CORRECTION DU CONCOURS DIRECT D'ENTREE À L'ESATIC

SESSION 2013

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

QUESTION À CHOIX DIRECTS (QCD)

Consignes : De Q1 à Q15, en utilisant la grille, cochez la lettre **V** si l'assertion est **VRAIE** et la lettre **F** si l'assertion est **fausse**

Question-1 :

On considère la suite des intégrales $I_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{(e^x+1)}dx$ La suite (I_n) est décroissante **V** ☐ . **F** ■

Justification : on a $I_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{(e^x+1)}dx$ et $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}(e^x-1)}{(e^x+1)}dx$ or on na : $\frac{e^{nx}}{(e^x+1)} \geq 0 \Rightarrow \frac{e^{nx}(e^x-1)}{(e^x+1)} \geq 0$
$\int_0^1 \frac{e^{nx}(e^x-1)}{(e^x+1)} \geq 0 \Rightarrow I_n$ croit

Question-2 :

Si pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 \leq U_n$ - 3 $\leq \frac{1}{n+1}$ alors (U_n) converge vers 3. **V** ■ . **F** ☐

Justification : si $\forall$ n de $\mathbb{N}$, $0 \leq U_n$ - 3 $\leq \frac{1}{n+1}$ Alors $0 + 3 \leq U_n \leq \frac{1}{n+1} + 3$ Or $\lim_{x\to+\infty} 3 = 3$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{n+1} + 3 = 3$ donc d'après le théorème des gendarmes $\lim_{x\to+\infty} U_n = 3$ alors (U_n) converge vers 3

Question-3 :

On donne $U_n = \int_1^e (ln(x))^n dx$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $ln(x)^n - ln(x)^{n+1} \geq 0, \forall x \in [1; e]$ **V** ■ . **F** ☐

Justification : Vrai car si 1 $\leq$ x $\leq$ e $\Rightarrow$ 0 $\leq$ ln(x) $\leq$ 1 $\Rightarrow$ 0 $\leq$ $ln^n(x)$ $\leq$ 1 $\Rightarrow$ 0 $\leq$ $ln^n(x)$ $\leq$ 1
$\Rightarrow$ 0 $\geq$ -$ln(x)$ $\geq$ -1 $\Rightarrow$ 0 $\leq$ 1-$ln(x)$ $\leq$ 1 et par suite on a 0 $\leq$ $ln^n(x)$(1-$ln(x)$) $\leq$ 1 d'où $ln(x)^n - ln(x)^{n+1} \geq 0$

Question-4 :

Soit K $= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} (\frac{sin(x)}{cos(x)})dx$ alors $\frac{\pi}{6\sqrt{3}} \leq$ K $\leq \frac{\pi\sqrt{3}}{6}$ **V** ■ . **F** ☐

Justification : Car $\frac{\pi}{6} \leq$ X $\leq \frac{\pi}{3}$ on sait que tan(X) croit sur $[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}]$ donc tan($\frac{\pi}{6}$) $\leq$tan(X) $\leq$ tan($\frac{\pi}{3}$)
$\frac{1}{\sqrt{3}} \leq$ tan(X) $\leq \sqrt{3} \Rightarrow \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\sqrt{3}}dX \leq \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} tan(X)dX \leq \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{3}dX \Rightarrow \frac{\pi}{6\sqrt{3}} \leq$ K $\leq \frac{\pi\sqrt{3}}{6}$

Question-5 :

Soit $I = \int_1^2 \frac{ln(t+1)}{t^2}dt$ alors I $= \frac{1}{2}$ln(3) - ln(2) **V** ■ . **F** ☐

Justification : On va commencer par faire une intégration par partie avec :
u(t) = ln(t+1) $\Rightarrow$ u'(t) $= \frac{1}{t+1}$
v'(t) $= \frac{1}{t^2} \Rightarrow$ v(t)$= -\frac{1}{t}$

$I = [-\frac{ln(t+1)}{t}]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{(t+1)t}dt$ or $\frac{1}{(t+1)t} = \frac{-1}{t+1} + \frac{1}{t}$ donc $I = [-\frac{ln(t+1)}{t}]_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{(t+1)}dt - \int_1^2 \frac{1}{t}dt$

$I = [-\frac{ln(t+1)}{t}]_1^2 + [ln(t+1)]_1^2 - [ln(t)]_1^2 \Rightarrow I = \frac{ln(3)}{2} - ln(2)$

Question-6 :

Une usine fabrique des vis de 2 cm de longueur. On note X la variable aléatoire ayant pour valeurs les longueurs des vis exprimées en cm. P_i la probabilité qu'une vis soit de longueur X_i. onn donne :

X_i	**1.8**	**1.9**	**2**	**2.1**	**2.2**
P_i	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$

On a : $P(X \geq 2) = \frac{1}{12}$ **V** ☐ . **F** ■

Justification : Faux car $P(X \geq 2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4} \neq \frac{1}{12}$

Question-7 :

On jette deux dés cubiques normaux et non pipés, l'un bleu et l'autre rouge. les faces de chacun des dés sont numérotés de 1 à 6. On note a la face apparente du dé bleu et b celle du rouge. Soit E l'équation du second dégré dans R : $x^2 - 2ax + b^2 = 0$, alors :

la probabilité que E ait une racine double est $\frac{1}{6}$ **V** ☐ . **F** ■

Justification : Faux car (E) : $x^2 - 2ax + b^2 = 0$; $\Delta = 4a^2 - 4b^2$ (E) : admet une racine double $\Rightarrow \Delta = 0$.

$4a^2 = 4b^2 \Rightarrow a = b$ or P($a = b$)= $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \neq \frac{1}{6}$

Enoncé pour Question 8 et Question9 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé. On considère la transformation F du plan qui à tout point M d'affixe Z associe le point M' d'affixe Z' $= 2iZ + 1$.

Question-8 :

Cette transformation F est la similitude directe de centre A d'affixe $\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$ d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de rapport 2.

V ■ . **F** ☐

Justification : Vrai car F(Z)= $Z' = 2iZ + 1$ et si $F = S_{(A(\frac{1}{5};\frac{2}{5});\frac{\pi}{2};2)}$ on a : $Z' - Z_A = 2e^{i\frac{\pi}{2}}(Z - Z_A)$

$\Rightarrow Z' = 2e^{i\frac{\pi}{2}}(Z - Z_A) + Z_A = 2(Cos(\frac{\pi}{2}) + iSin(\frac{\pi}{2}))(Z - Z_A) + Z_A = 2i(Z - \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i) + \frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$

Z' $= 2iZ - \frac{2}{5}i + \frac{4}{5} + \frac{1}{5} + \frac{2}{5}i = F(Z) = 2iZ + 1$ d'ou $F = S_{(A(\frac{1}{5};\frac{2}{5});\frac{\pi}{2};2)}$

Question-9 :

Le point Q d'affixe $2 - 2i$ est l'image par F du point P d'affixe $\frac{2+i}{2}$ **V** ☐ . **F** ■

Justification : Faux car $F(\frac{2+i}{2}) = 2i(\frac{2+i}{2}) + 1 = 2i \neq 2 - 2i$

Question-10 :

Soit $\theta \in]0;\pi[$ et le nombre $Z = 1 - Cos(\theta) + iSin(\theta)$. On a : $|Z| = 2Sin(\frac{\theta}{2})$ **V** ■ . **F** □

Justification : Vrai car $|Z| = \sqrt{(1-Cos(\theta))^2 + Sin^2(\theta)} = \sqrt{[2\frac{(1-Cos(2\frac{\theta}{2})}{2}]^2 + Sin^2(\theta)}$

$|Z| = \sqrt{4[\frac{(1-Cos(2\frac{\theta}{2})}{2}]^2 + Sin^2(\theta)}$ et on a :$Sin^2(\theta) = \frac{1-Cos(2\theta)}{2}$

$|Z| = \sqrt{4(Sin^2(\frac{\theta}{2}))^2 + Sin^2(\theta)} = \sqrt{4Sin^4(\frac{\theta}{2}) + Sin^2(2\frac{\theta}{2})}$

$|Z| = \sqrt{4Sin^4(\frac{\theta}{2}) + (2Cos(\frac{\theta}{2})Sin(\frac{\theta}{2}))^2} = \sqrt{4Sin^4(\frac{\theta}{2}) + 4Cos^2(\frac{\theta}{2})Sin^2(\frac{\theta}{2})}$

$|Z| = \sqrt{4Sin^2(\frac{\theta}{2})(Sin^2(\frac{\theta}{2}) + Cos^2(\frac{\theta}{2}))} = \sqrt{4Sin^2(\frac{\theta}{2})}$

$|Z| = 2Sin(\frac{\theta}{2})$

Enoncé pour Question 11 et Question 12 :

L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. On considère les points : A(2 ;1 ;-1), B(-1 ;2 ;4), C(0 ;-2 ;3), D(1 ;1 ;-2) et le plan P d'équation $x - 2y + z + 1 = 0$

Question-11 :

La droite (AC) est uncluse dans le plan P

V □ . **F** ■

Justification : Faux car (AC)$\in P \Rightarrow A \in P et B \in P$ Or $X_C - 2Y_C + Z_C + 1 = 0 - 2\times(-2) + 3 + 1 = 8 \neq 0$

Question-12 :

La distance du point C au plan vaut $4\sqrt{6}$

V □ . **F** ■

Justification : Faux car : $d(C,P) = \frac{|X_C - 2Y_C + Z_C + 1|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

$d(C,P) = \frac{|0-2\times(-2)+3+1|}{\sqrt{1+(-2)^2+1^2}} = \frac{8\sqrt{6}}{6} = \frac{4\sqrt{6}}{3} \neq 4\sqrt{6}$

Question-13 :

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j})$; l'unité graphique est 1cm. On note A, B et C les points d'affixes respectives les nombres complexes $a = 2 - 2i$, $b = -a$ et $C = -2 - 2i$; α étant un nombre réel non nul, on désigne par G_α, le barycentre du système :$\{(A;1);(B;-1);(C;\alpha)\}$. l'ensemble des points G_α est la parallèle à (BA) passant contenant C.

V ■ **F** □

Justification : Vrai car : $G_\alpha = bar\{(A;1);(B;-1);(C;\alpha)\} \Rightarrow \overrightarrow{AG_\alpha} = -\frac{1}{\alpha}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AG_\alpha} - \overrightarrow{AC} = -\frac{1}{\alpha}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{CG_\alpha} = -\frac{1}{\alpha}\overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{CG_\alpha}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires

Question-14 :

Le plan est muni du repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j})$; On considère les points A et B qui ont pour affixes respectives $a = -4\sqrt{3} - 4i$ et $b = -4\sqrt{3} + 4i$. Le point G, barycentre des points pondérés $\{(A;2);(B;1);(O;-1)\}$. Le point G a pour affixe $-4\sqrt{(3)}$. **V** □ **F** ■

Justification : Faux car :$G = bar\{(A;2);(B;1);(O;-1)\} \Rightarrow Z_G = \frac{2a+b-1\times 0}{2+1-1} = \frac{-4\sqrt{3}-8i-4\sqrt{3}+4i}{2} = \frac{2a+b-1\times 0}{2+1-1} =$

$\frac{-8\sqrt{3}-8i-4i}{2}$

$Z_G = -4\sqrt{3} - 2i \neq -4\sqrt{3}$

Question-15 :

Dans le plan muni d'un repère, (D) est la droite d'équation $11x - 5y = 14$, les points de (D) à coordonnées entières sont les points de coordonnées $(5k + 14; 11k + 28)$ où $k \in$Z **V** ■ . **F** □

Justification : Vrai car pour k∈Z $11(5k + 14) - 5(11k + 28) = 55k + 154 - 55k - 140 = 14$

QUESTIONS À CHOIX MULTIPLES (QCM)

Consignes : De Q1 à Q10, pour chaque question, une seule reponse est correcte. cochez la lettre correspondant à la bonne reponse

Enoncé pour Question 1 et Question 2 :

Dans l'espace rapporté au repère orthonormé, On considère les points A(1 ;0 ;0), B(1 ;1 ;0), C(;2 ;0), D(1 ;0 ;1), E(1 ;1 ;1), F(1 ;2 ;1) , G(0 ;0 ;1), H(0 ;1 ;1), I(0 ;2 ;1), J(0 ;1 ;0) , K(0 ;2 ;0)

Question-1 :

Le barycentre du système de points pondérés $\{(O; 2); (A; -1); (C; 1)\}$ est :

- □ **A :** le point k
- □ **B :** le point I
- ■ **C :** le point J
- □ **D :** le point O

Justification : Vrai car $G = bar\{(O; 2); (A; -1); (C; 1)\} \Rightarrow X_G = \frac{2X_O - X_A + X_C}{2} = 0; Y_G = \frac{2Y_O - Y_A + Y_C}{2} = 1;$
$Z_G = \frac{2Z_O - Z_A + Z_C}{2} = 0$ Donc $G = J(0; 1; 0)$

Question-2 :

Le produit scalaire $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{FC}$ est égal à :

- ■ **A :** -1
- □ **B :** 1
- □ **C :** 2
- □ **D :** 3

Justification : Vrai car : $\overrightarrow{AH}(-1; 1; 1), \overrightarrow{FC}(0; 0; -1)$ donc $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{FC} = -1 \times 0 + 1 \times 0 + 1 \times (-1) = -1$

Question-3 :

On considère dans le plan orienté deux points A et B, I le milieu de [AB]. Soit f la similitude de centre A, de rapport 2 et d'angle $\frac{2\pi}{2}$. Soit g la similitude directe de centre A, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$. soit h, la symétrie centrale de centre I.

- ■ **A :** $h \circ g \circ f$ est la translation du vecteur $\overrightarrow{AB}$
- □ **B :** $h \circ g \circ f$ n'est pas une similitude
- □ **C :** $h \circ g \circ f$ est la reflexion d'axe la médiatrice de [AB]
- □ **D :** $h \circ g \circ f$ transforme A en B et est une Rotation

Justification : Vrai car : $f \circ g = S_{(A;1;\pi)}$: Symétrie centrale de centre A donc $h \circ S = t_{\overrightarrow{AB}}$

Question-4 :

On considère deux nombres $n = 1789$ et $p = 1789^{2005}$

- ☐ **A :** $4 \equiv 4[17]$ et $p \equiv 0[17]$
- ☐ **B :** $p \equiv 1[17]$
- ■ **C :** p est un nombre premier
- ☐ **D :** $p \equiv 4[17]$

Justification : Vrai car : $1789 = 105 \times 17 + 4 \Rightarrow 1789 \equiv 4[17] \Rightarrow 1789^{2005} \equiv 4^{2005}[17]$ d'où A ; B et D sont fausses

Question-5 :

On donne $f(x) = (x^2 + x)Sin(\frac{1}{x^2+x})$

- ☐ **A :** $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
- ■ **B :** $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$
- ☐ **C :** $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$
- ☐ **D :** $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Justification : Vrai car :$f(x) = (x^2 + x)Sin(\frac{1}{x^2+x}) = \frac{Sin(\frac{1}{x^2+x})}{\frac{1}{x^2+x}}$

posons $X = \frac{1}{x^2+x}$; $x \to \infty \Rightarrow X \to 0$ donc $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{X\to 0} \frac{Sin(X)}{X} = 1$

Question-6 :

Dans un stand de tir, la probabilité pour un tireur d'atteindre la cible est de 0.3. On effectue n tirs supposés indépendants. On désigne par P_n la probabilité d'atteindre la cible au moins une fois sur ces n tirs. La valeur minimale de n pour que P_n soit supérieure ou égale à 0.9 est :

- ■ **A :** 6
- ☐ **B :** 7
- ☐ **C :** 10
- ☐ **D :** 11

Justification : soit $\bar{P}_n$: la probabilité que le tireur atteingne jamais sa cible sur les n tirs.

soit P : la probabilité que le tireur atteingne sa cible pour un tir donné.

$\bar{P} = 1 - 0.3$ et $\bar{P}_n = (0.7)^n$ Or $P_n = 1 - \bar{P}_n = 1 - (0.7)^n$

$P_n = 0.9 \Rightarrow n = 6.45 \simeq 6$

Question-7 :

La solution f de l'équation différentielle $y' + 2y = 6$ qui vérifie la condition initiale $f(0) = 1$est définie sur l'ensemble R des nombres réels par :

- ■ **A :** $f(x) = -2e^{-2x} + 3$
- ☐ **B :** $f(x) = -2e^{2x} + 3$
- ☐ **C :** $f(x) = -2e^{-2x} - 3$
- ☐ **D :** $f(x) = -2e^{x} - 3$

Justification : Vrai car Pour $f(x) = -2e^{-2x} + 3$, on a : $f(0) = 1$ et $(-2e^{-2x} + 3)' + 2(-2e^{-2x} + 3) = 6$

Question-8 :

On considère dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé, les points A et B d'affixes respectives a et b. Le triangle MAB est rectangle isocèl direct d'hypotenuse [AB] si et seulement si M d'affixe Z est tel que :

- ■ **A :** $a - Z = i(b - Z)$
- ☐ **B :** $Z = \frac{b-ia}{1-i}$
- ☐ **C :** $Z - a = e^{i\frac{\pi}{2}}(b - a)$
- ☐ **D :** $b - Z = \frac{\pi}{2}(a - Z)$

Justification : On considère le triangle MAB et $R_{(M;\frac{\pi}{2})}$ la rotation de centre M et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Alors on aura : $R(B) = A \Rightarrow a - Z = e^{i\frac{\pi}{2}}(b - Z) \Rightarrow a - Z = ib - iZ = i(b - Z)$

Question-9 :

La table ci-dessous représente une série statistique double de caractère (X ;Y)

X	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Y	**12**	**13**	**15**	**19**	**21**	**22**

La covariance de cette série , COV(X,Y), est égale à :

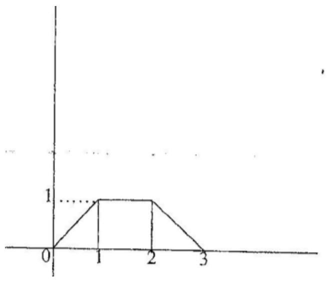
- ☐ **A :** 7.5
- ☐ **B :** 5.5
- ■ **C :** 6.5
- ☐ **D :** 4.5

Justification : $COV(X;Y) = \frac{\Sigma X_i Y_j}{N} - \bar{X}\bar{Y}$

$COV(X;Y) = \frac{1\times12+2\times13+3\times15+4\times19+5\times21+6\times22}{6} - \frac{1+2+3+4+5+6}{6} \times \frac{12+13+15+19+21+22}{6} = 6.5$

Question-10 :

Soit la fonction f dont la représentation graphique (C) est donnée ci-dessous.



Soit F la fonction définie sur $I = [0; +\infty[$ par $F(x) = \int_0^x f(t)dt$

- ☐ **A :** F n'est pas dérivable en 0 ; 1 et 3
- ☐ **B :** F est décroissante sur $I = [0; +\infty[$
- ☐ **C :** Si $x \geq 3$ Alors $F(x) = 3$
- ■ **D :** Si $x \in [0; 1]$ alors $F(x) = \frac{1}{2}x^2$

Justification : $F(x)$ est l'air de la partie du plan délimitée par les droites $(D_1) : X = 0$; $(D_2) : X = x$ et (C).

Pour $x \in [0; 1] f(t) = t \Rightarrow F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x tdt = [\frac{1}{2}t^2]_0^x = \frac{1}{2}x^2$

Réalisé par OVI Jude Schadrac, KONE Namogo Ben Armel, BOUAKI Kouadio Julien, DJAKI Loba Stephane
Etudiants à L'Ecole Supérieure Africaine des Technologies de l'Information et de la Communication
Mail : elitech32@gmail.com

58-79-51-80 - 48-73-43-15 - 48-59-49-99 - 79-87-94-36