Oy et la pente de la tangente à l'origine est horizontale.

2. Calculer $I=\int_0^1 x\,f(x)\,dx$

$I=\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\,Ln(1+x^2)\,dx$ et on fait une intégration par parties, en posant $u'=x\sqrt{1+x^2}$ et $v=Ln(1+x^2)$. D'où

$$I=\left[\frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2}\,Ln(1+x^2)\right]_0^1-\frac{1}{3}\int_0^1 2x\sqrt{1+x^2}\,dx=\frac{1}{3}(2\sqrt{2}\,Ln2)-\frac{1}{3}\left[\frac{2}{3}(1+x^2)^{3/2}\right]_0^1$$

Et $I=\dfrac{1}{3}(2\sqrt{2}\,Ln2)-\dfrac{2}{9}(2\sqrt{2}-1$

3. Résoudre l'équation : $f(x)=1+x^2$

Il faut résoudre : $Ln(1+x^2)=\sqrt{1+x^2}$, puis en posant $u=\sqrt{1+x^2}$, il faut résoudre l'équation : $z=Ln u-\dfrac{1}{2}u=0$; La dérivée de z est égale à $z'=\dfrac{2-u}{u}$ qui s'annule pour u=2 et qui admet un maximum négatif en cette valeur, donc la fonction z est toujours strictement négative et l'équation n'admet pas de racines.

Exercice n° 5

Pour n entier strictement positif, on considère : $f_n : [0,1] \to R$ définie par $f_n(x) = x^n - (1-x)^2$

1. Etudier la monotonie f_n

On a : $f_n'(x) = n\,x^{n-1} + 2(1-x) > 0$, car $x \in [0,1]$, la fonction est donc strictement croissante sur son domaine de définition.

2. Montrer que f_n admet une unique racine, que l'on notera α_n

On a : $f_n(0) = -1$ et $f_n(1) = 1$. Comme f_n est continue et strictement croissante, elle est bijective, donc il existe une unique valeur α_n telle que $f_n(\alpha_n) = 0$ (on peut aussi évoquer le théorème des valeurs intermédiaires).

3. Quel est le signe de $f_{n+1}(\alpha_n)$?

On a : $f_n(\alpha_n) = 0$, soit $\alpha_n^n = (1-\alpha_n)^2$.

Puis $f_{n+1}(\alpha_n) = \alpha_n^{n+1} - (1-\alpha_n)^2 = \alpha_n^{n+1} - \alpha_n^n = \alpha_n^n(\alpha_n - 1) < 0$

4. On considère la suite de terme général α_n

- Montrer que la suite (α_n)

Comme f_n est une bijection croissante, on a : $0 = f_{n+1}(\alpha_{n+1}) > f_{n+1}(\alpha_n) \Rightarrow \alpha_{n+1} > \alpha_n$. La suite est donc croissante et comme elle est majorée par 1, elle est convergente vers une valeur α

- Déterminer la limite de la suite (α_n)

La suite étant croissante, on a : $0 < \alpha_n < \alpha$ et $0 < \alpha_n^n < \alpha^n$

Si $0 < \alpha < 1$, alors $\underset{n\to\infty}{Lim}\,\alpha^n = 0$ et $\underset{n\to\infty}{Lim}\,\alpha_n^n = 0$;

Par ailleurs, on a : $f_n(\alpha_n) = 0$, soit $\alpha_n^n = (1-\alpha_n)^2$, donc $\underset{n\to\infty}{Lim}\,\alpha_n = 1 = \alpha$. Ce qui est contraire à l'hypothèse. En conclusion $\alpha = 1$.

5. Donner l'allure du graphe de f_n pour n>2 (on précisera la convexité et l'évolution du graphe quand $n \to \infty$)

On a : $f_n''(x) = n(n-1)x^{n-2} - 2$ qui est nulle pour $x = \sqrt[n-2]{2/n(n-1)}$. La fonction est convexe pour $x > \sqrt[n-2]{2/n(n-1)}$ et concave dans le cas contraire sur son domaine de définition.

Quand $n \to \infty$, l'abscisse du point d'inflexion tend vers zéro, la partie convexe du graphe augmente et le graphe de f_{n+1} est en dessous de celui de f_n

6. Soit $I_n = \int_{\alpha_n}^{1} f_n(x)dx$. Calculer I_n ainsi que sa limite quand $n \to \infty$

$$I_n = \int_{\alpha_n}^{1} f_n(x)dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{1}{3}(1-x)^3\right]_{\alpha_n}^{1} = \frac{1-\alpha_n^{n}}{n+1} - \frac{1}{3}(1-\alpha_n)^3$$ qui tend vers zéro.

Exercice n° 6

Soit *f* une fonction numérique définie et continue sur *R*, vérifiant la relation suivante :

$$\forall (x,y) \in R^2, |f(x) - f(y)| \geq |x - y|$$

1. Etudier la monotonie de *f*

Pour $(x,y) \in R^2$ tel que : $f(x) = f(y)$, on a $|x-y| \leq |f(x) - f(y)| = 0$ et donc *f* est injective. Comme de plus elle est continue et définie sur un intervalle de *R*, elle est strictement monotone.

2. En supposant que *f* est strictement croissante, montrer que *f* est une bijection de *R* dans *R*.
Comme la fonction est croissante, elle admet une limite à $+\infty$, qui est soit $+\infty$ ou une limite finie *l*.
Si la fonction admet une limite finie, alors pour tout *x* nombre réel, $f(x+1) - f(x) = |f(x+1) - f(x)| \geq |x+1-x| = 1$. En passant à la limite dans cette inégalité, on obtient : $0 = l - l \geq 1$, ce qui est faux. Par conséquent $\underset{+\infty}{Lim} f(x) = +\infty$. On peut tenir le même type de raisonnement à $-\infty$ pour obtenir $\underset{-\infty}{Lim} f(x) = -\infty$.
On en déduit que $f(R) = R$ et que la fonction continue et strictement croissante est bijective.

3. On suppose, dans cette question, qu'il existe un couple (a,b) de R^2, avec $a<b$, et tel que $f([a,b]) \subset [a,b]$
- Montrer que *f* admet un point fixe sur $[a,b]$
On a évidemment $f(a) \geq a,\ f(b) \leq b$. On considère l'application g définie sur $[a,b]$ par $g(x) = f(x) - x$. Cette fonction *g* est continue avec $g(a) \geq 0,\ g(b) \leq 0$ et d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel *c* de l'intervalle $[a,b]$ tel que $g(c) = 0$, d'où $f(c) = c$.

- On suppose que *f* est croissante, en déduire la forme de la restriction de *f* à l'intervalle $[a,b]$ (qui sera notée $f_{[a,b]}$)
Soit *c* un point fixe de *f*. Du fait de la croissance de la fonction, on a
$f(c) - f(a) = |f(c) - f(a)| \geq |c - a| = c - a$ et comme $f(c) = c$, alors $f(a) \leq a$, d'où $f(a) = a$
En appliquant la même démarche en *b*, on obtient $f(b) \geq b$ et donc $f(b) = b$
Pour tout *x* de $[a,b]$, on a
$f(x) - a = |f(x) - f(a)| \geq |x - a| = x - a$, d'où $f(x) \geq x$ et
$b - f(x) = |f(b) - f(x)| \geq |b - x| = b - x$, d'où $f(x) \leq x$
En conclusion *f* est l'application identique sur l'intervalle $[a,b]$

- On suppose f décroissante, déterminer $f_{[a,b]}$

Soit g la fonction définie sur R par $g(x) = a + b - f(x)$, g est continue et vérifie la même relation que f, à savoir $\forall (x, y) \in R^2, |g(x) - g(y)| \geq |x - y|$

Par ailleurs, $a \leq f(x) \leq b \Rightarrow a \leq a + b - f(x) \leq b \Rightarrow g([a,b]) \subset [a,b]$. Cette fonction étant croissante et vérifiant les hypothèses de la question précédente, on a donc $\forall x \in R\ , g(x) = x$ et par conséquent $f(x) = a + b - x$

4. On suppose que f est croissante.

- On suppose de plus que pour tout x, $f(x) < x$. Déterminer $\underset{x \to +\infty}{Lim} \dfrac{f(x)}{x}$

Soit x>0, $f(x) - f(0) = |f(x) - f(0)| \geq |x - 0| = x$, donc $f(0) + x \leq f(x) < x$ et en divisant par x strictement positif, on obtient : $1 + < \dfrac{f(x)}{x} \leq 1 + \dfrac{f(0)}{x}$, d'où $\underset{x \to +\infty}{Lim} \dfrac{f(x)}{x} = 1$

- Que peut-on dire si pour tout x, $f(x) > x$?

Soit x<0, $f(0) - f(x) = |f(0) - f(x)| \geq |0 - x| = -x$, donc $x < f(x) \leq x + f(0)$ et en divisant par x, on obtient : $1 + \dfrac{f(0)}{x} \leq \dfrac{f(x)}{x} < 1$, d'où $\underset{x \to -\infty}{Lim} \dfrac{f(x)}{x} = 1$