

CORRECTION DU CONCOURS DIRECT D'ENTREE À L'ESATIC

SESSION 2012

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

QUESTION À CHOIX DIRECTS (QCD)

Consignes : de la question N° 1 à la question N°13, choisir **A** si l'assertion est vraie. Choisir **B** si l'assertion est fausse.

Question-1 : Si (U_n) converge vers 0 alors (U_n) est une suite croissante et négative ou décroissante et positive. **A** ■ . **B** □

Justification : Si une suite converge vers 0 c'est que soit 0 la majeure, soit 0 la mineure.

Question-2 : A est évènement d'un univers tels que $P(\bar{A}) = \frac{7}{11}$
La probabilité de l'évènement $P(A) = \frac{5}{11}$ **A** □ . **B** ■

Justification : On sait que $P(X) + P(\bar{X}) = 1$ or ici on n'a $P(A) + P(\bar{A}) = \frac{12}{11}$.

Question-3 : soit D et E deux évènements incompatibles d'un univers
Alors les évènements D et $\bar{E}$ sont incompatibles **A** □ . **B** ■

Justification : D et E sont déjà incompatibles Alors D et $\bar{E}$ ne peuvent en aucun cas être incompatibles puisque D et $\bar{E}$ auront des éventualités en commun.

Question-4 : Lors d'un jet de deux dés, on donne les évènements suivants :

A : «le produit des numéros obtenus est au plus égal à 6»

B : «le produit des numéros obtenus est au moins égal à 6»

A et B deux évènements incompatibles **A** □ . **B** ■

Justification : Car A et B ont en commun l'éventualité, l'obtention du chiffre 6.

Question-5 : Le coefficient de corrélation linéaire r d'une serie statistique double est un nombre qui vérifie la relation $|r| \leq 1$ **A** ■ . **B** □

Justification : on a **r** = $\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$

comme la covariance est toujours inférieure ou égale au produit des écarts-type, le coefficient est compris entre -1 et 1 d'où $|r| \leq 1$

Question-6 :

La covariance est un nombre réel toujours négatif A ☐ . B ☒

Justification : À compléter.!!!

Question-7 :

La suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \frac{\sin(n)}{\ln(n+2)}$ diverge A ☒ . B ☐

Justification : Car cette suite n'admet pas de limite en $+\infty$

Question-8 :

On considère dans $\mathbb{C}$ le nombre complexe $z = (1+i)^2$
 $\arg(z) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$ A ☐ . B ☒

Justification : On a $z = (\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^2$ donc $z = (2e^{i\frac{\pi}{2}})$ d'où $\arg(z) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$

Question-9 :

Soit une fonction g définie sur $[0;1]$ par $g(x) = \int_0^x e^t \cos(t) dt$
 g est strictement croissante sur $[0;1]$ A ☒ . B ☐

Justification : Car $g'(x) = e^t \cos(t)$ or $e^t \cos(t) > 0$ sur $[0;1]$

Question-10 :

Le nombre de mots de 4 lettres qu'on peut écrire avec les lettres du mots PRODUIT est 35
 N.B : un mot peut avoir un sens ou nom A ☒ . B ☐

Justification : On ne sais pas dans quel ordre sera pris les lettres dans le mots produit donc on fait une combinaison de 4 dans 7 ce qui nous fait $C_7^4 = 35$

Question-11 :

Pour tout nombre réel x différent de 1 on n'a : $\frac{x^2}{(x-1)^2} = 1 + \frac{2}{(x-1)} + \frac{1}{(x-1)^2}$
 donc $\int_{-3}^0 \frac{x^2}{(x-1)^2} dx = -\frac{7}{4} + \ln(2)$ A ☐ . B ☒

Justification : $\forall x \neq 1$ on a : $\frac{x^2}{(x-1)^2} = 1 + \frac{2}{(x-1)} + \frac{1}{(x-1)^2}$

$$\int_{-3}^0 \frac{x^2}{(x-1)^2} dx = \int_{-3}^0 (1) dx + \int_{-3}^0 \frac{2}{(x-1)} dx + \int_{-3}^0 \frac{1}{(x-1)^2} dx$$

$$\int_{-3}^0 \frac{x^2}{(x-1)^2} dx = 3 - 2\ln(4) + 1 - \frac{1}{4}$$

$$\int_{-3}^0 \frac{x^2}{(x-1)^2} dx = \frac{15}{4} - 4\ln 2$$

Question-12 :

$$\int_1^\alpha \frac{\ln(x+1)}{x^2} dx = 2\ln 2 - \frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha} + \ln\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right) \quad \text{A } \blacksquare \quad . \text{ B } \square$$

Justification : On va commencé par faire une intégration par partie avec :

$$u(x) = \ln(x+1) \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x+1}$$

$$v'(x) = \frac{1}{x^2} \Rightarrow v(x) = -\frac{1}{x}$$

$$\int_1^\alpha \frac{\ln(x+1)}{x^2} dx = \left[-\frac{\ln(x+1)}{x}\right]_1^\alpha + \int_1^\alpha \frac{1}{x(x+1)} dx$$

$$\text{avec } \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{(x+1)}$$

$$\int_1^\alpha \frac{\ln(x+1)}{x^2} dx = -\frac{\ln(\alpha+1)}{\alpha} + \ln(2) + \int_1^\alpha \frac{1}{x} dx - \int_1^\alpha \frac{1}{x+1} dx$$

$$\int_1^\alpha \frac{\ln(x+1)}{x^2} dx = 2\ln(2) + \ln\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right) - \ln\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)$$

Question-13 :

Soit f définie sur $\mathbb{R}$: $f(x) = \frac{3e^x - 1}{e^x + 1}$ et (C) la courbe de f

Le point A(0;1) est un centre de symétrie pour (C) A $\blacksquare$. B $\square$

Justification : Pour qu'un point $\Omega(a,b)$ soit centre de symétrie pour (C) il faut qu'il respect la formule suivante : $\forall h \in \mathbb{R} \quad f(a+h) + f(a-h) = 2b$ et ici nous avons, $a=0$, $b=1$, et posons $h = 1$ alors :

$$f(h) = \frac{3e^h - 1}{e^h + 1} \text{ et } f(-h) = \frac{3 - e^h}{e^h + 1} \text{ donc } f(h) + f(-h) = 2 \text{ donc A(0;1) est bien un centre de symétrie pour (C).}$$

QUESTION À CHOIX MULTIPLES (QCM)

Consignes : de la question N° 14 à la question N°24, choisir la ou les bonnes réponses

Question-14 :

Soit (X,Y) une série statistique double. On n'appelle covariance le nombre noté $\text{COV}(X,Y)$ et définie par :

- $\square$ **A :** $\text{COV}(X,Y) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right) - (\bar{X}\bar{Y})$.
- $\square$ **B :** $\text{COV}(X,Y) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i\right) - (\bar{X}\bar{Y})$
- $\blacksquare$ **C :** $\text{COV}(X,Y) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i\right) - (\bar{X}\bar{Y})$

– ☐ **D** : $\text{COV}(X,Y) = (\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i) - (\bar{X}\bar{Y})$

Justification : Formule du cours

Question-15 :

soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{e^{2x+1}-e}{x}$; (C) sa courbe représentative et g la fonction définie par $g(x) = e^{2x+5}$

- ☐ **A** : g est dérivable en 0 et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = g'(0)$.
- ☒ **B** : La limite en 0 de f est égale à 2e
- ☒ **C** : L'axe des abscisses est asymptote à (C).
- ☐ **D** : $\forall x \neq 0, f'(x) = \frac{e}{x^2}[(x-1)e^{2x} + 1]$

Justification : A est faux vérifiez que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq g'(0)$

B est vrai car $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e(e^{2x}-1)}{x}$ posons $X = 2x$ donc $x = \frac{X}{2}$ donc la limite devient $\lim_{X \rightarrow 0} \frac{2e(e^X-1)}{X} = 2e$ car on a la limite de référence $\lim_{X \rightarrow 0} \frac{(e^X-1)}{X} = 1$

C est vrai car on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} e(x^{-1}e^{2x} - \frac{e}{x}) = 0$ et enfin D est faux car $f'(x) = \frac{e}{x^2}[(2x-1)e^{2x} + 1]$

Question-16 :

On considère le nombre complexe : $Z = 1 - \tan^2(\alpha) + 2i \tan(\alpha)$ où $\alpha \in]-\frac{\pi}{4}; 0[$

- ☐ **A** : $\text{Re}(Z) < 0$.
- ☒ **B** : $|Z| = 1 + \tan^2(\alpha)$
- ☒ **C** : $\text{Re}(Z) = \frac{\cos(2\alpha)}{\cos^2(\alpha)}$
- ☐ **D** : $\arg(Z) = \alpha + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$

Justification : A est faux sur $]-\frac{\pi}{4}; 0[$ on a $0 < \cos(x) < 1$ et $\sin(x) < 0$ on a donc $\frac{1}{\cos(x)} > 1$ d'où $\frac{\sin(x)}{\cos(x)} < 1$ donc $\tan^2(x) < 1$, $\text{Re}(Z) < 0$ est faux

B est vrai car $|Z| = \sqrt{(1 - \tan^2(\alpha))^2 + (2\tan(\alpha))^2} \quad |Z| = \sqrt{4\tan^2(\alpha) + 1 - 2\tan^2(\alpha) + \tan^4(\alpha)}$

$|Z| = \sqrt{1 + 2\tan^2(\alpha) + \tan^4(\alpha)} = \sqrt{(1 + \tan^2(\alpha))^2} = 1 + \tan^2(\alpha)$

C est vrai car $\text{Re}(Z) = 1 - \tan^2(\alpha) = 1 - \frac{\sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} = \frac{\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} = \frac{\cos(2\alpha)}{\cos^2(\alpha)}$

D est faux car $Z = 1 - \tan^2(\alpha) + 2i \tan(\alpha) = (i \tan(\alpha) + 1)^2$ donc $\arg(z) = 2\arg((i \tan(\alpha) + 1))$

$\arg(z) = 2\arg((i \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} + \frac{\cos(\alpha)}{\cos(\alpha)})) = 2\arg(\frac{1}{\cos(\alpha)} + 2\arg(\cos(\alpha) + i \sin(\alpha))$ donc

$\arg(z) = 0 + 2\alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$

Question-17 :

soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{2x} - 1$

- ☐ **A** : f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = (x+1)e^{2x}$.
- ☒ **B** : f est croissante sur $[-\frac{1}{2}; +\infty[$
- ☒ **C** : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- ☐ **D** : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

Justification : A est faux car $f'(x) = (2x+1)e^{2x}$

B est vrai car le signe de $f'(x)$ sur $[-\frac{1}{2}; +\infty[$ est positif

C est vrai car $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{2x} - 1 = +\infty$

D est faux car posons $X = 2x \Rightarrow x = \frac{X}{2}$ donc la limite devient $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{X}{2}e^X - 1 = 0$

Question-18 :

Une urne contient 3 boules blanches et 2 boules rouges. on extrait successivement et avec remise 3 boules de cette urne. on désigne par p la probabilité associée et par X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges tirées.

- ☐ **A** : $P(X=2) = \frac{18}{125}$.
- ☐ **B** : L'espérance mathématique de X , $E(X) = 1.2$
- ☐ **C** : La variance $V(X) = 0.72$
- ☒ **D** : $P(X \geq 1) = \frac{98}{125}$

Justification : A est faux car $P(X=2) = \frac{2}{5} * \frac{2}{5} * \frac{3}{5} = \frac{12}{125}$

B est faux car $E(x) = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i)$ et dans ce cas $E(X) = \frac{18}{125} * \frac{24}{125} = \frac{42}{125} = 0.336$

C est faux car $V(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2 P_i$ donc ici $V(X) = (1 - 0.336)^2 * \frac{18}{125} + (2 - 0.336)^2 * \frac{12}{125} = 0.3293$

D est vrai. prenons soit A l'évènement obtenir 0 boule rouge donc $P(A) = \frac{27}{125}$ donc l'évènement contraire est $P(X \geq 1) = 1 - P(A) = \frac{98}{125}$

Question-19 :

quatre points M, N, P et Q distincts forment un parallélogramme MNPQ dont les diagonales se coupent en O. Alors :

- ☐ **A** : N est le barycentre de $\{(M,1), (P,1), (Q,-2)\}$
- ☐ **B** : $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{O}$
- ☐ **C** : $MQ^2 - PQ^2 = 2\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{MQ}$
- ☒ **D** : $2(MN^2 + MQ^2) = NQ^2 + MP^2$

Justification : A est faux car ici la condition d'existence du barycentre n'est pas respectée $1+1-2=0$

B est faux $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{MN} \neq \overrightarrow{O}$ car $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QN} \neq \overrightarrow{O}$

C est faux car $MQ^2 - PQ^2 = MQ^2 - (\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MQ})^2$

$= MQ^2 - PM^2 - 2\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{MQ} - MQ^2 = -PM^2 + 2\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ}$

supposons maintenant : $-PM^2 + 2\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ} = 2\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ}$ car $2\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{MQ}$

$$\begin{aligned}
 -PM^2 + \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ} &= 0 \Rightarrow -\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ} = 0 \\
 \overrightarrow{MP}(\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MQ}) &= \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0 \text{ ce qui est absurde} \\
 \text{D est vrai. on a : } NQ^2 + MP^2 &= (\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MQ})^2 + (\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{QP})^2 \text{ on a } \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP} \\
 NQ^2 + MP^2 &= (\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MQ})^2 + (\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MN})^2 \\
 &= MN^2 - 2\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MQ} + MQ^2 + MQ^2 + 2\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MQ} + MN^2 = 2(MN^2 + MQ^2)
 \end{aligned}$$

Question-20 :

L'ESATIC Sélectionne ses étudiants avec une épreuve sous la forme de QCM portant sur 15 questions. pour chaque question, il y a quatre réponses réponses dont une seule est vraie.

Le nombre de possibilités de répondre :

- ☒ **A** : Au QCM est 4^{15}
- ☒ **B** : correctement à exactement dix questions est $C_{15}^{10} \times 3^5$
- ☐ **C** : juste à toutes les questions est 15
- ☐ **D** : correctement à au moins une question $4^{15} - 15$

Justification : A est vrai Puisque pour chaque question on a 4 réponses possibles alors sur les 15 questions on a 4^{15} possibilités.

B est vrai car si l'on répond juste à 10 questions parmi 15, on ne sait pas dans quel ordre sont les 10 questions donc on va choisir les 10 questions bien répondues dans les 15 ce qui nous donne C_{15}^{10} et on sait d'ores et déjà que les 5 autres questions ont une réponse fausse ce qui nous donne 3 possibilités pour chaque question mal répondues d'où 3^5 pour les questions mal répondues.

C est faux car on a une seule possibilité de répondre juste aux 15 questions c'est de trouver à chaque question la bonne réponse .

D est aussi faux car le nombre de possibilités de répondre à aucune questions juste est 3^{15} . si l'on retire cela dans l'univers qui est 4^{15} , il nous restera le nombre de possibilités de répondre au moins juste à une question.

Question-21 :

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = 1$; $U_1 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$U_{n+2} = \frac{1}{2}(U_n - U_{n+1})$. La suite V_n est définie par $V_n = U_{n+1} - \frac{1}{2}U_n$

- ☒ **A** : La suite V_n est géométrique
- ☐ **B** : La suite U_n est arithmétique
- ☒ **C** : $\forall n \in \mathbb{N}; U_n = (-1)^{n-1} + (\frac{1}{2})^{n-1}$
- ☐ **D** : Aucune des réponses précédentes.

Justification : A est vrai car $\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{(U_{n+2} - \frac{1}{2}U_{n+1})}{(U_{n+1} - \frac{1}{2}U_n)} = \frac{(\frac{1}{2}U_n - U_{n+1})}{(U_{n+1} - \frac{1}{2}U_n)} = -1$

B est faux car $U_{n+2} = \frac{1}{2}(U_n - U_{n+1}) \Rightarrow 2U_{n+2} = (U_n - U_{n+1}) \Rightarrow (U_{n+1} - U_n) = -2U_{n+2}$

C est vrai. effectuons une démonstration par récurrence on a : 1^{ère} étape : U_0 est vrai car

$$U_0 = (-1)^{-1} + (\frac{1}{2})^{-1} = -1 + 2 = 1$$

supposons que U_k est vrai donc $U_k = (-1)^{k-1} + (\frac{1}{2})^{k-1}$

Démontrons que U_{k+1} est vrai. on sait que $U_{k+1} = V_k + \frac{1}{2}U_k$ or $V_k = \frac{3}{2}(-1)^k$ étant une suite géométrique de raison -1. on n'a donc $U_{k+1} = \frac{3}{2}(-1)^k + \frac{1}{2}((-1)^{k-1} + (\frac{1}{2})^{k-1})$ quand on développe on tombe sur $U_{k+1} = (-1)^k + (\frac{1}{2})^k$

Question-22 :

On considère dans l'ensemble des nombres complexes l'équation : $z^2 + (2\cos(\alpha))z + 1 = 0$ où α est un paramètre réel

- ☐ **A** : Le discriminant $\Delta = 4\sin^2(\alpha)$
- ☒ **B** : Une solution de l'équation est $z_1 = \cos(\alpha + \pi) + i\sin(\alpha + \pi)$
- ☒ **C** : L'autre solution est $z_2 = \overline{z_1}$
- ☐ **D** : Le produit des solutions $z_1 z_2 = -1$

Justification : A est faux car ici le discriminant $\Delta = -4\sin^2(\alpha)$

B est vrai car $z_1^2 + (2\cos(\alpha))z_1 + 1 = 0$ utilisez $\cos(\alpha + \pi) = -\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha + \pi) = -\sin(\alpha)$

C est Vrai car le conjugué de z_1 est aussi solution de cette équation.

D est aussi faux car $z_1 z_2 = 1$

Question-23 :

Dans $\mathbb{R}$:

- ☐ **A** : $\ln(x+1) = \ln(2x+3)$ a pour unique solution -2
- ☐ **B** : $(x+1)\ln(x+1)=0$ a une solution qui est égal à -1
- ☒ **C** : e^3 est une solution de $\ln(x)^2 - 2\ln(x) - 3 = 0$
- ☒ **D** : $\ln(2-x)+1 \geq 0$ pour ensemble de solution $S =]-\infty; 2[$

Justification : A est faux car -2 n'est pas dans l'ensemble solution

B est faux car -1 n'est pas dans l'ensemble solution de cette équation.

C est vrai car $\ln(e^3)^2 - 2\ln(e^3) - 3 = 0$

D est vrai il suffit de chercher l'ensemble solution pour se rendre compte qu'il est égal à $]-\infty; 2[$

Question-24 :

Les nombres a et b sont des nombres réels non nuls Alors :

- ☐ **A** : $\forall a \in]0; +\infty[$ on a : $\sqrt{a} < a < a^2$
- ☒ **B** : si $0 < a < b \leq 1$ alors $\sqrt{b} - \sqrt{a} < b - a$
- ☒ **C** : si $1 \leq a < b$ alors $\sqrt{b} - \sqrt{a} < b - a$
- ☐ **D** : Quel que soit le couple (a;b) tels que $0 < a < b$ on a : $\frac{1}{2\sqrt{b}} < \sqrt{b} - \sqrt{a} < \frac{1}{2\sqrt{a}}$

Justification : A est faux car 1 ne respect pas cette relation

B est vrai car on sait que $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ car $(\sqrt{a+b})^2 = a+b = \sqrt{a}^2 + \sqrt{b}^2 \leq \sqrt{a}^2 + \sqrt{b}^2 + 2\sqrt{a}\sqrt{b}$
 donc $(\sqrt{a+b})^2 \leq (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \Rightarrow (\sqrt{a+b}) \leq (\sqrt{a} + \sqrt{b})$

$\sqrt{b} = \sqrt{b-a+a} \leq \sqrt{b-a} + \sqrt{a} \Rightarrow \sqrt{b} - \sqrt{a} \leq \sqrt{b-a} < b-a$

C est vrai car B est toujours vrai sur $[1; +\infty[$

D est faux il suffit de prendre a=3 et b=5 alors la relation donne quelque chose d'absurde.

Réalisé par OVI Jude Schadrac, KONE Namogo Ben Armel, BOUAKI Kouadio Julien, DJAKI Loba Stephane
 Etudiants à L'Ecole Supérieure Africaine des Technologies de l'Information et de la Communication
 Mail : elitech32@gmail.com

La photocopie tue l'oeuvre intellectuelle

Tous droits réservés

58-79-51-80 - 48-73-43-15 - 48-59-49-99 - 79-87-94-36