

CORRECTION DU CONCOURS DIRECT D'ENTREE À L'ESATIC

SESSION 2014

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

QUESTION À CHOIX DIRECTS (QCD)

Consignes: De Q1 à Q25, en utilisant la grille, cochez la lettre **V** si l'assertion est **VRAIE** et la lettre **F** si l'assertion est **fausse**

Q1: On se propose de résoudre l'équation : (E): $24x + 32y = 2$ où x et y sont des entiers relatifs.

- ☐ **A :** Les solutions de (E) sont toutes de la forme $(-7k ; 5k)$, $k \in \mathbb{Z}$
- ☒ **B :** (E) n'a pas de solution
- ☐ **C :** Les solutions de (E) sont de la forme : $(3k - 7 ; 5 - 24k)$, $k \in \mathbb{Z}$
- ☐ **D :** Les solutions de (E) sont de la forme : $(17k - 7 ; 12k + 5)$, $k \in \mathbb{Z}$

Justification :

$$(E): 24x + 32y = 2 \quad x, y \in \mathbb{Z}$$

$$(E) \Leftrightarrow 12x + 16y = 1$$

$$(E) \Leftrightarrow 4(3x + 4y) = 1$$

$$(E) \Rightarrow 3x + 4y = \frac{1}{4}$$

Or $\forall x, y \in \mathbb{Z}$, toute combinaison linéaire de x et y d'éléments dans $\mathbb{Z}$ appartient à $\mathbb{Z}$ donc $3x + 4y \in \mathbb{Z}$ d'où l'égalité $3x + 4y = \frac{1}{4}$ est absurde

Q2: $8^{270} - 1$ est multiple de 7

- ☒ **A :** Vrai
- ☐ **B :** Faux

Justification : On a $8 \equiv 1[7] \Rightarrow 8^{270} \equiv 1^{270}[7]$

$\Rightarrow 8^{270} \equiv 1[7] \Rightarrow 8^{270} - 1 \equiv 0[7]$ donc $8^{270} - 1$ un multiple de 7

Q3: a et $b \in \mathbb{N}$, s'il existe deux entiers relatifs u et v tel que $au + bv = 2$ alors $\text{pgcd}(a ; b) = 2$

■ **A :** Vrai

□ **B :** Faux

Justification : soit $d \in \mathbb{N}^*$ tel que $\text{pgcd}(a ; b) = d$

alors $\exists a', b' \in \mathbb{N} / \begin{cases} a = da' \\ b = db' \end{cases} / \text{pgcd}(a' ; b') = 1$

$au + bv = 2 \Rightarrow d(a'u + b'v) = 2 \Rightarrow d = 2$ d'après le théorème de Bezout

Q4: A et B deux points d'affixes respectifs $z_A = 1$ et $z_B = 2i$. On note (E) l'ensemble des points M d'affixe z tel que $|z - 2i| = |z - 1|$ et par (F) l'ensemble des points M d'affixes z distincts de A et B tel que $\arg\left(\frac{z-2i}{z-1}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

□ **A :** Les points M de (F) décrivent une droite.

□ **B :** (E) est un cercle

□ **C :** (F) est un ensemble des points M tels que $z = \frac{z-2i}{z-1}$ soit imaginaire pur

■ **D :** Le point C d'affixe $z_c = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ appartient à (E) et à (F)

Justification :

On a (E) = $\{M \in \mathbb{P} / |z - 2i| = |z - 1|\}$ et (F) = $\{M \in \mathbb{P} / \arg\left(\frac{z-2i}{z-1}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

$M \in (E) \Leftrightarrow |z - 2i| = |z - 1|$, $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$

$M \in (E) \Leftrightarrow |x + iy - 2i| = |x + iy - 1|$

$M \in (E) \Leftrightarrow |x + i(y - 2)| = |x - 1 + iy|$

$M \in (E) \Rightarrow x^2 + (y - 2)^2 = (x - 1)^2 + y^2$

$M \in (E) \Rightarrow -4y + 2x + 3 = 0$

donc (E) est la droite d'équation : $4y + 2x + 3 = 0$

Aussi on a (F) = $\{M \in \mathbb{P} / \arg\left(\frac{z-2i}{z-1}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ avec $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$

$M \in (F) \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z-2i}{z-1}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

On sait $z_c = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

on a : $-4x\left(\frac{1}{2}\right) + 2x\left(-\frac{1}{2}\right) + 3 = 0$ donc $C \in (E)$ et $\arg\left(\frac{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i - \frac{1}{2}}{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i - 1}\right) = \arg\left(\frac{-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i}{-\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i}\right)$

$\arg\left(\frac{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i - \frac{1}{2}}{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i - 1}\right) = \arg(i)$

$\arg\left(\frac{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i - \frac{1}{2}}{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i - 1}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ donc $C \in (F)$

Q5: La composée des symétries orthogonales de deux droites perpendiculaires est :

- **A** : Une rotation
- ☐ **B** : Une translation
- ☐ **C** : Une symétrie
- ☐ **D** : Aucune des réponses précédentes

Justification : Soient $(\triangle)$ et $(\triangle')$ deux droites du plan. $(\triangle)$ et $(\triangle')$ sécantes alors $S_{(\triangle)} \circ S_{(\triangle')}$ ou $S_{(\triangle')} \circ S_{(\triangle)}$ est une rotation

Q6: On considère deux suites (u_n) et (v_n) :

- ☐ **A** : Si $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \infty$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = -\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n + v_n) = 0$
- ☐ **B** : Si (u_n) et (v_n) convergent alors de la suite $(\frac{u_n}{v_n})$ converge
- ☐ **C** : Si u_n converge vers un réel non nul, si u_n est positive et $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0$ alors $(\frac{u_n}{v_n})$ ne converge pas
- **D** : Si (u_n) converge vers un réel non nul, si $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = +\infty$ alors $(u_n v_n)$ ne converge pas

Justification : $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = +\infty$; $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l$, avec $l \in \mathbb{R}^*$ $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n v_n = \infty$ donc $(u_n v_n)$ diverge

Q7: On considère la suite des intégrales $I_n = \int_0^2 \frac{e^{nx}}{1+e^x} dx$, $n \in \mathbb{N}$

- ☐ **A** : Vrai
- **B** : Faux

Justification : On a $I_n = \int_0^2 \frac{e^{nx}}{1+e^x} dx$, $n \in \mathbb{N}$ donc pour $n = 0$ on a donc $I_0 = \int_0^2 \frac{1}{1+e^x} dx$
 on a $[ln(1+e^x)]' = \frac{e^x}{1+e^x} \neq \frac{1}{1+e^x}$

Q8: Pour n entier naturel quelconque et p entier naturel supérieur ou égal à 2, on a :

$$S_{n,p} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \dots + \frac{1}{pn} = \sum_{k=n+1}^{pn} \frac{1}{k}$$

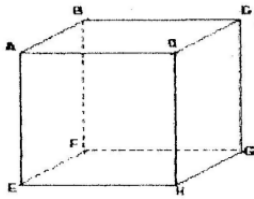
- ☐ **A** : $S_{n,2} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \dots + \frac{1}{(p-2)n}$

- ☐ **B** : Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$
- ☐ **C** : Pour tout $k \geq 2$; $\int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k} \leq \int_k^{k-1} \frac{1}{t} dt$
- ☒ **D** : Aucune des réponses précédentes.

Justification :

On a $S_{n,p} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \dots + \frac{1}{pn} = \sum_{k=n+1}^{pn} \frac{1}{k}$ donc $S_{n,2} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$
 $\forall k \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$
 pour $k = 0$ la fonction $\ln$ n'est pas définie car $D_{f_{\ln}} =]0, +\infty[$
 Pour tout $k \geq 2$; $\int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k} \leq \int_k^{k-1} \frac{1}{t} dt$
 pour $k = 2$ on a : $\frac{1}{2} \leq \int_2^1 \frac{1}{t} dt = -\ln(2)$ ce qui est absurde

Q9: La figure représente un cube ABCDEFGH :



- ☒ **A** : Les droites (EC) et (BH) sont sécantes
- ☐ **B** : Les droites (AD) et (CG) sont sécantes
- ☐ **C** : Les droites (BD) et (EG) sont parallèles
- ☐ **D** : Aucune des réponses précédentes.

Justification : Les droites (EC) et (BH) sont sécantes

Q10: gggggggg :

- ☒ **A** :
- ☐ **B** :
- ☐ **C** :
- ☐ **D** :

Justification :

Q11: :

☒ A :

☐ B :

☐ C :

☐ D :

Justification :

Q12: $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ est un repère de l'espace On donne $A(0,2,0)$; $B(1,1,1)$; Une représentation paramétrique de la droite (AB) est :

☒ A :
$$\begin{cases} x = t \\ y = 2 + t \\ z = t \end{cases}$$

☐ B :
$$\begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = t \\ z = 4t \end{cases}$$

☐ C :
$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

☐ D : Aucune réponse précédentes n'est juste.

Justification : soit $M(x,y,z) \in (AB) \exists t \in \mathbb{R} / \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} \Rightarrow \begin{cases} x - x_A = t(x_B - x_A) \\ y - y_A = t(y_B - y_A) \\ z - z_A = t(z_B - z_A) \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2 + t \\ z = t \end{cases}$$

Q13: L'espace est rapporté au repère $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ on désigne par $(\mathbb{P})$ le plan d'équation : $2x + 3y - z + 4 = 0$ et A et B les points de coordonnées respectives $(1; 2; -4)$ et $(-3; 4; 1)$

L'ensemble des points M de l'espace qui sont équidistants des points A et B est :

- ☐ **A** : Une droite passant par le point C de coordonnées $(-1; 3; -\frac{1}{2})$
- ☐ **B** : Une sphère de rayon $\frac{3\sqrt{5}}{2}$
- ☒ **C** : Le plan d'équation $-4 + 2y + 5z - \frac{5}{2} = 0$
- ☐ **D** : Le plan d'équation $-4 + 2y + 5z + \frac{5}{2} = 0$

Justification :

soit (ξ) l'espace rapporté au repère $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$; posons $(F) = \{M(x, y, z) \in (\xi) / MA = MB\}$
 $M \in (F) \Rightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+4)^2 = (x+3)^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2$; on a :
 $(x-1)^2 - (x+3)^2 = -8x - 8$
 $(y-2)^2 - (y-4)^2 = 4y - 12$
 $(z+4)^2 - (z-1)^2 = 10z + 15$
 $M \in (F) \Rightarrow -8x + 4y + 10z - 5 = 0 \Rightarrow -4x + 2y + 5z - \frac{5}{2} = 0$

Q14: On distingue par A et B deux événements indépendants d'un univers muni d'une probabilité P. On sait que $P(A \cup B) = \frac{4}{5}$ est $P(\bar{A}) = \frac{3}{5}$ La probabilité de l'évènement B est égal à :

- ☐ **A** : $P(B) = \frac{2}{5}$
- ☒ **B** : $P(B) = \frac{2}{3}$
- ☐ **C** : $P(B) = \frac{3}{5}$
- ☐ **D** : $P(B) = \frac{1}{2}$

Justification :

A et B deux événements indépendants donc $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ et $P(A) = 1 - P(\bar{A})$
 $P(A \cup B) - P(A) = P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cup B) - P(A) = P(B) - P(A) \times P(B)$
 $\Rightarrow P(B)(1 - P(A)) = P(A \cup B) - P(A) \Rightarrow P(B) \times P(\bar{A}) = P(A \cup B) - (1 - P(\bar{A}))$
 $\Rightarrow P(B) = \frac{P(A \cup B) + P(\bar{A}) - 1}{P(\bar{A})}$

Q15: Au cours d'une épidémie de grippe, on vaccine le tiers de la population. Parmi les grippées 1 sur 10 est vacciné. La probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la population soit grippée est 0.25. Quelle est la probabilité pour un individu vacciné de cette population de contracter la grippe ?

- ☐ **A** : $\frac{1}{120}$ ☒ **B** : $\frac{3}{40}$ ☐ **C** : $\frac{1}{12}$ ☐ **D** : $\frac{4}{30}$

Justification : Posons V:l'évènement "l'individu est vacciné" et G:l'évènement "l'individu est grippé"

on a alors $P(V) = \frac{1}{3}$; $P(\bar{V}) = \frac{2}{3}$; $P(V/G) = \frac{1}{10}$ et $P(G) = 0.25$

On sait que $P(V/G) = \frac{P(V \cap G)}{P(G)}$ et $P(G/V) = \frac{P(G \cap V)}{P(V)}$ or $P(G \cap V) = P(V \cap G)$

$$\Rightarrow P(G/V) = \frac{P(V/G)P(G)}{P(V)} \text{ donc } P(G/V) = \frac{\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{40}$$

Q16: On considère la suite numérique (u_n) définie par $n \geq 0$ par $u_{n+1} = u_n + 2n + 1$
 La suite (u_n) est:

- ☒ **A** : croissante
- ☐ **B** : géométrique
- ☐ **C** : arithmétique
- ☐ **D** : on peut rien conclure.

Justification : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 2n + 1 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = 2n + 1 \geq 1 > 0$
 $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} > u_n$

Q17: Une urne contient des boules numérotées de 1 à n , réparties de la façon suivante : pour tout entier k compris entre 1 et n , l'urne contient k boules portant le numéro k . On tire au hasard une boule de l'urne et on note X le numéro obtenu.

- ☐ **A** : L'urne contient $\frac{(n-1)(n+2)}{2}$ boules
- ☐ **B** : $\forall k \in [1; n], P(X = k) = \frac{k}{2n(n+1)}$
- ☐ **C** : $\forall k \in [1; n], P(X \leq k) = \frac{k(k+1)}{2n(n+1)}$
- ☒ **D** : Sachant que $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ on a : $E(X) = \frac{2n+1}{3}$

Justification :

Nombre de boules dans l'urne : $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$

La probabilité de tirer une boule portant le numéro k est $P(X = k) = \frac{k}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2k}{n(n+1)}$

La probabilité de tirer une boule de numéro inférieur à k est :

$$P(X \leq k) = \sum_{p=1}^k P(X = p) = \sum_{p=1}^k \frac{2p}{n(n+1)} \Rightarrow P(X \leq k) = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{p=1}^k p$$

$$\Rightarrow P(X \leq k) = \frac{k(k+1)}{n(n+1)}$$

on a $E(X) = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i) \Rightarrow E(X) = \sum_{k=1}^n x_k P(X = x_k)$, $x_k = k$, nombre de boules portant le numéro k

$$\Rightarrow E(X) = \sum_{k=1}^n k \cdot \frac{2k}{n(n+1)} \Rightarrow E(X) = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n k^2.$$

$$\Rightarrow E(X) = \frac{2}{n(n+1)} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \Rightarrow E(X) = \frac{2n+1}{3}$$

Q18: :

- ☒ **A :**
- ☐ **B :**
- ☐ **C :**
- ☐ **D :**

Justification :

Q19: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [e^x - (x^7 - x^2 - 2)]$ est égale à :

- ☐ **A :** 0
- ☒ **B :** $+\infty$
- ☐ **C :** $-\infty$
- ☐ **D :** Aucune des réponses précédentes

Justification : Triviale!!! voir cours

Q20: On considère la fonction g définie par $g(x) = -x + 3 + \ln(x)$ l'aire de portion du plan comprise entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 4$ vaut (en unité d'aire)

- ☒ **A :** $-1.5 + 8\ln(2)$
- ☐ **B :** $1.5 + 8\ln(2)$
- ☐ **C :** $-0.5 + 4\ln(2)$
- ☐ **D :** $-2 + 10\ln(2)$

Justification : on a $g(x) = -x + 3 + \ln(x)$ et $\int g(x)dx = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + \int \ln(x)dx$
 $\int \ln(x)dx = x\ln(x) - x \Rightarrow \int_1^4 g(x)dx = [-\frac{1}{2}x^2 + 3x + x\ln(x) - x]_1^4 = -1.5 + 8\ln(8)$

Q21: Soit $F(x) = \int_{10}^x f(t)dt$. F est négative sur $[0.5; 1]$

☐ A : Vrai

☒ B : Faux

Justification : pour $f(t) = \frac{1}{t^2}$, $F(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{10} \forall x \in [0.5; 1]$ et $F(x) > 0$

Q22: $\ln(\frac{5}{4}) + \ln(\frac{2}{10}) - \ln(\sqrt{3}) + \ln(\frac{8}{\sqrt{5}}) = 0$

☐ A : Vrai

☒ B : Faux

Justification : $\ln(\frac{5}{4}) + \ln(\frac{2}{10}) - \ln(\sqrt{3}) + \ln(\frac{8}{\sqrt{5}}) = \ln(\frac{2}{3})$

Q23: l'ensemble des solution de l'inéquation $\ln(2 - 3x) < 2$ est $] \frac{e^2-2}{3}; +\infty[$

☐ A : Vrai

☒ B : Faux

Justification : posons $(I) : \ln(2 - 3x) < 2$ est $] \frac{e^2-2}{3}; +\infty[$
 (I) existe si $2 - 3x > 0 \Rightarrow x < \frac{2}{3}$

Q24: l'équation : $e^{3\ln x - \frac{\ln 3}{x \ln 2}} = 26$ admet une solution unique sur $]0; +\infty[$ qui vaut $\frac{\ln 3}{\ln 2}$

☐ A : Vrai

☒ B : Faux

Justification : on a $e^{3\ln x - \frac{\ln 3}{x \ln 2}} = 26 \Rightarrow 3\ln x - \frac{\ln 3}{x \ln 2} = \ln 26$

NB: On peut vérifier le calcul avec une machine

Q25: La durée de vie en moyenne en heures d'un robot avant sa première panne est donnée par la formule : $E = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \lambda x e^{-\lambda x} dx$ pour une durée $\lambda = 0.0005$ on a $E = 2000$ heures

■ **A** : Vrai

□ **B** : Faux

Justification :

On a $A(t) = \int_0^t \lambda x e^{-\lambda x} dx$ posons $U(x) = x$ et $v'(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ Appliquons l'intégration par partie
 $\Rightarrow A(t) = [-x e^{-\lambda x}]_0^t + \int_0^t e^{-\lambda x} dx \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} A(t) = \frac{1}{\lambda}$
donc pour $\lambda = 5 \cdot 10^{-4}$ et $E = \frac{10^4}{5} = 2000 \text{heures}$