CORRECTION DU CONCOURS DIRECT D'ENTREE À L'ESATIC

SESSION 2016

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

QUESTION À CHOIX DIRECTS

Consignes : Choisir l'assertion qui est vraie.

Question-1 : Si (a_n) est une suite tel que : $a_1 + a_2 + ... + a_n = 2n^2 - 3n$
alors (U_n) est une suite arithmétique. **A** Vrai ■ . **B** Faux □

Justification : $a_1 + a_2 + ... + a_n = 2n^2 - 3n = \frac{n}{2}(4n - 6)$ en utilisant $a_n = a_p + (n-p)r \Rightarrow a_n = a_1 + (n-1)r$ on trouve que r=4 et $a_1 = -1$.

Question-2 : $0 < k < 1$ et (U_n) la suite définie par : $U_0 = 1$ et $(U_{n+1} = (1 + k^n)U_n)$

- □ **A :** $U_n = (1 + k)(1 + k^2)(1 + 3^n)...(1 + k^{n-1})$
- □ **B :** $U_n = (1 + k)(1 + 2^n)(1 + 3^n)...(1 + k^n)$
- □ **C :** $U_n = 1 + k + k^2 + k^3 + ... + k^n$
- ■ **D :** Aucune réponse précédente n'est juste

Justification : car on ne retrouve pas $U_0 = 1$ avec aucune de ces formules.

Question-3 : (V_n) la suite définie par $(V_0) = 2$ et $V_n = 2V_n - n$; et pour tout entier naturel n on a $V_n = 2^n + n + 1$ **A** Vrai □ . **B** Faux ■

Justification : par récurence on a $V_0 = 2^0 + 0 + 1 = 2$ supposons que $V_k = 2^k + k + 1$ est vrai par la suite on trouve que $V_{k+1} = k + 1$.

Question-4 : (W_n) la suite telle que $W_0 = W_0 = 1$ et pour tout entier naturel n
$W_{n+2} = 5W_{n+1} - 6W_n$ on n'a donc $W_n = 2^{n+1} - 3^n$ **A** Vrai □ . **B** Faux ■

Justification : par récurence la formule n'est pas vérifiée

Question-5 : soit z le nombre complexe de module $\sqrt{2}$ et d'argument $\frac{\pi}{3}$ on n'a alors :

- □ **A :** $z^{14} = -128\sqrt{3} - 128i$
- □ **B :** $z^{14} = 64 - 64i$

- ■ **C :** $z^{14} = -64 + 64i\sqrt{3}$
- ☐ **D :** $z^{14} = -128 + 128i\sqrt{3}$

Justification : car $z = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{3}i}$ donc $z^{14} = 128(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = -64 + 64i\sqrt{3}$

Question-6 : On répète quatre fois de manière indépendante une expérience aléatoire dont la probabilité de succès est 0,35 Alors la probabilité d'obtenir au moins un succès est :

- ☐ **A :** environ 0,015
- ■ **B :** environ 0,821
- ☐ **C :** environ 0,985
- ☐ **D :** environ 0,025

Justification : car la probabilité d'avoir zero succès est $p = C_4^0 * 0,35^0 * (1 - 0,35)^4$=0,1785 donc la valeur récherchée est 1-0,1785=0,821

Question-7 : $(U_n); (V_n); (W_n)$ sont trois suites définies par :
pour tout n entier naturel $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = f(U_n)$ ensuite $V_n = \frac{U_{n-1}}{U_n}$ et $W_n = ln(V_n)$ avec $f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$ et x $> \frac{1}{2}$

- ☐ **A :** (V_n) est une suite géométrique
- ☐ **B :** (V_n) est une suite arithmétique
- ■ **C :** (V_n) n'est ni arithmétique ni géométrique

Justification : car la suite ne respecte pas les lois d'un suite géométrique ni d'une suite arithmétique

Question-8 :$f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$ et x $> \frac{1}{2}$ $(U_n); (V_n); (W_n)$ sont trois suites définies par :
pour tout n entier naturel $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = f(U_n)$ ensuite $V_n = \frac{U_{n-1}}{U_n}$ et $W_n = ln(V_n)$

- ☐ **A :** $U_n = [1 - (\frac{1}{2})^{2^n}]^{-1}$
- ☐ **B :** $limU_n = 2$
- ☐ **C :** $U_n = [1 - (-\frac{1}{2})^{2^n}]$

Justification :

Question-9 : soit f la fonction définie par f(x) $= \frac{3sin^3x - 6sinx + 5}{sin^2x + 1}$ alors ça dérivée est :

- ☐ **A :** $f'(x) = \frac{4sin^2xcosx}{(sin^2x+1)^2}$
- ☐ **B :** $f'(x) = \frac{9sin^2xcosx - 6cosx}{2sinxcosx}$
- ☐ **C :** $f'(x) = \frac{(3sin^4x + 15sin^2x + 10sinx - 6)cosx}{(sin^2x+1)^2}$
- ■ **D :** Aucune réponse précédente n'est juste

Justification : car la dérivée recherché est plutôt $f'(x) = \frac{(3sin^4x+15sin^2x-10sinx-6)cosx}{(sin^2x+1)^2}$

Question-10 : La valeur moyenne de la fonction exponentielle sur [0 ;1] est :

- ☐ **A :** La valeur moyenne de la fonction exponentielle sur [0 ;1] est e
- ☐ **B :** $\int_{-1}^{1}(x^2+x^3)sin^3xdx = 0$
- ■ **C :** $\int_0^{\pi} e^{cosx}dx = \int_{-\pi}^{0} e^{cosx}dx$
- ■ **D :** $\int_0^{\pi} e^{cosx}dx = \int_{-2\pi}^{-\pi} e^{cosx}dx$

Justification : car la fonction e^{cosx} est une fonction pair

Question-11 : soit I $= \int_{-1}^{1}|e^x-1|dx$ la valeur de I est :

- ☐ **A :** I = |-|$\frac{1}{e}-1$|-|e-1|
- ☐ **B :** I = e + $\frac{1}{e}$
- ☐ **C :** I = $2(e-1)$
- ■ **D :** I = $e+\frac{1}{e}-2$

Justification : car ici I $= [e^x-x]_0^1 + [x-e^{-x}]_{-1}^0 = e+\frac{1}{e}-2$

Question-12 : pour tout n entier naturel $I_n = \int_{ln(n)}^{ln(n+1)} \frac{e^t}{e^t+1}dt$:

- ■ **A :** $I_n = ln(\frac{n+1}{n})$
- ■ **B :** I_n est décroissant
- ☐ **C :** pour tout entier naturel n, $I_1+I_2+...+I_n = ln(n+2)$

Justification : car $I_n = [ln|e^t+1|]_{ln(n)}^{ln(n+1)}$ on a donc $I_n = ln(n+1)-ln(n) = ln(\frac{n+1}{n})$ qui a une dérivée négative donc décroissante

Question-13 : Soit f(x)=kx+1, la valeur de k telle f soit une fonction de densité est :

- ■ **A :** $k=-\frac{1}{2}$
- ☐ **B :** $k=\frac{1}{2}$
- ☐ **C :** $k=0$

Justification : car pour $k=-\frac{1}{2}$ on a $\int_0^2(-\frac{1}{4}+1)dx = 1$

Question-14 : Soit f(x)=2x-1, avec f une fonction qui est définie sur $\mathbb{R}$ alors la fonction f peut être une fonction densité de probabilité sur :

- ■ **A :** $[1;\frac{1+\sqrt{5}}{2}]$
- ☐ **B :** $[1;2]$

- ■ **C :** $[0; \frac{1+\sqrt{5}}{2}]$

Justification : car la fonction doit être continue, positive sur [a ;b] et $\int_a^b f(x)dx = 1$
$\int_1^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} (2x-1)dx = 1$ et $\int_0^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} (2x-1)dx = 1$

Question-15 : Une maladie touche 5% de la population d'un pays. On prélève au hasard un échantillon de 100 personnes . L'intervalle de fluctuation asymptotique de la proportion de personnes atteintes est :

- ☐ **A :** $[0,04; 0,06]$
- ■ **B :** $[0,01; 0,09]$
- ☐ **C :** Aucune de ces réponse

Justification : en appliquant la formule suivante $[p-1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}; p+1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}]$ avec p=0,05 et n=100

Question-16 : L'espace est muni d'un repère (O,I,J,K) les points A(1 ;2 ;1) ;B(0 ;2 ;2) ; C(0 ;0 ;5) sont alignés : **A** Vrai ☐ . **B** Faux ■

Justification : Car $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaire

Question-17 : L'espace est muni d'un repère (O,I,J,K) les points A(1 ;2 ;1) ;B(0 ;2 ;2) ; C(0 ;0 ;5) sont coplanaires : **A** Vrai ■ . **B** Faux ☐

Justification : Car il existe un couple α et β tel que $\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$ avec $\alpha = \frac{11}{4}$ et $\beta = -\frac{1}{2}$

Question-18 : On donne ci-dessous les représentations paramètres de deux droites.

$$(d_1)\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1+t \\ y & = & 2-t \\ z & = & 3+2t \end{array}\right.$$

$$(d_2)\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 3t \\ y & = & 1+2t \quad \text{avec } t \in \mathbb{R} \\ z & = & 2-t \end{array}\right.$$

(d_1) et (d_2) sont coplanaires

A Vrai ☐ . **B** Faux ■

Justification : Car leur vecteur directeur n'est pas colinéaire et les droites (d_1) et (d_2) n'ont pas de points d'intersection

Question-19 : ABC est un triangle équilatéral de côté a (a>0). L'ensembe des points M du plan vérifiant : $MA^2 + MB^2 + MC^2 = \frac{5a^2}{4}$ est :

- ☐ **A :** Le cercle contenant le point A
- ☐ **B :** Une droite
- ☐ **C :** le cerce inscrit dans ABC
- ☐ **D :** un ensembe contenant un seul point
- ■ **E :** Vide

Justification : Car $MG^2 = -\frac{11a^2}{12} < 0$

Question-20 : On donne f(z) $= \frac{z+1-2i}{z-1+i}$ soit C l'ensembe des points M d'affixe z tels que : |f(z)|=1

- ☐ **A :** (C) est le cercle trigonométrique
- ■ **B :** (C) est une droite passant par le point de coordonnées $(0\,;\frac{1}{2})$
- ☐ **C :** (C) est un cercle de diamètre $[AB]$ avec A(-1 ;2) et B(1 ;-1)
- ☐ **D :** (C) est une droite de coefficient directeur $-\frac{3}{2}$
- ☐ **E :** (C) est un segment de droite

Justification : On suppose que z = x+iy et on remplace dans l'équation on trouve y=$\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}$

Question-21 : Soient les points A(1 ;0) ; B(-3 ;0) l'ensembe des points M d'affixe z vérifiant |z-1|=2|z+3| est :

- ☐ **A :** Un cercle de diamètre $[AB]$
- ■ **B :** Un cercle centré sur la droite $[AB]$ de diamètre déférent de $[AB]$
- ☐ **C :** L'hyperbole de foyers A et B et d'excentricité 2
- ☐ **D :** La droite (AB)
- ☐ **E :** La médiatrice (AB)

Justification : Car l'équation donne $3x^2 + 26x + 35 + 3y^2 = 0$ après modification on trouve $(x + \frac{13}{3})^2 + y^2 = \frac{106}{9}$

Question-22 : Soit la suite numérique (U_n) définie par :
$\forall n \in$ entier naturel non nul ; $U_{2n} = n + 1$ et $U_{2n+1} = 1 - \frac{1}{n}$

- ☐ **A :** (U_n) est croissante
- ☐ **B :** (U_n) converge vers 1
- ■ **C :** (U_n) est minoré
- ☐ **D :** (U_n) admet une limite (finie ou infinie)
- ☐ **E :** (U_n) est borné

Justification : C'est evident que la suite ne croit pas car $U_2 = 2$ et $U_3 = 0$ ensuite (U_n) diverge est bien minoré par 0 et admet pas de limite et n'est pas borné puisqu'un de ces termes va à l'infinie

Question-23 : Soit un nombre réel $\theta \in [0; \frac{\pi}{2}]$ on considère les points A, B et M d'affixe respective 1 ;2 et z=$1 + e^{2i\theta}$:

- ■ **A :** M appartient au cercle de centre A et de rayon 1
- □ **B :** M appartient à la droite d'équation $x = 1$
- □ **C :** OM = 2
- ■ **D :** L'abscisse de M est toujours positive

Justification : L'équation du cercle est $(x+1)^2+y^2 = 1$ avec $Z = 1+e^{2i\theta} = 1+cos(2\theta)+isin(2\theta)$ $(1 + cos(2\theta) - 1)^2 + (sin(2\theta))^2$=$cos^2(2\theta) + sin^2(2\theta) = 1$ ensuite $\forall\theta \in [0; \frac{\pi}{2}]$ $1 + cos(2\theta)$ est toujours positif

Question-24 : Une fonction g est définie sur l'intervalle $]-\infty; 0]$ par $g(x) = \frac{\sqrt{x^2-2x}}{x-3}$ soit (Γ) sa courbe représentative dans un répère du plan.

- ■ **A :** (Γ) admet une asymptotique d'équation : y=-1
- □ **B :** (Γ) n'admet pas d'asymptotique
- □ **C :** (Γ) admet une : asymptotique y=x
- □ **D :** (Γ) admet une asymptotique d'équation : y=1

Justification : Car quand on calcul la limite de g(x)-x en $-\infty$ on trouve -1

Question-25 : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ $f(x) = \int_0^x e^{-t^2}dt$ la fonction f'' dérivée seconde de la fonction f sur $\mathbb{R}$, est définie par :.

- □ **A :** $f''(x) = \int_0^x -2te^{-t^2}dt$
- □ **B :** $f''(x) = \int_0^1 -2xe^{-x^2}dx$
- ■ **C :** $f''(x) = -2xe^{-x^2}$
- □ **D :** $f''^{(x)} = e^{-x^2}$

Justification : il suffit de dérivée deux fois la fonction

Réalisé par OVI Jude Schadrac, KONE Namogo Ben Armel, BOUAKI Kouadio Julien, DJAKI Loba Stephane
Etudiants à L'Ecole Supérieure Africaine des Technologies de l'Information et de la Communication
Mail : elitech32@gmail.com

58-79-51-80 - 48-73-43-15 - 48-59-49-99 - 79-87-94-36