ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE
APPLIQUÉE
ENSEA–ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE
APPLIQUÉE
ISSEA–YAOUNDE

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE–DAKAR

AVRIL 2019

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

1$^{\text{ère}}$ Composition de Mathématiques

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Exercice 1.

Soient f et $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux applications de classe $\mathcal{C}^2$ et $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $F(x,y) = f(x+\phi(y))$.

1. Justifier que F est de classe $\mathcal{C}^2$.
2. Montrer que
$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{\partial F}{\partial x} = 0\,.$$

Exercice 2.

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $[a,b]$. On suppose que $f(a) = f(b)$ et $f'(a) = 0$. Soit Φ la fonction définie sur $[a,b]$ par

$$\Phi(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{si } x \neq a \\ 0 & \text{si } x = a\,. \end{cases}$$

1. Montrer que Φ est continue sur $[a,b]$.
2. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}$.

Problème.

Dans tout le problème l'entier n est strictement positif ($n \geq 1$) et l'expression C_n^p désigne le nombre des parties ayant p éléments d'un ensemble de n éléments.

Partie I

Soient $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites de polynômes définies par les relations suivantes :

$$U_n(x) = x^n(x-1)^n\,, \qquad P_n(x) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dx^n}U_n(x)\,.$$

1. Étant donnés un réel strictement positif a ($a > 0$) et un entier naturel k ($k \in \mathbb{N}$), on définit l'intégrale $I_{a,k}$ par
$$I_{a,k} = \int_0^1 x^{a-1}(x-1)^k dx\,.$$
   (i) Démontrer l'existence de l'intégrale $I_{a,k}$.
   (ii) Montrer que $I_{a,k} = -\dfrac{k}{a}I_{a+1,k-1}$ si $k > 0$ et $I_{a,0} = 1/a$.
   (iii) Calculer $I_{a,k}$.
   (iv) Déduire du résultat précédent la valeur de l'intégrale de la fonction U_n sur le segment $[0,1]$, en fonction du coefficient du binôme C_{2n}^n.

2. Déterminer le degré du polynôme P_n et préciser le coefficient de son terme de plus haut degré.

3. Déterminer de deux manières différentes le polynôme P_n (le résultat sera exprimé en fonction d'expressions du type $x^k(x-1)^{n-k}$) :
   (i) la première manière, par dérivation de l'expression de U_n obtenue après développement.
   (ii) la seconde manière, par dérivation du produit $x^n(x-1)^n$.

4. Déduire de la question précédente la relation :
$$C_{2n}^n = \sum_{k=0}^n \left(C_n^k\right)^2\,.$$

Partie II

Étant donnés deux réels a et b, strictement positifs ($a > 0, b > 0$), soit $J(a,b)$ l'intégrale suivante

$$J(a,b) \;=\; \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}dt\,.$$

1. Étudier l'existence de l'intégrale $J(a,b)$.

2. Montrer que l'intégrale $J(a,b)$ est égale à la somme de la série de terme général $\dfrac{(-1)^k}{a+kb}$, $k \in \mathbb{N}$:

$$J(a,b) \;=\; \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{a+kb}\,.$$

3. En déduire la somme de la série suivante :

$$1-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\frac{1}{13}\cdots$$

Étant donné un réel a strictement compris entre -1 et 1 ($-1 < a < 1$), soit φ_a la fonction définie sur l'intervalle ouvert $I =]-1,1[$ par la relation suivante :

$$\varphi_a(x) = \frac{1}{(1-ax)\sqrt{1-x^2}}\,.$$

4. Démontrer que la fonction φ_a est intégrable sur l'intervalle ouvert I.

Soit $K(a)$ l'intégrale de la fonction φ_a sur l'intervalle I :

$$K(a) = \int_{-1}^1 \frac{1}{(1-ax)\sqrt{1-x^2}}dx\,.$$

5. Démontrer, pour tout réel a appartenant à l'intervalle ouvert I, la relation suivante :

$$K(a) = \sum_{k=0}^{+\infty} a^{2k} \int_{-1}^1 \frac{x^{2k}}{\sqrt{1-x^2}}dx\,.$$

6. Déterminer, en admettant le résultat suivant :

$$K(a) = \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}\,.$$

le développement en série entière de la fonction $K : a \mapsto K(a)$ dans un voisinage de l'origine. Préciser le rayon de convergence.

7. Exprimer, pour tout entier n strictement positif, la valeur de l'intégrale L_n ci-dessous en fonction du coefficient du binôme C_{2n}^n :

$$L_n = \int_{-1}^1 \frac{x^{2n}}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

AVRIL 2019

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

ORDRE GÉNÉRAL
(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

Comment interpréter la maxime *« Un esprit sain dans un corps sain »* ?

Sujet n° 2

Le continent africain est le mieux placé en matière de parité selon une étude[1] qui dresse le panorama du leadership au féminin à travers le monde. Illustrez ce constat et ses effets.

[1] Etude *« women in business 2018 »* publiée par le cabinet Grant Thornton.

Sujet n° 3

Explicitez la citation de Nelson Mandela, homme d'Etat sud-africain, (1918-2013) *« Être libre, ce n'est pas seulement se débarrasser de ses chaînes ; c'est vivre d'une façon qui respecte et renforce la liberté des autres »*.

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

AVRIL 2019

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

2ème COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES
(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Exercice n° 1

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ ab & 0 & ab \\ b^2 & ab & a^2 \end{pmatrix}$, où *a, b*, *c* sont des nombres réels.

1. Déterminer les valeurs propres de la matrice *M*.

2. Déterminer les valeurs de *a*, *b* et c pour que *M* soit la matrice d'une projection orthogonale (que l'on précisera).

3. La matrice *M* peut-elle être associée à une symétrie orthogonale ?

Exercice n° 2

On considère la matrice *A* définie par : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^n pour tout entier naturel $n>1$.

2. Déterminer les sous espaces vectoriels stables par *A*.

Exercice n° 3

On considère le système linéaire suivant : $\begin{cases} x+y+z-p\,x=0 \\ x+y+z-q\,y=0 \\ x+y+z-p\,z=0 \end{cases}$, où (x,y,z) sont les inconnues réelles et (p,q) des paramètres réels.

1. Déterminer les valeurs propres de la matrice associée au système.

2. Déterminer les plus petits entiers non nuls (p,q) tels que l'espace vectoriel des solutions de ce système soit de dimension 1.

3. On suppose que $q=p$. La matrice M est-elle inversible ? orthogonale ?

Exercice n° 4

Soit f la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels strictement positifs par : $f(x)=x^3+x-Ln\,x$, où Ln désigne le logarithme népérien.

1. Résoudre l'équation : $f(x)=0$

2. Calculer $I=\int_1^e f(x)\,dx$

3. Déterminer le nombre de solutions de l'équation : $f(x)=e$ (nombre de Neper).

Exercice n° 5

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I=\left]-1,+\infty\right[$ par :

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{1+x} & \text{si } x\in I-Q \\ \dfrac{p}{p+q+1} & \text{si } x=\dfrac{p}{q}\in I\cap Q \end{cases}$$

où p et q sont des entiers premiers entre eux, $a>0$. Q désigne l'ensemble des nombres rationnels et $Q^* = Q - \{0\}$

1. Montrer que f est continue en zéro.

2. Etudier la continuité de f sur $Q^* \cap I$

3. Etudier la continuité de f sur $I - Q$

Exercice n° 6

Soient a et x deux nombres réels strictement positifs. On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par : $a_0 = a;\ a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{x}{a_n});\ b_0 = \frac{x}{a_0};\ b_n = \frac{x}{a_n}$

1. Montrer que ces deux suites sont adjacentes et déterminer leur limite.

2. Soit la suite (x_n) définie par récurrence par $x_0 = x$ et $x_{n+1} = \sqrt{x_n}$. Etudier la convergence de cette suite.

3. On considère, pour $a>0$, les fonctions f et g définies sur l'ensemble des nombres réels strictement positifs par : $f(x) = \sqrt{a\,x}$; $g(x) = \frac{1}{2}(a + \frac{x}{a})$. Déterminer, selon les valeurs de a, le nombre de points d'intersection des graphes de ces deux fonctions.

Exercice n° 7

Soient X une variable aléatoire réelle et f une fonction numérique définie par : $f(x) = k\,x\,e^{-\lambda x^2}$ sur l'ensemble des nombres réels positifs, où k et λ sont des paramètres réels strictement positifs.

1. Déterminer k et λ pour que f soit une fonction de densité sur l'ensemble des nombres réels positifs.

2. On suppose que f (qui dépend de λ) est la fonction de densité de X. Calculer l'espérance de X (on rappelle que $\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$).

3. Etudier les variations et tracer le graphe de f (on étudiera en particulier sa convexité).

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE STATISTIQUE ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ENSEA – ABIDJAN

INSTITUT SOUS-RÉGIONAL DE STATISTIQUE
ET D'ÉCONOMIE APPLIQUÉE
ISSEA – YAOUNDÉ

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ANALYSE ÉCONOMIQUE
ENSAE – DAKAR

AVRIL 2019

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

CONTRACTION DE TEXTE
(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Ce texte est tiré du livre de Monsieur Yuval Noah Harari intitulé *: « 21 leçons pour le 21ème siècle »* paru aux éditions Albin Michel en 2018.

Il doit être résumé en 250 mots (plus ou moins 10%). Vous indiquerez en fin de copie le nombre de mots utilisés.

Il sera tenu compte de l'orthographe, de la ponctuation et de la présentation de votre écrit.

Education : La seule constante est le changement

L'humanité est confrontée à des révolutions sans précédent, tous nos vieux récits s'émiettent, et aucun nouveau récit n'est jusqu'ici apparu pour les remplacer. Comment nous préparer, nous et nos enfants, à ce monde de transformations inédites et d'incertitudes radicales ? Un bébé qui naît aujourd'hui aura trente et quelques années en 2050. Si tout va bien, il sera encore là en 2100 et pourrait bien être un citoyen actif du XXIIème siècle. Que devrions-nous enseigner à ce bébé pour l'aider à survivre et à s'épanouir dans le monde de 2050 ou du XXIIème siècle ? De quel genre de compétences aura-t-il besoin pour trouver un emploi, comprendre ce qui se passe autour de lui et se repérer dans le dédale de la vie.

Hélas, personne ne sachant de quoi le monde aura l'air en 2050 –pour ne pas parler de 2100-, ces questions demeurent sans réponses. Bien entendu, les hommes n'ont jamais su prédire l'avenir avec exactitude. Mais c'est aujourd'hui plus difficile que jamais : en effet, dès lors que la technologie nous permet d'intervenir dans le corps, le cerveau et les esprits, nous ne pouvons plus être sûrs de rien, y compris de ce qui semblait fixe et éternel.

Voici un millier d'années en 1018, il y a beaucoup de choses que les gens ignoraient de l'avenir, mais ils n'en étaient pas moins convaincus que les traits de base de la société humaine n'allaient pas changer. Si vous viviez dans la Chine de 1018, vous saviez qu'en 1050 l'empire des Song pouvait s'effondrer, que les Khitan pouvaient envahir le pays par le nord et que les épidémies pouvaient faire des millions de morts. En revanche, il était clair qu'en 1050, la plupart travailleraient toujours comme paysans et tisserands, que les souverains continueraient de recruter des hommes pour leurs armées et leurs bureaucraties, que les hommes domineraient encore les femmes, que l'espérance de vie tournerait autour de quarante ans et que le corps humain serait exactement le même. Dans la Chine de 1018, donc, les parents pauvres apprenaient à leurs enfants à planter du riz et à tisser la soie ; les plus riches apprenaient aux garçons à lire les classiques confucéens, à pratiquer la calligraphie et à se battre à cheval ; aux filles à être des épouses pudiques et soumises. A l'évidence, ces talents seraient encore nécessaires en 1050.

Aujourd'hui, au contraire, nous n'avons aucune idée de quoi la Chine ou le reste du monde auront l'air en 2050. Nous ne savons pas comment les gens gagneront leur vie, comment les armées ou les bureaucraties fonctionneront, ni à quoi ressembleront les relations entre hommes et femmes. D'aucuns vivront probablement bien plus longtemps qu'aujourd'hui. Du fait du génie biologique et des interfaces directes cerveau-ordinateur, le corps humain lui-même pourrait bien subir une révolution sans précédent. Une bonne partie de ce que les enfants apprennent aujourd'hui n'aura probablement plus aucune pertinence en 2050.

A l'heure actuelle, trop d'écoles privilégient l'accumulation d'information. Cela avait du sens autrefois parce qu'elle était rare et que la censure coupait régulièrement sa lente diffusion. En 1800, l'habitant d'une petite ville provinciale du Mexique ne pouvait pas savoir grand-chose du monde : il n'y avait ni radio, ni télévision, ni quotidiens ni bibliothèques publiques. La situation était largement la même dans les villes de province en Russie, en Inde, en Turquie ou en Chine. Apprenant à chaque enfant à lire et à écrire tout en lui inculquant des rudiments de géographie, d'histoire et de biologie, les écoles modernes représentèrent un immense progrès.

[…] Au XXIème siècle, à l'opposé, nous sommes inondés d'énormes quantités d'informations.

Des habitants du monde entier sont à un clic des toutes dernières informations sur le bombardement d'Alep ou la fonte de la calotte glacière dans l'Arctique, mais les versions contradictoires sont si nombreuses qu'il est difficile de savoir laquelle croire. En outre, bien d'autres choses sont à portée de clic, ce qui ne nous aide pas à nous concentrer. Quand la politique ou la science paraissent trop compliquées, il est tentant de passer à des vidéos amusantes de chats, ou des échos sur les stars.

Dans un tel monde, donner plus d'informations à ses élèves est la dernière chose qu'ait besoin de faire un enseignant. Ils en ont déjà beaucoup trop. Il leur faut plutôt apprendre à en dégager le sens, à distinguer l'important de l'insignifiant, et surtout à associer les multiples bribes d'informations en une vision d'ensemble du monde

[…] Que devrions-nous donc enseigner ? De nombreux spécialistes de pédagogie affirment que les écoles devraient passer à l'enseignement des « quatre C » : pensée critique, communication, collaboration et créativité. Plus généralement les écoles devraient minimiser l'importance des compétences techniques pour privilégier les compétences générales nécessaires dans la vie courante. La plus importante de toutes sera la capacité d'affronter le changement, dans des situations peu familières. Pour être à la hauteur du monde de 2050, il faudra non seulement inventer des idées et des produits, mais d'abord et avant tout se réinventer sans cesse.

En effet, avec l'accélération du changement, l'économie, mais aussi le sens même de « l'être humain » sont susceptibles de se transformer. Dans le Manifeste communiste de 1848, Marx et Engels déclaraient déjà que « tout ce qui est solide se volatilise ». Mais ils pensaient surtout aux structures sociales et économiques. En 2048, les structures physiques et cognitives se volatiliseront elles aussi dans l'air ou dans un cloud de bits de données.

En 1848, des millions de gens quittaient les fermes de leurs villages pour aller travailler en usine dans les grandes villes. Là, il était peu probable de les voir changer de sexe ou ajouter un sixième sens. Et s'ils trouvaient du travail dans une usine textile, ils pouvaient espérer le conserver jusqu'à la fin de leur vie active.

[…] Mais ne prenez pas ce scénario à la lettre. Nul ne saurait prédire les changements précis dont nous serons les témoins. Tout scénario particulier risque d'être bien loin de la vérité. Si quelqu'un vous décrit le monde du milieu du XXIème siècle et que cela ait des airs de science-fiction, probablement sa description est-elle fausse. Mais si quelqu'un vous décrit le monde du milieu du XXIème siècle et que cela n'ait pas des airs de science-fiction, sa description est certainement fausse. Nous ne pouvons être sûrs des détails ; la seule certitude, c'est le changement. Un tel changement en profondeur peut fort bien transformer la structure élémentaire de la vie et faire de la discontinuité son trait saillant (1). Depuis des temps immémoriaux, la vie se divisait en deux parties complémentaires : une période d'apprentissages, suivie d'une période de travail. Dans la première, vous aviez accumulé des informations, acquis des compétences, élaboré une vision du monde et construit une identité stable. Même si à quinze ans vous passiez le plus clair de votre journée à travailler dans le champ de riz familial (plutôt qu'à l'école), votre activité la plus importante était d'apprendre : à cultiver le riz, à négocier avec les marchands cupides de la grande ville et à résoudre des conflits avec les autres villageois sur des questions de terre et d'eau. Dans la seconde partie, vous vous en remettiez à vos connaissances accumulées pour naviguer dans le monde, gagner votre vie et contribuer à la société. Bien entendu, à cinquante ans, vous continuiez à apprendre des choses nouvelles sur le riz, les marchands et les conflits, mais ce n'étaient que des petits ajustements de capacités bien rodées ?

Au milieu du XXIème siècle, l'accélération du changement et l'allongement de la durée de la vie rendront ce modèle traditionnel obsolète. La vie craquera aux entournures, il y aura de moins en moins de continuité entre les différentes périodes de l'existence. « Qui suis-je ? » sera une question plus urgente et compliquée que jamais.

Cela induira probablement des niveaux de stress considérables. Car le changement est presque toujours stressant. Passé un certain âge la plupart des gens n'aiment pas changer. A quinze ans, votre vie entière est changement. Le corps grandit, l'esprit se développe, les relations s'approfondissent. Tout est en mouvement, tout est nouveau. Vous êtes occupé à vous inventer. La plupart des ados s'en effraient, mais c'est aussi excitant. De nouveaux horizons s'offrent à vous, vous avez un monde à conquérir.

A cinquante ans, vous n'avez pas envie de changement ; la plupart ont alors renoncé à conquérir le monde. J'ai déjà été là, j'ai déjà fait çà, acheté ce T-shirt. Vous préférez de beaucoup la stabilité. Vous avez tellement investi dans vos compétences votre carrière, votre identité et votre vision du monde que vous n'avez aucune envie de tout recommencer. Plus vous avez travaillé dur pour construire quelque chose, plus il vous est difficile de le lâcher pour faire place à du nouveau. Vous pourriez encore apprécier les expériences nouvelles et les petits ajustements, mais à la cinquantaine, la plupart des gens ne sont pas prêts à chambouler les structures profondes de leur identité et de leur personnalité.

Il y a des raisons neurologiques à cela. Bien que le cerveau adulte soit plus flexible et changeant qu'on ne le pensait autrefois, il reste moins malléable que celui d'un adolescent. Reconnecter les neurones et recâbler les synapses est une tâche sacrément difficile. Au XXIème siècle cependant, on ne peut guère se permettre la stabilité. Si vous essayez de vous accrocher à une identité stable, un travail ou une vision du monde, vous risquez fort de vous retrouver en rade tandis que le monde continuera sa course folle. L'espérance de vie étant susceptible d'augmenter, vous pourriez passer des décennies dans un état de fossile paumé. Pour garder une pertinence –économique, mais aussi sociale-, un jeune de cinquante ans devra être capable d'apprendre et de se réinventer constamment.

L'étrangeté devenant la nouvelle norme, vos expériences passées, comme celles de toute l'humanité, deviendront des guides moins fiables. Les individus et l'humanité dans son ensemble devront de plus en plus affronter des choses que personne n'aura encore jamais rencontrées : machines super-intelligentes, corps modifiés, algorithmes capables de manipuler vos émotions avec une mystérieuse précision, enchaînement rapide de cataclysmes climatiques produits par l'homme et nécessité de changer de profession tous les dix ans. Face à une situation totalement inédite, quelle est la bonne attitude ? Comment se conduire quand on est inondé d'énormes quantités d'information et qu'il n'y a absolument aucun moyen de l'absorber et de l'analyser dans sa totalité ? Comment vivre dans un monde où l'incertitude n'est pas un bug, mais un trait caractéristique ?

Pour survivre et s'épanouir dans un monde pareil, il faut beaucoup de souplesse mentales et de grandes réserves d'équilibre émotionnel. Vous devrez vous défaire régulièrement d'une partie de ce que vous connaissez le mieux pour vous sentir à l'aise dans l'inconnu.

[…] Mais alors, à quoi se fier ? A la technologie ? C'est un pari encore plus risqué. Elle peut vous aider beaucoup, mais si elle prend trop d'ascendant dans votre vie, vous pouvez devenir l'otage de son ordre du jour. Voici des milliers d'années, les humains ont inventé l'agriculture, mais cette technologie n'a enrichi qu'une minuscule élite tout en asservissant la majorité. De l'aube au crépuscule, la plupart des gens étaient occupés à arracher des herbes sauvages, à porter des seaux d'eau et à ramasser le blé sous un soleil de plomb. Vous pouvez devenir victime du même schéma.

La technologie n'est pas mauvaise en soi, si vous savez ce que vous voulez dans la vie, elle peut vous aider à l'obtenir. Si vous ne le savez pas, ce sera un jeu d'enfants pour elle de façonner vos objectifs à votre place et de prendre le contrôle de votre existence. La technologie parvenant à mieux comprendre les humains, vous pourriez vous retrouver de plus en plus à son service au lieu d'être servi par elle.

[…] Afin de réussir dans cette tâche aussi redoutable, il vous faudra consentir de gros efforts pour mieux connaître votre système opératoire. Savoir qui vous êtes et ce que vous attendez de la vie. C'est bien entendu le plus vieux conseil du monde : connais-toi toi-même. Depuis des milliers d'années, philosophes et prophètes pressent les gens de se connaître, mais ce conseil n'a jamais été plus impérieux qu'au XXIème siècle parce que la concurrence est autrement plus sérieuse aujourd'hui qu'au temps de Lao-Tseu ou de Socrate. Coca-Cola, Amazon, Baidu et l'Etat sont tous engagés dans une course pour vous hacker, vous pirater. Pas uniquement votre Smartphone, votre ordinateur ou votre compte en banque, mais vous-même et votre système opératoire organique. Sans doute avez-vous entendu dire que nous vivons à l'époque du piratage des ordinateurs, mais ce n'est guère qu'une moitié de la vérité. En vérité, nous sommes entrés dans l'ère du hacking des êtres humains. Dès maintenant, les algorithmes vous surveillent. Ils observent vos déplacements, vos achats, vos rencontres. Bientôt, ils surveilleront vos pas, votre respiration, les battements de votre cœur. Ils s'en remettent aux Big Data et à l'apprentissage automatique pour vous connaitre de mieux en mieux. Et du jour où ces algorithmes vous connaîtront mieux que vous ne vous connaissez vous-mêmes, ils pourront vous contrôler et vous manipuler sans que vous n'y puissiez grand-chose. Vous vivrez dans la matrice (2) ou dans le Truman Show. Somme toute, c'est une simple question empirique : si les algorithmes comprennent ce qui se passe en vous réellement mieux que vous ne le comprenez, c'est à eux que reviendra l'autorité.

Bien entendu, vous pourriez être heureux de céder toute l'autorité aux algorithmes et de les laisser décider pour vous et le reste du monde. En ce cas, détendez-vous, et bon voyage ! Vous n'avez rien à faire. Les algorithmes s'occuperont de tout. Si toutefois, vous voulez garder un certain contrôle sur votre existence personnelle et l'avenir de la vie, vous devez courir plus vite que les algorithmes, plus vite qu'Amazon et l'Etat, et apprendre à vous connaître avant eux. Pour courir vite, ne prenez pas trop de bagages. Abandonnez toutes vos illusions, elles sont trop lourdes.

(1) - saillant : marquant, remarquable.

(2) - matrice : moule qui permet de reproduire une forme.

Avril 2019

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie B Option Mathématiques

Corrigé de la 1ère Composition de Mathématiques

Exercice 1.

Soient f et $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux applications de classe $\mathcal{C}^2$ et $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $F(x,y) = f(x+\phi(y))$.

1. Par composition, F est de classe $\mathcal{C}^2$.
2. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = f'(x+\phi(y)), \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \phi'(y)f'(x+\phi(y))$$

et

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) = f''(x+\phi(y)), \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x,y) = \phi'(y)f''(x+\phi(y)).$$

On en déduit l'égalité demandée :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{\partial F}{\partial x} = 0.$$

Exercice 2.

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $[a,b]$. On suppose que $f(a) = f(b)$ et $f'(a) = 0$. Soit Φ la fonction définie sur $[a,b]$ par

$$\Phi(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{si } x \neq a \\ 0 & \text{si } x = a\ . \end{cases}$$

1. Il est clair que Φ est continue sur $]a,b]$ (comme rapport de deux fonctions continues). D'après les hypothèses et la définition de la dérivée à droite d'une fonction en un point, on a

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} \Phi(x) = f'(a) = 0 = \Phi(0).$$

D'où la contiuité de Φ au point a.

2. La fonction Φ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, de plus $\Phi(a) = \Phi(b) = 0$. D'après le théorème de Rolle ou le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]a,b[$ tel que $\Phi'(c) = 0$. Or pour tout $x \in]a,b[$

$$\Phi'(x) = \frac{f'(x)}{x-a} - \frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2} = \frac{1}{x-a}\Big(f'(x) - \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\Big).$$

Puisque $c \neq a$, $\Phi'(c) = 0 \Longrightarrow f'(c) = \dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}$. Ce qu'il fallait montrer.

Problème.

Dans tout le problème l'entier n est strictement positif ($n \geq 1$) et l'expression C_n^p désigne le nombre des parties ayant p éléments d'un ensemble de n éléments.

Partie I

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites de polynômes définies par les relations suivantes :

$$U_n(x) = x^n(x-1)^n\ , \qquad P_n(x) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dx^n}U_n(x)\,.$$

1. (i) On utilise la règle des équivalents : la fonction $f(x) = x^{a-1}(x-1)^k$ est définie et continue sur $]0,1]$, et au voisinage de 0, $f(x) \sim x^{a-1}$. Comme, de plus $a-1 > -1$; la fonction $x \mapsto x^{a-1}$ est intégrable sur $]0,1]$. D'où l'intégrabilité de f sur $]0,1]$.

   (ii) On fixe $0 < b < 1$ et on effectue une intégration par parties sur le segment $[b,1]$, en posant $u(x) = (x-1)^k$, $v'(x) = x^{a-1}$, soit $u'(x) = k(x-1)^{k-1}$ (ce qui nécessite $k \geq 1$) et $v(x) = x^a/a$. On obtient

   $$\int_b^1 x^{a-1}(x-1)^k dx \;=\; \left[\frac{x^a}{a}(x-1)^k\right]_{x=b}^{x=1} - \frac{k}{a}\int_b^1 x^a(x-1)^{k-1}dx\,. \tag{1}$$

   La fonction $x \mapsto x^a(x-1)^{k-1}$ est intégrable sur $[0,1]$ car elle est continue $[0,1]$. La seconde intégrale admet donc une limite lorsque b tend vers 0, ce qui donne: $I_{a,k} = -\dfrac{k}{a}I_{a+1,k-1}$ si $k > 0$ et $I_{a,0} = 1/a$.

   (iii) On applique de nouveau la formule de la question précédente à $I_{a+1,k-1}$ (possible car $a+1 > 0$, et tant que $k-1 \geq 0$), ce qui donne:

   $$I_{a,k} = \frac{-k(-k+1)\cdots(-1)}{a(a+1)\cdots(a+k-1)}I_{a+k,0} \;=\; \frac{(-1)^k k!}{a(a+1)\cdots(a+k)}\,.$$

   (iv) L'intégrale de U_n correspond au cas particulier $a = n+1,\ k = n$:

   $$\int_0^1 U_n(x)dx = I_{n+1,n} = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)(n+2)\cdots(2n+1)}\,.$$

   En multipliant par $n!$ au numérateur et au dénominateur, on obtient

   $$\int_0^1 U_n(x)dx = \frac{(-1)^n}{(2n+1)}\frac{1}{C_{2n}^n}\,.$$

2. Le polynôme U_n est de degré $2n$, donc P_n est de degré $2n - n = n$. De plus $U_n(x) = x^{2n} + Q(x)$ où Q est un polynôme de degré $deg(Q) < 2n$, ce qui entraîne, en dérivant n fois, $U_n^{(n)}(x) = 2n(2n-1)\cdots(n+1)x^n + Q^{(n)}(x)$. Le coefficient dominant de P_n est donc $d_n = \dfrac{2n(2n-1)\cdots(n+1)}{n!} = C_{2n}^n$.

3. (i) On a $U_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^n C_n^k(-1)^{n-k}x^{n+k}$, en dérivant n fois, on obtient

   $$U_n^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k(-1)^{n-k}\frac{(n+k)!}{k!}x^k\,,$$

   soit

   $$P_n(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k(-1)^{n-k}\frac{(n+k)!}{k!n!}x^k\,,$$

(ii) on utilise la formule de Leibnitz, ce qui est possible puisque les fonctions sont polynômiales, donc n fois dérivables:

$$\begin{aligned} U_n^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (x^n)^{(k)}((x-1)^n)^{(n-k)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \frac{n!}{k!}(x-1)^k \,, \end{aligned} \tag{2}$$

d'où

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{1}{(n-k)!} x^{n-k} \frac{n!}{k!}(x-1)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2 x^{n-k}(x-1)^k \,. \end{aligned} \tag{3}$$

4. Sachant que le polynôme P_n est de degré n, on peut alors obtenir son coefficient dominant avec la seconde expression ; le monôme de degré n de $x^{n-k}(x-1)^k$ est x^n. Ainsi $C_{2n}^n = \sum_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2$.

Partie II

Étant donnés deux réels a et b, strictement positifs ($a > 0, b > 0$), soit $J(a,b)$ l'intégrale suivante

$$J(a,b) \;=\; \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b} dt \,.$$

1. La fonction $t \mapsto f(t) = t^{a-1}/(1+t^b)$ est définie sur $]0,1]$, continue, positive et dominée au voisinage de 0 par $1/t^{1-a}$; or la fonction $t \mapsto 1/t^{1-a}$ est continue sur $]0,1]$, positive et intégrable sur $]0,1]$ car $1-a < 1$. On peut alors appliquer la règle de domination : f est intégrable sur $]0,1]$.

2. Pour tout $t \in [0,1[$, $\dfrac{1}{1+tb} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{nb}$, donc $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{nb+a-1}$.

   On pose pour $t \in [0,1[$, $w_n(t) = (-1)^n t^{nb+a-1}$. Pour tout $t \in [0,1[$, $\dfrac{|w_{n+1}(t)|}{|w_n(t)|} = t^b < 1$ et donc la suite $(|w_n(t)|)_n$ décroît et converge vers 0. Par application du critère des séries alternées, on montre que la série $\sum w_n$ converge simplement sur $I = [0,1[$.

   Soit $0 < \delta < 1$. Le critère des séries alternées nous dit également que, pour tout $x \in [0,\delta]$,

$$|R_n(x)| = |\sum_{k=n+1}^{+\infty} w_n(x)| \leqslant |w_{n+1}(x)| \leq |w_{n+1}(\delta)|.$$

   Puisque $\lim_{n\to+\infty} |w_{n+1}(\delta)| = 0$, la suite $(R_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers 0 sur $[0,\delta]$, c'est à dire la série $\sum w_n$ converge uniformément sur $[0,\delta]$. D'après le théorème d'inversion de série et d'intégrale, on a

$$\int_0^\delta f(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^\delta (-1)^n t^{nb+a-1} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\delta^{nb+a}}{nb+a} \,. \tag{4}$$

Le terme de gauche de cette dernière inégalité tend quand δ tend vers 1, vers $\int_0^1 f(t)dt$.

Étudions maintenant la limite lorsque δ tend vers 1 du terme de droite. C'est encore une série alternée : posons $v_n(\delta) = (-1)^n \frac{\delta^{nb+a}}{nb+a}$, cette suite satisfait aux critères des séries alternées et on a $|R_n(\delta)| = |\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_n(\delta)| \leq \frac{1}{(n+1)b+a}$ qui tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

On en déduit que la série $\sum v_n$ converge uniformément sur $[0,1]$. D'après le théorème d'inversion de série et de limite, on a alors $\lim_{\delta \to 1} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\delta^{nb+a}}{nb+a} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{nb+a}$.

Le résultat est une conséquence de l'inégalite (4).

3. On considère le cas particulier $a = 1$ et $b = 3$: $I = \int_0^1 \frac{1}{1+t^3} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+3n}$.

   Pour calculer cette intégrale, on décompose la fraction rationnelle à intégrer en éléments simples, soit
$$\frac{1}{1+t^3} = \frac{1}{3}\frac{1}{(t+1)} + \frac{1}{3}\frac{-t+2}{(t^2-t+1)}\,.$$
   On cherche ensuite les primitives de chaque terme. Regardons le deuxième membre. Posons $u = t^2 - t + 1$ alors $u' = 2t - 1$. Ainsi, $-t+2 = -\frac{1}{2}(2t-1) + \frac{3}{2}$ et $\frac{-t+2}{t^2-t+1} = -\frac{1}{2}\frac{u'}{u} + \frac{3}{2}\frac{1}{u}$.
   On utilise aussi le fait que $u = (t-1/2)^2 + 3/4$ et $\int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\text{Arctn}(t/a)$. Par conséquence
$$\int \frac{-t+2}{t^2-t+1} dt = -\frac{1}{2}\ln\left|t^2-t+1\right| + \frac{3}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\text{Arctn}(2t-1)\sqrt{3}\,.$$
   Ce qui donne $I = \frac{1}{3}\ln(2) + \frac{\pi\sqrt{3}}{9}$.

Étant donné un réel a strictement compris entre -1 et 1 ($-1 < a < 1$), soit φ_a la fonction définie sur l'intervalle ouvert $I =]-1,1[$ par la relation suivante :
$$\varphi_a(x) = \frac{1}{(1-ax)\sqrt{1-x^2}}\,.$$

4. La fonction $x \mapsto \varphi_a(x)$ est continue positive sur $]-1,1[$.

   Au voisinage de -1, $\varphi_a(x) \sim \frac{1}{(1+a)\sqrt{2}\sqrt{1+x}}$ et φ_a est dominée par $C_1(1+x)^{-1/2}$, où C_1 est une constante positive. Or la fonction $x \mapsto (1+x)^{-1/2}$ est définie,continue, positive sur $]-1,0]$, et y est intégrable. Donc φ_a est intégrable sur $]-1,0]$.

   Au voisinage de 1, $\varphi_a(x) \sim \frac{1}{(1-a)\sqrt{2}\sqrt{1-x}}$ et φ_a est dominée par $C_2(1-x)^{-1/2}$, où C_2 est une constante positive. Or la fonction $x \mapsto (1-x)^{-1/2}$ est définie, continue, positive sur $]0,1]$, et y est intégrable. Donc φ_a est intégrable sur $]0,1]$.

   Soit $K(a)$ l'intégrale de la fonction φ_a sur l'intervalle I :
$$K(a) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{(1-ax)\sqrt{1-x^2}} dx\,.$$

5. De nouveau, il sagit d'effectuer une permutation série-intégrale, avec les mêmes problèmes que précédemment. Soient $-1 < a < 1$, $0 < \delta < 1$ et posons

$$K_\delta(a) = \int_{-\delta}^{\delta} \frac{1}{(1-ax)\sqrt{1-x^2}} dx\,.$$

Pour tout $x \in [-\delta, \delta]$ on a,

$$\varphi_a(x) = \frac{1}{(1-ax)\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} (ax)^n \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

De plus, il existe une constante $C_\delta > 0$, tel que pour tout $x \in [-\delta, \delta]$, $|(ax)^n \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}| \leq C_\delta a^n$ et $\displaystyle\sum_{n \in N} a^n = \frac{1}{1-a}$ est convergente. La série de terme général $Z_n = (ax)^n \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ converge normalement, donc uniformément sur $[-\delta, \delta]$. On peut alors appliquer le théorème de permutation série-intégrale et on a

$$K_\delta(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \int_{-\delta}^{\delta} \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx\,.$$

Lorsque l'entier n est impair, $\displaystyle\int_{-\delta}^{\delta} \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0$ car la fonction intégrée est impaire. Donc

$$K_\delta(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^{2n} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{x^{2n}}{\sqrt{1-x^2}} dx\,.$$

On applique de nouveau l'inversion de limite ($\delta \to 1$) et série comme précédement : pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $0 < \delta < 1$, $a^n \displaystyle\int_{-\delta}^{\delta} \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx \leq a^n \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ et $\displaystyle\sum_{n \in N} a^n = \frac{1}{1-a}$ est convergente. La série converge donc uniformément en $\delta \in [-1, 1]$. En appliquant le théorème d'inversion de limite et somme, et obtient

$$K(a) = \sum_{k=0}^{+\infty} a^{2k} \int_{-1}^{1} \frac{x^{2k}}{\sqrt{1-x^2}} dx\,.$$

6. On utilise le résultat suivant du cours: pour tout réel α et $x \in]-1, 1[$:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-n+1)}{n!} x^n\,.$$

Le rayon de convergence de cette série entière est égal à 1. On l'applique pour $\alpha = -1/2$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1/2)((-1/2)-1)((-1/2)-n+1)}{n!} (-1)^n x^{2n} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1/2)(3/2)((2n-1)/2)}{n!} x^{2n}\,.\end{aligned}$$

En multipliant numérateur et dénominateur par le produit des termes pairs de 2 à $2n$, il vient, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \times 2 \times \cdots \times (2n)}{2^n \times (2 \times 4 \times \cdots \times (2n)) \times n!} x^{2n}\,.$$

Dans les termes pairs du dénominateur on factorise par 2, il vient,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}$$

et pour tout $a \in]-1, 1[$,

$$K(a) = \pi + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} a^{2n} .$$

7. Si les sommes de deux séries entières sont égales sur un intervalle $]-a, a[$, avec $a > 0$, alors leurs coefficients sont égaux. Comme la question 5 a donné un développement en série entière de la fonction K. Par identification, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$L_n = \frac{\pi(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \frac{\pi C_{2n}^n}{2^{2n}} .$$

AVRIL 2019

CONCOURS INGENIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS voie B Option Mathématiques

CORRIGE DE LA 2ème COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Exercice n° 1

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ ab & 0 & ab \\ b^2 & ab & a^2 \end{pmatrix}$, où *a, b*, *c* sont des nombres réels.

1. Déterminer les valeurs propres de la matrice *M*.

On a : $\det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} a^2 - \lambda & ab & b^2 \\ ab & -\lambda & ab \\ b^2 & ab & a^2 - \lambda \end{vmatrix}$. En soustrayant la troisième colonne à la première, puis en additionnant la troisième ligne à la première, on obtient :

$$\det(M - \lambda I) = (a^2 - b^2 - \lambda)\begin{vmatrix} 0 & 2ab & a^2 + b^2 - \lambda \\ 0 & -\lambda & ab \\ -1 & ab & a^2 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + b^2 - a^2)(-\lambda^2 + (a^2 + b^2)\lambda + 2a^2b^2)$$

On obtient trois valeurs propres distinctes : $\lambda = a^2 - b^2$; $\lambda = \dfrac{(a^2 + b^2) \pm \sqrt{\Delta}}{2}$, où $\Delta = a^4 + b^4 + 10a^2b^2$

2. Déterminer les valeurs de a, b et c pour que M soit la matrice d'une projection orthogonale (que l'on précisera).

La matrice M étant symétrique, elle sera une matrice de projection orthogonale si et seulement si $M^2 = M$. On obtient : $M^2 = \begin{pmatrix} a^4+b^4+a^2b^2 & ab(a^2+b^2) & 3a^2b^2 \\ ab(a^2+b^2) & 2a^2b^2 & ab(a^2+b^2) \\ 3a^2b^2 & ab(a^2+b^2) & a^4+b^4+a^2b^2 \end{pmatrix}$, d'où le système :

$$\begin{cases} a^2 = a^4+b^4+a^2b^2 \\ ab = ab(a^2+b^2) \\ 0 = 2a^2b^2 \\ b^2 = 3a^2b^2 \end{cases}$$

Si a=0, alors b=0, et on a la matrice nulle.

Si b=0, alors $a^2 = 1$ *et* $a = \pm 1$(mais la valeur -1 ne convient pas), donc $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, ce qui correspond à la projection orthogonale (dans l'espace) sur le plan des axes Ox et Oz.

3. La matrice M peut-elle être associée à une symétrie orthogonale ?

On doit avoir $M^2 = I$, soit en particulier (cf. la question précédente) :

$\begin{cases} 2a^2b^2 = 1 \\ 3a^2b^2 = 0 \end{cases}$, ce qui est impossible. Par conséquent M ne peut être associée à une matrice de symétrie.

Exercice n° 2

On considère la matrice A définie par : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^n pour tout entier naturel n>1.

Cette matrice admet 1, 2 et 3 pour valeurs propres et comme elles sont distinctes, la matrice est diagonalisable.

Le sous espace vectoriel propre associée à 1 est engendré par : $e_1 = (1,0,0)$

Le sous espace vectoriel propre associée à 2 est engendré par : $e_2 = (1,1,0)$

Le sous espace vectoriel propre associée à 3 est engendré par : $e_3 = (1,2,2)$

La matrice de passage est : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (on vérifie que $P\,P^{-1} = I$).

On a : $A^n = P\,\Delta^n\,P^{-1}$ et on obtient : $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 & -2^n + (1+3^n)/2 \\ 0 & 2^n & 3^n - 2^n \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$

Remarque : On pouvait penser à écrire : $A = \Delta + J$ avec $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

La puissance de ces deux matrices est plus facile à calculer puisque : $\Delta^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$; $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $J^3 = 0$. Mais la formule du binôme ne s'applique pas car $\Delta J \neq J \Delta$.

2. Déterminer les sous espaces vectoriels stables par *A*.

Un vecteur *u* est stable par *A* si $Au = \lambda u$ (ce qui correspond aux vecteurs propres).

Les sous espaces vectoriels stables par *A* sont donc : $\{0\}$, les 3 droites vectorielles engendrées respectivement par e_1, e_2, e_3, les 3 plans vectoriels engendrés par deux de ces vecteurs propres et enfin l'espace lui-même.

Exercice n° 3

On considère le système linéaire suivant : $\begin{cases} x+y+z-p\,x = 0 \\ x+y+z-q\,y = 0 \\ x+y+z-p\,z = 0 \end{cases}$, où (x,y,z) sont les inconnues réelles et (p,q) des paramètres réels.

1. Déterminer les valeurs propres de la matrice associée au système.

La matrice du système est : $M = \begin{pmatrix} 1-p & 1 & 1 \\ 1 & 1-q & 1 \\ 1 & 1 & 1-p \end{pmatrix}$, puis $\det(M-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-p-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-q-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-p-\lambda \end{vmatrix} = (p+\lambda)\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-q-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-p-\lambda \end{vmatrix}$ (en soustrayant la troisième colonne à la première) et

$\det(M-\lambda I) = (p+\lambda)\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-q-\lambda & 1 \\ 0 & 2 & 2-p-\lambda \end{vmatrix}$ (en additionnant la première ligne à la troisième). On obtient finalement : $\det(M-\lambda I) = -(p+\lambda)(\lambda^2 - \lambda(3-p-q) + pq - 2q - p)$

.

La matrice admet donc 3 valeurs propres réelles distinctes : $-p ; \dfrac{3-p-q \pm \sqrt{\Delta}}{2}$, où $\Delta = (p-q)^2 + 2(q-p) + 9 > 0$.

2. Déterminer les plus petits entiers non nuls (p,q) tels que l'espace vectoriel des solutions de ce système soit de dimension 1.

Si l'espace vectoriel des solutions est de dimension 1, forcément la déterminant de la matrice est nul (sinon l'origine serait la seule solution), mais cette condition n'est pas suffisante.

On a : $\det M = -p(pq - p - 2q)$, soit $(pq - p - 2q) = 0$ ou encore $p = \dfrac{2q}{q-1} (q \neq 1)$

Pour q=2, on trouve p=4. Il faut vérifier que c'est bien un espace de dimension 1. Et on obtient la droite vectorielle définie par : $y=2x=2z$.

3. On suppose que $q = p$. La matrice M est-elle inversible ? orthogonale ?

On obtient $\det M = p^2(3-p)$ et la matrice est inversible pour $p \neq 0$ et $p \neq 3$

Comme la matrice est symétrique, elle sera orthogonale si $M^2 = I$. L'élément de la première ligne et première colonne de M^2 est égal à $(1-p)^2 + 2$, ce qui ne peut être égal à 1. La matrice ne peut être orthogonale.

Exercice n° 4

Soit f la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels strictement positifs par : $f(x) = x^3 + x - Ln\,x$, où Ln désigne le logarithme népérien.

1. Résoudre l'équation : $f(x) = 0$

- Si 0<x<1, alors $-Ln\,x > 0$ et $f(x) > 0$

- Si x>1, on a : $f'(x) = 3x^2 + 1 - \dfrac{1}{x}$ et $f''(x) = 6x + \dfrac{1}{x^2} > 0$. La fonction f est donc strictement croissante de $[1, +\infty[$ sur $[2, +\infty[$. Par conséquent $f(x) > 0$ pour tout x de I et l'équation n'admet pas de solution.

2. Calculer $I = \int_1^e f(x)\,dx$

On a : $I = \int_1^e f(x)\,dx = \left[\dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^2}{2} - x\,Ln\,x + x\right]_1^e = \dfrac{e^4 + 2e^2 - 7}{4}$

3. Déterminer le nombre de solutions de l'équation : $f(x) = e$ (nombre de Neper).

Soit $g(x) = f(x) - e$. Les dérivées de g sont les mêmes que pour *f*. La fonction g' est strictement croissante de $]0, +\infty[$ sur *R*. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique valeur $\alpha \in \,]0,1[$, telle que : $g'(\alpha) = 0$ $(\alpha < 1)$. La fonction g est donc strictement décroissante sur $]0, \alpha[$ et croissante sur $]\alpha, +\infty[$ et elle admet un minimum négatif en α (on a g(1)=2-e). L'équation admet donc deux solutions : l'une appartenant à l'intervalle $]0, \alpha[$ ($\lim\limits_{0^+} g = +\infty$) et l'autre à l'intervalle $]\alpha, +\infty[$, toujours d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice n° 5

Soit *f* la fonction définie sur l'intervalle $I =]-1, +\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+x} & \text{si } x \in I - Q \\ \dfrac{p}{p+q+1} & \text{si } x = \dfrac{p}{q} \in I \cap Q \end{cases}$$

où p et q sont des entiers premiers entre eux, q>0. Q désigne l'ensemble des nombres rationnels et $Q^* = Q - \{0\}$

1. Montrer que f est continue en zéro.

En effet f est continue en 0 si et seulement si $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0, \forall x \in I, |x| < \alpha \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$.

Si $x \in I - Q$, on a : $f(x) = \dfrac{x}{1+x} \to 0$ quand $x \to 0$ et si $x \in I \cap Q^*, \left|\dfrac{p}{q}\right| < \alpha \Rightarrow \left|\dfrac{x}{1+x+1/q}\right| \leq |x|$.
La fonction f est donc continue en zéro.

2. Etudier la continuité de f sur $I \cap Q^*$

Soit $x_0 = \dfrac{p_0}{q_0} \in I \cap Q^*$, $\underset{x \in I-Q \to x_0}{Lim} f(x) = \underset{x \to x_0}{Lim} \dfrac{x}{1+x} = \dfrac{x_0}{1+x_0} \neq f(x_0) = \dfrac{x_0}{1+x_0+1/q_0}$, donc f n'est pas continue sur $Q^* \cap I$

3. Etudier la continuité de f sur $I - Q$

Montrons que f est continue sur $I - Q$. Elle est continue x_0 si et seulement si $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0, \forall x \in I, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Si $x \in I - Q$, l'assertion précédente est vérifiée, car la restriction de f à $I - Q$ est continue.

Si $x = \dfrac{p}{q} \in I \cap Q^*$, alors

$|f(x) - f(x_0)| = \left|\dfrac{x}{1+x+1/q} - \dfrac{x_0}{1+x_0}\right| = \dfrac{|x - x_0 - x_0/q|}{(1+x_0)(1+x_0+1/q+x-x_0)} \leq \dfrac{|x-x_0| + |x_0|/q}{(1+x_0)^2/2}$ dès que $|x - x_0| \leq (1+x_0)/2$, car $1 + x_0 + \dfrac{1}{q} + x - x_0 \geq x_0 + \dfrac{1}{q} - |x - x_0| \geq \dfrac{1+x_0}{2}$

Considérons les nombres rationnels tels que $\dfrac{|x_0|}{q} \geq \dfrac{(1+x_0)^2}{4}\varepsilon$ ou $q \leq \dfrac{4|x_0|}{(1+x_0)^2}\varepsilon$

Ces rationnels sont en nombre fini dans tout intervalle borné. Soit β le minimum de la distance de x_0 à ces points. On a alors pour $x \in I \cap Q^*$:

$$|x - x_0| \leq Inf\left(\frac{1+x_0}{2}, \beta, \frac{(1+x_0)^2}{4}\varepsilon\right) = \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Exercice n° 6

Soient a et x deux nombres réels strictement positifs. On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par : $a_0 = a$; $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{x}{a_n})$; $b_0 = \frac{x}{a_0}$; $b_n = \frac{x}{a_n}$

1. Montrer que ces deux suites sont adjacentes et déterminer leur limite.

On vérifie aisément par récurrence que ces deux suites sont à termes strictement positifs. De plus $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_n}{a_{n+1}}$, par conséquent elles seront monotones de sens contraire.

Si ces suites sont adjacentes, elle converge vers la même limite l, solution de l'équation : $l = \frac{x}{l}$ ou encore $l = \sqrt{x}$.

1) Si $a > \sqrt{x}$, on vérifie par récurrence que $a_n > \sqrt{x}$ pour tout n. Par conséquent $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{(\sqrt{x} - a_n)(\sqrt{x} + a_n)}{a_n}\right) < 0$. La suite est décroissante, minorée par $\sqrt{x}$ et elle converge vers $\sqrt{x}$. La suite (b_n) est croissante majorée par $\sqrt{x}$. De plus $\underset{n\to\infty}{Lim}(a_n - b_n) = 0$ et les suites sont adjacentes.
2) Si $a < \sqrt{x}$, on a encore deux suites adjacentes, mais avec des monotonies inversées.

2. Soit la suite (x_n) définie par récurrence par $x_0 = x$ et $x_{n+1} = \sqrt{x_n}$. Etudier la convergence de cette suite.

- Si $x > 1$, on vérifie par récurrence que $x_n > 1$ pour tout n. Puis $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{\sqrt{x_n}} < 1$, la suite est donc décroissante et minorée par 1, donc convergente vers l solution de $l = \sqrt{l}$, soit l=1.

- Pour $0 < x < 1$, on arrive à la même conclusion par un raisonnement analogue.

3. On considère, pour a>0, les fonctions f et g définies sur l'ensemble des nombres réels strictement positifs par : $f(x) = \sqrt{a\,x}$; $g(x) = \frac{1}{2}(a + \frac{x}{a})$. Déterminer, selon les valeurs de a, le nombre de points d'intersection des graphes de ces deux fonctions.

On a : $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \sqrt{a\,x} = \frac{1}{2}(a + \frac{x}{a}) \Leftrightarrow x - 2a\sqrt{a}\sqrt{x} + a^2 = 0$. En posant $t = \sqrt{x}$, on a l'équation : $t^2 - 2a\sqrt{a}\,t + a^2 = 0$ et $\Delta' = a^2(a-1)$. En conclusion :

- Si $a > 1$, l'équation admet deux racines et donc les graphes ont deux points d'intersection.

- Si $a = 1$, l'équation admet une racine et donc les graphes ont un seul point d'intersection.

- Si $0 < a < 1$, l'équation n'admet pas de racines et donc les graphes n'ont pas de points d'intersection.

Exercice n° 7

Soient X une variable aléatoire réelle et f une fonction numérique définie par : $f(x) = k\,x\,e^{-\lambda x^2}$ sur l'ensemble des nombres réels positifs, où k et λ sont des paramètres réels strcitement positifs.

1. Déterminer k et λ pour que f soit une fonction de densité sur l'ensemble des nombres réels positifs.

Il faut que $\int_0^{\infty} f(x)\,dx = \int_0^{\infty} k\,x\,e^{-\lambda x^2}\,dx = \left[-\frac{k}{2\lambda}e^{-\lambda x^2}\right]_0^{\infty} = \frac{k}{2\lambda} = 1$ pour $k = 2\lambda$.

2. On suppose que f est la fonction de densité de X. Calculer l'espérance de X (on rappelle que $\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$).

On a :

$$E(X) = \int_0^{\infty} x\,f(x)\,dx = 2\lambda\int_0^{\infty} x^2\,e^{-\lambda x^2}\,dx = 2\lambda\int_0^{\infty} x.x\,e^{-\lambda x^2}\,dx = 2\lambda\left(\left[-\frac{1}{2\lambda}x\,e^{-\lambda x^2}\right]_0^{\infty} + \frac{1}{2\lambda}\int_0^{\infty} e^{-\lambda x^2}\,dx\right) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x^2}\,dx$$

, d'où $E(X) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\lambda}}$

3. Etudier les variations et tracer le graphe de f (on étudiera en particulier sa convexité).

La dérivée de f est égale à : $f'(x) = 2\lambda\,e^{-\lambda x^2}(1 - 2\lambda x^2)$ qui est nulle pour $x = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}$ avec $f(\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}) = \sqrt{2\lambda}\,e^{-1/2}$. La fonction est croissante sur $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}, +\infty\right[$.

La fonction est convexe pour $x > \sqrt{3/2\lambda}$ et concave sinon.