UNIVERSITE DE MAN
UFR :
LICENCE 1
T.D. MATHEMATIQUES (ANALYSE)
ANNEE UNIVERSITAIRE 2016-2017

THEME N°1

FONCTION D'UNE VARIABLE-CONTINUITE

EXERCICE 1

Montrer directement que la fonction $x \longmapsto \sin(cosx)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 2

Soient $K = [a,b]$ un segment et f une application continue de K dans lui-même. Montrer qu'il existe un élément c de K tel que $f(c) = c$

EXERCICE 4:

Soit f une application dérivable de $\mathbb{R}$ dans lui-même possédant une même limite finie λ en $+\infty\ et - \infty$. En considérant l'application $g = f \circ \tan$ montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

EXERCICE 5

Soit $f, g: [a, b] \to \mathbb{R}$ deux applications continues, dérivables sur $]a,b[$.

1. Montrer qu'il existe c dans $]a,b[$ tel que

$$\big(f(b) - f(a)\big)g'(c) = \big(g(b) - g(a)\big)f'(c)$$

2.On suppose $f(a) = g(a) = 0$ et

$\lim\limits_{x\to a} \frac{f'}{g'} = l.$

Montrer que $\lim\limits_{x\to a} \frac{f}{g} = l$

Fin fiche 1

THEME N°2

DERIVABILITE-FONCTIONS USUELLES

EXERCICE 1

Calculer les dérivées des fonctions suivantes

1) $f(x) = tg\sqrt{1-4x^2}$; 2) $f(x) = \frac{1}{cos\sqrt{x}}$; 3) $f(x) = Arctg\sqrt{1-tgx}$

4) $f(x) = (Arctg\frac{1}{x})\frac{1}{x}$

EXERCICE 2

Dans la fonction $y = 2x^3 + 6$, quelle est la valeur de x au point où y croît 24 fois plus vite que x. Indiquer le théorème utilisé.

EXERCICE 5

On définit des fonctions u, v dans $\mathbb{R}^*$ en posant pour tout réel x non nul

$u(x) = |x|^x,\qquad v(x) = (u(x))^x$

1. Montrer que u, v admettent en 0 des limites finies notées respectivement u_0, v_0. On prolonge alors les fonctions en posant

$u(0) = u_0 ,\qquad v(0) = v_0$

2. Pour chacune de ces deux fonctions
   a. Etudier le comportement en $+\infty$
   b. Etudier la dérivabilité en 0

EXERCICE 6

Soit la fonction $f(x) = \arctan\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. Montrer par deux méthodes différentes que $f(x) = \arcsin x$.

Fin fiche 2

THEME N°3

COMPARAISON-DEVELOPPEMENT LIMITE

EXERCICE 1

1. Calculer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de ch(x)cos(x) + sh(x)sin(x).
2. Calculer le développent limité à l'ordre 4 en 0 de cos(sin(x))
3. Calculer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $\frac{1}{\cos(x)}$
4. Calculer le développement limité à l'ordre 2 en 2 de $\sqrt{x}$
5. Calculer le développement limité à l'ordre 2 en $\pi/4$ de tan(x)

EXERCICE 2

Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose $f(x) = xe^{x^2}$.

1. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et que sa réciproque est de classe C^∞.
2. Déterminer le développement limité à l'ordre 5 de f^{-1} en 0.

On ne cherchera à aucun moment à déterminer explicitement f^{-1}

EXERCICE 3

Développement limité en 0, à l'ordre 2, de

$$f(x) = \exp[\frac{1}{x}\ln\frac{ch\sqrt{x}}{\cos\sqrt{x}}]$$

EXERCICE 4

1. Calculer la limite suivante :

$$\lim_{x\to 0} x\frac{ch(x) - \cos(x)}{sh(x) - \sin(x)}$$

2. Calculer la limite suivante :

$$\lim_{x\to 1}((x^2 + x - 2)\tan(\pi x/2))$$

3. Soient a et b deux réels distincts. Déterminer un équivalent quand x tend vers $+\infty$ de

$f(x) = \sqrt{x^2 + b} - \sqrt{x^2 + a}$

Puis α tel que $x^\alpha f(x)$ possède une limite finie non nulle, que l'on calculera, quand x tend vers $+\infty$.