Ecole Hassania des Travaux Publics المدرسة الحسنية للأشغال العمومية

Département de Mathématiques et Informatique

PROBABILITES

Exercices Corrigés

Abdelhamid El Mossadeq

Professeur à l'EHTP

2006-2007

TABLE DES MATIERES

Analyse Combinatoire

Exercice 1
Soit A et B deux ensembles et f une application de A dans B.
On suppose que B est fini de cardinal n et que pour tout y dans B, le cardinal de l'image réciproque de y par f, $f^{-1}(\{y\})$, est égal à un entier non nul p.

1. Montrer que f est surjective.
2. Soit R la ralation d'équivalence associée à f.
   Montrer que A/R et B sont équipotents.
3. En déduire le cardinal de A.

Solution 1
1. Par hypothèse, le cardinal de $f^{-1}(\{y\})$ est non nul pour tout y dans B.
   Donc $f^{-1}(\{y\})$ est non vide pour tout y dans B, d'où la surjection de f.
2. D'après la décomposition canonique de f, A/R et $f(A)$ sont équipotents.
   Or f est surjective, donc $f(A) = B$, et par conséquent A/R et B ont même cardinal.
3. Pour tout $x \in A$,désignons par $C(x)$ la classe d'équicalence de x modulo R.
   On a :

$$\begin{aligned} C(x) &= \{y \in A \mid xRy\} \\ &= \{y \in A \mid f(x) = f(y)\} \\ &= \left\{y \in A \mid y \in f^{-1}(\{f(x)\})\right\} \\ &= f^{-1}(\{f(x)\}) \end{aligned}$$

   On en déduit que $C(x)$ a pour cardinal p pour tout $x \in A$.
   Soit alors $x_1, ..., x_n$ un système de représentants des classes d'équivalence modulo la relation d'équivalence R.
   Comme $C(x_1), ..., C(x_n)$ forment une partion de A, on a :

$$card\ A = \sum_{k=1}^{n} card\ C(x_k) = np$$

Exercice 2
Soit A et B deux ensembles de cardinaux respectifs n et p, et désignons par $\mathcal{F}(A, B)$ l'ensemble des applications de A dans B.

1. Déterminer le nombre d'applications de A dans B pour $n = 1$ et $n = 2$.
2. Soit $a \in A$ et $A_1 = A - \{a\}$.
   Montrer que $\mathcal{F}(A, B)$ et $\mathcal{F}(A_1, B) \times \mathcal{F}(\{a\}, B)$ sont équipotents.
3. En déduire, par un raisonnement par récurrence, le nombre d'applications de A dans B.

Solution 2

1. $*$ $n = 1$: pour définir une application de $A = \{a\}$ dans B, il suffit de définir l'image de a dans B.
   Il y a p possibilités, donc p applications de A dans B.

   $*$ $n = 2$: pour définir une application de
   $$A = \{a, b\} \longrightarrow B$$
   il suffit de définir les images a et b dans B.
   Pour chacun d'eux, il y a p possibilités, donc p^2 applications de A dans B.

2. Considérons l'application Φ :
   $$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(A,B) & \longrightarrow & \mathcal{F}(A_1,B) \times \mathcal{F}(\{a\},B) \\ f & \longmapsto & \left(f_{|A_1}, f_{|\{a\}}\right) \end{array}$$
   où $f_{|A_1}$ et $f_{|\{a\}}$ représentent les restrictions de f à A_1 et A_1 respectivement, est une bijection.
3. Il s'en suit que :
   $$\begin{array}{rcl} card\ \mathcal{F}(A,B) & = & card\ [\mathcal{F}(A_1,B) \times \mathcal{F}(\{a\},B)] \\ & = & card\ \mathcal{F}(A_1,B) \times card\ \mathcal{F}(\{a\},B) \\ & = & p \times card\ \mathcal{F}(A_1,B) \end{array}$$
   Par un raisonnement par récurrence sur n, $n \geq 1$, on conclut que :
   $$card\ \mathcal{F}(A,B) = p^n$$

Exercice 3

Soit E un ensemble fini de cardinal n et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de toutes les parties de$E$.

1. Soit f de E dans $\{0,1\}$ une application.
   Montrer qu'il existe une partie unique A dans $\mathcal{P}(E)$ telle que f soit la fonction caractéristique de A.
2. En déduire, en utilisant Exercice 2., le cardinal de $\mathcal{P}(E)$.

Solution 3

1. Soit :
   $$f : E \longrightarrow \{0,1\}$$
   une application.
   $A = f^{-1}(\{1\})$ est l'unique partie de E telle que f soit la fonction caractéristique χ_A de A.

2. L'application ϕ :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{F}(E,\{0,1\}) \\ A & \longmapsto & \chi_A \end{array}$$

où $\mathcal{F}(E,\{0,1\})$ est l'ensemble des applications de E dans $\{0,1\}$, est une bijection.
On en déduit que :

$$\begin{array}{rcl} card\,\mathcal{P}(E) & = & card\,\mathcal{F}(E,\{0,1\}) \\ & = & 2^n \end{array}$$

Exercice 4
Soit A et B deux ensembles de cardinaux respectifs p et n, $p \leq n$.

1. Déterminer le nombre d'applications injectives de A dans B pour $p = 1, 2$.
2. Soit $a \in A$, $A_1 = A - \{a\}$ et G (resp.G_1) l'ensemble des injections de A (resp. A_1) dans B.
   Montrer que si g est une injection de A_1 dans B, alors l'application f de A dans B qui à $x \in A_1$ associe $g(x)$ et à a associe un élément arbitraire de $B - g(A_1)$ est une injection.
3. En déduire que l'application Φ qui à $f \in G$ associe la restriction de f à A_1 est une application surjective sur G_1, et que pour tout $g \in G_1$, le cardinal de l'image réciproque de g par Φ est $n - p + 1$.
4. Utiliser Exercice 1. pour déterminer par récurrence sur p, le nombre d'injections de A dans B.
5. On suppose $n = p$.
   En déduire le nombre de bijections de A dans B.

Solution 4

1. * $p = 1$
     Toute application de $A = \{a\}$ dans B est une injection. Donc, il y a n injections de $\{a\}$ dans B.
   * $p = 2$
     Pour le premier élément a de $A = \{a, b\}$ il y a n possibilités alors que pour le deuxième b il n'y a que $(n-1)$ possibilités puisque son image doit être différente de celle de a.
     Donc, le nombre d'injections de $\{a, b\}$ dans B est $n(n-1)$.
2. Soit :

$$g : A_1 \longrightarrow B$$

une injection.

Pour tout $y \in B - g(A_1)$, l'application f_y qui coincide avec g sur A_1 et telle que :

$$f_y(a) = y$$

est une injection.
De plus :

$$g = f_{y|A_1}$$

On peut construire ainsi $(n - p + 1)$ aplications injectives : autant que le cardinal de $B - g(A_1)$.

3. D'après la question 2, l'application Φ :

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G_1 \\ f & \longmapsto & f_{|A_1} \end{array}$$

est surjective, de plus pour tout $g \in G_1$ on a :

$$card\ \Phi^{-1}(\{g\}) = n - p + 1$$

Il s'en suit que :

$$card\ G = (n - p + 1) \times card\ G_1$$

4. En utilisant le théorème des Bergers, on conclut, par une récurrence sur p, $p \geq 1$, que :

$$card\ G = \frac{n!}{(n-p)!}$$

5. Lorsque $n = p$, toute injection est une bijection.
Il y a donc $n!$ bijections de A sur B.

Exercice 5
On appelle **arrangement** d'ordre p de A, toute suite ordonnée de p éléments distincts choisis parmi les éléments de A.

1. Montrer que l'ensemble des arrangements d'ordre p de A est équipotent à l'ensemble des applications injectives de $\{1, ..., p\}$ dans A.
2. En déduire le nombre d'arrangements d'ordre p de A, noté $A(n, p)$.
3. En déduire le nombre de **permutations** de A (arrangements d'ordre n de A), noté $P(n)$.

Solution 5

1. Soit $(a_1, ..., a_p)$ un arrangement d'ordre p de A.
   L'application f :
$$\begin{array}{rcl} \{1, ..., p\} & \longrightarrow & A \\ i & \longmapsto & a_i \end{array}$$
   est une injection.
   Réciproquement, si :
$$f : \{1, ..., p\} \longrightarrow A$$
   est une injection, alors $(f(1), ..., f(p))$ est un arrangement d'ordre p de A.
2. On en déduit que le nombre d'arrangements d'ordre p de A coïncide avec le nombre d'injections de $\{1, ..., p\}$ dans A; d'où :
$$A(n, p) = \frac{n!}{(n-p)!}$$
3. En particulier, le nombre de permutations de A coincide avec le nombre de bijections de A, à savoir :
$$P(n) = n!$$

Exercice 6
Soit A un ensemble à n éléments.
On appelle **combinaison** d'ordre p de A, toute suite non ordonnée de p éléments distincts choisis parmi les éléments de A.

1. Quelle est le nombre d'arrangements qu'on peut associer à une combinaison d'ordre p de A ?
2. En déduire le nombre de combinaisons d'ordre p de A, noté $C(n, p)$.

Solution 6

1. Etant donnée une combinaison d'ordre p de A, le nombre de suite ordonnée de p éléments distincts qu'on peut construire, à partir de cette combinaison, est le nombre de permutations de p éléments, a savoir $p!$.
2. Ainsi, à chaque combinaison d'ordre p de A correspond $p!$ arrangements d'ordre p de A, donc :
$$A(n, p) = p!C(n, p)$$
   d'où :
$$C(n, p) = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Exercice 7
Soit a un élément de E.
Déterminer le nombre de sous-ensembles de E de cardinal p :
• qui contiennent a
• qui ne contiennent pas a
En déduire :

$$C(n,p) = C(n-1,p-1) + C(n-1,p)$$

Solution 7
• Le nombre de sous-ensembles de E de cardinal p qui contiennent a est le nombre de parties à $(p-1)$ éléments de $E - \{a\}$, à savoir :

$$C(n-1,p-1) = \frac{(n-1)!}{(p-1)!\,(n-p)!}$$

• Le nombre de sous-ensembles de E de cardinal p qui ne contiennent pas a est le nombre de parties à p éléments de $E - \{a\}$, à savoir :

$$C(n-1,p) = \frac{(n-1)!}{p!\,(n-p-1)!}$$

Or toute partie de E à p éléments soit elle contient a soit elle ne le contient pas, on en déduit donc :

$$C(n,p) = C(n-1,p-1) + C(n-1,p)$$

Exercice 8
Soit A un ensemble à n éléments.

1. Quelle est le nombre de partie de A à p éléments ?
2. En déduire le cardinal de $\mathcal{P}(A)$.

Solution 8
1. Le nombre de partie de A à p éléments est le nombre de combinaisons d'ordre p de A
2. Notons $\mathfrak{C}(n,p)$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{P}(A)$ ayant p éléments.
   $[\mathfrak{C}(n,p)]_{0 \leq p \leq n}$ forment une partition de $\mathcal{P}(A)$ d'où :

$$\begin{aligned} card\, \mathcal{P}(A) &= \sum_{p=0}^{n} card\, \mathfrak{C}(n,p) \\ &= \sum_{p=0}^{n} C(n,p) \\ &= (1+1)^n \\ &= 2^n \end{aligned}$$

Exercice 9

1. Montrer que :

$$C(n,p) = C(n,n-p)$$

2. En déduire que :

$$C(n,n) = C(n,0)$$

3. En déduire que :

$$C(2n,n) = 2C(2n-1,n) = 2C(2n-1,n-1)$$

4. En utilisant les développements de $(1-1)^n$ et $(1+1)^n$, calculer :

$$\sum \{C(n,p) \mid 0 \leq p \leq n \ ,\ p \text{ pair}\} \quad ; \quad \sum \{C(n,p) \mid 0 \leq p \leq n \ ,\ p \text{ impair}\}$$

Solution 9

1. Soit E un ensemble à n éléments.
   A toute partie de E à p éléments correspond une et une seule partie de E un ensemble à $(n-p)$ éléments qui est son complémentaire, d'où :

$$C(n,p) = C(n,n-p)$$

2. En particulier :

$$C(n,n) = C(n,n-n) = C(n,0) = 1$$

   L'unique partie de E à n éléments est E.
   L'unique partie de E à qui ne contient aucun élément est l'ensemble vide $\varnothing$.
3. Puisque:

$$C(n,p) = C(n-1,p-1) + C(n-1,p)$$

   et :

$$C(n,p) = C(n,n-p)$$

alors :

$$\begin{aligned} C(2n,n) &= C(2n-1,n-1)+C(2n-1,n) \\ &= 2C(2n-1,n-1) \\ &= 2C(2n-1,n) \end{aligned}$$

4. En utilisant la formule du binôme on a :

$$(1+1)^n = \sum_{p=0}^{n} C(n,p)$$

et :

$$\begin{aligned} (1-1)^n &= \sum_{p=0}^{n} (-1)^{n-p} C(n,p) \\ &= \sum_{p=0}^{n} (-1)^{n-p} C(n,n-p) \\ &= \sum_{p=0}^{n} (-1)^{p} C(n,p) \end{aligned}$$

En faisant la somme et la différence de ces deux quantités, on obtient :

$$2^n = 2\sum \{C(n,p) \mid 0 \leq p \leq n \ , \ p \text{ pair}\}$$

et :

$$2^n = 2\sum \{C(n,p) \mid 0 \leq p \leq n \ , \ p \text{ impair}\}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \sum \{C(n,p) \mid 0 \leq p \leq n \ , \ p \text{ pair}\} &= \sum \{C(n,p) \mid 0 \leq p \leq n \ , \ p \text{ impair}\} \\ &= 2^{n-1} \end{aligned}$$

Exercice 10
Soit $E = \{a_1, ..., a_n\}$ un ensemble à n éléments.
On appelle **permutation avec répétition** d'ordre $(p_1, ..., p_n)$ de E, toute suite ordonnée des éléments de E, où l'élément a_i est répété p_i fois, $1 \leq i \leq n$.
Déterminer le nombre de ces permutations qu'on note $P(p_1, ..., p_n)$.

Solution 10
Le nombre de manières pour placer l'élément a_1 dans p_1 positions de la suite est le nombre de combinaison d'ordre p_1 parmi p éléments : $C(p, p_1)$.

Pour a_2, il y a $C(p-p_1,p_2)$ manières possibles,...
Pour a_k, il y a $C(p-p_1-...-p_{k-1},p_k)$ manières possibles.
D'où :

$$\begin{aligned} P(p_1,...,p_n) &= \prod_{k=1}^{n} C(p-p_1-...-p_{k-1},p_k) \\ &= \frac{p!}{p_1!...p_n!} \end{aligned}$$

où $p_0 = 1$.

Exercice 11
Soit $E = \{a_1,...,a_n\}$ un ensemble à n éléments.
On appelle **combinaison avec répétition** d'ordre p de E, toute suite non ordonnée des éléments de E de longeur p.
Déterminer le nombre de ces combinaisons qu'on note $K(n,p)$.

Solution 11
On démontre que le nombre de combinaisons avec répétition d'ordre p de n éléments.est :

$$K(n,p) = C(n+p-1,p)$$

Exercice 12

1. Déterminer le nombre d'applications strictement croissantes de $\{1,...,p\}$ dans $\{1,...,n\}$
2. Déterminer le nombre d'applications croissantes de $\{1,...,p\}$ dans $\{1,...,n\}$.
3. Déterminer le nombre de solutions de l'équation :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = p \ , \ p \in \mathbb{N} \ , \ x_i \in \mathbb{N}$$

4. Déterminer le nombre de solutions de l'inéquation :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq p \ , \ p \in \mathbb{N} \ , \ x_i \in \mathbb{N}$$

Solution 12

1. Démontrons que le nombre d'applications strictement croissantes de $\{1, ..., p\}$ dans $\{1, ..., n\}$ est le nombre de combinaisons d'ordre p de $\{1, ..., n\}$, à savoir :

$$C(n,p) = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

En effet, si :

$$f : \{1, ..., p\} \longrightarrow \{1, ..., n\}$$

est une application strictement croissante, alors $(f(1), ..., f(p))$ est une combinaison d'ordre p de $\{1, ..., n\}$.

Réciproquement, soit $\{a_1, ..., a_p\}$ une combinaison d'ordre p de $\{1, ..., n\}$ et soit σ une permutation de $\{1, ..., p\}$ telle que :

$$a_{\sigma(1)} < a_{\sigma(2)} < ... < a_{\sigma(p)}$$

L'application f :

$$\begin{array}{ccc} \{1, ..., p\} & \longrightarrow & \{1, ..., n\} \\ k & \longmapsto & a_{\sigma(k)} \end{array}$$

est strictement croissante.
D'où le résultat.

2. Démontrons que le nombre d'applications croissantes de $\{1, ..., p\}$ dans $\{1, ..., n\}$ est le nombre de combinaisons avec répétition d'ordre p de $\{1, ..., n\}$, à savoir :

$$\begin{aligned} K(n,p) &= C(n+p-1,p) \\ &= \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!} \end{aligned}$$

En effet, si :

$$f : \{1, ..., p\} \longrightarrow \{1, ..., n\}$$

est une application, alors $(f(1), ..., f(p))$ est une combinaison avec répétition d'ordre p de $\{1, ..., n\}$.
Réciproquement, soit $\{a_1, ..., a_p\}$ une combinaison avec répétition d'ordre p de $\{1, ..., n\}$ et soit σ une permutation de $\{1, ..., p\}$ telle que :

$$a_{\sigma(1)} \leq a_{\sigma(2)} \leq ... \leq a_{\sigma(p)}$$

L'application f :

$$\begin{array}{ccc} \{1, ..., p\} & \longrightarrow & \{1, ..., n\} \\ k & \longmapsto & a_{\sigma(k)} \end{array}$$

est croissante.
D'où le résultat.

3. Démontrons que le nombre de solutions de l'équation :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = p \ , \ p \in \mathbb{N} \ , \ x_i \in \mathbb{N}$$

est le nombre de combinaisons avec répétition d'ordre p de $\{1, ..., n\}$, c'est à dire :

$$\begin{aligned} K(n,p) &= C(n+p-1,p) \\ &= \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!} \end{aligned}$$

En effet, si $(x_1, ..., x_n)$ est une solution de cette équation, alors la suite dans laquelle l'élément 1 est répété x_1 fois, ..., l'élément n est répété x_n fois est une combinaison avec répétition d'ordre p de $\{1, ..., n\}$.
Réciproquement, soit $\{a_1, ..., a_p\}$ une combinaison avec répétition d'ordre p de $\{1, ..., n\}$ et désignons par x_i le nombre de répétition de l'élément i dans cette combinaison; on a alors :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = p$$

$(x_1, ..., x_n)$ est donc une solution de l'équation. D'où le résultat.

4. Remarquons que l'inéquation :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq p \ , \ p \in \mathbb{N} \ , \ x_i \in \mathbb{N}$$

est équivalente à :

$$\exists x_{n+1} \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^{n+1} x_i = p$$

Il en résulte qu le nombre de solutions de l'inéquation est égal au nombre de solutions de l'équation :

$$\sum_{i=1}^{n+1} x_i = p \ , \ p \in \mathbb{N} \ , \ x_i \in \mathbb{N}$$

à savoir :

$$K(n+1,p) = C(n+p,p)$$

Exercice 13
Combien de plaques minéralogiques portant un matricule de sept caractères peut-on former si les trois premiers sont des lettres et les quatre derniers sont des chiffres ?

Solution 13
Pour chaque lettre, il y a 26 possibilités, alors qu'il y a 10 possibilités pour chaque chiffre.
Ainsi, le nombre de plaques minéralogiques qu'on peut former est :

$$26^3 \times 10^4$$

Exercice 14
A partir d'un groupe de cinq hommes et sept femmes, combien de comités différents composés de deux hommes et trois femmes peut-on former ?
Qu'en est-il si deux des hommes s'entendent mal et refusent de siéger ensemble au comité ?

Solution 14

- Pour le choix des trois femmes il y a $C(7,3)$ possibilités et pour celui des hommes il y a $C(5,2)$.
  On en déduit que le nombre total de comités qu'on peut ainsi former est :
  $$C(7,3) \times C(5,2) = 350$$
- Les deux hommes ne peuvent siéger ensemble, donc soit l'un seulement siège dans le comité, soit aucun des deux ne siège dans le comité.
  Le nombre de choix des hommes dans le premier cas est :
  $$C(2,1) \times C(3,1) = 6$$
  dans le second cas, le nombre de choix des hommes est :
  $$C(2,0) \times C(3,2) = 3$$
  Ainsi, le nombre de choix des deux hommes est :
  $$C(2,1) \times C(3,1) + C(2,0) \times C(2,2) = 9$$
  et par suite, le nombre de comités qu'on peut ainsi former est :
  $$C(7,3)\left[C(2,1) \times C(3,1) + C(2,0) \times C(2,2)\right] = 315$$
  On peut aussi procéder en dénombrant les comités où les deux hommes siègent ensemble soit :
  $$C(7,3)\left[C(2,2) \times C(3,0)\right] = 35$$
  D'où, le nombre de comité recherché est :
  $$350 - 35 = 315$$

Exercice 15
Un cours de Calcul des Probabilités est suivi par six femmes et quatre hommes.
Un examen a lieu, puis les étudiants sont classés selon leurs notes.
On suppose exclu que deux étudiants obtiennent la même note.

1. Combien de classements différents peut-on envisager ?
2. Si les femmes sont classées entre elles uniquement et les hommes entre eux, combien de classements globaux peut-on envisager ?

Solution 15

1. Le nombre de classements possibles est le nombre de permutations d'ordre 10, à savoir :
$$10! = 3628800$$
2. le nombre de classements des femmes est 6! et celui des hommes est 4!.
Il en résulte que le nombre de classements globaux est :
$$4! \times 6! = 17280$$

Exercice 16
Parmi les dix participants à un tournoi d'échec, on compte quatre russes, trois américains, deux anglais et un français.
Si dans le classement du tournoi on ne peut lire que la liste des nationalités des joueurs mais pas leur identité, à combien de classements individuels correspond une telle liste ?

Solution 16
Etant donné un classement par nationalité, il y a 4! possibilités pour classser individuellement les quatre russes, 3! pour les trois américains, 2! pour les deux anglais et une seule possibilité pour le français.
Donc, le nombre de classents individuels qui correspondent à un classement par nationalité est :
$$4! \times 3! \times 2! \times 1! = 288$$
Notons que le nombre de classements individuels est :
$$P(10) = 10!$$
et le nombre de classements par nationalité est le nombre de permutations avec les répétitions $(4, 3, 2, 1)$:
$$P(4, 3, 2, 1) = \frac{10!}{4! \times 3! \times 2! \times 1!} = 12\,600$$

Exercice 17
Douze personnes ont à leur disposition trois voitures de six, quatre et deux places respectivement.
De combien de manières peut-on affecter ces douze personnes aux trois voitures en supposant :

1. que n'importe laquelle de ces personnes est susceptible de conduire ?
2. que seulement quatre des douze personnes sont susceptibles de conduire ?

Solution 17

1. Puisque n'importe laquelle de ces personnes est susceptible de conduire, le nombre de manières de répartir les douze personnes sur les trois voitures est le nombre de permutations d'ordre 12 avec les répétitions 6, 4 et 2, à savoir :
$$P(6,4,2) = \frac{12!}{6!4!2!} = 13860$$
2. Si seulement quatre des douze personnes sont susceptibles de conduire, alors il faut d'abord choisir trois personnes parmi ces quatre et les affecter aux trois voitures en tant que conducteurs, puis répartir les neuf personnes restantantes sur les trois voitures. Le nombre de possibilités pour choisir les conducteurs est :
$$C(4,3) = 4$$
et le nombre de manières pour répartir les neuf personnes sur les trois voitures est le nombre de permutations d'ordre 9 avec les répétitions 5, 3 et 1, à savoir :
$$P(5,3,1) = \frac{9!}{5!3!1!} = 504$$
Finalement, le le nombre de manières de répartir, dans ce cas, les douze personnes sur les trois voitures est :
$$C(4,3)\,P(5,3,1) = 2016$$

Exercice 18
Un ascenseur desservant N étages contient S personnes.

1. De combien de manières les S personnes peuvent-elles s'arrêter aux différents étages ?
2. De combien de manières les S personnes peuvent-elles s'arrêter aux différents étages si :
il y a n_1 étages tels qu'en chacun d'eux s'arrêtent a_1 personnes, ..
il y a n_i étages tels qu'en chacun d'eux s'arrêtent a_i personnes, ..

il y a n_k étages tels qu'en chacun d'eux s'arrêtent a_k personnes,
où : $n_1 + n_2 + ... + n_k = N$

Solution 18

1. Chacune des S personnes a N choix possibles pour s'arrêter, donc le nombre de manières possibles est N^S, c'est le nombre d'applications d'un ensemble à S éléments dans un ensemble à N éléments.
2. Le nombre de personnes S s'écrit :

$$S = n_1 a_1 + n_2 a_2 + ... + n_k a_k$$

Le nombre de manières pour répartir les étages est le nombre de permutations d'ordre N avec les répétitions $n_1, n_2, ..., n_k$ à savoir :

$$P(n_1, n_2, ..., n_k) = \frac{N!}{n_1! n_2! ... ! n_k}$$

Le nombre de manière pour répartir les S personnes est le nombre de permutations d'ordre S avec les répétitions a_1 (n_1 fois), ..., a_k (n_k fois) à savoir :

$$P(a_1, ..., a_1, ..., a_k, ..., a_k) = \frac{S!}{(a_1!)^{n_1} ... (a_k!)^{n_k}}$$

Ainsi, mle nombre total de possibilités est :

$$P(n_1, n_2, ..., n_k) P(a_1, ..., a_1, ..., a_k, ..., a_k) = \frac{N! S!}{n_1! n_2! ... ! n_k (a_1!)^{n_1} ... (a_k!)^{n_k}}$$

Exercice 19

Une personne dispose de vingt mille dirhams à investir sur quatre placements potentiels. Chaque mise doit se monter à un nombre entier de milliers de dirhams.
Entre combien de stratégies d'investissement cette personne a-t-elle le choix si elle décide de risquer la totalité de la somme ?
Qu'en est-il si on admet qu'elle n'est pas obligée d'investir la totalité de la somme ?

Solution 19

- Soit x_i, $1 \leq i \leq 4$, la somme, en milliers de dirhams, investie dans le $i^{ème}$ placements.
  Le nombre de stratégies possibles est donc égal au nombre de solutions de l'équation :

$$\sum_{i=1}^{4} x_i = 20 \ , \ x_i \in \mathbb{N} \ , \ 1 \leq i \leq 4$$

à savoir :

$$K(4,20) = C(23,20) = 1771$$

- Dans le cas où la personne n'est pas obligée d'investir la totalité de la somme, le nombre de stratégies possibles est donc égal au nombre de solutions de l'inéquation :

$$\sum_{i=1}^{4} x_i \leq 20\ ,\ x_i \in \mathbb{N}\ ,\ 1 \leq i \leq 4$$

à savoir :

$$K(5,20) = C(24,20) = 10626$$

Exercice 20
On achète six pièces mécaniques. De combien de manières peut-on les répartir si :

1. elles doivent être placées chacune dans un atelier différent ?
2. elles sont placées deux à deux dans trois ateliers différents ?
3. il y a quatre ateliers, deux recevant deux pièces chacun et deux autres une pièce chacun ?

Solution 20

1. Le nombre de manières de répartir les six pièces mécaniques, chacune dans un atelier différent, est le nombre de permutations d'ordre 6 :

$$6! = 720$$

2. Le nombre de manières de répartir les six pièces mécaniques, deux à deux dans trois ateliers différents, est le nombre de permutations d'ordre 6 avec les répétitions $(2,2,2)$:

$$\begin{aligned} P(2,2,2) &= \frac{6!}{2! \times 2! \times 2!} \\ &= 90 \end{aligned}$$

3. Le nombre de manières de répartir les six pièces mécaniques sur quatre ateliers différents , deux recevant chacun deux pièces et les deux autres recevant chacun une seule pièce, est le nombre de permutations d'ordre 6 avec les répétitions $(2,2,1,1)$:

$$\begin{aligned} P(2,2,1,1) &= \frac{6!}{2! \times 2! \times 1! \times 1!} \\ &= 180 \end{aligned}$$

Exercice 21
Quel est le nombre de monômes de l'ensemble des polynomes homogènes à n variables de degré p ?

Solution 21
Un monôme de l'ensemble des polynomes homogènes à n variables et de degré p s'écrit sous la forme :

$$X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} ... X_n^{\alpha_n}$$

où :

$$\begin{cases} \alpha_i \in \mathbb{N} \ , \ 1 \leq i \leq n \\ \alpha_1 + ... + \alpha_n = p \end{cases}$$

Il en résulte que le nombre de monômes de l'ensemble des polynomes homogènes à n variables de degré p est égal au nombre de solutions de l'équation :

$$\begin{cases} \alpha_1 + ... + \alpha_n = p \\ \alpha_i \in \mathbb{N} \ , \ 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

à savoir :

$$K(n, p) = C(n - 1 + p, p)$$

Exercice 22
Dans une banque, chaque client possède un compte bancaire dont le code est composé de tois lettres et cinq chiffres non nécessairement distincts.

1. On suppose que les trois lettres sont distinctes.
   Combien de comptes peut-on ouvrir dont le code :
   (a) contient un A et un B ?
   (b) contient un A et finit par 123 ?
2. On suppose que les trois lettres ne sont pas nécessairement distinctes.
   Combien peut-on ouvrir de comptes dont le code contient au moins deux fois la lettre A ?
3. On suppose que les trois lettres ne sont pas nécessairement distinctes et qu'il est impossible d'utiliser les chiffres 0, 1, 2, 3 et 4 qui sont réservés à des codes spéciaux.
   Combien peut-on ouvrir de comptes dont le code :
   (a) finit par 999 ?
   (b) commence par A et finit par 89 ?

Solution 22

1. Puisque les lettres sont distinctes, le nombre totale de comptes qu'on peut ouvrir dans ce cas est :

$$A(26,3) \times 10^5 = 156 \times 10^7$$

   (a) Le nombre de manières pour placer les lettres A et B est :

$$A(3,2) = 6$$

   La troisième lettre étant différente de A et B, donc le nombre de choix posssible est :

$$26 - 2 = 24$$

   Les cinq chiffres n'étant pas nécessairement distincts, donc le nombre de choix est :

$$10^5 = 100000$$

   D'où le nombre de comptes qui contient A et B est :

$$A(3,2) \times 24 \times 10^5 = 144 \times 10^5$$

   (b) Le nombre de manières pour placer la lettre A est :

$$A(3,1) = 3$$

   Pour les deux autres lettres, le nombre de choix est :

$$A(25,2) = 600$$

   Le nombre de choix possibles pour les deux chiffres restants est :

$$10^2 = 100$$

   D'où le nombre de comptes qui commencent par la lettre A et finissent par 123 est :

$$A(3,1) \times A(25,2) \times 10^2 = 18 \times 10^4$$

2. Dans ce cas, le compte contient soit exactement deux fois la lettre A, soit exactement troi fois la lettre A.
   Dans le premier cas, le nombre de choix possibles pour placer exactement deux fois la lettre A est :

$$C(3,2) = 3$$

   alors que le nombre de choix posssibles pour la lettre restante est :

$$26 - 1 = 25$$

   puisqu'elle est nécessairement distinctes de A.
   Dans le second cas, il n'y a qu'un seul choix possible.

Les cinq chiffres n'étant pas nécessairement distincts, donc le nombre de choix est :

$$10^5 = 100000$$

D'où le nombre de comptes qui contiennent au moins deux A est :

$$[C(3,2) \times 25 + 1] \times 10^5 = 76 \times 10^5$$

3. Dans ce cas, le nombre total de comptes est :

$$26^3 \times 5^5 = 54925 \times 10^3$$

   (a) Le nombre de choix possibles pour les trois lettres est :

$$26^3 = 17576$$

   Le nombre de choix possibles pour les deux chiffres restants est :

$$5^2 = 25$$

   D'où le nombre de comptes qui finissent par 999 est :

$$26^3 \times 25 = 4394 \times 10^2$$

   (b) Pour placer les deux lettres restantes, le nombre de choix possibles est :

$$26^2 = 676$$

   alors que le nombre de choix possibles pour placer les trois chiffres restants est :

$$5^3 = 125$$

   D'où le nombre de comptes qui commencent par la lettre A et finissent par 89 est :

$$26^2 \times 5^3 = 845 \times 10^2$$

Exercice 23

Les n tômes d'une encyclopédie, numérotés de 1 à n, sont placés au hasard sur une étagère.

1. Combien y a-t-il de manière de les placer ?
2. Parmi ces classements, combien y en a-t-il où :
   (a) les tômes 1 et 2 se trouvent côte à côte dans cet ordre ?
   (b) les tômes 1 à p se trouvent côte à côte dans cet ordre ?

Solution 23

1. Le nombre de manière de placer les n tômes de l'encyclopédie sur l'étagère.est le nombre de permutations d'ordre n :

$$P(n) = n!$$

   (a) Si les tômes 1 et 2 doivent se trouver côte à côte dans cet ordre, alors il y a $(n-1)$ manières possibles pour les placer, puis $(n-2)!$ manières possibles pour placer les $(n-2)$ tômes restants.
   Donc, le nombre de placements possibles dans ce cas est : $(n-1)!$.

   (b) Si les tômes 1 à p doivent se trouver côte à côte dans cet ordre, alors il y a $(n-p+1)$ manières possibles pour les placer, puis $(n-p)!$ manières possibles pour placer les $(n-p)$ tômes restants.
   Donc, le nombre de placements possibles dans ce cas est : $(n-p+1)!$

Exercice 24

On jette quatre dés discernables et on appelle résultat, une suite ordonnée des quatre points amenés.

1. Combien y a-t-il de résultats possibles ?
2. Combien parmi eux qui conduisent à :
   (a) un carré ? (quatre points identiques),
   (b) un brelan ? (trois points identiques et un autre différent),
   (c) une double-paire ? (deux couples différents de points indentiques),
   (d) une simple-paire ? (deux points identiques et les autres différents),
   (e) un résultat banal ? (quatre points différents)

Solution 24

1. Chaque dé comporte six faces, donc le nombre de résultats possibles est :

$$6^4 = 1296$$

   (a) Pour former un carré, il suffit de choisir l'une des six faces, il y a donc 6 carrés possibles.

   (b) Pour former un brelan, il suffit de choisir une face qui sera répétée trois fois puis une autre, différente de la première, qui se répétera une fois.
   Il y a donc :

$$A(6,2) = 30$$

   possibilités pour le choix des deux faces.

Le nombre de manière de les ordonner est le nombre de permutations avec les répétitions $(3,1)$:

$$P(3,1) = 4$$

D'où le nombre de brelans est :

$$A(6,2) \times P(3,1) = 120$$

(c) Pour former une double-paire, il suffit de choisir deux faces parmi les six, chacune sera répétée deux fois.
Il y a donc :

$$C(6,2) = 15$$

possibilités pour le choix des deux faces.
Le nombre de manière de les ordonner est le nombre de permutations avec les répétitions $(2,2)$:

$$P(2,2) = 6$$

D'où le nombre de double-paire est :

$$C(6,2) \times P(2,2) = 90$$

(d) Pour former une simple-paire, il suffit de choisir une face parmi les six qui sera répétée deux fois puis deux autres faces différentes, parmi les cinq restantes, qui seront répétées chacune une seule fois.
Ainsi, il y a donc :

$$C(6,1) \times C(5,2) = 60$$

possibilités pour le choix des trois faces.
Le nombre de manière de les ordonner est le nombre de permutations avec les répétitions $(2,1,1)$:

$$P(2,1,1) = 12$$

D'où le nombre de simple-paire est :

$$C(6,1) \times C(5,2) \times P(2,1,1) = 720$$

(e) Le nombre de résultats banals est le nombre d'arrangements de quatre faces parmi les six faces :

$$A(6,4) = 360$$

Exercice 25

Soit $E_n = \{a_1, ..., a_n\}$ un ensemble à n éléments.
Si $A_1, ..., A_p$ sont des sous ensembles de E_n, on dit qu'ils forment une partition de E_n en p classes si :
• (P_1) pour tout $i \in \{1, ..., p\}$, A_i est non vide
• (P_2) $A_1, ..., A_p$ sont deux à deux disjoints
• (P_3) la réunion de $A_1, ..., A_p$ coincide avec E_n.
On remarque que pour toute permutation σ de $\{1, ..., p\}$, les partitions $A_1, ..., A_p$ et $A_{\sigma(1)}, ..., A_{\sigma(p)}$ sont identiques.
On note $S(n,p)$ le nombre de toutes les partitions de E_n en p classes.

1. Calculer :
   (a) $S(n,1)$ et $S(n,n)$,
   (b) $S(3,2)$ et $S(4,2)$,
   (c) Le nombre de toutes les partitions de E_n en deux classes A_1 et A_2 où le cardinal de A_1 est k, $1 \leq k \leq n-1$.
   (d) En déduire $S(n,2)$.

2. Soit a_{n+1} un élément n'appartenant pas à E_n et posons $E_{n+1} = E_n \cup \{a_{n+1}\}$.
   (a) Etant donnée une partition de E_n en $(k-1)$ classes, combien de partitions de E_{n+1} en k classes peut-on costruire ?
   (b) Etant donnée une partition de E_n en k classes, combien de partitions de E_{n+1} en k classes peut-on costruire ?
   (c) En déduire une relation entre $S(n+1,k)$, $S(n,k-1)$ et $S(n,k)$.

3. Soit $E_p = \{a_1, ..., a_p\}$, $1 \leq p \leq n$.
   (a) Montrer que toute surjection de E_n sur E_p détermine une partition de E_n en p classes.
   (b) Quel est le nombre de surjections de E_n sur E_p correspondant à une partition de E_n en p classes ?
   (c) En déduire le nombre de surjections de E_n sur E_p en fonction de $S(n,p)$.

4. Soit k un élément de $\{1, ..., p\}$.
   (a) Quel est le nombre de parties à k éléments dans E_p ?
   (b) Quel est le nombre d'applications de E_n dans E_p ?
   (c) Quel est le nombre de surjections E_n sur E_k ?
   (d) En déduire que pour tout $p \in \{1, ..., n\}$ on a :

$$p^n = \sum_{k=1}^{p} C(p,k)S(n,k)k!$$

Solution 25

1. (a) (i) S_n^1 est le nombre de partitions de E_n en une seule classe, donc

$$S_n^1 = 1$$

(ii) S_n^n est le nombre de partitions de E_n en n-classes, donc chaque A_i, $1 \leq i \leq n$, ne contient qu'un seul élément de E_n, et par conséquent, il n'y a qu'une seule partition de E_n en n-classes, d'où :

$$S_n^n = 1$$

(b) Dans ce cas on a :

$$cardA_1 + cardA_2 = 3$$

et compte tenu du fait que les partitions (A_1, A_2) et (A_2, A_1) sont identique, on a alors :

$$cardA_1 = 1 \quad \text{et} \quad cardA_2 = 2$$

donc le nombre de partitions de E_3 en deux classes est égal au nombre de parties de E_3 à un seul élément, d'où :

$$\begin{aligned} S_3^2 &= C(3,1) \\ &= \frac{1}{2}\left[C(3,1) + C(3,2)\right] \end{aligned}$$

(c) Dans ce cas on a :

$$cardA_1 + cardA_2 = 4$$

et compte tenu du fait que les partitions (A_1, A_2) et (A_2, A_1) sont identiques, on a alors :

$$cardA_1 = 1 \quad \text{et} \quad cardA_2 = 3$$

ou :

$$cardA_1 = 2 \quad \text{et} \quad cardA_2 = 2$$

Le nombre de partitions de E_4 en deux classes dans le premier cas est :

$$\begin{aligned} S_4^2 &= C(4,1) \\ &= \frac{1}{2}\left[C(4,1) + C(4,3)\right] \end{aligned}$$

alors que dans le second cas, le nombre de partitions de E_4 en deux classes est :

$$S_4^2 = \frac{1}{2} C(4,2)$$

d'où :

$$S_4^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3} C\left(4,k\right)$$

(d) Compte tenu de la question précédente, le nombre de partitions de E_n en deux classes (A_1, A_2) tel que :

$$cardA_1 = k \ , \ 1 \leq k \leq n-1$$

est :

$$\begin{array}{l} C\left(n,k\right) \quad si \quad n \neq 2k \\ \frac{1}{2}C\left(n,k\right) \quad si \quad n = 2k \end{array}$$

D'où :

$$S_4^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} C\left(n,k\right)$$

(a) Soit $(A_1, ..., A_{k-1})$ une partition de E_n en $(k-1)$-classes, alors $(A_1, ..., A_{k-1}, \{a_{n+1}\})$ est une partition de E_{n+1} en k-classes.

(b) Soit $(A_1, ..., A_k)$ une partition de E_n en k-classes, et posons :

$$B_i = A_i \cup \{a_{n+1}\} \ , \ 1 \leq i \leq k$$

Alors pour i, $1 \leq i \leq k$, $(A_1, ...A_{i-1}, B_i, A_{i+1}, ..., A_k)$ est une partition de E_{n+1} en k-classes.

(c) Puisque toutes les partitions de E_{n+1} en k-classes ont l'une des deux formes précédentes, alors :

$$S_{n+1}^k = S_n^{k-1} + kS_{n+1}^k$$

2. Soit $E_p = \{a_1, ..., a_p\}$, $1 \leq p \leq n$.

(a) Soit :

$$f : E_n \longrightarrow E_p$$

une surjection.
Pour tout k, $1 \leq k \leq p$, posons :

$$A_k = f^{-1}\left(\{a_k\}\right)$$

$(A_1, ..., A_p)$ est alors une partition de E_n en p classes.

(b) Soit $(A_1, ..., A_p)$ une partition de E_n en p classes.
Le nombre de surjections de E_n sur E_p correspondant à cette partition est le nombre e bijections de $(A_1, ..., A_p)$ sur de E_p, à savoir : $p!$

(c) Il en résulte que le nombre de surjections de E_n sur E_p est :

$$p!S(n,p)$$

3. Soit k un élément de $\{1,...,p\}$.

(a) Le nombre de parties à k éléments dans E_p est :

$$C(n,k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

(b) Le nombre d'applications de E_n dans E_p est :

$$p^n$$

(c) Le nombre de surjections E_n sur E_k est :

$$k!S(n,k)$$

(d) Soit k un élément de $\{1,...,p\}$ et E_k une partie de E_p à k éléments.
Toute surjection :

$$f : E_n \longrightarrow E_k$$

induit une application E_n sur E_p telle que :

$$f(E_n) = E_k$$

Donc, le nombre d'applications de E_n dans E_p telle que :

$$Card\ f(E_n) = k$$

est :

$$C(p,k)S(n,k)k!$$

D'où, le nombre d'applications de E_n sur E_p est :

$$p^n = \sum_{k=1}^{p} C(p,k)S(n,k)k!$$

APPENDICE
PRINCIPAUX RÉSULTATS

Arrangements d'ordre p de $\{1,...,n\}$	$p \leq n$	$A(n,p) = \dfrac{n!}{(n-p)!}$
Combinaisons d'ordre p de $\{1,...,n\}$	$p \leq n$	$C(n,p) = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$
Permutations de $\{1,...,n\}$		$P(n) = n!$
Permutations avec répétition d'ordre $(p_1,...,p_n)$ de $\{1,...,n\}$	$p_i \geq 1$	$P(p_1,...,p_n) = \dfrac{(p_1+...+p_n)!}{p_1!...p_n!}$
Combinaisons avec répétition d'ordre p de $\{1,...,n\}$		$K(n,p) = C(n+p-1,p)$
Applications de $\{1,...,p\}$ dans $\{1,...,n\}$		n^p
Applications injectives de $\{1,...,p\}$ dans $\{1,...,n\}$	$p \leq n$	$A(n,p)$
Applications de $\{1,...,p\}$ dans $\{1,...,n\}$ strictement croissantes	$p \leq n$	$C(n,p)$
Applications croissantes de $\{1,...,p\}$ dans $\{1,...,n\}$		$K(n,p)$
Solutions de l'équation : $\sum_{i=1}^{n} x_i = p$	$x_i \in \mathbb{N}$	$K(n,p)$
Solutions de l'équation : $\sum_{i=1}^{n} x_i = p$	$x_i \in \mathbb{N}^*$ $p \geq n$	$C(p-1,n-1)$
Solutions de l'inéquation : $\sum_{i=1}^{n} x_i \leq p$	$x_i \in \mathbb{N}$	$K(n+1,p)$
Solutions de l'inéquation : $\sum_{i=1}^{n} x_i \leq p$	$x_i \in \mathbb{N}^*$ $p \geq n$	$C(p,n-1)$

Les Espaces Probabilisés

Exercice 1
On considère un espace probabilisé engendré par trois événements A, B et C.
Exprimer dans cet espace les événements :

(1) A seul se produit
(2) A et B se produisent mais non C
(3) les trois événements se produisent simultanément
(4) au moins l'un des événements se produit
(5) au moins deux événements se produisent
(6) deux événements au plus se produisent
(7) un seul événement se produit
(8) deux événements ou plus se produisent
(9) deux événements seulement se produisent
(10) aucun des trois événements ne se produit
(11) pas plus de deux événements ne se produisent.

Solution 1

(1) A seul se produit :

$$AB^cC^c$$

(2) A et B se produisent mais non C :

$$ABC^c$$

(3) les trois événements se produisent simultanément :

$$ABC$$

(4) au moins l'un des événements se produit :

$$\begin{aligned} A+B+C &= AB^cC^c \oplus A^cBC^c \oplus A^cB^cC \oplus ABC^c \oplus \\ & \quad AB^cC \oplus A^cBC \oplus ABC \end{aligned}$$

(5) au moins deux événements se produisent :

$$AB + AC + BC = ABC^c \oplus AB^cC \oplus A^cBC \oplus ABC$$

(6) deux événements au plus se produisent :

$$(ABC)^c$$

(7) un seul événement se produit :

$$AB^cC^c \oplus A^cBC^c \oplus A^cB^cC$$

(8) deux événements ou plus se produisent :

$$AB + AC + BC = ABC^c \oplus AB^cC \oplus A^cBC \oplus ABC$$

(9) deux événements seulement se produisent :

$$ABC^c \oplus AB^cC \oplus A^cBC$$

(10) aucun des trois événement ne se produit :

$$A^cB^cC^c$$

(11) pas plus de deux événements ne se produisent :

$$(ABC)^c$$

Exercice 2

1. L'intersection de deux tribus est-elle une tribu ?
2. La réunion de deux tribus est-elle une tribu ?
3. Le produit cartésien de deux tribus est-il une tribu ?

Solution 2

1. Démontrons que l'intersection d'une famille $(\mathcal{T}_i)_{i\in I}$ de tribus de $\mathcal{P}(\Omega)$, où Ω est un ensemble non vide, est une tribu de $\mathcal{P}(\Omega)$.
   Soit :
   $$\mathcal{T} = \prod_{i\in I} \mathcal{T}_i$$
   (a) $(T1)$ $\varnothing \in \mathcal{T}$, puisque $\varnothing \in \mathcal{T}_i$ pour tout $i \in I$.
   (b) $(T2)$ Si $A \in \mathcal{T}$, alors :
   $$\begin{aligned} A \in \mathcal{T} &\Longrightarrow \forall i \in I : A \in \mathcal{T}_i \\ &\Longrightarrow \forall i \in I : A^c \in \mathcal{T}_i \\ &\Longrightarrow A^c \in \mathcal{T} \end{aligned}$$
   (c) $(T3)$ Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d' événements de$\mathcal{T}$, alors pour tout $i \in I$, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d' événements de$\mathcal{T}_i$, donc, pour tout $i \in I$, $\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ est un événement de $\mathcal{T}_i$, et par conséquent $\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ est un événement de $\mathcal{T}$.
   Il en résulte que $\mathcal{T}$ est une tribus de $\mathcal{P}(\Omega)$.

2. La réunion de deux algèbres de $\mathcal{P}(\Omega)$ n'est pas, en général, une algèbre de$\mathcal{P}(\Omega)$.
   En effet, prenons :
   $$\begin{aligned} \Omega &= \{a, b, c\} \\ \mathfrak{A}_1 &= \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \Omega\} \\ \mathfrak{A}_2 &= \{\emptyset, \{b\}, \{a, c\}, \Omega\} \end{aligned}$$

L'événement :

$$\{a,b\} = \{a\} \cup \{b\}$$

n'est pas un élément de $\mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{A}_2$.

3. Le produit cartésien de deux tribus n'est pas, en général, une tribu.
   En effet, reprenons l'exemple précédent :

$$\begin{array}{lll} \Omega & = & \{a,b,c\} \\ \mathfrak{A}_1 & = & \{\emptyset, \{a\}, \{b,c\}, \Omega\} \\ \mathfrak{A}_2 & = & \{\emptyset, \{b\}, \{a,c\}, \Omega\} \end{array}$$

   Alors :

$$\{(a,b)\} = \{a\} \times \{b\}$$

   est un événement de $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$, mais :

$$\{(a,b)\}^c = \Omega \times \Omega - \{(a,b)\}$$

   n'est pas un événement de $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$.

Exercice 3
Soit Ω un ensemble non vide.

1. Montrer que $\mathcal{T} = \{\emptyset, \Omega\}$ et $\mathcal{P}(\Omega)$ sont des tribus.
2. Donner la plus petite algère contenant une partie A de Ω.
3. On pose

$$\Omega = \{a,b,c,d,e\}$$

   Construire l'algèbre engendrée par :

$$\mathfrak{C} = \{\{a\}, \{b,c\}, \{d,e\}\}$$

Solution 3

1. (a) $\{\emptyset, \Omega\}$ est une tribu. C'est la plus petite tribu de $\mathcal{P}(\Omega)$.
   (b) $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu. C'est la plus grande tribu de $\mathcal{P}(\Omega)$.
2. La plus petite algèbre contenant A est :

$$\{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$$

3. L'algèbre engendrée par $\mathfrak{C}$ est :

$$\{\emptyset, \{a\}, \{b,c\}, \{d,e\}, \{b,c,d,e\}, \{a,d,e\}, \{a,b,c\}, \Omega\}$$

Exercice 4
Considérons les classes suivantes de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$:

$$\begin{array}{rcl}
\mathfrak{C}_1 & = & \{]-\infty, x[\mid x \in \mathbb{R}\} \\
\mathfrak{C}_2 & = & \{]-\infty, x] \mid x \in \mathbb{R}\} \\
\mathfrak{C}_3 & = & \{]x, +\infty[\mid x \in \mathbb{R}\} \\
\mathfrak{C}_4 & = & \{[x, +\infty[\mid x \in \mathbb{R}\} \\
\mathfrak{C}_5 & = & \{]x, y[\mid x, y \in \mathbb{R}\} \\
\mathfrak{C}_6 & = & \{[x, y[\mid x, y \in \mathbb{R}\} \\
\mathfrak{C}_7 & = & \{]x, y] \mid x, y \in \mathbb{R}\} \\
\mathfrak{C}_8 & = & \{[x, y] \mid x, y \in \mathbb{R}\}
\end{array}$$

Montrer que ces huit classes $\mathfrak{C}_i$ $(1 \leq i \leq 8)$ engendrent une même tribu $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$ appelée la tribu des boréliens de $\mathbb{R}$.

Solution 4
Pour tout i, $1 \leq i \leq 8$, désignons par $\mathfrak{B}_i$ la tribu engendrée par $\mathfrak{C}_i$.

1. $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}_2$
   (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, considérons la suite :
   $$I_n =]-\infty, x + \frac{1}{n}[$$
   $(I_n)_{n \geq 1}$ est une suite décroissante d'intervalles de $\mathfrak{C}_1$, donc :
   $$]-\infty, x] = \prod_{n=1}^{\infty}]-\infty, x + \frac{1}{n}[$$
   est un élément de $\mathfrak{B}_1$, d'où :
   $$\mathfrak{C}_2 \subset \mathfrak{B}_1$$
   et par conséquent :
   $$\mathfrak{B}_2 \subset \mathfrak{B}_1$$
   (b) Réciproquement, pour tout $x \in \mathbb{R}$, considérons la suite :
   $$I_n = \left]-\infty, x - \frac{1}{n}\right]$$
   $(I_n)_{n \geq 1}$ est une suite croissante d'intervalles de $\mathfrak{C}_2$, donc :
   $$]-\infty, x[= \sum_{n=1}^{\infty} \left]-\infty, x - \frac{1}{n}\right]$$

est un élément de $\mathfrak{B}_2$, d'où :

$$\mathfrak{C}_1 \subset \mathfrak{B}_2$$

et par conséquent :

$$\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}_2$$

Donc :

$$\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}_2$$

2. $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}_4$
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$(]-\infty, x[)^c = [x, +\infty[$$

   On en déduit que :

$$\mathfrak{C}_4 \subset \mathfrak{B}_1$$

   et :

$$\mathfrak{C}_1 \subset \mathfrak{B}_4$$

   On conclut que :

$$\mathfrak{B}_4 = \mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}_2$$

3. $\mathfrak{B}_2 = \mathfrak{B}_3$
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$(]-\infty, x])^c =]x, +\infty[$$

   On en déduit que :

$$\mathfrak{C}_3 \subset \mathfrak{B}_2 \quad \text{et} \quad \mathfrak{C}_2 \subset \mathfrak{B}_3$$

   On conclut que :

$$\mathfrak{B}_3 = \mathfrak{B}_2 = \mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}_4$$

4. $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}_5$

   (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, considérons la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $\mathfrak{C}_5$:

$$I_n =]x-n, x[\ ,\ n \in \mathbb{N}^*$$

   donc :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} I_n =]-\infty, x[$$

   est un élément de $\mathfrak{B}_5$ d'où :

$$\mathfrak{C}_1 \subset \mathfrak{B}_5$$

et par conséquent :

$$\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}_5$$

(b) D'autre part, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$]x, y[=]x, +\infty[\cap]-\infty, y[$$

donc :

$$\mathfrak{C}_5 \subset \mathfrak{B}_1$$

et par conséquent :

$$\mathfrak{B}_5 \subset \mathfrak{B}_1$$

D'où :

$$\mathfrak{B}_5 = \mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}_2 = \mathfrak{B}_3 = \mathfrak{B}_4$$

5. $\mathfrak{B}_4 = \mathfrak{B}_6$

(a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ considérons, la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'intervalles de $\mathfrak{C}_6$:

$$I_n = [x, x + n[\ , \ n \in \mathbb{N}^*$$

donc :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} I_n = [x, +\infty[$$

est un élément de $\mathfrak{B}_6$, d'où :

$$\mathfrak{C}_4 \subset \mathfrak{B}_6$$

et par conséquent :

$$\mathfrak{B}_4 \subset \mathfrak{B}_6$$

(b) D'autre part, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$[x, y[= [x, +\infty[\cap]-\infty, y[$$

donc :

$$\mathfrak{C}_6 \subset \mathfrak{B}_4$$

et par conséquent :

$$\mathfrak{B}_6 \subset \mathfrak{B}_4$$

D'où :

$$\mathfrak{B}_6 = \mathfrak{B}_4 = \mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}_2 = \mathfrak{B}_3 = \mathfrak{B}_5$$

6. $\mathfrak{B}_7 = \mathfrak{B}_5$

   (a) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ considérons la suite $(I_n)_{n \geq 1}$ d'intervalles de $\mathfrak{C}_7$:

   $$I_n = \left] x, y - \frac{1}{n} \right] \ , \ n \geq 1$$

   donc :

   $$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} I_n =]x, y[$$

   est un élément de $\mathfrak{C}_5$, d'où :

   $$\mathfrak{C}_5 \subset \mathfrak{B}_7$$

   et par conséquent :

   $$\mathfrak{B}_5 \subset \mathfrak{B}_7$$

   (b) D'autre part, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a :

   $$]x, y] =]x, +\infty[\cap]-\infty, y]$$

   donc :

   $$\mathfrak{C}_7 \subset \mathfrak{B}_5$$

   et par conséquent :

   $$\mathfrak{B}_7 \subset \mathfrak{B}_5$$

   D'où :

   $$\mathfrak{B}_7 = \mathfrak{B}_5 = \mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}_2 = \mathfrak{B}_3 = \mathfrak{B}_4 = \mathfrak{B}_6$$

7. $\mathfrak{B}_8 = \mathfrak{B}_7$

   (a) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ considérons la suite $(I_n)_{n \geq 1}$ d'intervalles de $\mathfrak{C}_8$:

   $$I_n = \left[x - \frac{1}{n}, y \right] \ , \ n \geq 1$$

   donc :

   $$\prod_{n=1}^{\infty} I_n =]x, y]$$

   est un élément de $\mathfrak{C}_7$, d'où :

   $$\mathfrak{C}_7 \subset \mathfrak{B}_8$$

   et par conséquent :

   $$\mathfrak{B}_7 \subset \mathfrak{B}_8$$

(b) D'autre part, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$[x, y] = [x, +\infty[\, \cap\,]-\infty, y]$$

et par conséquent :

$$\mathfrak{B}_8 \subset \mathfrak{B}_7$$

D'où :

$$\mathfrak{B}_8 = \mathfrak{B}_7 = \mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}_2 = \mathfrak{B}_3 = \mathfrak{B}_4 = \mathfrak{B}_5 = \mathfrak{B}_6$$

Exercice 5
Soit :

$$X : \Omega \longrightarrow \Gamma$$

une application.
Montrer que si $\mathcal{E}$ est une tribu de $\mathcal{P}(\Gamma)$, alors :

$$X^{-1}(\mathcal{E}) = \left\{X^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{E}\right\}$$

est une tribu de $\mathcal{P}(\Omega)$.

Solution 5
- $\emptyset \in X^{-1}(\mathcal{E})$ car $\emptyset = X^{-1}(\emptyset)$ et $\emptyset \in \mathcal{E}$
- Si $X^{-1}(B) \in X^{-1}(\mathcal{E})$ alors $[\Omega - X^{-1}(B)] \in X^{-1}(\mathcal{E})$ puisque $\Gamma - B \in \mathcal{E}$ et :

$$\left[\Omega - X^{-1}(B)\right] = X^{-1}[\Gamma - B]$$

- Si $\left([X^{-1}(B_n)]\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'événements de $X^{-1}(\mathcal{E})$ alors :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} X^{-1}(B_n) = X^{-1}\left[\sum_{n \in \mathbb{N}} B_n\right]$$

est aussi un événement de $X^{-1}(\mathcal{E})$ puisque $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \mathcal{E}$.

Exercice 6
Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable et A un événement de $\mathcal{T}$.
Montrer que :

$$\mathcal{T}_A = \{A \cap B \mid B \in \mathcal{T}\}$$

est une tribu de $\mathcal{P}(A)$.

Solution 6

- $\emptyset \in \mathcal{T}_A$ car :

$$\emptyset = A \cap \emptyset$$

et $\emptyset \in \mathcal{T}$

- Si $AB \in \mathcal{T}_A$, où $B \in \mathcal{T}$, alors $[A - AB] \in \mathcal{T}_A$ puisque :

$$[A - AB] = A - B = A[\Omega - B]$$

et $[\Omega - B] \in \mathcal{T}$.

- Si $[AB_n]_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements de $\mathcal{T}_A$, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} [AB_n]$ est aussi un événement de $\mathcal{T}_A$ puisque :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} [AB_n] = A\left[\sum_{n\in\mathbb{N}} B_n\right]$$

et $\sum_{n\in\mathbb{N}} B_n$ est un événement de $\mathcal{T}$.

Il en résulte que $\mathcal{T}_A$ est une tribu de $\mathcal{P}(A)$.

Exercice 7

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace de probabilité et B un événement de $\mathcal{T}$ de probabilité non nulle.

Montrer que l'application P_B:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}_B & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ A & \longmapsto & P[A \mid B] \end{array}$$

est une probabilité sur $\mathcal{T}_B$.

Solution 7

- P_B prend ses valeurs dans l'intervalle $[0, 1]$ et on a :

$$\begin{array}{rcl} P[B \mid B] & = & \dfrac{P[BB]}{P[B]} \\ & = & 1 \end{array}$$

- Si C et D sont deux événements incompatibes de $\mathcal{T}_B$, alors :

$$\begin{aligned} P_B[C \oplus D] &= P[C \oplus D \mid B] \\ &= \frac{P[(C \oplus D)B]}{P[B]} \\ &= \frac{P[CB \oplus DB]}{P[B]} \\ &= \frac{P[CB]}{P[B]} + \frac{P[DB]}{P[B]} \\ &= P[C \mid B] + P[D \mid B] \\ &= P_B[C] + P_B[D] \end{aligned}$$

- Si $(A_n)_{n \in N}$ est une suite d'événements de $\mathcal{T}_B$ deux à deux incompatibles alors :

$$\begin{aligned} P_B\left[\bigoplus_{k=0}^{\infty} A_k\right] &= P\left[\left(\bigoplus_{k=0}^{\infty} A_k\right) \mid B\right] \\ &= \frac{P\left[\left(\bigoplus_{k=0}^{\infty} A_k\right) B\right]}{P[B]} \\ &= \frac{P\left[\bigoplus_{k=0}^{\infty} (A_k B)\right]}{P[B]} \\ &= \frac{\sum_{k=0}^{\infty} P[(A_k B)]}{P[B]} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P[A_k \mid B] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P_B[A_k] \end{aligned}$$

Il en résulte que P_B est une probabilité sur $\mathcal{T}_B$.

Exercice 8
Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace de probabilité.

1. Montrer que deux événements A et B de la tribu $\mathcal{T}$ sont indépendants si et seulement si :

$$P[AB] = P[A]\,P[B]$$

2. Montrer que si trois événements A, B et C sont indépendants alors ils sont deux à deux indépendants.
3. Montrer sur un exemple que la réciproque est fausse.

Solution 8

1. Il suffit de prouver que si :

$$P[AB] = P[A]P[B]$$

alors on a aussi :

$$\begin{array}{rcl} P[AB^c] & = & P[A]P[B^c] \\ P[A^cB] & = & P[A^c]P[B] \\ P[A^cB^c] & = & P[A^c]P[B^c] \end{array}$$

En effet, puisque :

$$A = AB \oplus AB^c$$

alors :

$$\begin{array}{rcl} P[AB^c] & = & P[A] - P[AB] \\ & = & P[A] - P[A]P[B] \\ & = & P[A](1 - P[B]) \\ & = & P[A]P[B^c] \end{array}$$

de même :

$$B = AB \oplus A^cB$$

donc :

$$\begin{array}{rcl} P[A^cB] & = & P[B] - P[AB] \\ & = & P[B] - P[A]P[B] \\ & = & P[A^c]P[B] \end{array}$$

et finalement :

$$\begin{array}{rcl} P[A^cB^c] & = & P[(A+B)^c] \\ & = & 1 - P[A+B] \\ & = & 1 - P[A] - P[B] + P[A]P[B] \\ & = & (1 - P[A])(1 - P[B]) \\ & = & P[A^c]P[B^c] \end{array}$$

2. Soient A, B et C trois événements indépendants.
   Montrons qu'ils sont deux à deux indépendants.

   (a) A et B sont indépendants.
   En effet, puisque :

   $$AB = ABC + ABC^c$$

   alors :

   $$\begin{aligned} P[AB] &= P[ABC] + P[ABC^c] \\ &= P[A]P[B]P[C] + P[A]P[B]P[C^c] \\ &= P[A]P[B] \end{aligned}$$

   puisque :

   $$P[C] + P[C^c] = 1$$

   (b) On démontre d'une manière analogue que A et C sont indépendants et que B et C sont indépendants.

3. Montrons que la réciproque est en général, fausse. Soit alors :

   $$\Omega = \{a, b, c, d\}$$

   et supposons que ces quatre événements élémentaires sont équiprobables :

   $$p(a) = p(b) = p(c) = p(d) = \frac{1}{4}$$

   Considérons les événements :

   $$A = \{a, d\} \quad , \quad B = \{b, d\} \quad , \quad C = \{c, d\}$$

   On a :

   $$AB = AC = BC = \{d\}$$

   donc :

   $$P[AB] = P[AC] = P[BC] = p(d) = \frac{1}{4}$$

   et comme :

   $$P[A]P[B] = P[A]P[C] = P[B]P[C] = \frac{1}{4}$$

   On conclut que les trois événements A, B et C sont deux à deux indépendants.

Or :

$$ABC = \{d\}$$

donc :

$$P[ABC] = p(d) = \frac{1}{4}$$

Il en résulte que les trois événements A, B et C ne sont pas indépendants puisque :

$$P[A]\,P[B]\,P[C] = \frac{1}{8}$$

Exercice 9

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace de probabilité. On considère l'ensemble :

$$\mathcal{N} = \{N \in \mathcal{T} \mid P(N) = 0 \text{ ou } P(N^c) = 0\}$$

1. $\mathcal{N}$ est-elle une tribu $\mathcal{P}(\Omega)$?
2. Montrer qu'un événement N de $\mathcal{T}$ est indépendant avec lui même si et seulement si N est un événement de $\mathcal{N}$.

Solution 9

1. Montrons que :

$$\mathcal{N} = \{N \in \mathcal{T} \mid P(N) = 0 \text{ ou } P(N^c) = 0\}$$

est une tribu de $\mathcal{P}(\Omega)$. En effet :

(a) $\emptyset \in \mathcal{N}$

(b) Si $N \in \mathcal{N}$ alors $N^c \in \mathcal{N}$ par définition de $\mathcal{N}$

(c) Soit $(N)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements de $\mathcal{N}$.

(i) si pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$P[N_n] = 0$$

alors :

$$P\left[\sum_{n\in\mathbb{N}} N_n\right] = 0$$

puisque :

$$P\left[\sum_{n\in\mathbb{N}} N_n\right] \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} P[N_n]$$

(ii) s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ telle que :

$$P[N_{n_0}] = 1$$

alors :

$$P\left[\sum_{n\in\mathbb{N}} N_n\right] = 1$$

puisque :

$$P[N_{n_0}] \leq P\left[\sum_{n\in\mathbb{N}} N_n\right]$$

Il en résulte que $\sum_{n\in\mathbb{N}} N_n$ est un événement de $\mathcal{N}$ et par suite $\mathcal{N}$ est une tribu $\mathcal{P}(\Omega)$

2. $N \in \mathcal{T}$ est un événement indépendant avec lui même si et seulement si:

$$P[NN^c] = P[N]\,P[N^c]$$

et comme :

$$P[NN^c] = P[\emptyset] = 0$$

donc, si et seulement si :

$$P[N] = 0 \text{ ou } P[N^c] = 0$$

On en déduit que $N \in \mathcal{N}$.

Exercice 10
Trois maladrois tirent sur un objectif. Chacun n'a qu'une seule balle.
Le premier a trois chances sur quatre pour atteindre l'objectif, le second deux chances sur trois et le troisième une chance sur deux seulement.
L'objectif a-t-il alors plus de chances de recevoir une seule balle ou les trois balles ?

Solution 10
Considérons les événements :

A_i	:	"l'objectif est atteint par le i^{ème} joueur" , $i = 1, 2, 3$
S	:	"l'objectif reçoit une seule balle"
T	:	"l'objectif reçoit les trois balles"

Remarquons que les événements A_1, A_2 et A_3 sont indépendants.

D'après l'énoncé on a :

$$\begin{aligned} P[A_1] &= \frac{3}{4} \\ P[A_2] &= \frac{2}{3} \\ P[A_3] &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Et comme :

$$\begin{aligned} S &= A_1 A_2^c A_3^c \oplus A_1^c A_2 A_3^c \oplus A_1^c A_2^c A_3 \\ T &= A_1 A_2 A_3 \end{aligned}$$

alors :

$$\begin{aligned} P[S] &= P[A_1 A_2^c A_3^c] + P[A_1^c A_2 A_3^c] + P[A_1^c A_2^c A_3] \\ &= P[A_1] P[A_2^c] P[A_3^c] + P[A_1^c] P[A_2] P[A_3^c] + P[A_1^c] P[A_2^c] P[A_3] \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} P[T] &= P[A_1 A_2 A_3] \\ &= P[A_1] P[A_2] P[A_3] \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$P[S] = P[T]$$

L'ojectif a donc autant de chance de recevoir une seule balle que de recevoir les trois balles.

Exercice 11
Trois usines A, B et C produisent respectivement 50%, 30% et 20% des moteurs de voitures.
Parmi la production de chacune des ces trois usines, 5%, 3% et 2% sont défectueux.
Calculer la probabilité pour qu'un moteur défectueux provient de l'usine A.

Solution 11
Considérons les événements :

$$\begin{array}{lcl} A & : & \text{"le moteur est fabriqué par l'usine } A\text{"} \\ B & : & \text{"le moteur est fabriqué par l'usine } B\text{"} \\ C & : & \text{"le moteur est fabriqué par l'usine } C\text{"} \\ D & : & \text{"le moteur est défectueux"} \end{array}$$

On a :

$$\begin{array}{rcl} P[A] = .5 & ; & P[D \mid A] = .05 \\ P[B] = .3 & ; & P[D \mid B] = .03 \\ P[C] = .2 & ; & P[D \mid C] = .02 \end{array}$$

D'après le théorème de *Bayes*, on a :

$$\begin{aligned} P[A \mid D] &= \frac{P[A]\,P[D \mid A]}{P[A]\,P[D \mid A] + P[B]\,P[D \mid B] + P[C]\,P[D \mid C]} \\ &= \frac{25}{38} \end{aligned}$$

Exercice 12
Un conducteur normal a une chance sur mille d'avoir un accident de voiture au cours d'une période déterminée.
Un conducteur ivre a une chance sur cinquante d'avoir un accident de voiture au cours de la même période.
On admet qu'un conducteur sur cent conduit en état d'ivresse.
Soient les événements :

$$\begin{array}{lcl} A & : & \text{"avoir un accident"} \\ I & : & \text{"conduire en état d'ivresse"} \end{array}$$

1. Calculer :

$$\begin{array}{ccc} P(I) & ; & P(I^c) \\ P(A \mid I) & ; & P(A^c \mid I) \\ P(A \mid I^c) & ; & P(A^c \mid I^c) \end{array}$$

2. Détermimer :

$$\begin{array}{ccc} P(I \cap A) & ; & P(I^c \cap A) \\ P(I \cap A^c) & ; & P(I^c \cap A^c) \end{array}$$

3. En déduire :

$$P(A) \quad ; \quad P(I \mid A)$$

4. Retrouver le résultat en appliquant le théorème de Bayes.

Solution 12

1. On a :

$$\begin{aligned}
&P[I] = \frac{1}{100}\\
&P[I^c] = 1 - P[I] = \frac{99}{100}\\
&P[A \mid I] = \frac{1}{50}\\
&P\left[\bar{A} \mid I\right] = 1 - P[A \mid I] = \frac{49}{50}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&P\left[A \mid \bar{I}\right] = \frac{1}{1000}\\
&P\left[\bar{A} \mid \bar{I}\right] = 1 - P\left[A \mid \bar{I}\right] = \frac{999}{1000}
\end{aligned}$$

2. On a :

$$\begin{aligned}
P[I \cap A] &= P[I]\, P[A \mid I] = 2 \times 10^{-4}\\
P\left[\bar{I} \cap A\right] &= P\left[\bar{I}\right] P\left[A \mid \bar{I}\right] = 99 \times 10^{-5}\\
P\left[I \cap \bar{A}\right] &= P[I]\, P\left[\bar{A} \mid I\right] = 98 \times 10^{-4}\\
P\left[\bar{I} \cap \bar{A}\right] &= P\left[\bar{I}\right] P\left[\bar{A} \mid \bar{I}\right] = 99 \times 999 \times 10^{-5}
\end{aligned}$$

(a) Puisque :

$$A = I \cap A \oplus \bar{I} \cap A$$

alors :

$$\begin{aligned}
P[A] &= P[I \cap A] + P\left[\bar{I} \cap A\right]\\
&= 119 \times 10^{-5}
\end{aligned}$$

(b) On a :

$$\begin{aligned}
P[I \mid A] &= \frac{P[I \cap A]}{P[A]}\\
&= \frac{20}{119}
\end{aligned}$$

(c) D'après le théorème de *Bayes* :

$$\begin{aligned}
P[I \mid A] &= \frac{P[I]\, P[A \mid I]}{P[I]\, P[A \mid I] + P\left[\bar{I}\right] P\left[A \mid \bar{I}\right]}\\
&= \frac{20}{119}
\end{aligned}$$

Exercice 13
Des études statistiques sur une population constituée de 60% de femmes et 40% d'hommes permettent de considérer qu'il y a 50% d'hommes et 30% de femmes qui fument.
On choisit au hasard un individu de la population et on constate qu'il fume.
Quelle est la probabilité pour qu'il soit un homme ?

Solution 13
Considérons les événements :

$$\begin{array}{ccl} F & : & \text{"l'individu est une femme"} \\ H & : & \text{"l'individu est un homme"} \\ A & : & \text{"l'individu est un fumeur"} \end{array}$$

On a :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} P[F] = .6 & ; & P[A \mid F] = .3 \\ \\ P[H] = .4 & ; & P[A \mid H] = .5 \end{array} \right.$$

D'après le théorème de *Bayes* :

$$\begin{aligned} P[H \mid A] &= \frac{P[H]\,P[A \mid H]}{P[H]\,P[A \mid H] + P[F]\,P[A \mid F]} \\ &= \frac{10}{19} \\ &= 52.63\% \end{aligned}$$

Exercice 14
Un appareil peut être monté avec des pièces de haute qualité ou des pièces ordinaires.
Dans le premier cas, sa fiabilité est de 95%, dans le second cas, elle est de 70%.
40% des appareils sont montés avec des pièces haute qualité.
Un appareil a été soumis à l'essai et s'est avéré bon. Trouver la probabilité qu'il soit monté avec des pièces de haute qualité.

Solution 14
Considérons les événements :

$$\begin{array}{ccl} O & : & \text{"l'appareil est monté avec des pièces ordinaires"} \\ H & : & \text{"l'appareil est monté avec des pièces de haute qualité"} \\ F & : & \text{"l'appareil est fiable"} \end{array}$$

On a :

$$\begin{cases} P[O] = .6 & ; \quad P[F \mid O] = .7 \\ \\ P[H] = .4 & ; \quad P[F \mid H] = .95 \end{cases}$$

D'après le théorème de *Bayes* :

$$\begin{aligned} P[H \mid F] &= \frac{P[H]\,P[F \mid H]}{P[H]\,P[F \mid H] + P[O]\,P[F \mid O]} \\ &= \frac{19}{40} \\ &= 47.5\% \end{aligned}$$

Exercice 15
Une urne contient des boules blanches et des boules noires.
On effectue une suite de n tirages dans l'urne.
On suppose que la probabilité que la $k^{\text{ème}}$ boule tirée soit blanche alors que les $k-1$ précédantes l'étaient est $\dfrac{1}{k+1}$.
Calculer la probabilité que les n premières boules tirées soient toutes blanches.

Solution 15
Pour $k \in \mathbb{N}^*$, désignons par B_k l'événement :

$$B_k : \text{"la } k^{\text{ème}} \text{ boule est blanche"}$$

Pour tout k, $k \geq 2$, on a :

$$P[B_k \mid B_1 ... B_{k-1}] = \frac{1}{k+1}$$

D'après le principe des probabilités composées, on a :

$$\begin{aligned} P[B_1 ... B_n] &= P[B_1]\,P[B_2 \mid B_1] ... P[B_n \mid B_1 ... B_{n-1}] \\ &= P[B_1]\,\frac{1}{3} ... \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{2P[B_1]}{(n+1)!} \end{aligned}$$

Exercice 16
Douze appareils sont en exploitation.
Trois parmi eux sont fabriqués par l'usine U_1, quatre par l'usine U_2 et cinq par l'usine U_3.
Les appareils provenant de l'usine U_1 passe l'essai avec une probabilité de 90%, ceux de l'usine U_2 avec une probabilité de 80% et ceux de l'usine U_3 avec une probabilité de 75%.
Trouver la probabilité qu'un appareil choisi au hasard passe l'essai.

Solution 16
Considérons les événements :

$$\begin{array}{lcl} U_i & : & \text{"l'appreil provient de l'usine } U_i\text{"} \ , i = 1, 2, 3 \\ F & : & \text{"l'appreil est fiable"} \end{array}$$

On a :

$$\begin{cases} P[U_1] = \dfrac{3}{12} & ; \quad P[F \mid U_1] = 0.90 \\ P[U_2] = \dfrac{4}{12} & ; \quad P[F \mid U_2] = 0.80 \\ P[U_3] = \dfrac{5}{12} & ; \quad P[F \mid U_3] = 0.75 \end{cases}$$

D'après la formule des probabilités totales on a :

$$\begin{aligned} P[F] &= \sum_{i=1}^{3} P[U_i] \, P[F \mid U_i] \\ &= \frac{965}{1200} \\ &= 80.42\% \end{aligned}$$

Exercice 17
Une pièce d'un équipement électronique est constituée de trois partie essentielles A, B et C.
On a constaté dans le passé que la partie A tombait en panne dans 10% des cas, la partie B dans 30% des cas et la partie C dans 40% des cas.
La partie A opère indépendamment de B et de C.
Les parties B et C sont dépendantes de telle sorte que si C est défaillante, les chances sont de 1 sur 3 que B soit défaillante aussi.
Deux au moins des trois parties doivent être en état de marche pour que l'équipement fonctionne.
Calculer la probabilité pour qu'il fonctionne.

Solution 17
Considérons les événements :

$$\begin{array}{lcl} A & : & \text{"la partie } A \text{ fonctionne"} \\ B & : & \text{"la partie } B \text{ fonctionne"} \\ C & : & \text{"la partie } C \text{ fonctionne"} \\ F & : & \text{"l'équipement fonctionne"} \end{array}$$

On a :

$$\begin{cases} P[A] = 0.9 \quad , \quad P[B] = 0.7 \quad , \quad P[C] = 0.6 \\ P[ABC] = P[A]\,P[BC] \\ P\left[\bar{B} \mid \bar{C}\right] = 1 - P\left[B \mid \bar{C}\right] = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Puisque l'équipement fonctionne lorsque deux au moins des trois parties sont en état de marche, on a :

$$\begin{array}{rcl} F & = & AB\bar{C} \oplus A\bar{B}C \oplus \bar{A}BC \oplus ABC \\ & = & AB\bar{C} \oplus A\bar{B}C \oplus BC \end{array}$$

d'où :

$$\begin{array}{rcl} P[F] & = & P\left[AB\bar{C}\right] + P\left[A\bar{B}C\right] + P[BC] \\ & = & P[A]\,P\left[B\bar{C}\right] + P[A]\,P\left[\bar{B}C\right] + P[BC] \\ & = & P[A]\,P\left[\bar{C}\right]P\left[B \mid \bar{C}\right] + P[A]\,P\left[\bar{B}C\right] + P[BC] \end{array}$$

or :

$$\begin{array}{rcl} P[BC] & = & 1 - P\left[\bar{B} + \bar{C}\right] \\ & = & 1 - P\left[\bar{B}\right] - P\left[\bar{C}\right] + P\left[\bar{B}\bar{C}\right] \\ & = & 1 - P\left[\bar{B}\right] - P\left[\bar{C}\right] + P\left[\bar{C}\right]P\left[\bar{B} \mid \bar{C}\right] \end{array}$$

et :

$$P\left[\bar{B}C\right] = P[C] - P[BC]$$

On en déduit alors que :

$$P[F] = 79.667\%$$

Exercice 18
Une épreuve sportive, où deux concurrents A et B sont en jeu, consiste à atteindre une cible partagée en trois cases notées C_1, C_2 et C_3.
On admet qu'un coup atteint une et une seule case.

Pour le joueur A, les probabilités respectives d'atteindre les cases C_1, C_2 et C_3 forment une progression arithmétique de raison $\frac{1}{4}$, alors que pour le joueur B, les trois probabilités sont égales.
On choisit l'un des deux joueurs, la probabilité que A soit choisi est la moitié de la probabilité de choisir B.
Le concurrent choisi atteint la case C_3. Quelle est la probabilité que ce concurrent soit A ?

Solution 18
Considérons les événements :

$$\begin{array}{rcl} A & : & \text{"le concurrent choisi est } A\text{"} \\ B & : & \text{"le concurrent choisi est } B\text{"} \\ C_k & : & \text{"le concurrent atteint la cible } C_k\text{"} \end{array}$$

On a :

$$P[A] = \frac{1}{3} \qquad P[B] = \frac{2}{3}$$

et :

$$P[C_1 \mid B] = P[C_2 \mid B] = P[C_3 \mid B] = \frac{1}{3}$$

Posons :

$$p = P[C_1 \mid A]$$

Puisque :

$$P[C_1 \mid A] + P[C_2 \mid A] + P[C_3 \mid A] = 1$$

et :

$$P[C_3 \mid A] = \frac{1}{4} + P[C_2 \mid A] = \frac{1}{2} + P[C_1 \mid A]$$

on en déduit :

$$P[C_1 \mid A] = \frac{1}{12} \quad ; \quad P[C_2 \mid A] = \frac{4}{12} \quad ; \quad P[C_3 \mid A] = \frac{7}{12}$$

D'après la formule de Bayes on a :

$$\begin{aligned} P[A \mid C_3] &= \frac{P[A]\,P[C_3 \mid A]}{P[A]\,P[C_3 \mid A] + P[B]\,P[C_3 \mid B]} \\ &= \frac{7}{15} \end{aligned}$$

Exercice 19
Deux régulateurs contrôlent le fonctionnement d'un moteur.
Il est désirable que durant un temps t, le moteur fonctionne sans panne.
En présence des deux régulateurs, la panne peut survenir avec une probabilité q_{12}. Lorsque seul le premier fontionne avec une probabilité q_1. Lorsque seul le second fontionne avec une probabilité q_2. Et Lorsque les deux sont en panne avec une probabilité q_0.
La fiabilité du premier régulateur est p_1 et celle du second régulateur est p_2.
Les éléments se mettent en panne indépendamment les uns des autres.
Trouver la fiabilité totale.

Solution 19
Considérons les événements :

$$\begin{array}{lcl} R_1 & : & \text{"le premier régulateur fonctionne"} \\ R_2 & : & \text{"le deuxième régulateur fonctionne"} \\ M & : & \text{"le moteur fonctionne"} \end{array}$$

On a :

$$P[R_1] = p_1 \quad ; \quad P[R_2] = p_2$$

$$P\left[\bar{M} \mid R_1 R_2\right] = q_{12} \quad ; \quad P\left[\bar{M} \mid R_1 \bar{R}_2\right] = q_1$$

$$P\left[\bar{M} \mid \bar{R}_1 R_2\right] = q_2 \quad ; \quad P\left[\bar{M} \mid \bar{R}_1 \bar{R}_2\right] = q_0$$

Comme les deux régulateurs fonctionnent indépendamment l'un de l'autre, on a aussi :

$$P[R_1 R_2] = P[R_1] P[R_2]$$

Puisque la panne peut survenir dans n'importe quelle situation, alors l'événement $\bar{M}$ se décompose comme suit :

$$\bar{M} = \bar{M} R_1 R_2 \oplus \bar{M} R_1 \bar{R}_2 \oplus \bar{M} \bar{R}_1 R_2 \oplus \bar{M} \bar{R}_1 \bar{R}_2$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} P[M] & = & 1 - P\left[\bar{M}\right] \\ & = & 1 - P[R_1] P[R_2] P\left[\bar{M} \mid R_1 R_2\right] - P[R_1] P\left[\bar{R}_2\right] P\left[\bar{M} \mid R_1 \bar{R}_2\right] \\ & & -P\left[\bar{R}_1\right] P[R_2] P\left[\bar{M} \mid \bar{R}_1 R_2\right] - P\left[\bar{R}_1\right] P\left[\bar{R}_2\right] P\left[\bar{M} \mid \bar{R}_1 \bar{R}_2\right] \\ & = & 1 - p_1 p_2 q_{12} - (1 - p_1) p_2 q_1 - p_1 (1 - p_2) q_2 \\ & & - (1 - p_1)(1 - p_2) q_0 \end{array}$$

Exercice 20
On considère quatre groupes A, B, C et D.
Dans chaque groupe, les proportions de personnes ayant fait des études supérieures sont respectivement de 5%, 10%, 25% et 40%.
On choisit au hasard l'un des groupes et dans le groupe choisi une personne.

1. Quelle est la probabilité que la personne choisie au hasard ait fait des études supérieures ?
2. La personne choisie ayant fait des études supérieures, quelle est la probabilité qu'elle appartienne au groupe D ?

Solution 20
Considérons les événements :

$$\begin{array}{ccl} A & : & \text{"la personne appartient au groupe } A\text{"} \\ B & : & \text{"la personne appartient au groupe } B\text{"} \\ C & : & \text{"la personne appartient au groupe } C\text{"} \\ D & : & \text{"la personne appartient au groupe } D\text{"} \\ S & : & \text{"la personne a fait des études supérieure"} \end{array}$$

On a :

$$\begin{cases} P[A] = \dfrac{1}{4} & P[S \mid A] = .05 \\ P[B] = \dfrac{1}{4} & P[S \mid B] = .10 \\ P[C] = \dfrac{1}{4} & P[S \mid C] = .25 \\ P[D] = \dfrac{1}{4} & P[S \mid D] = .40 \end{cases}$$

1. D'après la formule des probabilités totales on a:

$$\begin{aligned} P[S] &= P[A]P[S \mid A] + P[B]P[S \mid B] + P[C]P[S \mid C] + P[D]P[S \mid D] \\ &= .2 \end{aligned}$$

2. D'après le théorème de *Bayes*, on a :

$$\begin{aligned} P[D \mid S] &= \frac{P[D]P[S \mid D]}{P[S]} \\ &= \frac{1}{2} \\ &= 50\% \end{aligned}$$

Exercice 21
Un joueur est en présence de deux urnes A et B : l'urne A contient quatre boules noires et trois blanches, l'urne B contient trois boules noires et quatre blanches.
Le joueur choisit au hasard l'une des deux urnes et y effectue une succession de tirages d'une boules avec remise.
Quelle est la probabilité que la troisième boule tirée soit noire sachant que les deux premières boules tirées sont noires ?

Solution 21
Considérons les événements :

$$A \; : \text{"le tirage est effectué de l'urne } A\text{"}$$

$$B \; : \text{"le tirage est effectué de l'urne } B\text{"}$$

et pour tout k, $k \geq 1$, désignons par N_k l'événement :

$$N_k \; : \text{"la } k^{ème} \text{ boule est noire"}$$

On a :

$$P[A] = P[B] = \frac{1}{2}$$

$$P[N_k \mid A] = P\left[\bar{N}_k \mid B\right] = \frac{4}{7}$$

D'après la formule des probabilités totales on a :

$$\begin{aligned}
P[N_1N_2] &= P[A]\,P[N_1N_2 \mid A] + P[B]\,P[N_1N_2 \mid B] \\
&= P[A]\,P[N_1 \mid A]\,P[N_2 \mid A] + P[B]\,P[N_1 \mid B]\,P[N_2 \mid B] \\
&= \frac{25}{98}
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
P[N_1N_2N_3] &= P[A]\,P[N_1N_2N_3 \mid A] + P[B]\,P[N_1N_2N_3 \mid B] \\
&= P[A]\,P[N_1 \mid A]\,P[N_2 \mid A]\,P[N_3 \mid A] + P[B]\,P[N_1 \mid B]\,P[N_2 \mid B]\,P[N_3 \mid B] \\
&= \frac{13}{98}
\end{aligned}$$

D'où, d'après la formule de Bayes :

$$\begin{aligned}
P[N_3 \mid N_1N_2] &= \frac{P[N_1N_2N_3]}{P[N_1N_2]} \\
&= \frac{13}{25}
\end{aligned}$$

Exercice 22
On considère trois urnes U_1 , U_2 et U_3 contenant des boules blanches et des boules noires.
Les proportions des boules blanches dans les trois urnes U_1 , U_2 et U_3 sont $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$ respectivement.
On effectue un tirage de trois boules : la première de U_1, la deuxième de U_2 et la toisième de U_3.
Calculer la probabilité d'avoir k boules blanches, $0 \leq k \leq 3$.

Solution 22
Considérons les événements :

$$B_k \ : \ \text{"la boule tirée de l'urne } U_k \text{ est blanche"} \ , \ 1 \leq k \leq 3$$

$$T_k \ : \ \text{"le tirage a donné } k \text{ boules blanches"} \ \ 0 \leq k \leq 3$$

On a :

$$\begin{cases} P\left[B_1\right] = \dfrac{1}{3} \\ \\ P\left[B_2\right] = \dfrac{1}{2} \\ \\ P\left[B_3\right] = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

et :

$$\begin{cases} T_0 = \bar{B}_1\bar{B}_2\bar{B}_3 \\ \\ T_1 = B_1\bar{B}_2\bar{B}_3 + \bar{B}_1B_2\bar{B}_3 + \bar{B}_1\bar{B}_2B_3 \\ \\ T_2 = B_1B_2\bar{B}_3 + B_1\bar{B}_2B_3 + \bar{B}_1B_2B_3 \\ \\ T_3 = B_1B_2B_3 \end{cases}$$

d'où :

$$P\left[T_0\right] = \frac{6}{24} \quad ; \quad P\left[T_1\right] = \frac{11}{24}$$

$$P\left[T_3\right] = \frac{6}{24} \quad ; \quad P\left[T_4\right] = \frac{1}{24}$$

Exercice 23
Un voyageur arrive à un carrefour, il sait qu'à cet endroit il va trouver deux routes, une bonne et l'autre non.
A ce carrefour, il y a trois frères F_1, F_2 et F_3.
F_1 dit la vérité une fois sur dix, F_2 cinq fois sur dix et F_3 neuf fois sur dix.
Le voyageur s'adresse à un et un seul des trois frères, il demande son chemin et s'aperçoit par la suite que cette route est bonne.
Quelle est la probabilité qu'il se soit adressé à F_1, F_2 ou à F_3 ?

Solution 23
Considérons les événements :

$$B \ : \ \text{"la route est bonne"}$$

$$F_i \ : \ \text{"le voyageur s'adresse à } F_i\text{"} \ , \ 1 \leq i \leq 3$$

On a :

$$P[F_1] = P[F_2] = P[F_3] = \frac{1}{3}$$

et :

$$P[B \mid F_1] = \frac{1}{10} \quad ; \quad P[B \mid F_2] = \frac{5}{10} \quad ; \quad P[B \mid F_3] = \frac{9}{10}$$

D'après la formule des probabilités totales on a :

$$\begin{aligned} P[B] &= \sum_{i=1}^{3} P[F_i] \, P[B \mid F_i] \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

et d'après la formule de Bayes, on a :

$$P[F_i \mid B] = \frac{P[F_i] \, P[B \mid F_i]}{P[F_i] \, P[B \mid F_i]}$$

d'où :

$$\begin{cases} P[F_1 \mid B] = \dfrac{1}{15} \\ \\ P[F_2 \mid B] = \dfrac{5}{15} \\ \\ P[F_3 \mid B] = \dfrac{9}{15} \end{cases}$$

Exercice 24
Une partie des accidents scolaires sont dûes à des accidents de laboratoires.
25% des étudiants ne lisent pas les notices de mise en garde qui accompagnent les produits qu'ils manipulent. Parmi ceux qui lisent, 10% ont tout de même des accidents par manque de précaution.
Quelle est, pour un étudiant qui ne lit pas la notice, la probabilité d'avoir un accident si la probabilité qu'un accidenté n'ait pas lu la notice est .75 ?

Solution 24
Considérons les événements :

$$\begin{array}{lcl} L & : & \text{"l'étudiant lit la notice"} \\ A & : & \text{"l'étudiant a un accident"} \end{array}$$

On a :

$$\begin{cases} P\left[\bar{L}\right] = .25 \\ P\left[A \mid L\right] = .1 \\ P\left[\bar{L} \mid A\right] = .75 \end{cases}$$

Il faut déterminer $P\left[A \mid \bar{L}\right]$.

Calculons d'abord $P\left[A\right]$.

Puisque :

$$A = A \cap L \oplus A \cap \bar{L}$$

donc :

$$\begin{aligned} P\left[A\right] &= P\left[L\right]P\left[A \mid L\right] + P\left[A\right]P\left[\bar{L} \mid A\right] \\ &= \frac{P\left[L\right]P\left[A \mid L\right]}{1 - P\left[\bar{L} \mid A\right]} \\ &= .3 \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} P\left[A \mid \bar{L}\right] &= \frac{P\left[A\right]P\left[\bar{L} \mid A\right]}{P\left[\bar{L}\right]} \\ &= .9 \end{aligned}$$

Exercice 25
Deux usines fabriquent les mêmes pièces.La première produit 70% de bonnes et la seconde 90%. Les deux usines fabriquent la même quantité de pièces.

1. Quel est le pourcentage des pièces bonnes sur l'ensemble des deux usines ?
2. On achète une pièce et on constate qu'elle est bonne. Quelle est la probabilité qu'elle proviennent de la seconde usine ?

Solution 25
Considérons les événements :

$$\begin{array}{lcl} U_1 & : & \text{"la pièce est fabriquée par le premier usine"} \\ U_2 & : & \text{"la pièce est fabriquée par le deuxième usine"} \\ B & : & \text{"la pièce est bonne"} \end{array}$$

On a :

$$P[U_1] = .5 \quad ; \quad P[B \mid U_1] = .7$$

$$P[U_2] = .5 \quad ; \quad P[B \mid U_2] = 0.9$$

D'après le théorème de *Bayes*, on a :

$$\begin{aligned} P[U_2 \mid B] &= \frac{P[U_2]\, P[B \mid U_2]}{P[U_1]\, P[B \mid U_1] + P[U_2]\, P[B \mid U_2]} \\ &= \frac{45}{80} \\ &= 56.25\% \end{aligned}$$

Exercice 26
On considère deux sacs S_1 et S_2 contenant chacun trois boules rouges et sept boules noires.
On prend une boule dans S_1 et on la place dans S_2.
Quelle est alors la probabilité de tirer une boule rouge de S_2 ?

Solution 26
Considérons les événements :

$$\begin{array}{lcl} A & : & \text{"la boule tirée de } S_1 \text{ est rouge"} \\ B & : & \text{"la boule tirée de } S_2 \text{ est rouge"} \end{array}$$

alors, d'après la formule des probabilités totales on a :

$$\begin{aligned} P[B] &= P[A]\,P[B \mid A] + P\left[\bar{A}\right] P\left[B \mid \bar{A}\right] \\ &= \frac{3}{10} \end{aligned}$$

Exercice 27
Une usine produit des moteurs. Chacun d'eux a la probabilité $\dfrac{1}{1000}$ d'être défectueux.
Un contrôle est fait. Il décèle immanquablement un moteur défectueux, mais rejette un bon moteur avec la probabilité $\dfrac{1}{100}$.
Un moteur est rejeté par le contrôle. Quelle est la probabilité qu'il soit effectivement défectueux.

Solution 27
Considérons les événements :

$$\begin{array}{lcl} D & : & \text{"le moteur est défectueux"} \\ R & : & \text{"le moteur est rejeté par le contrôle"} \end{array}$$

On a :

$$\left\{ \begin{array}{l} P[D] = \dfrac{1}{1000} \\ P[R \mid D] = 1 \\ P\left[R \mid \bar{D}\right] = \dfrac{1}{100} \end{array} \right.$$

D'après la formule de Bayes, on a :

$$\begin{aligned} P[D \mid R] &= \frac{P[D]\,P[R \mid D]}{P[D]\,P[R \mid D] + P\left[\bar{D}\right] P\left[R \mid \bar{D}\right]} \\ &= \frac{100}{1099} \\ &= 0.090992 \end{aligned}$$

Exercice 28
Un avion est porté disparu. On pense que l'accident a pu arriver aussi bien dans n'importe laquelle de trois régions données.
Notons $1-\alpha_i$ la probabilité qu'on découvre l'avion dans la région i s'il y est effectivement.
Quelle est la probabilité que l'avion se trouve à la région i, $i=1,2,3$, si les recherches dans la région 1 n'ont rien donné ?

Solution 28
Considérons les événements :

$$\begin{array}{lcl} R_1 & : & \text{"l'avion a disparu dans la région 1"} \\ R_2 & : & \text{"l'avion a disparu dans la région 2"} \\ R_3 & : & \text{"l'avion a disparu dans la région 3"} \\ R & : & \text{"les recherches dans la région 1 n'ont rien donné"} \end{array}$$

On a :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} P[R_1] = \dfrac{1}{3} & ; & P[R \mid R_1] = \alpha \\ P[R_2] = \dfrac{1}{3} & ; & P[R \mid R_2] = 1 \\ P[R_3] = \dfrac{1}{3} & ; & P[R \mid R_3] = 1 \end{array} \right.$$

Calculons $P[R]$:

$$\begin{aligned} P[R] &= P[R_1]\,P[R \mid R_1] + P[R_2]\,P[R \mid R_2] + P[R_3]\,P[R \mid R_3] \\ &= \frac{1}{3}(\alpha+2) \end{aligned}$$

D'après le théorème de *Baeys*, on a :

$$\begin{aligned} P[R_1 \mid R] &= \frac{P[R_1]\,P[R \mid R_1]}{P[R_1]\,P[R \mid R_1] + P[R_2]\,P[R \mid R_2] + P[R_3]\,P[R \mid R_3]} \\ &= \frac{\alpha}{\alpha+2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P[R_2 \mid R] &= \frac{P[R_2]\,P[R \mid R_2]}{P[R_1]\,P[R \mid R_1] + P[R_2]\,P[R \mid R_2] + P[R_3]\,P[R \mid R_3]} \\ &= \frac{1}{\alpha+2} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
P[R_3 \mid R] &= \frac{P[R_3]\,P[R \mid R_3]}{P[R_1]\,P[R \mid R_1] + P[R_2]\,P[R \mid R_2] + P[R_3]\,P[R \mid R_3]} \\
&= \frac{1}{\alpha + 2}
\end{aligned}
$$

Exercice 29
Trois urnes A, B et C renferment des boules blanches et des boules noires.
Les proportions de boules blanches sont respectivement de 30%, 60% et 40%.
On tire au hasard une première boule de l'urne A, une seconde est extraite de B ou C suivant que la première soit blanche ou noire.

1. Quelle est la probabilité que la seconde boule soit blanche ?
2. La seconde boule est blanche. Quelle est la probabilité que la première soit noire ?

Solution 29
Considérons les événements :

$$
\begin{array}{lcl}
A & : & \text{"le tirage est effectué de l'urne } A\text{"} \\
B & : & \text{"le tirage est effectué de l'urne } B\text{"} \\
C & : & \text{"le tirage est effectué de l'urne } C\text{"} \\
B_1 & : & \text{"la première boule tirée est blanche"} \\
B_2 & : & \text{"la deuxième boule tirée est blanche"}
\end{array}
$$

Ona :

$$
\begin{cases}
P[A] = \dfrac{1}{3} \quad ; \quad P[B_2 \mid A] = .3 \\
\\
P[B] = \dfrac{1}{3} \quad ; \quad P[B_2 \mid B] = .6 \\
\\
P[C] = \dfrac{1}{3} \quad ; \quad P[B_2 \mid C] = .4
\end{cases}
$$

1. Puisque :

$$B_2 = B_1 B_2 \oplus \bar{B}_1 B_2$$

alors :

$$
\begin{aligned}
P[B_2] &= P[B_1]\,P[B_2 \mid B_1] \oplus P\left[\bar{B}_1\right] P\left[B_2 \mid \bar{B}_1\right] \\
&= 0.46
\end{aligned}
$$

2. D'après le théorème de *Bayes*, on a :

$$\begin{aligned}
P\left[\bar{B}_1 \mid B_2\right] &= \frac{P\left[\bar{B}_1\right] P\left[B_2 \mid \bar{B}_1\right]}{P\left[B_1\right] P\left[B_2 \mid B_1\right] \oplus P\left[\bar{B}_1\right] P\left[B_2 \mid \bar{B}_1\right]} \\
&= \frac{14}{23} \\
&= 60.87\%
\end{aligned}$$

Exercice 30
Un examen comporte des réponses par oui ou par non.
Un étudiant connait seulement la moitié du programme. Lorsqu'il ne sait pas répondre à une question, il répond au hasard.
Quelle est la probabilité pour qu'une réponse soit exacte à cause de ses connaissances et non à cause de la chance ?

Solution 30
Considérons les événements :

$$\begin{aligned}
C &: \text{"l'étudiant connait le programme"} \\
A &: \text{"la réponse de l'étudiant est exacte"}
\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{cases}
P[C] = \dfrac{1}{2} \\[2ex]
P[A \mid C] = 1 \\[2ex]
P\left[A \mid \bar{C}\right] = \dfrac{1}{2}
\end{cases}$$

D'après le théorème de *Bayes*, on a :

$$P[C \mid A] = \frac{P[C]\, P[A \mid C]}{P[C]\, P[A \mid C] + P\left[\bar{C}\right] P\left[A \mid \bar{C}\right]} = \frac{2}{3}$$

Exercice 31
Une compagnie se procure des accumulateurs chez quatre fournisseurs différents : 45% du premier, 25% du second, 20% du troisième et 10% du quatrième.
D'autre part, 90% des accumulateurs provenant du premier fournisseur fonctionnent bien. Les proportions sont de 85% pour le deuxième, 95% pour le troisième et 80% pour le quatrième.

1. Calculer la probabilité qu'un accumulateur choisi au hasard soit défectueux.
2. On choisit au hasard un accumulateur et on constate qu'il est défectueux.
   Un responsable affirme qu'il provient du quatrième fournisseur.
   Qu'en pensez-vous ?

Solution 31
Considérons les événements :

$$\begin{array}{lll} F_i & : & \text{"l'accumulateur provient du } i^{ème} \text{ fournisseur" } ,1 \leq i \leq 4 \\ D & : & \text{"l'accumulateur est défectueux"} \end{array}$$

On a :

$$\begin{cases} P[F_1] = .45 & ; \quad P[D \mid F_1] = .10 \\ \\ P[F_2] = .25 & ; \quad P[D \mid F_2] = .15 \\ \\ P[F_3] = .20 & ; \quad P[D \mid F_3] = .05 \\ \\ P[F_4] = .10 & ; \quad P[D \mid F_4] = .20 \end{cases}$$

1. D'après la formule des probabilités totales on a :

$$\begin{aligned} P[D] &= \sum_{i=1}^{4} P[F_i] P[D \mid F_i] \\ &= .1125 \end{aligned}$$

2. D'après le théorème de *Bayes*, on a :

$$P[F_i \mid D] = \frac{P[F_i] P[D \mid F_i]}{P[D]}$$

   d'où :

$$\begin{aligned} P[F_1 \mid D] &= \frac{18}{45} \\ P[F_2 \mid D] &= \frac{15}{45} \\ P[F_3 \mid D] &= \frac{4}{45} \\ P[F_4 \mid D] &= \frac{8}{45} \end{aligned}$$

   On en déduit que l'affirmation du responsable n'est pas fondée.
   Il y a plus de chance que l'accumulateur provient du premier ou du deuxième fournisseur que du quatrième fournisseur.

Exercice 32

On considère deux urnes : l'une peinte en blanc et l'autre peinte en noir.
Chacune de ces deux urnes contient des boules blanches et des boules noires.
L'urne blanche contient une proportion α de boules noires et l'urne noire contient une proportion β de boules blanches.
On choisit une urne au hasard (probabilité p de tirer l'urne blanche et $q = 1 - p$ de tirer l'urne noire) et on tire ensuite une boule de cette urne. Si la boule tirée est de la même couleur que l'urne, on tire à nouveau une boule de cette urne. Dans le cas contraire, on effectue le tirage dans l'autre urne. On poursuit ce mode de tirage, supposés tous avec remise, la $n^{ème}$ boule est tirée dans l'urne dont la couleur est celle de la $(n-1)^{ème}$ boules tirée.
Soit p_n la probabilité que la $n^{ème}$ boule tirée soit blanche, q_n la probabilité que la $n^{ème}$ boule tirée soit noire et V_n le vecteur colonne de composantes p_n et q_n.

1. Etablir une relation de récurrence entre V_n et V_{n-1}.
2. En déduire que :
$$V_n = M^n V_0$$
où M est une matrice carrée et V_0 est le vecteur colonne de composantes p et q.
3. Que signifie :
   (a) $\alpha = \beta = 0$?
   (b) $\alpha = \beta = 1$?
   (c) $\alpha + \beta = 1$?
4. Calculer, dans chacun de ces cas, les limites de p_n et q_n quand n tend vers $+\infty$.

Solution 32

Considérons les événements :

$$\begin{array}{lcl} B & : & \text{"le tirage est effectué de l'urne blanche"} \\ N & : & \text{"le tirage est effectué de l'urne noire"} \\ B_n & : & \text{"la } n^{ème} \text{ boule est blanche"} \\ N_n & : & \text{"la } n^{ème} \text{ boule est noire"} \end{array}$$

On a :

$$P[B] = p \ , \ P[N] = q$$

et :

$$\begin{array}{rcl} P[B_n \mid B_{n-1}] & = & P[B_n \mid B] = 1 - \alpha \\ P[B_n \mid N_{n-1}] & = & P[B_n \mid N] = \beta \\ P[N_n \mid B_{n-1}] & = & P[N_n \mid B] = \alpha \\ P[N_n \mid N_{n-1}] & = & P[N_n \mid N] = 1 - \beta \end{array}$$

et pour tout n, $n \geq 2$, on a :

$$\begin{cases} B_1 = B_1 B \oplus B_1 N \\ \\ B_n = B_n B_{n-1} \oplus B_n N_{n-1} \end{cases}$$

de même :

$$\begin{cases} N_1 = N_1 B \oplus N_1 N \\ \\ N_n = N_n B_{n-1} \oplus N_n N_{n-1} \end{cases}$$

1. D'après la formule des probabilités totales on a :

$$\begin{cases} P[B_1] = P[B_1 \mid B] P[B] + P[B_1 \mid N] P[N] \\ \\ P[B_n] = P[B_n \mid B_{n-1}] P[B_{n-1}] + P[B_n \mid N_{n-1}] P[N_{n-1}] \end{cases}$$

$$\begin{cases} P[N_1] = P[N_1 \mid B] P[B] + P[N_1 \mid N] P[N] \\ \\ P[N_n] = P[N_n \mid B_{n-1}] P[B_{n-1}] + P[N_n \mid N_{n-1}] P[N_{n-1}] \end{cases}$$

   d'où :

$$\begin{cases} p_1 = (1-\alpha) p + \beta q \\ \\ p_n = (1-\alpha) p_{n-1} + \beta q_{n-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_1 = \alpha p + (1-\beta) q \\ \\ q_n = \alpha p_{n-1} + (1-\beta) q_{n-1} \end{cases}$$

   On en déduit que pour tout n, $n \geq 1$, on a :

$$V_n = M V_{n-1}$$

   où M est la matrice carrée :

$$M = \begin{bmatrix} 1-\alpha & \beta \\ \\ \alpha & 1-\beta \end{bmatrix}$$

   et :

$$V_0 = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$$

2. Il en résulte que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$V_n = M^n V_0$$

(a) Si :

$$\alpha = \beta = 0$$

alors l'urne blanche ne contient que des boules blanches et l'urne noire ne contient que des boules noires. Tous les tirages seront effectués de la même urne, celle choisie au départ.

(b) Si :

$$\alpha = \beta = 1$$

alors l'urne blanche ne contient que des boules noires et l'urne noire ne contient que des boules blanches. Les tirages seront effectués en alternant les deux urnes.

(c) Si :

$$\alpha + \beta = 1$$

alors les deux urnes ont la même composition. Une fois que l'urne est choisie, il n'est plus nécessaire de la changer.

(a) Si :

$$\alpha = \beta = 0$$

alors la matrice M est la matrice identique d'ordre 2 :

$$M = I_2$$

d'où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{cases} p_n = p \\ q_n = q \end{cases}$$

(b) Si :

$$\alpha = \beta = 1$$

alors :

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

puisque :

$$M^2 = I_2$$

on en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} V_{2k} &= \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \\ V_{2k+1} &= \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Les suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont divergentes sauf lorsque :

$$p = q = \frac{1}{2}$$

(c) Si :

$$\alpha + \beta = 1$$

alors :

$$M^2 = M$$

donc :

$$\begin{aligned} V_n &= MV_0 \\ &= \begin{bmatrix} 1-\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{cases} p_n = 1-\alpha \\ q_n = \alpha \end{cases}$$

Exercice 33

On appelle "épreuve", un lot de trois sujets tirés au hasard parmi cent sujets possibles.
Un candidat doit traiter au choix l'un des trois sujets.

1. Combien d'épreuves peut-on proposer au candidat ?
2. Un candidat se présente en ne connaissant que la moitié des sujets. Quelle est la probabilité pour qu'il sache traiter :

   (a) les trois sujets ?
   (b) seulement deux sujets ?
   (c) un seul sujet
   (d) aucun des trois sujets ?

Solution 33

1. Le nombre d'épreuves qu'on peut- proposer au candidat est :

$$C(100,3) = 161700$$

2. La probabilité p_k pour que le candidat sache traiter exactement k sujets, $0 \leq k \leq 3$, parmi les trois sujets proposés est :

$$p_k = \frac{C(50,k)\,C(50,3-k)}{C(100,3)}$$

d'où :

(a) La probabilité pour qu'il sache traiter les trois sujets est :

$$p_3 = .1212$$

(b) La probabilité pour qu'il sache traiter seulement deux sujets est :

$$p_2 = .3788$$

(c) La probabilité pour qu'il sache traiter un seul sujets est :

$$p_1 = .3788$$

(d) La probabilité pour qu'il ne sache traiter aucun sujets est :

$$p_0 = .1212$$

Exercice 34

Dans une loterie de cent billets, deux billets sont gagnants.

1. Quelle est la probabilité de gagner au moins un lot si l'on prend douze billets ?
2. Combien faut-il acheter de billets pour que la probabilité de gagner au moins un lot soit supérieure à .8 ?

Solution 34

1. La probabilité p_k, $0 \leq k \leq 2$, de ganger exactement k lots lorsqu'on détient 12 billets est :

$$p_k = \frac{C(2,k) \times C(98,12-k)}{C(100,12)}$$

d'où la probabilité P de ganer au moins un lot est :

$$\begin{aligned} P &= p_1 + p_2 \\ &= 1 - p_0 \\ &= \frac{17}{75} \\ &= 22.67\% \end{aligned}$$

2. La probabilité $p_{n,k}$, $0 \leq k \leq 2$, de ganger exactement k lots lorsqu'on détient n billets est :

$$p_{n,k} = \frac{C(2,k) \times C(98, n-k)}{C(100, n)}$$

d'où la probabilité P_n de ganer au moins un lot est :

$$\begin{aligned} P_n &= p_{n,1} + p_{n,2} \\ &= 1 - p_{n,0} \\ &= \frac{n(199-n)}{9900} \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$P_n > .8 \Longrightarrow n \geq 56$$

Exercice 35
On jette n fois deux dés.

1. Quelle est la probabilité pour que le double six sorte au moins une fois ?
2. Combien de fois faut-il jeter les deux dés pour parier avec avantage d'obtenir au moins une fois le double six ?

Solution 35

1. La probabilité pour que le double six ne sorte aucune fois est :

$$q_n = \left(\frac{35}{36}\right)^n$$

d'où la probabilité pour qu'il sorte au moins une fois est :

$$\begin{aligned} p_n &= 1 - q_n \\ &= 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n \end{aligned}$$

2. D'où :

$$p_n > \frac{1}{2} \Longrightarrow n \geq 25$$

Exercice 36
On dispose de deux urnes contenant respectivement cinq boules bleues et quatre rouges, et six boules bleues et cinq rouges. On tire une boule de chaque urne.
Quelle est la probabilité :

1. de tirer deux boules rouges ?
2. de tirer deux boules bleues ?
3. de tirer une boule bleue et une boule rouge ?

Solution 36

1. La probabilité de tirer deux boules rouges est :

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{4}{9}\frac{5}{11} \\ &= \frac{20}{99} \end{aligned}$$

2. La probabilité de tirer deux boules bleues est :

$$\begin{aligned} p_2 &= \frac{5}{9}\frac{6}{11} \\ &= \frac{30}{99} \end{aligned}$$

3. La probabilité de tirer une boule bleue et une boule rouge est :

$$\begin{aligned} p_3 &= \frac{5}{9}\frac{5}{11} + \frac{4}{9}\frac{6}{11} \\ &= \frac{49}{99} \\ &= 1 - p_1 - p_2 \end{aligned}$$

Exercice 37
On lance au hasard un dé dont les faces sont numérotés de 1 à 6.
On suppose que la probabilité d'apparition d'un chiffre pair est le double de celle d'un chiffre impair et que les faces paires sont équiprobables.
Quelle est la probabilité d'obtenir un diviseur de six ?

Solution 37
Désignons par $p(k)$, $1 \leq k \leq 6$, la probabilité d'obtenir la face k du dé.
On a :

$$\begin{array}{rcl} p(2) & = & p(4) = p(6) \\ p(1) & = & p(3) = p(5) \end{array}$$

et :

$$p(2) = 2p(1)$$

Puisque :

$$\sum_{i=1}^{6} p(k) = 1$$

on en déduit que :

$$\begin{array}{rcl} p(2) & = & p(4) = p(6) = \dfrac{2}{9} \\ p(1) & = & p(3) = p(5) = \dfrac{1}{9} \end{array}$$

Soit l'événement :

$$D : \text{"obtenir un diviseur de six"}$$

on a :

$$D = \{1, 2, 3, 6\}$$

d'où :

$$P[D] = p(1) + p(2) + p(3) + p(6) = \frac{2}{3}$$

Exercice 38
Une urne contient six boules rouges et quatre boules blanches.
On tire au hasard deux boules sans remise.
Calculer la probabilité des événements suivants :

1. les deux boules sont rouges,
2. les deux boules sont blanches,
3. les deux boules sont de couleurs différentes.

Solution 38

1. La probabilité que les deux boules tirées soient rouges est :

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{6}{10}\frac{5}{9} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

2. La probabilité que les deux boules tirées soient blanches est :

$$\begin{aligned} p_2 &= \frac{4}{10}\frac{3}{9} \\ &= \frac{2}{15} \end{aligned}$$

3. La probabilité que les deux boules tirées soient de couleurs différentes est :

$$\begin{aligned} p_3 &= \frac{6}{10}\frac{4}{9} + \frac{4}{10}\frac{6}{9} \\ &= \frac{8}{15} \\ &= 1 - p_1 - p_2 \end{aligned}$$

Exercice 39

On choisit au hasard un numéro de téléphone à huit chiffres.
Calculer la probabilité des événements suivants :

1. A : "les huit chiffres du numéro sont tous distincts".
2. B : "le produit des huit chiffres du numéro est divisible par deux".
3. C : "les huit chiffres du numéro forment une suite strictement croissante".
4. D : "les huit chiffres du numéro forment une suite croissante".

Solution 39

Le nombre N de numéro de téléphone à huit chiffre est :

$$N = 10^8$$

1. Le nombre de numéro dont les huit chiffres sont distincts est le nombre d'arragements de huit éléments parmi dix éléments, d'où :

$$\begin{aligned} P[A] &= \frac{A(10,8)}{10^8} \\ &= 0.018144 \end{aligned}$$

2. Le produit des huit chiffres n'est pas divisible par deux si et seulement tous les chiffres du numéro sont impairs.
   Le nombre M de ces numéros est :
   $$M = 5^8$$
   d'où :
   $$P\left[\bar{B}\right] = \left(\frac{1}{2}\right)^8$$
   et par conséquent :
   $$\begin{aligned} P[B] &= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^8 \\ &= \frac{255}{256} \\ &= 0.996 \end{aligned}$$
3. Le nombre de numéros à huit chiffres formant une suite strictement croissante est le nombre de combinaison de huit éléments parmi dix éléments, d'où :
   $$\begin{aligned} P[C] &= \frac{C(10,8)}{10^8} \\ &= 4.5 \times 10^{-7} \end{aligned}$$
4. Le nombre de numéros à huit chiffres formant une suite croissante est le nombre de combinaison avec répétition de longueur huit parmi dix éléments, d'où :
   $$\begin{aligned} P[D] &= \frac{K(10,8)}{10^8} \\ &= \frac{C(17,8)}{10^8} \\ &= 2.431 \times 10^{-4} \end{aligned}$$

Exercice 40
Les n tomes d'une encyclopidie sont disposés au hasard sur une étagère.

1. Quelle est la probabilité que les tomes 1 et 2 appraissent côte à côte dans cet ordre ?
2. Quelle est la probabilité que les tomes 1 à p $(2 \leq p \leq n)$ appraissent côte à côte dans cet ordre ?

Solution 40
Le nombre de manière N de placer les n tomes sur l'étagère est :

$$n!$$

1. Le tome 1 peut occuper les positions de 1 à $n-1$.
   Le tome 2 ne peut occuper qu'une seule position : celle à coté du tome 1.
   pour les $(n-2)$ tomes restants, il y a $(n-2)!$ manières de les placer sur l'étagètre.
   D'où la probabilité recherchée est :

$$\begin{aligned} P &= \frac{(n-1)(n-2)!}{n!} \\ &= \frac{1}{n} \end{aligned}$$

2. Le tome 1 peut occuper les positions de 1 à $n-p+1$.
   Il n'y a qu'une seule manière pour placer les tomes de 2 à p une fois que la position du tome 1 est choisie.
   pour les $(n-p)$ tomes restants, il y a $(n-p)!$ manières de les placer sur l'étagètre.
   D'où la probabilité recherchée est :

$$\begin{aligned} P &= \frac{(n-p+1)(n-p)!}{n!} \\ &= \frac{(n-p+1)!}{n!} \\ &= \frac{1}{A(n,p-1)} \end{aligned}$$

Exercice 41
n personnes sont réunies dans une même salle.
Calculer la probabilité des événements suivants :

1. Il n'y a pas deux personnes ayant le même jour d'anniversaire.
2. Deux personnes au moins ont le même jour d'anniversaire.
3. Deux personnes, et deux seulement, ont le même jour d'anniversaire.

Solution 41

1. La probabilité pour qu'il n'y a pas deux personnes ayant le même jour d'anniversaire est :
$$p_1 = \frac{C(365, n)}{365^n}$$
2. La probabilité pour que deux personnes au moins ont le même jour d'anniversaire est :
$$p_2 = 1 - p_1$$
3. La probabilité pour que deux personnes, et deux seulement ont le même jour d'anniversaire est :
$$p_3 = \frac{C(365, n-1)}{365^n}$$

Exercice 42

Le code confidentiel d'une carte bancaire est un nombre de quatre chiffres tous non nuls.
Le code d'une carte est choisi au hasard par ordinateur.
Calculer la probabilité des événements suivants :

1. A : "le code est un nombre pair"
2. B : "le code n'est composé que de chiffres pairs"
3. C : "le code contient une et seule fois le chiffre 1"
4. D : "le code est composé de quatre chiffres distincts"
5. E : "les quatre chiffres du code forment une suite croissante"
6. F : "les quatre chiffres du code forment une suite strictement croissante"

Solution 42

Le nombre de codes qu'on peut ainsi former est :
$$9^4 = 6561$$

1. Le nombre de codes pairs est :
$$4 \times 9^3 = 2619$$
d'où :
$$P[A] = \frac{4}{9}$$
2. Le nombre de codes composés seulement de chiffres pairs est
$$4^4 = 256$$

d'où :

$$\begin{aligned} P[B] &= \left(\frac{4}{9}\right)^4 \\ &= .039 \end{aligned}$$

3. Le nombre de codes où le chiffre 1 figure une et seule fois est

$$C(4,1) \times 8^3 = 2048$$

d'où :

$$\begin{aligned} P[C] &= \frac{C(4,1) \times 8^3}{9^4} \\ &= .31215 \end{aligned}$$

4. Le nombre de codes composés de quatre chiffres distincts est :

$$A(9,4) = 3024$$

d'où :

$$\begin{aligned} P[D] &= \frac{A(9,4)}{9^4} \\ &= .46 \end{aligned}$$

5. Le nombre de codes où les quatre chiffres forment une suite croissante est :

$$K(9,4) = 495$$

d'où :

$$\begin{aligned} P[E] &= \frac{K(9,4)}{9^4} \\ &= .075446 \end{aligned}$$

6. Le nombre de codes où les quatre chiffres forment une suite strictement croissante est :

$$C(9,4) = 126$$

d'où :

$$\begin{aligned} P[F] &= \frac{C(9,4)}{9^4} \\ &= .0192 \end{aligned}$$

Exercice 43
Une urne contient six boules numérotées de 1 à 6.
On tire successivement trois boules de l'urne, sans remise.
Calculer la probabilité des événements suivants :

1. A : "la troisième boule tirée porte le numéro 2"
2. B : "la troisième boule tirée porte un numéro pair"
3. C : "la troisième boule tirée porte un numéro au moins égal à 2"
4. C : "la troisième boule tirée porte un numéro au moins égal à 2"

Solution 43
Notons $p(k)$, $1 \leq k \leq 6$, la probabilité pour que la troisième boule tirée porte le numéro k.On a :

$$\begin{aligned} p(k) &= \frac{A(5,2)}{A(6,3)} \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

1. En particulier, la probabilité pour que la troisième boule tirée porte le numéro 2 est :
$$p(2) = \frac{1}{6}$$
2. La probabilité pour que la troisième boule tirée porte un numéro pair est :
$$\begin{aligned} P &= p(2) + p(4) + p(6) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$
3. La probabilité pour que la troisième boule tirée porte un numéro au moins égal à 2 est :
$$\begin{aligned} P &= p(2) + p(3) + p(4) + p(5) + p(6) \\ &= 1 - p(1) \\ &= \frac{5}{6} \end{aligned}$$

Exercice 44
On considère six boules numérotées de 1 à 6.
Une boite comporte six compartiments numérotés de 1 à 6.
On place au hasard les boules, une boule par compartiment.
Quelle est la probabilité pour que quatre boules au moins soient dans le compartiment ayant le même numéro que la boule ?

Solution 44
Désignons par A_k, $1 \leq k \leq 6$, l'événement :

A_k : "exactement k boules sont dans le compartiment ayant le même numéro que la boule"

et remarquons que :

$$A_5 = \emptyset$$

L'événement A_4 est réalisé dans le cas où quatre parmi les six boules $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$ sont placées dans les compartiments comportant respectivement leurs numéros, alors les deux boules restantes sont placées chacune dans le compartiment comportant le numéro de l'autre, d'où :

$$P[A_4] = \frac{C(6,4)}{6!}$$

L'événement A_6 est réalisé dans le seul cas où les boules $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$ sont placées dans les compartiments $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$ respectivement, d'où :

$$P[A_6] = \frac{1}{6!}$$

d'où la probabilité recherchée est :

$$\begin{aligned} P &= P[A_4] + P[A_6] \\ &= \frac{16}{6!} \\ &= \frac{1}{45} \end{aligned}$$

Exercice 45
On dispose de trois urnes. Les deux première urnes contiennent cinq boules vertes et quatre rouges chacune. La troisième contient six boules vertes et quatre rouges.
On choisit au hasard une urne dans laquelle on tire une boule. On constate que cette boule est verte.
Quelle est la probabilité de l'avoir tirée de la troisième urne ?

Solution 45
Considérons les événements :

$$\begin{array}{lcl} U_i & : & \text{"le tirage est effectué de la } i^{ème} \text{ urne"} , 1 \leq i \leq 3 \\ V & : & \text{"la boule tirée est verte"} \end{array}$$

On a :

$$\begin{cases} P[U_1] = \dfrac{1}{3} & ; \quad P[V \mid U_1] = \dfrac{1}{2} \\ P[U_2] = \dfrac{1}{3} & ; \quad P[V \mid U_2] = \dfrac{1}{2} \\ P[U_3] = \dfrac{1}{3} & ; \quad P[V \mid U_3] = \dfrac{3}{5} \end{cases}$$

D'après la théorème de *Bayes* on a :

$$\begin{aligned} P[U_3 \mid V] &= \frac{P[U_3]\,P[V \mid U_3]}{P[U_1]\,P[V \mid U_1] + P[U_2]\,P[V \mid U_2] + P[U_3]\,P[V \mid U_3]} \\ &= \frac{3}{8} \end{aligned}$$

Exercice 46
On dispose de deux pièces de monnaie truquées, une pièce de dix dirhams et une pièce de cinq dirhams.
La probabilité d'obtenir "pile" en lançant la pièce de dix dirhams est .8 alors que la probabilité d'obtenir "face" en lançant celle de cinq dirhams est .7.
On lance au hasard l'une des deux pièces et on obtient "face".
Quelle est la probabilité d'avoir choisi celle de dix dirhams ?

Solution 46
Considérons les événements suivants :

C	:	"la pièce lancée est celle de cinq dirhams"
D	:	"la pièce lancée est celle de dix dirhams"
F	:	"le coté obtenu est face"
P	:	"le coté obtenu est pile"

On a :

$$\begin{cases} P[C] = .5 & ; \quad P[F \mid C] = .7 \\ P[D] = .5 & ; \quad P[F \mid D] = .2 \end{cases}$$

D'après la théorème de *Bayes* on a :

$$\begin{aligned} P[D \mid F] &= \frac{P[D]\,P[F \mid D]}{P[C]\,P[F \mid C] + P[D]\,P[F \mid D]} \\ &= \frac{2}{9} \end{aligned}$$

Exercice 47
On dispose de dix jetons : deux noirs, cinq blancs et trois bicolores (une face blanche et une face noire).
On choisit au hasard un jeton que l'on jette. La face apparente est blanche.
Quelle est la probabilité que la face cachée soit blanche ?

Solution 47
considérons les événements suivants :

$$\begin{array}{rcl} J_b & : & \text{"le jeton choisi est blanc"} \\ J_n & : & \text{"le jeton choisi est noir"} \\ J_c & : & \text{"le jeton choisi est bicolore"} \\ B_a & : & \text{"la face apparente est blanche"} \\ B_c & : & \text{"la face cachée est blanche"} \end{array}$$

On a :

$$\begin{cases} P[J_b] = \dfrac{1}{2} & ; \quad P[B_a \mid J_b] = 1 & ; \quad P[B_c \mid J_b] = 1 \\ \\ P[J_n] = \dfrac{1}{5} & ; \quad P[B_a \mid J_n] = 0 & ; \quad P[B_c \mid J_n] = 0 \\ \\ P[J_c] = \dfrac{3}{10} & ; \quad P[B_a \mid J_c] = \dfrac{1}{2} & ; \quad P[B_c \mid J_c] = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

D'après la théorème de *Bayes* on a :

$$P[B_c \mid B_a] = \frac{P[B_c \cap B_a]}{P[B_a]}$$

or :

$$P[B_c \cap B_a] = P[J_b] = \frac{1}{2}$$

et :

$$P[B_a] = P[J_b]\, P[B_a \mid J_b] + P[J_n]\, P[B_a \mid J_n] + P[J_c]\, P[B_a \mid J_c] = \frac{13}{20}$$

d'après la formule des probabilités totales.
D'où :

$$P[B_c \mid B_a] = \frac{10}{13}$$

Exercice 48
On considère une population dans laquelle 75% des cancers des poumons sont observés chez les fumeurs.
La population contient 4% de cancers de poumons, et 60% de fumeurs.
On tire au hasard un individu de cette population.

1. Quelle est la probabilité que la personne ne fume pas et n'a pas de cancer ?
2. Si la personne ne fume pas, quelle est la probabilité qu'elle n'a pas de cancer ?
3. Si la personne n'a pas de cancer, quelle est la probabilité qu'elle fume ?

Solution 48
Considérons les événements :

$$\begin{array}{lcl} C & : & \text{"la personne a le cancer"} \\ F & : & \text{"la personne fume"} \end{array}$$

On a :

$$\begin{cases} P[F] = 0.6 \\ \\ P[C] = 0.04 \\ \\ P[F \mid C] = 0.75 \end{cases}$$

1. On a :

$$\begin{aligned} P[F^c C^c] &= 1 - P[F + C] \\ &= 1 - P[F] - P[C] + P[FC] \\ &= 1 - P[F] - P[C] + P[C]P[F \mid C] \\ &= 0.39 \end{aligned}$$

2. On a :

$$\begin{aligned} P[C^c \mid F^c] &= \frac{P[F^c C^c]}{P[F^c]} \\ &= 0.975 \end{aligned}$$

3. On a :

$$\begin{aligned} P[F \mid C^c] &= 1 - P[F^c \mid C^c] \\ &= 1 - \frac{P[F^c C^c]}{P[C^c]} \\ &= 0.59375 \end{aligned}$$

Exercice 49
Pour prévenir l'extension d'une épidémie virale, on décide de soumettre la population menacée à des tests. D'une façon générale, le résultat de chaque test est positif pour les porteurs de virus, négatif pour les personnes qui ne sont pas atteintes, mais il y a des exeptions.
Le but de l'exercice est de comparer deux procédés de dépistage. L'un n'utilisant qu'un seul test, l'autre consistant en la succession de deux tests identiques réalisés indépendamment l'un de l'autre.
On choisit au hasard un individu A et on désigne par V et T les événements :

V : "A est porteur de virus"
T : "le test appliqué à A est positif"

On admet que :

$$
\begin{array}{l}
P[V] = 0.1 \\
P[T \mid V] = 0.95 \\
P\left[T \mid \bar{V}\right] = 0.03
\end{array}
$$

1. Dans cette question, on étudie la procédure de contrôle qui n'utilise qu'un seul test.

   (a) Calculer la probabilité de l'événement T.
   (b) Le test appliqué à A s'est avéré négatif.
   Calculer la probabilité que A soit porteur du virus.

2. On effectue maintenant deux tests identiques. On considère l'événement :

   T_2 : "les deux tests appliqués à A sont positifs"

   (a) Si A est porteur du virus, quelle est la probabilité pour que les deux tests appliqués à A soient négatifs ?
   (b) Les deux tests ont été négatifs. Quelle est la probabilité que A soit porteurs du virus ?
   (c) Conclure.

Solution 49
1. (a) On a :

$$
\begin{array}{rcl}
P[T] & = & P[V] P[T \mid V] + P\left[\bar{V}\right] P\left[T \mid \bar{V}\right] \\
& = & .122
\end{array}
$$

(b) D'après le théorème de *Bayes*, on a :

$$\begin{aligned} P\left[V \mid \bar{T}\right] &= \frac{P[V]\,P\left[\bar{T} \mid V\right]}{P\left[\bar{T}\right]} \\ &= \frac{5}{878} \\ &= 5.6948 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

(a) Les deux tests étant indépendants, donc :

$$\begin{aligned} P\left[\bar{T}_2 \mid V\right] &= \left(P\left[\bar{T} \mid V\right]\right)^2 \\ &= 25 \times 10^{-4} \end{aligned}$$

(b) D'après le théorème de *Bayes*, on a :

$$\begin{aligned} P\left[V \mid \bar{T}_2\right] &= \frac{P[V]\,P\left[\bar{T}_2 \mid V\right]}{P\left[\bar{T}_2\right]} \\ &= 3.243 \times 10^{-6} \end{aligned}$$

(c) On en déduit que :

$$P\left[V \mid \bar{T}_2\right] = \frac{1}{1756} P\left[V \mid \bar{T}\right]$$

Il est donc préférable de pratiquer deux tests successifs.

Exercice 50
On considère les familles à deux enfants.

1. Une famille à deux enfants dont au moins un garçon.
   Quelle est la probabilité que cette famille ait deux garçons ?
2. Une famille à deux enfants dont l'aine est un garçon.
   Quelle est la probabilité que cette famille ait deux garçons ?

Solution 50
Considérons les événements :

$$\begin{array}{ccl} G_1 & : & \text{"le premier enfant est un garçon"} \\ G_2 & : & \text{"le second enfant est un garçon"} \\ G & : & \text{"la famille a au moins un garçon"} \end{array}$$

Notons que les événements G_1 et G_2 sont indépendants et que :

$$P[G_1] = P[G_2] = \frac{1}{2}$$

1. On a :

$$G = G_1\bar{G}_2 \oplus \bar{G}_1 G_2 \oplus G_1 G_2$$

d'où :

$$P[G] = \frac{3}{4}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} P[G_1G_2 \mid G] &= \frac{P[G_1G_2G]}{P[G]} \\ &= \frac{P[G_1G_2]}{P[G]} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

2. On a:

$$\begin{aligned} P[G_1G_2 \mid G_1] &= \frac{P[G_1G_2]}{P[G_1]} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Exercice 51
On dispose de dix urnes numérotées de 0 à 9.
L'urne k contient k boules noires et $9-k$ boules blanches.
On choisit une urne au hasard et sans connaitre son numéro on tire deux boules avec remise.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules noires ?
2. Les deux boules obtenues sont noires. Quelle est la probabilité qu'elles proviennent de l'urne U_5 ?
3. Le premier tirage a donné une boule noire. Quelle est la probabilité que le second tirage donnent aussi une boule noire ?

Solution 51

Considérons les événements :

$$\begin{array}{lcl} U_i & : & \text{"le tirage est effectué de l'urne } i\text{"} \ , \ 0 \leq i \leq 9 \\ N_i & : & \text{"la } i^{\grave{e}me} \text{ boule tirée est noire"} \ , \ i = 1, 2 \end{array}$$

On a :

$$P[U_k] = \frac{1}{10} \ , \ 0 \leq k \leq 9$$

$$P[N_i \mid U_k] = \frac{k}{9} \ , \ 0 \leq k \leq 9 \ , \ i = 1, 2$$

1. D'après la formule des probabilités totales, la probabilité d'obtenir deux boules noires est :

$$\begin{aligned} P[N_1N_2] &= \sum_{k=0}^{9} P[U_k] P[N_1N_2 \mid U_k] \\ &= \frac{19}{54} \end{aligned}$$

2. D'après la théorème de *Bayes* on a :

$$\begin{aligned} P[U_5 \mid N_1N_2] &= \frac{P[U_5] P[N_1N_2 \mid U_5]}{P[N_1N_2]} \\ &= \frac{5}{57} \end{aligned}$$

3. D'après la formule des probabilités totales :

$$P[N_1] = \sum_{k=0}^{9} P[U_k] P[N_1 \mid U_k] = \frac{1}{2}$$

d'où :

$$\begin{aligned} P[N_2 \mid N_1] &= \frac{P[N_1N_2]}{P[N_1]} \\ &= \frac{19}{27} \end{aligned}$$

Exercice 52

Un ascenseur dessert dix étages.

Quatre personnes prennent cet ascenceur au rez-de-chaussée.

On admet que chacune de ces quatre personnes descend au hasard à l'un des dix étages et que les décisions de ces quatre personnes sont indépendantes.

1. Quelle est la probabilité que les quatre personnes s'arrêtent à des étages différents ?
2. Quelle est la probabilité pour que deux, et deux seulement, s'arrêtent au même étage ?

Solution 52
chaque personne peut descendre dans l'un ou l'autre des dix étages, donc le nombre N de possibilités est :

$$N = 10^4$$

1. Le nombre de possibilités où les quatre personnes s'arrêtent à des étages différents est le nombre d'arrangements de quatre étages parmi les dix étages :

   $$A(10,4) = 5040$$

   d'où :

   $$\begin{aligned} P &= \frac{A(10,4)}{10^4} \\ &= 0.504 \end{aligned}$$

2. Les quatre personnes s'arrêteront à trois étages différents. Il y a donc :

   $$A(10,3) = 720$$

   possibilités.
   D'autre part, le nombre de paires de personnes s'arrêtant au même étage est :

   $$C(4,2) = 6$$

   d'où la probabilité recherchée est :

   $$\begin{aligned} P &= \frac{C(4,2) \times A(10,3)}{10^4} \\ &= 0.432 \end{aligned}$$

Exercice 53
Deux joueurs A et B jouent à un jeu dont la règle est la suivante : il s'agit d'atteindre une cible.
À chacun de ses essais, B a une probabilité de $\frac{1}{2}$ de toucher la cible et A une probabilité de $\frac{1}{3}$.

A et B jouent à tour de rôle, la partie se termine dès que l'un des deux joueurs atteint la cible. C'est A qui joue le premier.
Soit p_n la probabilité que A gagne à son $n^{ème}$ essai, et q_n la probabilité que B gagne à son $n^{ème}$ essai.

1. Calculer p_n et q_n.

2. Calculer :

$$P_n = \sum_{k=1}^{n} p_k$$

$$Q_n = \sum_{k=1}^{n} q_k$$

$$P = \lim_{n \to \infty} P_n$$

$$Q = \lim_{n \to \infty} Q_n$$

   Que représente chacun de ces termes ?

3. A et B ont-ils les mêmes chances de gagner ?

Solution 53

1.

$$\begin{aligned} p_n &= \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \frac{1}{3} \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^{n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_n &= \left(\frac{2}{3}\right)^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \frac{1}{2} \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^{n} \end{aligned}$$

2.

$$P_n = Q_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$$

$$P = \lim_{n\to\infty} P_n = \frac{1}{2}$$

$$Q = \lim_{n\to\infty} Q_n = \frac{1}{2}$$

3. Donc A et B ont les mêmes chances de gagner.

Exercice 54
Deux joueurs A et B jouent avec deux dés.
Le joueur A gagnera en faisant un total de 7, B en faisant un total de 6.
C'est B qui commence et ensuite A et B jettent alternativement les dés jusqu'à ce que l'un des deux gagne.
Quelles sont leurs probabilités de gagner ?

Solution 54
Notons (a, b) les points amenés par le premier dé et le second dé respectivement.
La probabilité de cet événement élémentaire est

$$p = \frac{1}{36}$$

Le joueur A obtient un total de 7 dans les cas suivants:

$$(1, 6)\ ,\ (2, 5)\ ,\ (3, 4)\ ,\ (6, 1)\ ,\ (5, 2)\ ,\ (4, 3)$$

La probabilité de cet événement est :

$$p_7 = \frac{1}{6}$$

Le joueur B obtient un total de 6 dans les cas suivants:

$$(1, 5)\ ,\ (2, 4)\ ,\ (3, 3)\ ,\ (5, 1)\ ,\ (4, 2)$$

La probabilité de cet événement est :

$$p_6 = \frac{5}{36}$$

Soit $p_{7,k}$ (resp. $p_{6,k}$) la probabilité pour que le joueur A (le joueur B)gagne à son $k^{ème}$ essai. Alors :

$$p_{7,k} = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \left(\frac{31}{36}\right)^{k-1} \left(\frac{1}{6}\right)$$

et:

$$p_{6,k} = \left(\frac{5}{6}\right)^{k} \left(\frac{31}{36}\right)^{k-1} \left(\frac{5}{36}\right)$$

Si l'on désigne par P_7 (resp. P_6) la probabilité pour que le joueur A (le joueur B)gagne, alors :

$$\begin{aligned} P_7 &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} p_{7,k} \\ &= \frac{36}{61} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_6 &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} p_{6,k} \\ &= \frac{25}{61} \end{aligned}$$

Exercice 55

n urnes $U_1, ..., U_n$ contiennent respectivement $1, ..., n$ boules noires et rien d'autre.
On choisit au hasard une urne, on y tire une boule et on la remplace par une blanche.
Une nouveau tirage dans la même urne donne une boule blanche.
Quelle est la probabilité pour que les tirages aient été faits dans l'urne U_i ?

Solution 55

Considérons les événements :

$$\begin{array}{lcl} U_i & : & \text{"le tirage est effectué de l'urne } i\text{" , } 1 \leq i \leq n \\ B_2 & : & \text{"la } 2^{ème} \text{ boule tirée est blanche" , } i = 1, 2 \end{array}$$

On a :

$$P[U_k] = \frac{1}{n} \text{ , } 1 \leq k \leq n$$

$$P[B_2 \mid U_k] = \frac{1}{k} \text{ , } 1 \leq k \leq n$$

D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} P[B_2] &= \sum_{k=1}^{n} P[U_k] P[B_2 \mid U_k] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} P[U_i \mid B_2] &= \frac{P[U_i] P[B_2 \mid U_i]}{P[B_2]} \\ &= \frac{1}{i \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} \end{aligned}$$

Exercice 56
Le quart d'une population a été vacciné contre une maladie.
Au cours d'une épidémie, on constate qu'il y a parmi les malades, un vacciné pour quatre non vaccinés. On sait de plus qu'il y a un malade sur douze parmi les vaccinés.

1. Quelle est la probabilité de tomber malade pour un individu non vacciné ?
2. Le vaccin est-il efficace ?

Solution 56
Considérons les événements :

$$\begin{aligned} M &: \text{"la personne est malade"} \\ V &: \text{"la personne est vaccinée"} \end{aligned}$$

On a :

$$P[V] = \frac{1}{4} \quad ; \quad P[V \mid M] = \frac{1}{5} \quad ; \quad P[M \mid V] = \frac{1}{12}$$

1. D'après la théorème de *Bayes* on a :

$$P\left[M \mid \bar{V}\right] = \frac{P\left[M\right] P\left[\bar{V} \mid M\right]}{P\left[\bar{V}\right]}$$

   or :

$$\begin{aligned} P\left[M\right] &= P\left[V\right] P\left[M \mid V\right] + P\left[\bar{V}\right] P\left[M \mid \bar{V}\right] \\ &= P\left[V\right] P\left[M \mid V\right] + P\left[M\right] P\left[\bar{V} \mid M\right] \\ &= \frac{P\left[V\right] P\left[M \mid V\right]}{1 - P\left[\bar{V} \mid M\right]} \\ &= \frac{P\left[V\right] P\left[M \mid V\right]}{P\left[V \mid M\right]} \\ &= \frac{5}{48} \end{aligned}$$

   d'où :

$$\begin{aligned} P\left[M \mid \bar{V}\right] &= \frac{P\left[M\right] P\left[\bar{V} \mid M\right]}{P\left[\bar{V}\right]} \\ &= \frac{1}{9} \end{aligned}$$

2. Le vaccin diminue les risques d'attrapper la maladie mais pas considérablement. Il est peu efficace.

Exercice 57
Une boite A contient une boule blanche et trois boules rouges.
Une boite B contient cinq boules blanches et trois boules rouges.
On tire au hasard et indépendamment une boule de l'urne A et une boule de l'urne B et les change de boite.
Calculer la probabilité qu'après l'échange :

1. A ne contient que des boules rouges.
2. Les deux compositions restent inchangées.

Solution 57

1. Dans ce cas, il faut tirer la boule blanche de l'urne A et une boule rouge de l'urne B, d'où la probabilité recherchée est :
$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{4}\frac{3}{8} \\ &= \frac{3}{32} \end{aligned}$$
2. Dans ce cas, les deux boules tirées des urnes A et B doivent être de la même couleur, d'où la probabilité recherchée est :
$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{4}.\frac{5}{8} + \frac{3}{4}.\frac{3}{8} \\ &= \frac{29}{32} \end{aligned}$$

Exercice 58

On considère une suite de tirages avec remise dans une urne U choisie au hasard parmi $n+1$ urnes $U_0, ..., U_n$.
Soit p_i, $0 \leq i \leq n$, la probabilité de choisir l'urne U_i.
On suppose que l'urne U_i, $0 \leq i \leq n$, contient n boules dont i sont noires.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule noire au $k^{ème}$ tirage sachant que l'on a obtenu $k-1$ boules noires dans les $k-1$ tirages précédents ?
2. Quelle est la probabilité que les tirages aient lieu dans l'urne U_i sachant que les k premiers tirages ont donné des boules noires ?

Solution 58

Désignons par N_k l'événement :
$$N_k \; : \; \text{"le } k^{ème} \text{ tirage a donné une boule noire"}$$
Pour tout k, $k \geq 1$, et tout i, $0 \leq i \leq n$, on a :
$$P[N_k \mid U_i] = \frac{i}{n}$$
et pour tout événement A :
$$P[A] = \sum_{i=0}^{n} P[U_i] P[A \mid U_i] = \sum_{i=0}^{n} p_i P[A \mid U_i]$$
d'après la formule des probabilités totales.

1. D'après le théorème de Bayes, on a :

$$P[N_k \mid N_1...N_{k-1}] = \frac{P[N_1...N_{k-1}N_k]}{P[N_1...N_{k-1}]}$$

Or :

$$\begin{aligned} P[N_1...N_{k-1}] &= \sum_{i=0}^{n} P[U_i] P[N_1...N_{k-1} \mid U_i] \\ &= \sum_{i=0}^{n} p_i \left(\frac{i}{n}\right)^{k-1} \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} P[N_1...N_k] &= \sum_{i=0}^{n} P[U_i] P[N_1...N_k \mid U_i] \\ &= \sum_{i=0}^{n} p_i \left(\frac{i}{n}\right)^{k} \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} P[N_k \mid N_1...N_{k-1}] &= \frac{P[N_1...N_{k-1}N_k]}{P[N_1...N_{k-1}]} \\ &= \frac{\sum_{i=0}^{n} p_i \left(\frac{i}{n}\right)^{k}}{\sum_{i=0}^{n} p_i \left(\frac{i}{n}\right)^{k-1}} \\ &= \frac{1}{n} \frac{\sum_{i=0}^{n} p_i i^k}{\sum_{i=0}^{n} p_i i^{k-1}} \end{aligned}$$

2. On a :

$$\begin{aligned} P[U_i \mid N_1...N_k] &= \frac{P[U_i] P[N_1...N_k \mid U_i]}{P[N_1...N_k]} \\ &= \frac{p_i i^k}{\sum_{r=0}^{n} p_i i^r} \end{aligned}$$

Exercice 59

On considère une urne contenant $2m$ boules : deux boules de la couleur C_1, deux boules de la couleur C_2, ..., deux boules de la couleur C_m; les m couleurs sont deux à deux différentes.
A chaque tirage, on extrait de l'urne deux boules sans remise.

1. Combien y-a-t-il de manières différentes de vider l'urne ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules de la couleur C_1 au premier tirage, deux boules de la couleur C_2 au deuxième tirage, ..., deux boules de la couleur C_m au $m^{ème}$ tirage ?
3. En déduire la probabilité d'obtenir, à chacun des m tirages, deux boules de la même couleur.
4. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules de de la couleur C_1 au premier tirage, deux boules de la couleur C_2 au deuxième tirage, ..., deux boules de la couleur C_{m-2} au $(m-2)^{ème}$ tirage, deux boules de couleurs différentes au $(m-1)^{ème}$ tirage ?
5. En déduire la probabilité d'obtenir deux boules de la même couleur au premier tirage, deux boules de la même couleur au deuxième tirage, ..., deux boules de la même couleur au $(m-2)^{ème}$ tirage, deux boules de couleurs différentes au $(m-1)^{ème}$ tirage.
6. En déduire la probabilité d'obtenir chaque fois deux boules de la même couleur lors de $(m-2)$ tirages seulement.

Solution 59

1. A chaque tirage, on extrait de l'urne deux boules sans remis, donc le nombre de manières différentes de vider l'urne est :

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{m-1} C\left(2\left(m-k\right),2\right) &= \frac{(2m)!}{2^m} \\ &= m!\prod_{k=0}^{m-1}\left[2\left(m-k\right)-1\right]\end{aligned}$$

2. Il en résulte que la probabilité p_1 d'obtenir deux boules de la couleur C_1 au premier tirage, deux boules de la couleur C_2 au deuxième tirage, ..., deux boules de la couleur C_m au $m^{ème}$ tirage est :

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{\frac{(2m)!}{2^m}} \\ &= \frac{2^m}{(2m)!} \\ &= \frac{1}{m! \prod\limits_{k=0}^{m-1} [2(m-k)-1]} \end{aligned}$$

3. Par conséquent, pour obtenir, à chacun des m tirages, deux boules de la même couleur, il suffit de permuter les m couleurs, d'où, la probabilité p_2 de cet événement est :

$$\begin{aligned} p_2 &= (m!)\, p_1 \\ &= \frac{2^m m!}{(2m)!} \\ &= \frac{1}{\prod\limits_{k=0}^{m-1} [2(m-k)-1]} \end{aligned}$$

4. Le nombre de manières d'obtenir deux boules de de la couleur C_1 au premier tirage, deux boules de la couleur C_2 au deuxième tirage, ..., deux boules de la couleur C_{m-2} au $(m-2)^{ème}$ tirage, deux boules de couleurs différentes au $(m-1)^{ème}$ tirage est :

$$\left[\prod_{k=1}^{m-2} C(2,2)\right] C(2,1)\, C(2,1)\, C(1,1)\, C(1,1) = 4$$

d'où, la probabilité p_3 de cet événement est :

$$\begin{aligned} p_3 &= 4p_1 \\ &= \frac{2^{m+2}}{(2m)!} \\ &= \frac{4}{m! \prod\limits_{k=0}^{m-1} [2(m-k)-1]} \end{aligned}$$

5. Par conséquent, le nombre de manières d'obtenir, à chacun des $(m-2)$ premiers tirages, deux boules de la même couleur, et deux boules de couleurs différentes au $(m-1)^{ème}$ tirage est le nombre d'arrangenets de $(m-2)$ couleurs parmi les m couleurs, d'où, la probabilité p_4 de cet événement est :

$$\begin{aligned} p_4 &= A(m, m-2)\, p_3 \\ &= \frac{2}{\prod\limits_{k=0}^{m-1} [2(m-k)-1]} \end{aligned}$$

6. Il suffit, maintenant de choisir les deux tirages où on obtient deux boules de couleurs différentes parmi les m tirages. Ce nombre de choix est le nombres de combinasons de deux tirages parmi les m tirages, à savoir :

$$\begin{aligned} C(m, 2) &= \frac{m!}{2!\,(m-2)!} \\ &= \frac{m(m-1)}{2} \end{aligned}$$

D'où, la probabilité p_5 d'obtenir chaque fois deux boules de la même couleur lors de $(m-2)$ tirages seulement est :

$$\begin{aligned} p_5 &= C(m, 2)\, p_4 \\ &= \frac{m(m-1)}{\prod\limits_{k=0}^{m-1} [2(m-k)-1]} \end{aligned}$$

Exercice 60

Jouer au LOTO consiste à cocher une combinaison de six cases sur une ou plusieurs grilles de quarante neuf cases, numérotées de 1 à 49, en espérant qu'elle coincidera avec la combinaison de six numéros, dite gagnante, qui sera désignée par le hasard. Nous n'étudions pas, ici, ce qui concerne le numéro complémentaire.

1. Quelle est la probabilité :
   (a) d'avoir six bons numéros :
      (i) en cochant une seule grille ?
      (ii) en cochant deux grilles ?
   (b) Quelle est la probabilité d'avoir exactement k bons numéros, $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, en cochant une seule grille ?

2. On peut généralement jouer des "grilles multiples" : il s'agit de cocher plus de six cases sur une grille de manière à avoir plus de chances de rencontrer les numéros de la combimaison gagante.
   Les tarifs proposés par la société du LOTO sont les suivants :

grille simple (six numéros par grille sur deux grilles)	:	2DH
grille multiple de sept numéros	:	7DH
grille multiple de huit numéros	:	28DH
grille multiple de neuf numéros	:	84DH
grille multiple de dix numéros	:	210DH

   (a) Expliquer les tarifs des grilles multiples.
   (b) Quelle est la probabilité d'avoir exactement k bons numéros, $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, en jouant une grille multiple de n numéros, $n \in \{7, 8, 9, 10\}$.

3. La société du LOTO NATIONAL accorde à un joueur ayant choisi une grille de n numéros, $n \in \{7, 8, 9, 10\}$, et obtenu k bons numéros, $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, un multiple entier $\lambda(n, k)$ du gain correspondant à l'obtention de k bons numéros avec une grille simple.
   (a) Expliquer cette décision.
   (b) Calculer $\lambda(n, k)$, $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $n \in \{7, 8, 9, 10\}$.

Solution 60
Le nombre de grilles à six numéros est donc :

$$C(49, 6) = 13\,983\,816$$

1. (a) (i) La probabilité p_6 d'avoir six bons numéros en cochant une seule grille est :

$$p_6 = \frac{1}{C(49, 6)} = 7.15 \times 10^{-8}$$

   (ii) En cochant deux grilles, les deux étant différentes, la probabilité d'avoir six bons numéros est :

$$p_6' = 2p_6 = 1.43 \times 10^{-7}$$

   (b) La probabilité p_k d'avoir k bons numéros en cochant une seule grille est :

$$p_6 = \frac{C(6, k)\, C(43, 6 - k)}{C(49, 6)}$$

(a) Une grille multiple à n numéros, $n \geq 6$, contient $C(n,6)$ grilles simples, d'où :

- pour $n = 7$:
$$C(7,6) = 7$$
- pour $n = 8$:
$$C(8,6) = 28$$
- pour $n = 9$:
$$C(9,6) = 84$$
- pour $n = 10$:
$$C(7,6) = 210$$

ce qui explique les tarifs des grilles multiples.

(b) La probabilité $p_{n,k}$ d'avoir k bons numéros en cochant une grille multiple à n numéros est :
$$p_{n,k} = \frac{C(6,k)\,C(43,n-k)}{C(49,n)}$$

(a) Supposons que le joueur a eu exactement k bons numéros en cochant une grille multiple à n numéros.
Cette grille correspond à :
$$N = C(n,6)$$
grilles simples.
Parmi ces grilles simples :
$$M = C(k,l)\,C(n-k,6-l)$$
grilles contient exactement l bons numéros, $1 \leq l \leq k \leq 6$.

(b) Notons $G(n,k)$ le gain correspondant à exactement k bons numéros en cochant une grille multiple à n numéros.et $G(k)$ le gain correspondant à exactement k bons numéros en cochant une grille simple.
D'après ce qui précède on a :
$$\begin{aligned} G(n,k) &= \sum_{l=1}^{k} \lambda(n,k,l)\,G(k) \\ &= \sum_{l=1}^{k} C(k,l)\,C(n-k,6-l)\,G(k) \end{aligned}$$

Les Variables Aléatoires

Exercice 1
Soit une variable discrète qui prend des valeurs entières comprises entre 1 et 9 avec les probabilités :

$$p_k = P[X = k] = ak(10 - k)$$

1. Calculer la constante a.
2. Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.
   On rappelle que si :

$$S_k = \sum_{i=1}^{n} i^k$$

   alors :

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{n(n+1)}{2} \\ S_2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ S_3 &= S_1^2 \\ S_4 &= \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n+1)}{30} \end{aligned}$$

Solution 1
1. Puisque :

$$\sum_{k=1}^{9} p_k = 1$$

   on en déduit :

$$a = \frac{1}{165}$$

2. On a :

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{k=1}^{9} kp_k = 5 \\ E[X^2] &= \sum_{k=1}^{9} k^2 p_k = \frac{149}{3} \\ V[X] &= E[X^2] - E[X]^2 = \frac{74}{3} \end{aligned}$$

Exercice 2
Au cours d'une expérience, des rats doivent choisir entre quatre portes d'apparence identique dont l'une est dite "bonne", et les autres dites "mauvaises".
Chaque fois qu'il choisit la mauvaise porte, le rat reçoit une décharge électrique désagréable et est ramené à son point de départ, et cela jusqu'à ce qu'il choisisse la bonne porte.
Le nombre d'essais effectués par le rat est une variable aléatoire X.
On envisage trois hypothèses :

(1) le rat n'a pas de mémoire : il choisit de façon équiprobable entre les quatre portes,
(2) le rat a une mémoire immédiate : à chaque nouvel essai, il évite la mauvaise porte choisie à l'essai précédent, et il choisit de façon équiprobable entre les trois portes,
(3) le rat a une bonne mémoire : à chaque essai, il évite toutes les mauvaises portes choisies précédemment et il choisit de façon équiprobable entre celles qu'il n'a pas encore essayées.
Déterminer, sous chacune de ces hypothèses, la loi de probabilité de X et son espérance mathématique.

Solution 2
(1) Sous l'hyporhèse (H_1), le rat n'a pas de mémoire, donc la variable aléatoire X prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$ avec les probabilités :

$$P[X=k]=\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}\frac{1}{4}\ ,\ k\in\mathbb{N}^*$$

L'espérance mathématique de X est :

$$\begin{aligned}E[X] &= \sum_{k\in\mathbb{N}^*} kP[X=k] \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}^*} k\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}\frac{1}{4} \\ &= 4\end{aligned}$$

(2) Sous l'hyporhèse (H_2), le rat a une mémoire courte, donc la variable aléatoire X prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$ avec les probabilités :

$$\begin{aligned}P[X=1] &= \frac{1}{4} \\ P[X=k] &= \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-2}\ ,\ k\geq 2\end{aligned}$$

L'espérance mathématique de X est :

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{k \in \mathbb{N}^*} kP[X = k] \\ &= \frac{1}{4} + \sum_{k=2}^{\infty} k \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2} \frac{1}{4} \\ &= \frac{13}{4} \end{aligned}$$

(3) Sous l'hyporhèse (H_3), le rat a une bonne mémoire, donc la variable aléatoire X prend ses valeurs dans l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$ avec les probabilités :

$$P[X = i] = \frac{1}{4}\ ,\ i \in \{1, 2, 3, 4\}$$

L'espérance mathématique de X est :

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{i=1}^{4} kP[X = k] \\ &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Exercice 3
On jette deux dés parfaitement équilibrés.
Soient X et Y les variables aléatoires uniformes associées à chacun des deux dés.

1. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire :

$$Z = X + Y$$

   Calculer l'espérance mathématique et la variance de Z.
2. Déterminer la loi de probabilité de X sachant que $[Z = 5]$.

Solution 3
Pour tout $k \in \{1, .., 6\}$, on a :

$$\begin{aligned} P[X = k] &= P[Y = k] \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
E[X] &= E[Y] = \sum_{k=1}^{6} kP[X=k] = \frac{7}{2} \\
E[X^2] &= E[Y^2] = \sum_{k=1}^{6} k^2 P[X=k] = \frac{91}{6} \\
V[X] &= V[Y] = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{35}{12}
\end{aligned}$$

1. Remarquons que la variable aléatoire :

$$Z = X + Y$$

prend ses valeurs dans l'ensemble $\{2, ..., 12\}$.
Pour tout $k \in \{2, ..., 12\}$, désignons par $I(k)$ l'ensemble :

$$I(k) = \{(x, y) \in \{1, .., 6\} \times \{1, .., 6\} \mid x + y = k\}$$

Alors, pour tout $k \in \{2, ..., 12\}$, on a :

$$\begin{aligned}
P[Z=k] &= \sum_{(x,y)\in I(k)} P[X=x, Y=y] \\
&= \frac{card\ I(k)}{36}
\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
E[Z] &= E[X] + E[Y] \\
&= 7
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
V[Z] &= V[X] + V[Y] \\
&= \frac{35}{6}
\end{aligned}$$

2. Sous l'hypothèse $[Z = 5]$, X ne peut prendre que les valeurs $\{1, 2, 3, 4\}$, d'où :

$$\begin{aligned}
P[X=k \mid Z=5] &= \frac{P[X=k, Y=5-k]}{P[Z=5]} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
E[X \mid Z=5] &= \sum_{k=1}^{4} kP[X=k \mid Z=5] \\
&= \frac{5}{2}
\end{aligned}$$

Exercice 4
Une urne contient une boule bleue, une boule noire et une boule rouge.
On effectue de cette urne des tirages successifs d'une boule avec remise.
On désigne par X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de boules tirées quand, pour la première fois, deux couleurs exactement ont été obtenues.
Déterminet la loi de probabilité de X.

Solution 4
Notons qu'à chaque tirage, les tois boules sont équiprobables.
Pour tout k, $k \geq 2$, on a :

$$\begin{aligned} P[X = k] &= A(3,2)\left(\frac{1}{3}\right)^{k} \\ &= 2\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \end{aligned}$$

où $A(3,2)$ correspond au choix de deux couleurs parmi les trois couleurs.

Exercice 5
On lance un dé parfaitement équilibré dont les faces sont numérotés de 1 à 6 et on note X la variable aléatoire égale au nombre aléatoire obtenu.
Si X est divisible par 3, on extrait simultanément trois boules d'une urne A contenant trois boules blanches et cinq boules noires. Sinon, on extrait simultanément X boules d'une urne B contenant deux boules blanches et trois boules noires.
Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

1. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire Y, son espérance mathématique et sa variance.
2. Calculer la probabilité que le tirage ait été effectué de l'urne A sachant que l'on a obtenu deux boules blanches.

Solution 5
1. Pour tout r, $1 \leq r \leq 6$, on a :

$$P[X = r] = \frac{1}{6}$$

et pour tout k, $0 \leq k \leq 3$, on a :

$$\begin{aligned} P[Y=k] &= \sum_{r=1}^{6} P[Y=k, X=r] \\ &= \sum_{r=1}^{6} P[X=r] P[Y=k \mid X=r] \\ &= \frac{1}{6} \sum_{r=1}^{6} P[Y=k \mid X=r] \end{aligned}$$

Déterminons alors la loi conditionnelle de Y relativement à X :

(a) Si $r=3$ ou $r=6$, le tirage simultané de trois boules est alors effectué de l'urne A qui contient trois boules blanches et cinq boules noires, d'où pour tout $k \in \{0,1,2,3\}$:

$$P[Y=k \mid X=r] = \frac{C(3,k)\, C(5,3-k)}{C(8,3)}$$

(b) Si $r \neq 3$ et $r \neq 6$ alors le tirage simultané de r boules est effectué, dans ce cas, de l'urne B qui contient deux boules blanches et trois boules noires, d'où por tout k, $0 \leq k \leq \inf(2,r)$, on a :

$$P[Y=k \mid X=r] = \frac{C(2,k)\, C(3,r-k)}{C(5,r)}$$

(c) Déterminons maintenant le tableau de la loi conditionnelle de de Y relativement à X :

$Y \diagdown X$	1	2	3	4	5	6
0	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{5}{28}$	0	0	$\frac{5}{28}$
1	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{15}{28}$
2	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{3}{5}$	1	$\frac{15}{56}$
3	0	0	$\frac{1}{56}$	0	0	$\frac{1}{56}$

D'où la loi de Y :

k	0	1	2	3
$P[Y=k]$	$\frac{22}{105}$	$\frac{173}{420}$	$\frac{313}{840}$	$\frac{1}{168}$

(d) L'espérance mathématique de Y est donnée par :

$$\begin{aligned} E[Y] &= \sum_{k=0}^{3} kP[Y=k] \\ &= \frac{47}{40} \\ &= 1.175 \end{aligned}$$

(e) On a :

$$\begin{aligned} E\left[Y^2\right] &= \sum_{k=0}^{3} k^2 P[Y=k] \\ &= \frac{1643}{840} \\ &\simeq 1.956 \end{aligned}$$

d'où la variancede Y :

$$\begin{aligned} V[Y] &= E\left[Y^2\right] - E[Y]^2 \\ &= \frac{19331}{33600} \\ &\simeq 0.57533 \end{aligned}$$

2. Désignons par A l'événement :

$$A \ : \ \text{"le tirage est effectué de l'urne } A\text{"}$$

On a :

$$\begin{aligned} P[A] &= P[(X=3) \oplus (X=6)] \\ &= P[(X=3)] + P[(X=6)] \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
P[A \mid Y=2] &= \frac{P[A \cap (Y=2)]}{P[Y=2]} \\
&= \frac{P[(X=3) \cap (Y=2)]}{P[Y=2]} + \frac{P[(X=6) \cap (Y=2)]}{P[Y=2]} \\
&= \frac{P[X=3]\, P[Y=2 \mid X=3]}{P[Y=2]} + \frac{P[X=6]\, P[Y=2 \mid X=6]}{P[Y=2]} \\
&= 2\frac{P[X=3]\, P[Y=2 \mid X=3]}{P[Y=2]} \\
&= \frac{75}{313} \\
&\simeq 0.24
\end{aligned}$$

Exercice 6

Un forain propose un jeu : "A tout les coups on gagne".
Chaque joueur fait tourner deux petites roues divisées chacune en dix secteurs égaux.
On suppose que les deux roues sont indépendantes et que les probabilités d'arrêt de chaque roue sur chaque secteur sont égales.
La première a trois secteurs rouges et sept blancs et la deuxième a un secteur noir et neuf blancs.
Lorsque les deux roues s'arrêtent l'une sur le rouge et l'autre sur le noir, le joueur gagne un gros lot qui revient au forain à $20DH$; lorsque l'une des deux roues seulement s'arrêtent sur le blanc, le joueur gagne un lot qui revient au forain à $2DH$; lorsque les deux roues sont sur le blanc, le joueurgagne lot qui revient au forain à $1DH$.
Le forain fait payer un montant de mDH, $m \in \mathbb{N}^*$, pour chaque partie.
Désignons par X la variable aléatoire qui, à chaque partie, associe le bénéfice du forain sur cette partie.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Quelle valeur le forain doit-il donner à m pour avoir une espérance de bénéfice égale à au moins un dirham ?

Solution 6

Désignons par b, n et r les événements :

$$\begin{aligned}
b &: \text{"la roue s'arrête sur le secteur blanc"} \\
n &: \text{"la roue s'arrête sur le secteur noir"} \\
r &: \text{"la roue s'arrête sur le secteur rouge"}
\end{aligned}$$

et par (x, y), où $x, y \in \{b, n, r\}$, le résultat amené par la première roue et la deuxième roue respectivement, alors :

$$\begin{aligned} p(b,b) &= \frac{63}{100} \\ p(b,n) &= \frac{7}{100} \\ p(r,b) &= \frac{27}{100} \\ p(r,n) &= \frac{3}{100} \end{aligned}$$

1. Les valeurs prises par X la variable aléatoire X sont :

$$m-20\ ,\ m-2\ ,\ m-1$$

d'où la loi de probabilité de X :

$$\begin{aligned} P[X=m-20] &= p(r,n) \\ &= \frac{3}{100} \\ P[X=m-2] &= p(b,n)+p(r,b) \\ &= \frac{34}{100} \\ P[X=m-1] &= p(b,b) \\ &= \frac{63}{100} \end{aligned}$$

En résumé :

k	$m-20$	$m-2$	$m-1$
$P[X=k]$	$\frac{3}{100}$	$\frac{34}{100}$	$\frac{63}{100}$

2. Calculons l'espérance mathématique de cette variable aléatoire :

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{k\in\{m-20,m-2,m-1\}} kP[X=k] \\ &= m-\frac{191}{100} \end{aligned}$$

d'où :

$$E[X]\geq 1 \Longrightarrow m\geq 3$$

Le forain doit demander une mise d'au moins *trois* dirhams pour avoir une espérance de bénéfice égale à au moins un dirham.

Exercice 7
Une urne renferme dix boules numérotées de 1 à 10, indiscernables au toucher.
On tire, au hasard, deux boules avec remise de cette urne.
On considère les variables aléatoires :

- X : le plus grand des deux nombres portés par les deux boules.
- Y : le plus petit des deux nombres portés par les deux boules.
- $Z = X - Y$.

1. Si F est la fonction de répartition de X, montrer que pour tout $k \in \{1, ..., 10\}$ on ait :
$$F(k) = \frac{(k-1)^2}{100}$$
2. En déduire la loi de probabilité de X, son espérance mathématique et sa variance.
3. Déterminer la loi de probabilité de Y, son espérance mathématique et sa variance.
Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Déterminer la loi de probabilité de Z, son espérance mathématique et sa variance.
5. Sous l'hypothèse $[Z = 4]$, déterminer les lois de probabilités conditionnelles de X et Y ainsi que leurs espérances mathématiques.

Solution 7
Désignons par B_i, $i \in \{1, 2\}$, la variable aléatoire égale au numéro porté par la $i^{\text{ème}}$ boule tirée.
B_1 et B_2 sont indépendants et on a :
$$P[B_i = k] = \frac{1}{10}\ ,\ k \in \{1, ..., 10\}$$

1. Pour tout $k \in \{1, ..., 10\}$, on a :
$$\begin{aligned} F(k) &= P[X < k] \\ &= P[B_1 < k, B_2 < k] \\ &= P[B_1 < k]\, P[B_2 < k] \\ &= \frac{(k-1)^2}{100} \end{aligned}$$
2. On en déduit que pour tout $k \in \{1, ..., 10\}$:
$$\begin{aligned} P[X = k] &= F(k+1) - F(k) \\ &= \frac{2k-1}{100} \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{k=1}^{10} kP[X=k] \\ &= 7.15 \end{aligned}$$

et :

$$E\left[X^2\right] = \sum_{k=1}^{10} k^2 P[X=k] = 56.65$$

d'où :

$$\begin{aligned} V[X] &= E\left[X^2\right] - E[X]^2 \\ &= 5.5275 \end{aligned}$$

3. Pour tout $k \in \{1, ..., 10\}$:

$$\begin{aligned} P[Y \geq k] &= P[B_1 \geq k, B_2 \geq k] \\ &= P[B_1 \geq k] P[B_2 \geq k] \\ &= \frac{(11-k)^2}{100} \end{aligned}$$

d'où la fonction de répartition F_Y de Y :

$$\begin{aligned} F_Y(k) &= P[Y < k] \\ &= 1 - \frac{(11-k)^2}{100} \end{aligned}$$

pout tout $k \in \{1, ..., 10\}$.
Il en résulte que pour tout $k \in \{1, ..., 10\}$:

$$\begin{aligned} P[Y = k] &= F_Y(k+1) - F_Y(k) \\ &= \frac{21 - 2k}{100} \\ &= P[X = 11 - k] \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} E[Y] &= E[11 - X] \\ &= 11 - E[X] \\ &= 3.85 \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} V[Y] &= V[11 - X] \\ &= V[X] \\ &= 5.5275 \end{aligned}$$

Les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes puisque :

$$P[X=1,Y=2]=0$$

alors que :

$$P[X=1]\neq 0 \quad et \quad P[Y=2]\neq 0$$

4. Z prend ses valeurs dans l'ensemble $\{0,...,9\}$.
Remarquons que :

$$P[Z=k]=\sum_{r=1}^{10-k}P[X=r+k,Y=r]$$

et que :

* si $x<y$:

$$P[X=x,Y=y]=0$$

* si $x=y$:

$$\begin{aligned} P[X=x,Y=x] &= P[B_1=x,B_2=x] \\ &= \frac{1}{100} \end{aligned}$$

* si $x>y$:

$$\begin{aligned} P[X=x,Y=y] &= P[B_1=x,B_2=y]\oplus P[B_1=y,B_2=x] \\ &= \frac{2}{100} \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} P[Z=0] &= \sum_{r=1}^{10}P[X=r,Y=r] \\ &= \frac{1}{10} \end{aligned}$$

et pour tout $k\in\{1,...,9\}$

$$\begin{aligned} P[Z=k] &= \sum_{r=1}^{10-k}P[X=r+k,Y=r] \\ &= \frac{2(10-k)}{100} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
E[Z] &= \sum_{k=0}^{9} kP[Z=k] \\
&= 3.3 \\
E\left[Z^2\right] &= \sum_{k=0}^{9} k^2 P[Z=k] \\
&= 16.5 \\
V[Z] &= E\left[Z^2\right] - E[Z]^2 \\
&= 5.61
\end{aligned}$$

(a) Sous l'hypothèse $[Z=4]$, X prend ses valeurs dans l'ensemble $\{5,...,10\}$ avec les probabilités :

$$\begin{aligned}
P[X=k \mid Z=4] &= \frac{P[X=k, Y=k-4]}{P[Z=4]} \\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
E[X \mid Z=4] &= \sum_{k=5}^{10} kP[X=k \mid Z=4] \\
&= 7.5
\end{aligned}$$

Remarquons que, sous l'hypothèse $[Z=4]$, X est uniformément distribué sur l'ensemble $\{5,...,10\}$.

(b) Sous l'hypothèse $[Z=4]$, Y prend ses valeurs dans l'ensemble $\{1,...,6\}$ avec les probabilités :

$$\begin{aligned}
P[Y=k \mid Z=4] &= \frac{P[X=4+k, Y=k]}{P[Z=4]} \\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
E[Y \mid Z=4] &= \sum_{k=1}^{6} kP[X=k \mid Z=4] \\
&= 3.5
\end{aligned}$$

Remarquons de même, que sous l'hypothèse $[Z=4]$, Y est uniformément distribué sur l'ensemble $\{1,...,6\}$.

Exercice 8
Soit une urne contenant une boule rouge, deux boules noires et trois boules jaunes.
on extrait successivement et sans remise quatre boules de cette urne.
Désignons par X la variable aléatoire prenant pour valeurs le rang du tirage après lequel, pour la première fois, il ne reste que deux couleurs dans l'urne.
Déterminer la loi de probabilité de X et son espérance mathématique.

Solution 8
Désignons par n, r et j les événements élémentaites la boule est noire, la boule est rouge et la boule est jaune respectivement, et par *abcd..* la suite ordonnée des résultats des tirages successifs.
La variable aléatoire prend les valeurs $\{1, 2, 3, 4\}$.

1. L'événement $[X = 1]$ correspond à l'obtention d'une boule rouge au premier tirage, d'où :

$$P[X = 1] = \frac{1}{6}$$

2. L'événement $[X = 2]$ correspond à l'un des événements :

$$nr \text{ ou } jr \text{ ou } nn$$

d'où :

$$\begin{aligned} P[X = 2] &= \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} + \frac{3}{6} \times \frac{1}{5} + \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} \\ &= \frac{3}{10} \end{aligned}$$

3. L'événement $[X = 3]$ correspond à l'un des événements :

$$njr \text{ ou } jnr \text{ ou } njn \text{ ou } jnn \text{ ou } jjr \text{ ou } jjj$$

d'où :

$$\begin{aligned} P[X = 3] &= \frac{2}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{2}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} \\ &\quad + \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{3}{10} \end{aligned}$$

4. L'événement $[X = 4]$ correspond à l'un des événements :

$$njjr \text{ ou } jnjr \text{ ou } jjnr \text{ ou } jjnn \text{ ou } jnjn \text{ ou } njjn \text{ ou } njjj \text{ ou } jnjj \text{ ou } jjnj$$

d'où :

$$\begin{aligned} P[X=4] &= \frac{2}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}+ \\ &\quad \frac{3}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}+ \\ &\quad \frac{2}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3} \\ &= \frac{3}{10} \end{aligned}$$

5. L'espérance mathématique de X est :

$$E[X]=\sum_{k=1}^{4}kP[X=k]=\frac{14}{5}$$

Exercice 9

Un joueur entreprend une partie de roulette en misant constamment sur les chances simples. Il a donc, à chaque partie, une probabilité p de doubler sa mise et une probabilité $1-p$ de la perdre.

Commençant par miser un dirham, il double sa mise aussi longtemps qu'il perd et s'arrête ou recommence à un dirham dès qu'il a gagne.

1. Montrer que dans ces conditions, il gagnera exactement un dirham chaque fois que le sort lui sera favorable.
2. Trouver la loi de probabilité de la variable aléatoire X égale au nombre de coups nécessaires pour gagner un dirham.
   Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.
3. Trouver la loi de probabilité de la variable aléatoire X_n égale au nombre de coups nécessaires pour gagner n dirhams.
   Calculer l'espérance mathématique et la variance de X_n.

Solution 9

1. Supposons que le joueur a gagné au $k^{\text{ème}}$ coup.
   Il a perdu pendant $(k-1)$ coups, le total de ses mises est :

$$1+2+2^2+...+2^{k-2}=2^{k-1}-1$$

   Au $k^{\text{ème}}$ coup, il a misé 2^{k-1} et a gangé :

$$2\times 2^{k-1}=2^k$$

   Son gain est donc :

$$2^k-\left(2^{k-1}-1\right)-2^{k-1}=1$$

2. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a :
$$P[X = k] = p(1-p)^{k-1}$$
et par suite :
$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{k\in\mathbb{N}^*} kP[X=k] \\ &= \frac{1}{p} \end{aligned}$$
et :
$$\begin{aligned} E[X(X-1)] &= \sum_{k\in\mathbb{N}^*} k(k-1)P[X=k] \\ &= \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p} \end{aligned}$$
d'où :
$$\begin{aligned} E\left[X^2\right] &= E[X(X-1)] + E[X] \\ &= \frac{2}{p^2} \end{aligned}$$
et :
$$\begin{aligned} V[X] &= E\left[X^2\right] - E[X]^2 \\ &= \frac{1-p}{p^2} \end{aligned}$$
3. Pour gagner n dirhams, il faut que la personne joue n parties.
X_n est donc la somme de n variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes la même loi que X; on les notes $Y_1, ..., Y_n$.
pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $k \geq n$, soit $I(k)$ l'ensemble :
$$I(k) = \{(k_1, ..., k_n) \in (\mathbb{N}^*)^n \mid k_1 + ... + k_n = k\}$$
alors :
$$\begin{aligned} P[X_n = k] &= P[Y_1 + ... + Y_n = k] \\ &= \sum_{(k_1,...,k_n)\in I(k)} P[Y_1 = k_1, ..., Y_n = k_n] \\ &= \sum_{(k_1,...,k_n)\in I(k)} p^n (1-p)^{k-n} \\ &= C(k-1, n-1)\, p^n (1-p)^{k-n} \end{aligned}$$

de plus :

$$\begin{aligned} E[X_n] &= nE[X] \\ &= \frac{n}{p} \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} V[X_n] &= nV[X] \\ &= \frac{n(1-p)}{p^2} \end{aligned}$$

Exercice 10

Peut-on considérer les expressions suivantes comme des densités de probabilité de variables aléatoires :

1. $f_1(x) = \dfrac{1}{b-a}$ si $a \leq x \leq b$ et $f_1(x) = 0$ ailleurs.
2. $f_2(x) = \dfrac{|x|}{a^2}$ si $-a \leq x \leq a$ et $f_2(x) = 0$ ailleurs.
3. $f_3(x) = \dfrac{1}{x}$ si $1 \leq x \leq e$ et $f_3(x) = 0$ ailleurs.
4. $f_4(x) = a \exp -ax$ si $x \geq 0$ et $f_4(x) = 0$ ailleurs.
5. $f_5(x) = 2x \exp -x^2$ si $x \geq 0$ et $f_5(x) = 0$ ailleurs.
6. $f_6(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$, $x \in \mathbb{R}$.
7. $f_7(x) = \dfrac{1}{2} \exp -|x|$, $x \in \mathbb{R}$.

Solution 10

Une fonction :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

est une densité de probabilité si :

(1) f est positive
(2) f est intégrable et :

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = 1$$

1. f_1 est une densité de probabilité,c'est la densité de la loi uniforme sur l'intervalle $[a, b]$.

2. f_2 est une densité de probabilité.

3. f_3 est une densité de probabilité.

4. f_4 est une densité de probabilité si et seulement si a est strictement positif. Dans ce cas, c'est la densité de probabilité de la loi exponentielle de paramètre a.

5. f_5 est une densité de probabilité.

6. f_6 est une densité de probabilité, c'est la densité de probabilité de la loi de Cauchy.

7. f_7 est une densité de probabilité.

Exercice 11
Pour quelles valeurs du paramètre α, les expréssions suivantes peuvent être considérées comme des densités de probabilité de variables aléatoires :

1. $f_1(x) = \alpha$ si $0 \leq x \leq \alpha$ et $f_1(x) = 0$ ailleurs.
2. $f_2(x) = \dfrac{x}{\alpha^2}$ si $0 \leq x \leq \alpha$ et $f_2(x) = 0$ ailleurs.
3. $f_3(x) = \dfrac{1}{8}(4 - x)$ si $0 \leq x \leq \alpha$ et $f_3(x) = 0$ ailleurs.
4. $f_4(x) = \dfrac{2\alpha - x}{\alpha^2}$ si $\alpha \leq x \leq 2\alpha$ et $f_4(x) = 0$ ailleurs.
5. $f_5(x) = x \exp \alpha x^2$ si $x \geq 0$ et $f_5(x) = 0$ ailleurs.

Solution 11
Il faut déterminer, lorsqu'ils existent, les valeurs du paramètre α telles que :

(1) f_i soit positive
(2) f_i soit intégrable et :

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = 1$$

1. f_1 est une densité de probabilité pour $\alpha = 1$.
2. f_2 n'est pasune densité de probabilité.
3. f_3 est une densité de probabilité pour $\alpha = 4$.
4. f_4 n'est pasune densité de probabilité.
5. f_5 est une densité de probabilité pour $\alpha = -\dfrac{1}{2}$.

Exercice 12

Soit X une variable aléatoire absolument continue de densité de probabilité :

$$f(x) = \begin{cases} Kx(4-x) & si \quad x \in [0,4] \\ \\ 0 & si \quad x \notin [0,4] \end{cases}$$

1. Calculer la constante K.
2. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. Déterminer la probabilité des événements :

$$[1 \leq X \leq 2]$$
$$[X > 3 \mid X > 2]$$

4. Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.
5. Déterminer la densité de probabilité de la variable aléatoire :

$$Z = \sqrt{X}$$

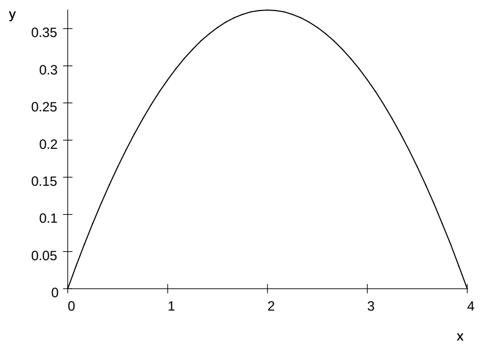
Solution 12

1. On a :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx &= \int_0^4 Kx(4-x)\,dx \\ &= K\frac{32}{3} \end{aligned}$$

d'où :

$$K = \frac{3}{32}$$



$$f(x) = \frac{3}{32} x (4 - x)$$

2. La fonction de répartition F de X est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$

Ainsi :

(a) pour $x \leq 0$:

$$F(x) = 0$$

(b) pour $x \in [0, 4]$:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt \\ &= \int_{0}^{x} \frac{3}{32} t (4 - t)\, dt \\ &= \frac{x^2}{32} (6 - x) \end{aligned}$$

(c) pour $x \geq 4$:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt \\ &= \int_{0}^{4} f(t)\, dt \\ &= 1 \end{aligned}$$

En résumé :

$$F(x)=\begin{cases}0 & si \quad x\leq 0\\ \dfrac{x^2}{32}(6-x) & si \quad x\in[0,4]\\ 1 & si \quad x\geq 4\end{cases}$$

3. On a :

$$\begin{aligned}P[X>3\mid X>2] &= \frac{P[(X>3)\cap(X>2)]}{P[X>2]}\\ &= \frac{P[X>3]}{P[X>2]}\\ &= \frac{1-F(3)}{1-F(2)}\\ &= \frac{5}{16}\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}P[1\leq X\leq 2] &= F(2)-F(1)\\ &= \frac{11}{32}\end{aligned}$$

4. Calculons l'espérance mathématique et la variance de X :

$$\begin{aligned}E[X] &= \int_{\mathbb{R}} xf(x)\,dx\\ &= \int_0^4 \frac{3}{32}x^2(4-x)\,dx\\ &= 2\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}E\left[X^2\right] &= \int_{\mathbb{R}} x^2f(x)\,dx\\ &= \int_0^4 \frac{3}{32}x^3(4-x)\,dx\\ &= \frac{24}{5}\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}V[X] &= E\left[X^2\right]-E[X]^2\\ &= \frac{4}{5}\end{aligned}$$

5. Le changement :

$$Z = \sqrt{X}$$

équivaut à :

$$X = Z^2$$

On a alors :

$$\frac{dx}{dz} = 2z$$

d'où la densité f_Z de Z est :

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= f_X\left(z^2\right)\left|\frac{dx}{dz}\right| \\ &= \frac{3}{16}z^3\left(4 - z^2\right) \;,\; 0 \le z \le 2 \end{aligned}$$

Exercice 13

Soient $a \in]1, +\infty[$ et X une variable aléatoire absolument continue dont la densité de probabilité f est définie par :

$$f(x) = \frac{K}{x^2}(x + \ln x) \;,\; 1 \le x \le a$$

1. Calculer la constante K.
2. Calculer l'espérance mathématique et la variance de X

Solution 13

1. Puisque f est une densité de probabilité, on a :

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = 1$$

donc :

$$\int_1^a \frac{K}{x^2}(x + \ln x)\, dx = 1$$

d'où :

$$K = \frac{a}{(a-1)(\ln a + 1)}$$

2. On a :

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{\mathbb{R}} xf(x)\,dx \\ &= \int_1^a \frac{K}{x}(x+\ln x)\,dx \\ &= \frac{1}{2}a\frac{2a+\ln^2 a-2}{(a-1)(\ln a+1)} \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} E\left[X^2\right] &= \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)\,dx \\ &= \int_1^a K(x+\ln x)\,dx \\ &= \frac{1}{2}a\frac{a^2+2a\ln a-2a+1}{(a-1)(\ln a+1)} \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} V[X] &= E\left[X^2\right]-E[X]^2 \\ &= \frac{1}{2}a\frac{a^2+2a\ln a-2a+1}{(a-1)(\ln a+1)}-\frac{1}{4}a^2\frac{\left(2a+\ln^2 a-2\right)^2}{(a-1)^2(\ln a+1)^2} \end{aligned}$$

Exercice 14

Soit X une variable aléatoire absolument continue de densité de probabilité f définie par :

$$f(x)=\begin{cases} 1-|x| & si \quad |x|\leq 1 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

1. Tracer le graphe de f, et vérifier que f est bien une densité de probabilité.
2. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.
4. On définit la valeur médiane m comme l'unique solution de l'équation :

$$F(x)=\frac{1}{2}$$

et le mode x_M la valeur pour laquelle la densité f est maximale.
Déterminer m et x_M.

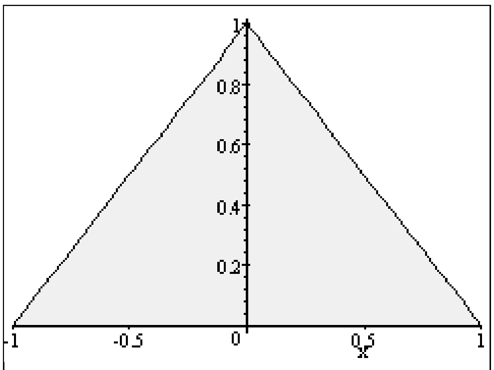
5. Calculer la probabilité des événements :

$$\left[-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{4}\right]$$
$$\left[|X| > \frac{1}{2}\right]$$

Solution 14

1. Soit T le triangle de sommet $(-1, 0)$, $(1, 1)$ et $(1, 0)$.
   Alors :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx &= A[T] \\ &= 1 \end{aligned}$$



Le triangle T

2. La fonction de répartition de X est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$

d'où :

(a) pour $x \leq -1$:

$$F(x) = 0$$

puisque :

$$f(x) = 0$$

pour tout $x \in \left]-\infty, -1\right[$.

(b) pour $-1 \leq x \leq 0$:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \\ &= \int_{-1}^{x} (1+t)\,dt \\ &= \frac{1}{2}(1+x)^2 \end{aligned}$$

(c) pour $0 \leq x \leq 1$:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \\ &= \int_{-1}^{x} (1-|t|)\,dt \\ &= 1-\frac{1}{2}(1-x)^2 \end{aligned}$$

(d) pour $x \geq 1$:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \\ &= \int_{-1}^{1} (1-|t|)\,dt \\ &= 1 \end{aligned}$$

En résumé :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq -1 \\ \frac{1}{2}(1+x)^2 & si \quad -1 \leq x \leq 0 \\ 1-\frac{1}{2}(1-x)^2 & si \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$$

3. L'espérance mathématique de X est :

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{\mathbb{R}} xf(x)\,dx \\ &= \int_{-1}^{1} x(1-|x|)\,dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

puisque la fonction :

$$x \longrightarrow xf(x)$$

est une fonction impaire sur l'intervalle $[-1,1]$.

D'où la variance de X :

$$\begin{aligned} V[X] &= E\left[X^2\right] \\ &= \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)\,dx \\ &= \int_{-1}^{1} x^2(1-|x|)\,dx \\ &= 2\int_0^1 x^2(1-x)\,dx \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

(a) La relation :

$$F(m) = \frac{1}{2}$$

équivaut à :

$$P[X \leq m] = P[X > m] = \frac{1}{2}$$

d'où la médiane :

$$m = 0$$

(b) La valeur maximum de f est 1, elle correspond au mode :

$$x_M = 0$$

4. On a :

$$\begin{aligned} P\left[-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{4}\right] &= F\left(\frac{1}{4}\right) - F\left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{19}{32} \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} P\left[|X| \geq \frac{1}{2}\right] &= 1 - F\left(\frac{1}{2}\right) + F\left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Exercice 15
Soit X une variable aléatoire absolument continue de densité de probabilité f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq 0 \\ \frac{x}{b^2} \exp -\frac{x}{b} & si \quad x > 0 \end{cases}$$

1. Si $x = 2$ est l'unique valeur du mode, déterminer le paramètre b.
2. Calculer le moment d'ordre k de X, $k \geq 1$.
   En déduire l'espérance mathématique et la variance de X.
3. Calculer le coefficient de variation de X défini par :

$$V_1[X] = \frac{\sigma[X]}{E[X]}$$

Solution 15
1. Si 2 est l'unique valeur du mode alors :

$$f'(2) = 0$$

d'où :

$$b = 2$$

2. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^{+\infty} x^n \exp -x dx = n!$$

alors, le moment d'ordre k de X est :

$$\begin{aligned} E\left[X^k\right] &= \int_{\mathbb{R}} x^k f(x)\,dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{4} x^{k+1} \exp -\frac{x}{2} dx \\ &= 2^k \int_0^{+\infty} u^{k+1} \exp -u du \\ &= 2^k (k+1)! \end{aligned}$$

On en déduit :

$$E[X] = 4$$

et :

$$E\left[X^2\right] = 24$$

d'où :

$$\begin{aligned} V[X] &= E\left[X^2\right] - E[X]^2 \\ &= 8 \end{aligned}$$

3. Le coefficient de variation est :

$$V_1[X] = \frac{\sigma[X]}{E[X]} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Exercice 16

Soit X une variable aléatoire absolument continue définie par :

$$P[X \geq x] = \frac{A}{x^\alpha} \;,\; x \geq a$$

où X représente le revenu par habitant, a le revenu minimum et α un coefficient dépendant du type du pays où l'on se place.

1. Soit $F(x)$ la probabilité pour que le revenu d'une personne, tirée au hasard dans un pays donné, soit inférieur à x.
   Quelle condition doit satisfaire A pour que F soit une fonction de répartition ?
2. Trouver la densité de probabilité f.
3. Quelle condition doit-elle satisfaire pour que le moment d'ordre k existe ?
4. Déterminer la loi de probabilité de la consommation définie par :

   $$C = \lambda X^\beta$$

   où λ et β sont des constantes données.
   Calculer l'espérance mathématique et la variance de C.

Solution 16

1. Pour tout $x \in [a, +\infty[$ on a :

$$\begin{aligned} F(x) &= P[X < x] \\ &= 1 - P[X \geq x] \\ &= 1 - \frac{A}{x^{\alpha}} \end{aligned}$$

Puisque F est continue à gauche on a :

$$\lim_{x \to a^-} F(x) = F(a)$$

d'où :

$$A = a^{\alpha}$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R} - \{a\}$, F est dérivable en x, donc :

$$f(x) = F'(x)$$

d'où :

$$f(x) = \frac{\alpha a^{\alpha}}{x^{\alpha+1}} \ , \ x > a$$

3. Le moment d'ordre k de X est :

$$\begin{aligned} E\left[X^k\right] &= \int_{\mathbb{R}} x^k f(x)\, dx \\ &= \int_a^{+\infty} \alpha a^{\alpha} x^{k-\alpha-1} dx \end{aligned}$$

Il existe si et seulement si $x^{k-\alpha-1}$ est intégrable sur $]a, +\infty[$, $a \neq 0$, donc si et seulement si :

$$k - \alpha - 1 < -1$$

d'où :

$$k < \alpha$$

Si cette condition est satisfaite, on a :

$$E\left[X^k\right] = \frac{\alpha a^k}{\alpha - k}$$

(a) Le changement :

$$C = \lambda X^{\beta}$$

équivaut à :

$$X = \left(\frac{C}{\lambda}\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

d'où :

$$\frac{dx}{dc} = \frac{1}{\beta\lambda^{\frac{1}{\beta}}} c^{\frac{1}{\beta}-1}$$

La densité f_C de C est donc donnée par :

$$\begin{array}{rcl} f_C(c) & = & f_X\left[\left(\frac{c}{\lambda}\right)^{\frac{1}{\beta}}\right]\left|\frac{dx}{dc}\right| \\ & = & \left\{\begin{array}{lll} 0 & si & c < \lambda a^{\beta} \\ & & \\ \frac{\alpha}{\beta}\lambda^{\frac{\alpha}{\beta}}\frac{a^{\alpha}}{c^{\frac{\alpha}{\beta}+1}} & si & c > \lambda a^{\beta} \end{array}\right. \end{array}$$

(b) Le moment d'ordre k de C existe si :

$$\alpha > k\beta$$

Dans ces conditions, ce moment est égal :

$$\begin{array}{rcl} E\left[C^k\right] & = & E\left[\left(\lambda X^{\beta}\right)^k\right] \\ & = & \lambda^k E\left[X^{k\beta}\right] \\ & = & \lambda^k \alpha \frac{a^{k\beta}}{\alpha - k\beta} \end{array}$$

Ainsi, si $\beta < \alpha$ alors :

$$E[C] = \lambda\alpha\frac{a^{\beta}}{\alpha-\beta}$$

et si $2\beta < \alpha$ alors :

$$E\left[C^2\right] = \lambda^2\alpha\frac{a^{2\beta}}{\alpha-2\beta}$$

donc, si $2\beta < \alpha$ on obtient :

$$\begin{array}{rcl} V[C] & = & E\left[C^2\right] - E[C]^2 \\ & = & \frac{\lambda^2\alpha\beta^2 a^{2\beta}}{(\alpha-\beta)^2(\alpha-2\beta)} \end{array}$$

Exercice 17
Soit X une variable aléatoire absolument continue suivant la loi uniforme sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
Déterminer la densité de probabilité de la variable :

$$Y = \tan X$$

Y admet-elle un moment d'ordre 1 ?
Que peut-on conclure ?

Solution 17
La densité de probabilité de la loi uniforme sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ est donnée, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi}\chi_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}(x)$$

(1) Le changement :

$$Y = \tan X$$

équivaut à :

$$X = \arctan Y$$

d'où :

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{1+y^2}$$

Ainsi, pour tout $y \in \mathbb{R}$, la densité f_Y de Y est :

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= f_X(\arctan y)\left|\frac{dx}{dy}\right| \\ &= \frac{1}{\pi(1+y^2)}\chi_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}(\arctan y) \\ &= \frac{1}{\pi(1+y^2)} \end{aligned}$$

(2) Le moment d'ordre 1 de Y est défini par :

$$\begin{aligned} E[Y] &= \int_{\mathbb{R}} y f_Y(y)\, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{y}{\pi(1+y^2)} dy \end{aligned}$$

Ce moment n'existe pas car la fonction :

$$y \to \frac{y}{\pi(1+y^2)}$$

n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$.
Mais la variable aléatoire X possède un moment d'ordre 1 :

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)\,dx \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\pi} x dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

Exercice 18
Soit X une variable aléatoire absolument continue dont la densité de probabilité f est la fonction caractéristique sur l'intervalle $[0,1]$.
Déterminer les lois de probabilité des variables aléatoires :

1. $Y = \sin \frac{\pi}{2} X$
2. $Z = (b-a)X + a$
3. $U = -2\ln X$

Solution 18
La densité de probabilité de la loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$ est donnée, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \chi_{[0,1]}(x) \\ &= \begin{cases} 1 & si \quad x \in [0,1] \\ 0 & si \quad x \notin [0,1] \end{cases} \end{aligned}$$

1. Le changement :

$$Y = \sin \frac{\pi}{2} X$$

équivaut à :

$$X = \frac{2}{\pi} \arcsin Y$$

d'où :

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

Ainsi, pour tout $y \in \mathbb{R}$, la densité f_Y de Y est :

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= f_X\left(\frac{2}{\pi}\arcsin y\right)\left|\frac{dx}{dy}\right| \\ &= \frac{2}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\chi_{[0,1]}\left(\frac{2}{\pi}\arcsin y\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\chi_{[0,1[}(y) \end{aligned}$$

2. Le changement :

$$Z = (b-a)X + a$$

équivaut à :

$$X = \frac{Z-a}{b-a}$$

d'où :

$$\frac{dx}{dz} = \frac{1}{b-a}$$

Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{R}$, la densité f_Z de Z est :

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= f_X\left(\frac{z-a}{b-a}\right)\left|\frac{dx}{dz}\right| \\ &= \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}\chi_{[a,b]}(z) & si \quad a<b \\[2ex] \dfrac{1}{a-b}\chi_{[b,a]}(z) & si \quad a>b \end{cases} \end{aligned}$$

3. Le changement :

$$U = -2\ln X$$

équivaut à :

$$X = \exp -\frac{U}{2}$$

d'où :

$$\frac{dx}{du} = -\frac{1}{2}\exp -\frac{u}{2}$$

Ainsi, pour tout $u \in \mathbb{R}$, la densité f_U de U est :

$$
\begin{aligned}
f_U(u) &= f_X\left(\exp -\frac{u}{2}\right)\left|\frac{dx}{dy}\right| \\
&= \frac{1}{2}\exp -\frac{u}{2}\chi_{[0,1]}\left(\exp -\frac{u}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\exp -\frac{u}{2}\chi_{]0,+\infty[}(u)
\end{aligned}
$$

Exercice 19
Soit γ un nombre réel et f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$
f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ \\ \gamma 2^{-[x]} & si \quad x \geq 0 \end{cases}
$$

où $[x]$ désigne la partie entière de x.

1. Calculer γ pour que f soit la densité de probabilité d'une variable aléatoireabsolument continue X.
2. Calculer l'espérance mathématique de X.

Solution 19

1. Pour que f soit une densité de probabilité, il faut qu'elle soit positive, intégrable et que :

$$
\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1
$$

Or :

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx &= \int_{\nvdash}^{+\infty} \gamma 2^{-[x]} dx \\
&= \gamma \sum_{n=0}^{+\infty} \int_n^{n+1} 2^{-[x]} dx \\
&= \gamma \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} \\
&= 2\gamma
\end{aligned}
$$

d'où :

$$\gamma = \frac{1}{2}$$

2. Calculons l'espérance mathématique de X :

$$\begin{aligned}
E[X] &= \int_{\mathbb{R}} xf(x)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{\nvdash}^{+\infty} x2^{-[x]}dx \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_{n}^{n+1} x2^{-[x]}dx \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}2^{-n}\int_{n}^{n+1} xdx \\
&= \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Exercice 20

On désigne par X la variable aléatoire représentant le nombre d'exemplaires vendus mensuellement par un éditeur et on suppose que X suit la loi uniforme sur l'intervalle $[a,b]$:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < a \\ \dfrac{1}{b-a} & si \quad a \leq x \leq b \\ 0 & si \quad x > b \end{cases}$$

L'éditeur produit un nombre k d'exemplaires par mois.
Sur tout exemplaire vendu, il réalise un bénifice de α dirhams et sur tout exemplaire invendu, il subit une perte de β dirhams.

1. Déterminer le profit moyen de l'éditeur.
2. Déterminer la production k qui maximise le profit.
3. Application numérique :

$$\begin{cases} a = 1000 & b = 2000 \\ \alpha = 2DH & \beta = 1DH \end{cases}$$

Solution 20

X suit la loi uniforme sur l'intervalle $[a, b]$, donc l'espérance mathématique de X est donnée par :

$$E[X] = \frac{a+b}{2}$$

1. Soit Y_k la variable aléatoire représentant le profit de l'éditeur lorsqu'il produit k exemplaires., alors :

$$Y_k = \alpha X - \beta(k - X)$$

d'où, le profit moyen de l'éditeur lorsqu'il produit k exemplaires est :

$$\begin{aligned} E[Y_k] &= E[\alpha X + \beta(k - X)] \\ &= \alpha E[X] - \beta(k - E[X]) \\ &= \frac{a+b}{2}(\alpha + \beta) - \beta k \end{aligned}$$

2. On a :

$$\begin{aligned} Y_k &= \alpha X - \beta(k - X) \\ &= (\alpha + \beta) X - \beta k \end{aligned}$$

Cette fonction est strictement décroissante par rapprt à k, donc atteint son maximum lorsque k est minimum, c'est à dire :

$$k = a$$

3. **Application mumérique** :

   (a) L'espérance mathématique de X est :

   $$\begin{aligned} E[X] &= \frac{a+b}{2} \\ &= 1500 \end{aligned}$$

   (b) Le profit moyen de l'éditeur lorsqu'il produit k exemplaires.est :

   $$\begin{aligned} E[Y_k] &= \frac{a+b}{2}(\alpha + \beta) - \beta k \\ &= 4500 - k \end{aligned}$$

   (c) Le nombre maximum d'exemplaires à produire pour maximiser le profit est :

   $$\begin{aligned} k &= a \\ &= 1000 \end{aligned}$$

Exercice 21
Soit X une variable aléatoire absolument continue dont la densité de probabilité f est une fonction continue telle que pour tout $x \in R$ on ait :

$$f(x) = f(b - x)$$

où b est un réel donné.
On suppose que l'espérance mathématique de X existe.
Calculer cet espérance en fonction de b.

Solution 21
On a :

$$E[X] = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)\, dx$$

Considérons le changement de variable :

$$x = b - t$$

alors :

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{\mathbb{R}} (b - t) f_X(b - t)\, dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} (b - t) f_X(t)\, dt \\ &= E[b - X] \\ &= b - E[X] \end{aligned}$$

d'où :

$$E[X] = \frac{b}{2}$$

Exercice 22
On étudie la durée T des communications téléphoniques urbaines et l'on trouve que cette durée suit une loi exponenetielle donnée par la densité :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \alpha \exp -kt & t > 0 \end{cases}$$

1. Quelle relation doit vérifier α et k pour que f soit effectivement une densité de probabilité ?

2. Quelle est la fonction de répartition de T ?
3. Calculer la fonction caractéristique de T.
4. En déduire la durée moyenne d'une communication téléphonique ainsi que son écart-type.
5. Quelle valeur faut-il donner à k pour que la probabilité qu'une communication dépasse trois minutes soit égale 0.01
6. ?

Solution 22

1. On a :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(t)\,dt &= \int_0^{+\infty} \alpha \exp -kt dt \\ &= \frac{\alpha}{k} \end{aligned}$$

Or :

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\,dt = 1$$

donc :

$$\alpha = k$$

2. La fonction de répartition F de T est définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par :

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx$$

(a) si $t \leq 0$, alors :

$$F(t) = 0$$

puisque :

$$f(t) = 0$$

pour tout $t \in]-\infty, 0[$

(b) si $t \geq 0$, alors :

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx \\ &= \int_0^t \alpha \exp(-\alpha x)\,dx \\ &= 1 - \exp(-\alpha t) \end{aligned}$$

En résumé :

$$F(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t \leq 0 \\ \\ 1 - \exp(-\alpha t) & si \quad t \geq 0 \end{cases}$$

3. La fonction caractéristique Φ de T est définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par :

$$\begin{array}{rcl} \Phi(t) & = & E[\exp itT] \\ & = & \displaystyle\int_{\mathbb{R}} (\exp ixt) f(x) \, dx \\ & = & \displaystyle\int_0^{+\infty} \alpha \exp(it - \alpha) x dx \\ & = & \dfrac{\alpha}{\alpha - it} \end{array}$$

4. Puisque :

$$\Phi^{(k)}(0) = i^k E\left[T^k\right]$$

on en déduit :

$$E[T] = -i\Phi'(0) = \frac{1}{\alpha}$$

et :

$$E\left[T^2\right] = -\Phi"(0) = \frac{2}{\alpha^2}$$

et par suite :

$$\begin{array}{rcl} V[T] & = & E\left[T^2\right] - E[T]^2 \\ & = & \dfrac{1}{\alpha^2} \end{array}$$

d'où :

$$\sigma[T] = \frac{1}{\alpha}$$

5. La relation

$$P[T \geq 3] = 10^{-2}$$

équivaut à :

$$e^{-3\alpha} = 10^{-2}$$

d'où :

$$\begin{array}{rcl} \alpha & = & \dfrac{2}{3} \ln 10 \\ & = & 1.535 \end{array}$$

Exercice 23

On suppose qu'un événement peut se produire à partir de l'instant 0.

On note X la variable aléatoire telle que $[X < t]$ indique que l'événement s'est produit avant l'instant t et $G(t)$ la probabilité pour que l'événement ne se produise pas dans l'intervalle $[0, t[$.

On suppose que :

(1) G est dérivable et $G(0) = 1$.

(2) $P[X < t + dt \mid X \geq t] = \lambda dt$

1. Trouver une relation entre $G(t + dt)$ et $G(t)$.
2. En déduire $G(t)$.
3. Déterminer la fonction de répartition de X ainsi que sa densité de probabilité.

Solution 23

1. Pour tout $t > 0$ on a :

$$\begin{aligned}\lambda dt &= P[X < t + dt \mid X \geq t] \\ &= \frac{P[(X < t + dt) \cap (X \geq t)]}{P[X \geq t]}\end{aligned}$$

or :

$$\begin{aligned}P[t \leq X < t + dt] &= P[X < t + dt] - P[X < t] \\ &= (1 - G(t + dt)) - (1 - G(t)) \\ &= G(t) - G(t + dt)\end{aligned}$$

donc :

$$\lambda dt == \frac{G(t) - G(t + dt)}{G(t)}$$

d'où :

$$G(t + dt) = (1 - \lambda dt)\, G(t)$$

2. Il s'en suit que pour tout $t > 0$ on a :

$$\frac{G(t + dt) - G(t)}{dt} = -\lambda G(t)$$

donc :

$$G'(t) = -\lambda G(t)$$

D'où, pour tout t, $t \geq 0$, on a :

$$G(t) = \exp -\lambda t$$

puisque :

$$G(0) = 1$$

3. Il en résulte que la fonction de répartition de X est donnée par :

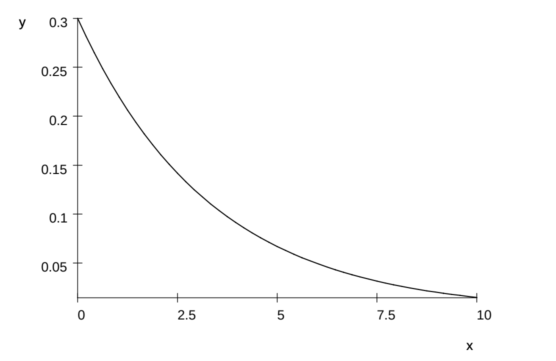
$$\begin{aligned} F(t) &= P[X < t] \\ &= 1 - G(t) \end{aligned}$$

d'où :

$$F(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t \leq 0 \\ 1 - \exp -\lambda t & si \quad t \geq 0 \end{cases}$$

et par conséquent, la densité de probabilité de X est définie pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(t) &= F'(t) \\ &= \begin{cases} 0 & si \quad t \leq 0 \\ \lambda \exp -\lambda t & si \quad t > 0 \end{cases} \end{aligned}$$



La densité f pour $\lambda = 0.3$

Exercice 24
Déterminer la fonction génératrice et la fonction caractéristique :

1. d'une variable aléatoire binomiale d'ordre n et de paramètre p,
2. d'une variable aléatoire de Poisson de paramètre λ.

Solution 24

1. Soit X une variable aléatoire binomiale d'ordre n et de paramètre p, alors pour tout k, $0 \leq k \leq n$, on a :

$$P[X = k] = C(n,k) p^k (1-p)^{n-k}$$

(a) La fonction génératrice G d'une telle variable est définie pour tout $z \in \mathbb{C}$ par :

$$\begin{aligned} G(z) &= E\left[z^X\right] \\ &= \sum_{k=0}^{n} z^k P[X = k] \\ &= \sum_{k=0}^{n} C(n,k)(pz)^k (1-p)^{n-k} \\ &= [pz + (1-p)]^n \end{aligned}$$

(b) La fonction caractéristique Φ est définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par :

$$\Phi(t) = G(\exp it) = [p \exp it + (1-p)]^n$$

2. Si X est une variable aléatoire de Poisson de paramètre λ, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$P[X = n] = \frac{\lambda^n}{n!} \exp -\lambda$$

(a) La fonction génératrice G d'une telle variable est définie pour tout $z \in \mathbb{C}$ par :

$$\begin{aligned} G(z) &= E\left[z^X\right] \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} z^k P[X = k] \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(\lambda z)^n}{n!} \exp -\lambda \\ &= \exp \lambda (z-1) \end{aligned}$$

(b) La fonction caractéristique Φ est définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par :

$$\Phi(t) = G(\exp it) = \exp \lambda (\exp it - 1)$$

Exercice 25

1. Soit :

$$X : (\Omega, \mathcal{T}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}})$$

une variable aléatoire admettant une moyenne μ et un écart-type non nulle σ.
Démontrer que pour tout réel t strictement positif on a :

$$P\left[|X - \mu| > t\sigma\right] \leq \frac{1}{t^2}$$

2. D'une urne contenant, en nombre égal, des boules blanches et des boules noires, on extrait successivement six boules avec remise. On marque deux points pour une boule blanche et cinq points pour une boule noire.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées et S la somme des points obtenus.

   (a) Déterminer la loi de probabilité de X, son espérance mathématique et sa variance.
   (b) Exprimer S en fonction de X, puis déterminer la loi de probabilité de S, son espérance mathématique et sa variance.
   (c) En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, déterminer un majorant des probabilités de chacun des événements :

$$\begin{array}{c} \left[|S - E(S)| > 5\right] \\ \left[|S - E(S)| > 10\right] \end{array}$$

   (d) Calculer effectivement les probabilités de ces événements.
   Que constate-on ?

Solution 25

1. Pour tout réel t strictement positif on a :

$$\begin{array}{rcl} \sigma^2 & = & \displaystyle\int_{\Omega} (X - \mu)^2 \, dP \\ & = & \displaystyle\int_{[|X-\mu|>t\sigma]} (X - \mu)^2 \, dP \\ & \geq & (t\sigma)^2 \, P\left[|X - \mu| > t\sigma\right] \end{array}$$

d'où, pour tout réel t strictement positif :

$$P\left[|X - \mu| > t\sigma\right] \leq \frac{1}{t^2}$$

(a) X suit donc une loi binomiale d'ordre $n = 6$ et de paramètre $p = \frac{1}{2}$; donc pour tout k, $0 \leq k \leq 6$, on a :

$$P[X = k] = C(6,k)\left(\frac{1}{2}\right)^6$$

Son espérance mathématique est :

$$\begin{aligned} E[X] &= np \\ &= 3 \end{aligned}$$

et sa variance est :

$$\begin{aligned} V[X] &= np(1-p) \\ &= 1.5 \end{aligned}$$

(b) On a :

$$\begin{aligned} S &= 2X + 5(6-X) \\ &= 3(10-X) \end{aligned}$$

S prend ses valeurs dans l'ensemble :

$$\{3k \mid 4 \leq k \leq 10\}$$

Donc, pour tout k, $4 \leq k \leq 10$ on a :

$$\begin{aligned} P[S = 3k] &= P[X = 10-k] \\ &= C(6, 10-k)\left(\frac{1}{2}\right)^6 \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} E[S] &= E[3(10-X)] \\ &= 3(10 - E[X]) \\ &= 21 \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} V[S] &= V[3(10-X)] \\ &= 9V[X] \\ &= 13.5 \end{aligned}$$

(c) D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P[|S - E(S)| > 5] \leq .54$$

et :

$$P\left[\left|S-E\left(S\right)\right|>10\right]\leq .135$$

(i) On a :

$$\begin{aligned}\left[\left|S-E\left(S\right)\right|>5\right] &= \left[S-E\left(S\right)<-5\right]\oplus \\ &\qquad \left[S-E\left(S\right)>5\right] \\ &= \left[S<16\right]\oplus\left[S>26\right] \\ &= \left[S=12\right]\oplus\left[S=15\right]\oplus \\ &\qquad \left[S=27\right]\oplus\left[S=30\right]\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}P\left[\left|S-E\left(S\right)\right|>5\right] &= \frac{3}{16} \\ &= .1875\end{aligned}$$

(ii) on a :

$$\begin{aligned}\left[\left|S-E\left(S\right)\right|>10\right] &= \left[S<11\right]\oplus\left[S>31\right] \\ &= \emptyset\end{aligned}$$

d'où :

$$P\left[\left|S-E\left(S\right)\right|>10\right]=0$$

(iii) On constate que les majorants fournis par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev sont trop grands par rapport aux valeurs réelles des événements considérés.

Les Vecteurs Aléatoires

Exercice 1
Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace de probabilité, et A et B deux événements de cet espace tels que :

$$P[A] = P[A \mid B] = \frac{1}{2} P[B \mid A] = \frac{1}{4}$$

Soient X et Y les variables aléatoires indicatrices de A et B respectivement.

1. X et Y sont elles indépendantes ?
2. X et Y ont-elles une même loi de probabilité ?
3. Calculer :

$$P[X^2 + Y^2 = 1]$$
$$P[X^2 Y^2 = XY]$$

Solution 1
On a :

$$\begin{aligned} X &= \chi_A \\ Y &= \chi_B \end{aligned}$$

1. Puisque :
$$P[A] = P[A \mid B]$$
on en déduit que les événements A et B sont indépendants.
Il en résulte que les variables aléatoires $X = \chi_A$ et $Y = \chi_B$ sont aussi indépendantes.
2. Comme :
$$P[A] \neq P[B]$$
les variables aléatoires X et Y ne suivent pas la même loi de probabilité.
   (a) Puisque :
   $$\left[X^2 + Y^2 = 1\right] = [(X, Y) = (1, 0)] \oplus [(X, Y) = (0, 1)]$$
   et vu l'indépendance de X et Y, on a :
   $$\begin{aligned} P\left[X^2 + Y^2 = 1\right] &= P[(X, Y) = (1, 0)] + P[(X, Y) = (0, 1)] \\ &= P[X = 1] P[Y = 0] + P[X = 0] P[Y = 1] \\ &= P[A] P\left[\bar{B}\right] + P\left[\bar{A}\right] P[B] \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(b) puisque :

$$\begin{array}{rcl} X^2 & = & X \\ Y^2 & = & Y \end{array}$$

alors :

$$X^2Y^2 = XY$$

et par conséquent :

$$P\left[X^2Y^2 = XY\right] = 1$$

Exercice 2
On considère un couple (X, Y) de variables aléatoirs prenant les valeurs (i, j) dans $\{0, 1, 2, 3\} \times \{0, 1, 2\}$ avec les probabilités indiquées sur le tableau :

$Y \diagdown X$	0	1	2	3
0	0.1	0.2	0.1	0.1
1	0.1	0.0	0.0	0.1
2	0.1	0.0	0.2	0.0

1. Déterminer les probabilités marginales de X et Y.
2. X et Y sont elles indépendantes ?
3. Calculer les espérances mathématiques de X et Y ainsi que leurs variances.
4. Former les tableaux des probabilités conditionnelles de X relativement à Y et de Y relativement à X.
5. Déterminer la distribution de probabilité de la variable aléatoire :
$$U = XY$$
et calculer l'espérance mathématique de U.
6. Déterminer la droite de régression de Y en X et tracer son graphe.

Solution 2

1. On ajoute au tableau initial une ligne et une colonne sur lesquelles on indique les lois marginales de X et de Y qui sont définies par :

$$\begin{aligned} P_X(i) &= P[X=i] \\ &= \sum_{j=0}^{2} P[X=i, Y=j] \ , \ i \in \{0,1,2,3\} \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} P_Y(j) &= P[Y=j] \\ &= \sum_{i=0}^{3} P[X=i, Y=j] \ , \ j \in \{0,1,2\} \end{aligned}$$

d'où le tableau :

$Y \diagdown X$	0	1	2	3	P_Y
0	0.1	0.2	0.1	0.1	0.5
1	0.1	0.0	0.0	0.1	0.2
2	0.1	0.0	0.2	0.0	0.3
P_X	0.3	0.2	0.3	0.2	1

2. Les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes car :

$$P[X=1, Y=1] = 0$$

alors que :

$$P[X=1] \neq 0$$

et :

$$P[Y=1] \neq 0$$

(a) On a :

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{i=0}^{3} iP[X=i] = 1.4 \\ E[X^2] &= \sum_{i=0}^{3} i^2 P[X=i] = 3.2 \\ V[X] &= E[X^2] - E[X]^2 = 1.24 \end{aligned}$$

(b) de même :

$$\begin{aligned} E[Y] &= \sum_{j=0}^{2} jP[Y=j] = 0.8 \\ E[Y^2] &= \sum_{j=0}^{2} j^2 P[Y=j] = 1.4 \\ V[Y] &= E[Y^2] - E[Y]^2 = 0.76 \end{aligned}$$

(a) La loi conditionnelle de Y relativement à X est définie pour tout $(i,j) \in \{0,1,2,3\} \times \{0,1,2\}$ par :

$$P[Y=j \mid X=i] = \frac{P[(X,Y)=(i,j)]}{P[X=i]}$$

d'où le tableau :

$Y \diagdown X$	0	1	2	3
0	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	0

(b) La loi conditionnelle de Y relativement à X est définie pour tout $(i,j) \in \{0,1,2,3\} \times \{0,1,2\}$ par :

$$P[X=i \mid Y=j \,|] = \frac{P[(X,Y)=(i,j)]}{P[Y=j]}$$

d'où le tableau :

$Y \diagdown X$	0	1	2	3
0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	0

3. Posons :

$$U = XY$$

Désignons par $I(k)$ l'ensemble :

$$I(k) = \{(i,j) \in \{0,1,2,3\} \times \{0,1,2\} \mid ij = k\}$$

Afin de déterminer les valeurs k prises par la variable aléatoires U, et les ensembles $I(k)$ correspondants, il serait plus judicieux de former le tableau du produit de X et Y :

$Y \diagdown X$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	4	6

Alors la loi de probabilité de U est définie par :

$$P[U = k] = \sum_{(i,j) \in I(k)} P[(X,Y) = (i,j)]$$

d'où :

k	$P_U(k)$
0	0.7
3	0.1
4	0.2

L'espérance mathématique de U est donnée par :

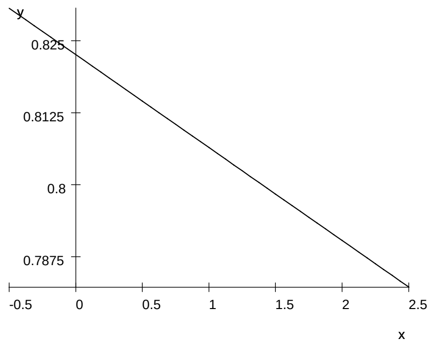
$$\begin{aligned} E[U] &= 0 \times P[U=0] + 3 \times P[U=3] + 4 \times P[U=4] \\ &= 1.1 \end{aligned}$$

4. Déterminons d'abord la covariance de X et Y :

$$\begin{aligned} Cov[X,Y] &= E[XY] - E[X]E[Y] \\ &= E[U] - E[X]E[Y] \\ &= -0.02 \end{aligned}$$

La droite de régression de Y en X est définie :

$$\begin{aligned} y &= \frac{Cov[X,Y]}{V[X]}[x - E[X]] + E[Y] \\ &= -\frac{1}{62}[x-51] \end{aligned}$$



La droite de régression de Y en X

Exercice 3
On considère un sac contenant sept billes blanches et trois billes noires duquel on effectue deux tirages sans remise.
Soit X la variable aléatoire dont la valeur est :

$\star$ 0 si le premier tirage donne une bille blanche
$\star$ 1 si le premier tirage donne une bille noire.

Soit Y la variable aléatoire dont la valeur est :

$\star$ 0 si le second tirage donne une bille blanche
$\star$ 1 si le second tirage donne une bille noire.

1. Dresser le tableau de la loi conjointe du couple (X,Y) et indiquer sur ce tableau les lois marginales de X et Y.
2. Déterminer la matrice des variances et covariances de (X,Y).
3. X et Y sont elles indépendantes ?
4. Déterminer la droite de régression de Y en X et tracer son graphe.

Solution 3

1.

Tableau des lois conjointe et marginales de X et Y

$X \diagdown Y$	0	1	P_X
0	$\frac{42}{90}$	$\frac{21}{90}$	$\frac{7}{10}$
1	$\frac{21}{90}$	$\frac{6}{90}$	$\frac{3}{10}$
P_Y	$\frac{7}{10}$	$\frac{3}{10}$	1

X et Y suivent une même loi de probabilité, c'est la loi de Bernouilli de paramètre $p = \dfrac{3}{10}$.

2. On a :

$$\begin{aligned} E[X] &= E[Y] = \sum_{i=0}^{1} iP[X=i] \\ &= \frac{3}{10} \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} E\left[X^2\right] &= E\left[Y^2\right] = \sum_{i=0}^{1} i^2 P[X=i] \\ &= \frac{3}{10} \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} V[X] &= V[Y] = E\left[X^2\right] - E[X]^2 \\ &= \frac{21}{100} \end{aligned}$$

Aussi, on a :

$$\begin{aligned} E[XY] &= \sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1} ijP[X=i, Y=j] \\ &= \frac{1}{15} \end{aligned}$$

d'où la covariance de X et Y :

$$\begin{aligned} Cov[X,Y] &= E[XY] - E[X]E[Y] \\ &= -\frac{7}{300} \end{aligned}$$

La matrice des variances et covariances de (X,Y) est définie par :

$$\begin{aligned} \Sigma_{(X,Y)} &= \begin{bmatrix} V[X] & Cov[X,Y] \\ Cov[X,Y] & V[Y] \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{21}{100} & -\frac{7}{300} \\ -\frac{7}{300} & \frac{21}{100} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3. Puisque la covariance de X et Y est non nulle, on en déduit que X et Y ne sont pas indépendantes.
4. Déterminons les coefficients a et b de la droite régression de Y en X :

$$y = ax + b$$

On a :

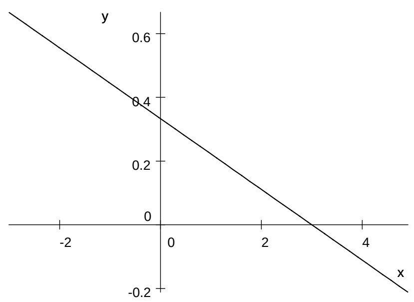
$$a = \frac{Cov[X,Y]}{V[X]} = -\frac{1}{9}$$

et

$$b = E[Y] - aE[X] = \frac{1}{3}$$

d'où la droite régression de Y en X :

$$y = -\frac{1}{9}[x-3]$$



La droite de régression de Y en X

Exercice 4
Un sac contient n jetons numérotés de 1 à n, $n \geq 3$.
On en tire successivement trois, sans remise.
On appelle X la variable aléatoire égale au plus grand des trois nombres lus sur les trois jetons tirés, et Y la variable aléatoire égale à celui des trois nombres lus dont la valeur est intermédiaire entre les deux autres.
Déterminer les lois de probabilité de X et Y ainsi que leurs espérances mathématiques.

Solution 4
Soit J_i,$1 \leq i \leq 3$, la variable aléatoire égale au numéro porté par le $i^{ème}$ jeton tiré.

(1) On a :

$$X = \sup(J_1, J_2, J_3)$$

et pour tout $k \in \{3, 4, ..., n\}$:

$$\begin{aligned}[X = k] &= [J_1 = k, J_2 < k, J_3 < k] \oplus [J_1 < k, J_2 = k, J_3 < k] \\ &\oplus [J_1 < k, J_2 < k, J_3 = k]\end{aligned}$$

et comme :

$$\begin{aligned}P[J_1 = k, J_2 < k, J_3 < k] &= P[J_1 < k, J_2 = k, J_3 < k] \\ &= P[J_1 < k, J_2 < k, J_3 = k] \\ &= \frac{(k-1)(k-2)}{n(n-1)(n-2)}\end{aligned}$$

on en déduit :

$$P[X = k] = 3\frac{(k-1)(k-2)}{n(n-1)(n-2)}$$

L'espérance mathématique de X est :

$$\begin{aligned}E[X] &= \sum_{k=3}^{n} kP[X = k] \\ &= \frac{3}{4}(n+1)\end{aligned}$$

(2) Soit S_3 le groupe des permutations de $\{1,2,3\}$.Pour tout $k \in \{2,4,...,n-1\}$ on a :

$$[Y=k] = \bigoplus_{\sigma \in S_3} \left[J_{\sigma(1)} = k, J_{\sigma(2)} < k, J_{\sigma(3)} > k\right]$$

Or pour tout $\sigma \in S_3$:

$$P\left[J_{\sigma(1)} = k, J_{\sigma(2)} < k, J_{\sigma(3)} < k\right] = \frac{(k-1)(n-k)}{n(n-1)(n-2)}$$

donc :

$$\begin{aligned} P[Y=k] &= Card\ S_3 P\left[J_{\sigma(1)} = k, J_{\sigma(2)} < k, J_{\sigma(3)} > k\right] \\ &= 6\frac{(k-1)(n-k)}{n(n-1)(n-2)} \end{aligned}$$

L'espérance mathématique de Y est :

$$\begin{aligned} E[Y] &= \sum_{k=2}^{n-1} kP[Y=k] \\ &= \frac{(n+1)}{2} \end{aligned}$$

Exercice 5
On jette n dés parfaitement équilibrés.
Soit M_n la variables aléatoire égale à la moyenne des points obtenus.

1. Calculer l'espérance mathématique et la variance de M_n.
2. Déterminer n pour que l'écart-type de M_n soit strictement inférieur à 0.01.

Solution 5
Désignons par D_i, $1 \leq i \leq n$, la variable aléatoire égale au point amené par le $i^{ème}$ dé.
$D_1, ..., D_n$ sont indépendantes et suivent une même loi de probabilité : la loi est uniforme sur l'ensemble $\{1,2,3,4,5,6\}$:

$$P[D_i = k] = \frac{1}{6}\ ,\ k \in \{1,2,3,4,5,6\}$$

Pour tout i, $1 \leq i \leq n$, On a :

$$E[D_i] = \frac{7}{2}$$

$$E[D_i^2] = \frac{91}{6}$$

$$V[D_i] = \frac{35}{12}$$

Puisque :

$$M_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} D_i$$

et vu que les variables aléatoires $D_1, ..., D_n$ sont indépendantes et suivent une même loi de probabilité alors :

$$\begin{aligned} E[M_n] &= E[D_i] \\ &= \frac{7}{2} \\ V[M_n] &= \frac{1}{n} V[D_i] \\ &= \frac{35}{12n} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \sigma[M_n] \leq 10^{-2} &\implies n \geq \frac{35}{12} 10^4 \\ &\implies n \geq 29167 \end{aligned}$$

Exercice 6
Soient $X_1, ..., X_n$ n variables aléatoires indépendantes.

Chacune de ces variables prend les valeurs -1 et 1 avec une probabilité égale à $\frac{1}{2}$ pour chacune de ces valeurs.
Soit :

$$Z_n = X_1 + ... + X_n$$

Quelle est la probabilité pour que la variable aléatoire $|Z_n|$ soit minimum ?

Solution 6

(1) Si n est pair égal à $2k$, alors la valeur minimum prise par $|Z_n|$ est 0; de plus :

$$\begin{aligned} P[|Z_n| = 0] &= P[Z_n = 0] \\ &= C(2k,k)\left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{2k-k} \\ &= C(2k,k)\left(\frac{1}{2}\right)^{2k} \end{aligned}$$

(2) Si n est impair égal à $2k+1$, alors la valeur minimum prise par $|Z_n|$ est 1; de plus :

$$[|Z_n| = 1] = [Z_n = -1] \oplus [Z_n = 1]$$

d'où :

$$\begin{aligned} P[|Z_n| = 1] &= P[Z_n = -1] + P[Z_n = 1] \\ &= C(2k+1,k+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\left(\frac{1}{2}\right)^k + C(2k+1,k)\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \\ &= 2C(2k+1,k)\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1} \\ &= C(2k+1,k)\left(\frac{1}{2}\right)^{2k} \end{aligned}$$

Exercice 7

Soit X une variable aléatoire possédant une moyenne μ et une variance σ^2, et soit $(X_1, ..., X_n)$ un n-échantillon issu X.

Déterminer l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire :

$$M = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_i$$

Solution 7

Notons d'abord que pour tout $i \in \{1, ..., n\}$ on a :

$$E[X_i] = E[X] = \mu$$

$$V[X_i] = V[X] = \sigma^2$$

d'où :

$$\begin{aligned} E[M] &= E\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_i\right] \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E[X_i] \\ &= \mu \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} V[M] &= V\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_i\right] \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} V[X_i] \end{aligned}$$

puisque les variables aléatoires $X_1, ..., X_n$ sont indépendantes. Il s'en suit que :

$$V[M] = \frac{\sigma^2}{n}$$

Exercice 8
Soient $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires indépendantes de fonctions de répartition $F_1, ..., F_n$ respectivement.
On considère les variables aléatoires :

$$\begin{cases} U = \max(X_1, ..., X_n) \\ V = \min(X_1, ..., X_n) \end{cases}$$

1. Déterminer les fonctions de répartition de U et V.
2. On suppose que $F_1, ..., F_n$ sont dérivables.
   Déterminer les densités de probabilité de U et V.
3. Etudier le cas où $X_1, ..., X_n$ est un n-échantillon issu d'une variable parente X.

Solution 8
1. Notons F_U et F_V les fonctions de répartition des variables aléatoires U et V respectivement.

(a) Pour tout $u \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned} F_U(u) &= P[U < u] \\ &= P[\max(X_1, ..., X_n) < u] \\ &= P[X_1 < u, ..., X_n < u] \\ &= \prod_{k=1}^{n} P[X_k < u] \\ &= \prod_{k=1}^{n} F_k(u) \end{aligned}$$

(b) Pour tout $v \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned} F_V(v) &= P[V < v] \\ &= P[\min(X_1, ..., X_n) < v] \\ &= 1 - P[\min(X_1, ..., X_n) \geq v] \\ &= 1 - P[X_1 \geq v, ..., X_n \geq v] \\ &= 1 - \prod_{k=1}^{n} P[X_k \geq v] \\ &= 1 - \prod_{k=1}^{n} (1 - P[X_k < v]) \\ &= 1 - \prod_{k=1}^{n} [1 - F_k(v)] \end{aligned}$$

2. désignons par $f_1, ..., f_n$ les densités de probabilité de $X_1, ..., X_n$ respectivement et par f_U et f_V les densités de probabilité de U et V respectivement.

(a) Pour tout $u \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned} f_U(u) &= \frac{d}{du} F_U(u) \\ &= \sum_{i=1}^{n} f_i(u) \left[\prod_{k \neq i} F_k(u)\right] \end{aligned}$$

(b) Pour tout $v \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned} f_V(v) &= \frac{d}{dv} F_V(v) \\ &= \sum_{i=1}^{n} f_i(v) \left[\prod_{k \neq i} (1 - F_k(v)) \right] \end{aligned}$$

3. Désignons par F et f la fonction de répartition et la densité de probabilité de X respectivement.
   On a alors :

$$F_1 = ... = F_n = F$$

et :

$$f_1 = ... = f_n = f$$

Il en résulte que :

(a) pour tout $u \in \mathbb{R}$ on a :

$$F_U(u) = [F(u)]^n$$

et :

$$f_U(u) = nf(u)[F(u)]^{n-1}$$

(b) pour tout $v \in \mathbb{R}$ on a :

$$F_V(v) = 1 - [1 - F(v)]^n$$

et :

$$f_V(v) = nf(v)[1 - F(v)]^{n-1}$$

Exercice 9
Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires admettant une densité f, et désignons par f_X et f_Y les densités marginale de X et Y respectivement.
Posons :

$$D(X, Y) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) \neq 0\right\}$$

$$D(X) = \{x \in \mathbb{R} : f_X(x) \neq 0\}$$

$$D(Y) = \{y \in \mathbb{R} : f_Y(y) \neq 0\}$$

1. Montrer que :
$$D(X,Y) \subset D(X) \times D(Y)$$
2. Montrer que si les variables aléatoires X et Y sont indépendantes alors :
$$D(X,Y) = D(X) \times D(Y)$$

Solution 9

Désignons par f_X et f_Y les densités marginale de X et Y respectivement.

1. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a :
$$f(x,y) = f_X(x) f_Y(y \mid x) = f_Y(y) f_X(x \mid y)$$
Il en résulte que si :
$$f(x,y) \neq 0$$
alors :
$$f_X(x) \neq 0 \text{ et } f_Y(y) \neq 0$$
et par conséquent :
$$D(X,Y) \subset D(X) \times D(Y)$$
2. Si les variables aléatoires X et Y sont indépendantes alors pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a :
$$f(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$$
et par suite :
$$f(x,y) \neq 0 \Longleftrightarrow f_X(x) \neq 0 \text{ et } f_Y(y) \neq 0$$
d'où :
$$D(X,Y) = D(X) \times D(Y)$$

Exercice 10

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires absolument continues admettant une densité f telle que :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = f(y,x)$$
Montrer que les variables aléatoires X et Y suivent une même loi de probabilité.

Solution 10
Désignons par f_X et f_Y les densités marginale de X et Y respectivement.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y,x)\,dy \\ &= f_Y(x) \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Exercice 11
On considère les aléas $X_1, ..., X_n$ définis sur un espace probabilisé (Ω, T, P) à valeurs dans un espace probabilisable $(\mathcal{E}, \mathfrak{B})$.
La loi de $(X_1, ..., X_n)$ est dite symétrique si l'on a pour tout $A_1 \in \mathfrak{B}, ..., A_n \in \mathfrak{B}$ et toute permutation σ de $\{1, ..., n\}$:

$$P[X_1 \in A_1, ..., X_n \in A_n] = P\left[X_1 \in A_{\sigma(1)}, ..., X_n \in A_{\sigma(n)}\right]$$

1. Montrer que si la loi de $(X_1, ..., X_n)$ est symétrique, alors pour tout $k \in \{1, ..., n\}$, les k-marges de $(X_1, ..., X_n)$ suivent la même loi.
2. Montrer que si $(X_1, ..., X_n)$ est un n-échantillon d'aléa parent X alors la loi de $(X_1, ..., X_n)$ est symétrique.
3. On effectue n tirages successifs, avec remise, dans une urne et on désigne par X_i, $1 \leq i \leq n$, le résultat du $i^{ème}$ tirage.
   Montrer que la loi de $(X_1, ..., X_n)$ est symétrique.

Solution 11
Notons que pour toute permutation σ de $\{1, ..., n\}$:pour tout $A_1 \in \mathfrak{B}, ..., A_n \in \mathfrak{B}$ on a :

$$P[X_1 \in A_1, ..., X_n \in A_n] = P\left[X_{\sigma(1)} \in A_{\sigma(1)}, ..., X_{\sigma(n)} \in A_{\sigma(n)}\right]$$

1. Soit $k \in \{1, ..., n\}$, et considérons la k-marge $(i_1, ..., i_k)$, et posons :

   $$\{i_{k+1}, ..., i_n\} = \{1, ..., n\} - \{i_1, ..., i_k\}$$

   Soit σ la permutation de $\{1, ..., n\}$ telle que :

   $$\sigma(i_k) = k$$

   Soit $A_1 \in \mathfrak{B}, ..., A_k \in \mathfrak{B}$ et posons :

   $$A_j = \mathcal{E} \quad , \quad k+1 \leq j \leq n$$

On a :

$$\begin{aligned}
P[X_{i_1} \in A_1, ..., X_{i_k} \in A_k] &= P\left[X_{i_1} \in A_1, ..., X_{i_k} \in A_k, X_{i_{k+1}} \in \mathcal{E}, ..., X_{i_n} \in \mathcal{E}\right] \\
&= P\left[X_{i_1} \in A_1, ..., X_{i_k} \in A_k, X_{i_{k+1}} \in A_{k+1}, ..., X_{i_n} \in A_n\right] \\
&= P\left[X_1 \in A_{\sigma(1)}, ..., X_k \in A_{\sigma(k)}, X_{\sigma(i_{k+1})} \in A_{\sigma(k+1)}, X_{\sigma(i_n)} \in A_{\sigma(n)}\right] \\
&= P\left[X_1 \in A_1, ..., X_k \in A_k, X_{\sigma(i_{k+1})} \in A_{k+1}, X_{\sigma(i_n)} \in A_n\right] \\
&= P\left[X_1 \in A_1, ..., X_k \in A_k, X_{\sigma(i_{k+1})} \in \mathcal{E}, X_{\sigma(i_n)} \in \mathcal{E}\right] \\
&= P[X_1 \in A_1, ..., X_k \in A_k]
\end{aligned}$$

Il en résulte que toute les k-marges de $(X_1, ..., X_n)$ ont la même loi.

2. Soit $(X_1, ..., X_n)$ un n-échantillon d'aléa parent X
$(X_1, ..., X_n)$ sont donc n aléas indépendants qui suivent tous la même loi que l'aléa X
Alors pour tout $A_1 \in \mathfrak{B}, ..., A_n \in \mathfrak{B}$ et toute permutation σ de $\{1, ..., n\}$ on a :

$$\begin{aligned}
P[X_1 \in A_1, ..., X_n \in A_n] &= \prod_{i=1}^{n} P[X_i \in A_i] \\
&= \prod_{i=1}^{n} P[X \in A_i] \\
&= \prod_{i=1}^{n} P\left[X \in A_{\sigma(i)}\right] \\
&= \prod_{i=1}^{n} P\left[X_i \in A_{\sigma(i)}\right] \\
&= P\left[X_1 \in A_{\sigma(1)}, ..., X_n \in A_{\sigma(n)}\right]
\end{aligned}$$

donc la loi de $(X_1, ..., X_n)$ est symétrique.

3. On suppose que les tirages sont effectués avec remise.
Dans ce cas, $(X_1, ..., X_n)$ un n-échantillon d'aléa parent X, où X représente le résultat obtenu lorsqu'on effectue un tirage de l'urne. Il en résulte, d'après la question précédente, que la loi de $(X_1, ..., X_n)$ est symétrique.

Exercice 12

Soit F la fonction de répartition d'un couple de variables aléatoires (X, Y) :

$$F(x, y) = \begin{cases} (1 - e^{-x})(1 - e^{-y}) & si \quad x \geq 0 \; et \; y \geq 0 \\ \\ 0 & si \quad x < 0 \; ou \; y < 0 \end{cases}$$

1. Calculer la densité f de (X, Y).
2. Quelles sont les densités marginales de X et Y.

3. X et Y sont elles indépendantes ?
4. Quelle est la fonction de répartition de $Z = X + Y$?

Solution 12
On a :

$$F(x,y) = \begin{cases} (1-e^{-x})(1-e^{-y}) & si \quad x \geq 0 \ et \ y \geq 0 \\ \\ 0 & si \quad x < 0 \ ou \ y < 0 \end{cases}$$

1. En tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ on a :

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F(x,y) \\ &= \begin{cases} \exp -(x+y) & si \quad x > 0 \ et \ y > 0 \\ \\ 0 & si \quad x < 0 \ ou \ y < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

2. Puisque la densité f du couple (X,Y) est symétrique :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = f(y,x)$$

donc les variables aléatoires X et Y ont une même loi de probabilité.

(a) On a :

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, dy \\ &= \begin{cases} 0 & si \quad x \leq 0 \\ \\ \displaystyle\int_0^{+\infty} \exp -(x+y)\, dy & si \quad x > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & si \quad x \leq 0 \\ \\ \exp -x & si \quad x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

et donc :

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= f_X(y) \\ &= \begin{cases} 0 & si \quad y \leq 0 \\ \\ \exp -y & si \quad y > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

(b) Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes puisque pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y)$$

3. Déterminons d'abord la densité de :

$$Z = X + Y$$

On a :

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{\mathbb{R}} f(x, z-x)\, dx \\ &= \begin{cases} 0 & si \quad z \leq 0 \\ \displaystyle\int_0^z \exp -z dx & si \quad z > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & si \quad z \leq 0 \\ z \exp -z & si \quad z > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction de répartition F_Z de Z est :

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \int_{-\infty}^{z} f_Z(t)\, dt \\ &= \begin{cases} 0 & si \quad z \leq 0 \\ \displaystyle\int_0^z t \exp(-t)\, dt & si \quad z > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & si \quad z \leq 0 \\ 1 - (1+z) \exp -z & si \quad z > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice 13

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité de probabilité :

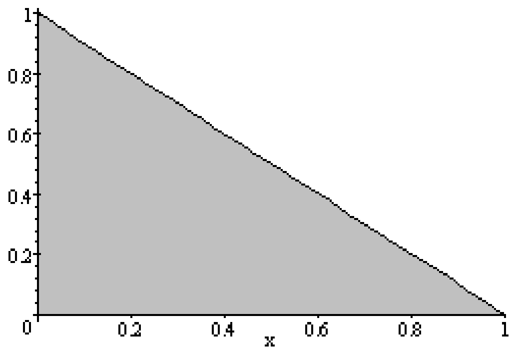
$$f(x, y) = \begin{cases} K & si \quad 0 < y < 1 - x \; et \; x > 0 \\ 0 & \quad ailleurs \end{cases}$$

1. Déterminer la constante K.
2. Calculer la matrice des variances et covariances de (X, Y).
3. X et Y sont elles indépendantes ?
4. Déterminer la droite de régression de Y en X et tracer son graphe.
5. Calculer les densités de probabilité conditionnelles de Y relativement à X, et de X relativement à Y.

Solution 13

Soit D le domaine limité par le triangle de sommets $(0,0)$, $(0,1)$ et $(1,0)$.La densité du couple (X,Y) est définie par :

$$f(x,y)=\begin{cases} K & si \quad (x,y)\in D \\ 0 & si \quad (x,y)\notin D \end{cases}$$



Le domaine D

1. On a :

$$\begin{aligned} 1 &= \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dxdy \\ &= K\iint_D dxdy \\ &= KA(D) \\ &= \frac{K}{2} \end{aligned}$$

d'où :

$$K=2$$

2. Puisque la densité f du couple (X,Y) est symétrique :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 : f(x,y)=f(y,x)$$

donc les variables X et Y suivent une même loi de probabilité.

(a) D'où :

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy \\ &= \begin{cases} \displaystyle\int_0^{1-x} 2dy & si \quad x \in \left]0,1\right[\\ 0 & si \quad x \notin \left]0,1\right[\end{cases} \\ &= \begin{cases} 2(1-x) & si \quad x \in \left]0,1\right[\\ 0 & si \quad x \notin \left]0,1\right[\end{cases} \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= f_X(y) \\ &= \begin{cases} 2(1-y) & si \quad y \in \left]0,1\right[\\ 0 & si \quad y \notin \left]0,1\right[\end{cases} \end{aligned}$$

(b) Ainsi :

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)\,dx \\ &= \int_0^1 2x(1-x)\,dx \\ &= \frac{1}{3} \\ &= E[Y] \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} E\left[X^2\right] &= \int_{\mathbb{R}} x^2 f_X(x)\,dx \\ &= \int_0^1 2x^2(1-x)\,dx \\ &= \frac{1}{6} \\ &= E\left[Y^2\right] \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} V[X] &= E\left[X^2\right] - E[X]^2 \\ &= \frac{1}{18} \\ &= V[Y] \end{aligned}$$

(c) On a :

$$\begin{aligned} E[XY] &= \iint_{\mathbb{R}^2} xyf(x,y)\,dxdy \\ &= \iint_D 2xydxdy \\ &= \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} 2xydy\right] dx \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} Cov[X,Y] &= E[XY] - E[X]E[Y] \\ &= -\frac{1}{36} \end{aligned}$$

(d) La matrice des variances et covariances de (X,Y) est définie par :

$$\begin{aligned} \Sigma_{(X,Y)} &= \begin{bmatrix} V[X] & Cov[X,Y] \\ Cov[X,Y] & V[Y] \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{18} & -\frac{1}{36} \\ -\frac{1}{36} & \frac{1}{18} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3. Puisque la covariance de X et Y est non nulle, on en déduit que X et Y ne sont pas indépendantes.

4. Déterminons les coefficients a et b de la droite régression de Y en X :

$$y = ax + b$$

On a :

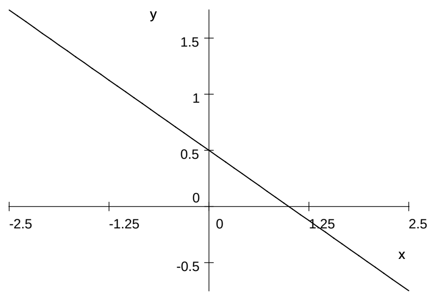
$$\begin{aligned} a &= \frac{Cov[X,Y]}{V[X]} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} b &= E[Y] - aE[X] \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

d'où la droite régression de Y en X :

$$y = -\frac{1}{2}[x-1]$$



La droite de régression deY en X

5. Calculons les densités de probabilité conditionnelles de Y relativement à X, et de X relativement à Y.

   (a) Pour tout $x \in]0,1[$, la densité conditionnelle de Y relativement à $[X = x]$ est donnée par :

$$\begin{aligned} f_Y(y \mid x) &= \frac{f(x,y)}{f_X(x)} \\ &= \begin{cases} \dfrac{1}{1-x} & si \quad y \in]0,1-x[\\ 0 & si \quad y \notin]0,1-x[\end{cases} \end{aligned}$$

   (b) Pour tout $y \in]0,1[$, la densité conditionnelle de X relativement à $[Y = y]$ est donnée par :

$$\begin{aligned} f_X(x \mid y) &= \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} \\ &= \begin{cases} \dfrac{1}{1-y} & si \quad x \in]0,1-y[\\ 0 & si \quad x \notin]0,1-y[\end{cases} \end{aligned}$$

Exercice 14
Un triplet de variables aléatoires (X, Y, Z) a une loi conjointe qui admet une densité de probabilité f telle que :

- X suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$ dont la densité est notée f_X
- Y admet une densité de probabilité conditionnelle relativement à X telle que :

$$f_Y(y \mid x) = \begin{cases} (y-x)\exp-(y-x) & si \quad 0 \leq x \leq 1 \; et \; x < y \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

- Z admet une densité de probabilité conditionnelle relativement à (X, Y) telle que :

$$f_Z(z \mid x, y) = \begin{cases} (y-x)\exp-z(y-x) & si \quad 0 \leq x \leq 1 \; , \; x < y \; , \; z > 0 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

1. Donner l'expréssion de f.
2. Quelles sont les lois marginales de Y et Z ?
3. Quelle est la loi conditionnelle de (X, Y) relativement à Z ?
4. On pose :

$$\begin{cases} U = Y - X \\ V = Z(Y - X) \end{cases}$$

   (a) Quelle est la loi du triplet (X, U, V) ?
   (b) X, U et V sont elles indépendantes ?

Solution 14
Posons :

$$D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1 \; , \; x < y \; , \; z > 0\right\}$$

et :

$$D_{(X,Y)} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \; , \; x < y\right\}$$

1. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ on a :

$$f(x, y, z) = \begin{cases} f_X(x) f_Y(y \mid x) f_Z(z \mid x, y) & si \quad (x, y, z) \in D \\ 0 & si \quad (x, y, z) \notin D \end{cases}$$

d'où :

$$f(x,y,z) = \begin{cases} (y-x)^2 \exp -(1+z)(y-x) & si \quad (x,y,z) \in D \\ 0 & si \quad (x,y,z) \notin D \end{cases}$$

(a) La densité $f_{(X,Y)}$ du couple (X,Y) est donnée par :

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f_X(x)\, f_Y(y \mid x) \\ &= \begin{cases} (y-x)\exp -(y-x) & si \quad (x,y) \in D_{(X,Y)} \\ 0 & si \quad (x,y) \notin D_{(X,Y)} \end{cases} \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, dx \\ &= \int_0^{\inf(1,y)} (y-x)\exp -(y-x)\, dx \end{aligned}$$

(i) si $y \in \,]0,1[$ alors :

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_0^y (y-x)\exp -(y-x)\, dx \\ &= 1-(1+y)\exp -y \end{aligned}$$

(ii) si $y \in \,]1,+\infty[$ alors :

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_0^1 (y-x)\exp -(y-x)\, dx \\ &= [(e-1)\,y-1]\exp -y \end{aligned}$$

En résumé :

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & si \quad y \in \,]-\infty,0[\\ 1-(1+y)\exp -y & si \quad y \in \,]0,1[\\ [(e-1)\,y-1]\exp -y & si \quad y \in \,]1,+\infty[\end{cases}$$

(b) La densité f_Z de Z est donnée par :

$$
\begin{aligned}
f_Z(z) &= \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y,z)\,dxdy \\
&= \begin{cases} 0 & si \quad z \leq 0 \\ \displaystyle\int_0^1 \left[\int_y^{+\infty} (y-x)^2 \exp -(1+z)(y-x)\,dy\right] dx & si \quad z > 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & si \quad z \leq 0 \\ \dfrac{2}{(1+z)^3} & si \quad z > 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

2. Calculons la densité conditionnelle de (X,Y) relativement à Z.
Pour tout $z \in]0,+\infty[$ on a :

$$
\begin{aligned}
f_{(X,Y)}(x,y \mid z) &= \frac{f(x,y,z)}{f_Z(z)} \\
&= \begin{cases} \dfrac{1}{2}(y-x)^2(1+z)^3 e^{-(1+z)(y-x)} & si \quad (x,y) \in D_{(X,Y)} \\ 0 & si \quad (x,y) \notin D_{(X,Y)} \end{cases}
\end{aligned}
$$

(a) Le changement :

$$
\begin{cases} X = X \\ U = Y - X \\ V = Z(Y-X) \end{cases}
$$

équivaut à :

$$
\begin{cases} X = X \\ Y = X + U \\ Z = \dfrac{V}{U} \end{cases}
$$

Le Jacobien de cette dernière transformation est :

$$
\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\dfrac{v}{u^2} & \dfrac{1}{u} \end{vmatrix} = \frac{1}{u}
$$

d'où, la densité du triplet (X, U, V) est donnée par :

$$\begin{aligned} f_{(X,U,V)}(x,u,v) &= f\left(x, x+u, \frac{v}{u}\right)|J| \\ &= \begin{cases} u\exp-(u+v) & 0 \leq x \leq 1\ ,\ u>0\ ,\ v>0 \\ 0 & ailleurs \end{cases} \end{aligned}$$

(b) Calculons les densités marginales f_U et f_V de U et V respectivement :

$$\begin{aligned} f_U(u) &= \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,u,v)\,dxdv \\ &= \begin{cases} 0 & si \quad u \leq 0 \\ \displaystyle\int_0^1 \left[\int_0^{+\infty} u\exp-(u+v)\,dv\right] dx & si \quad u>0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & si \quad u \leq 0 \\ u\exp -u & si \quad u>0 \end{cases} \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} f_V(v) &= \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,u,v)\,dxdu \\ &= \begin{cases} 0 & si \quad v \leq 0 \\ \displaystyle\int_0^1 \left[\int_0^{+\infty} u\exp-(u+v)\,du\right] dx & si \quad v>0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & si \quad v \leq 0 \\ \exp -v & si \quad v>0 \end{cases} \end{aligned}$$

Il en résulte que pour tout $(x,u,v) \in \mathbb{R}^3$:

$$f(x,u,v) = f_X(x)\,f_U(u)\,f_V(v)$$

les variables aléatoires X, U et V sont donc indépendantes.

Exercice 15
Soit (X, Y, Z) un triplet de variables aléatoires telle que :

- X admette une densité marginale :

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq 0 \\ \dfrac{x^3}{6} \exp -x & si \quad x > 0 \end{cases}$$

- Y admette une densité de probabilité conditionnelle relativement à $[X = x]$ telle que :

$$f_Y(y \mid x) = \begin{cases} \dfrac{3y^2}{x^3} & si \quad 0 < y < x \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

- Z admette une densité de probabilité conditionnelle relativement à $[(X, Y) = (x, y)]$ telle que :

$$f_Z(z \mid x, y) = \begin{cases} \dfrac{2(y-z)}{y^2} & si \quad 0 < z < y \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

1. Déterminer la loi conjointe du triplet (X, Y, Z).
2. Déterminer la loi de probabilité conditionnelle du couple (X, Y) sous l'hypothèse $[Z = z]$.
3. Déterminer la loi de probabilité conditionnelle de la variable aléatoire X sous l'hypothèse $[Y = y, Z = z]$.
4. On pose :

$$\begin{cases} U = X + Y \\ V = X - Y \end{cases}$$

   (a) Quelle est la loi du couple (U, V) ?
   (b) Quelles sont les lois conditionnelles de U et V ?
   (c) U et V sont-elles indépendantes ?

Solution 15
Posons :

$$D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < z < y < x\right\}$$

1. Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ on a :

$$f(x,y,z) = \begin{cases} f_X(x) f_Y(y \mid x) f_Z(z \mid x,y) & si \quad (x,y,z) \in D \\ 0 & si \quad (x,y,z) \notin D \end{cases}$$

d'où :

$$f(x,y,z) = \begin{cases} f(x,y,z) = (y-z)\exp -x & si \quad (x,y,z) \in D \\ 0 & si \quad (x,y,z) \notin D \end{cases}$$

2. Calculons d'abord la densité marginale f_Z de Z :

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y,z)\,dxdy \\ &= \begin{cases} 0 & si \quad z \leq 0 \\ \displaystyle\int_z^{+\infty} \left[\int_z^x (y-z)\exp -xdy\right] dx & si \quad z > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & si \quad z \leq 0 \\ \exp -z & si \quad z > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

d'où, la densité conditionnelle de (X,Y) relativement à Z.est définie pour tout $z \in]0,+\infty[$ par :

$$\begin{aligned} f_{(X,Y)}(x,y \mid z) &= \frac{f(x,y,z)}{f_Z(z)} \\ &= \begin{cases} (y-z)\exp -(x-z) & si \quad 0 < z < y < x \\ 0 & ailleurs \end{cases} \end{aligned}$$

3. Calculons la densité marginale $f_{(Y,Z)}$ du couple (Y,Z) :

$$\begin{aligned} f_{(Y,Z)}(y,z) &= \int_{\mathbb{R}} f(x,y,z)\,dx \\ &= \begin{cases} \displaystyle\int_y^{+\infty} (y-z)\exp -xdx & si \quad 0 < z < y \\ 0 & ailleurs \end{cases} \\ &= \begin{cases} (y-z)\exp -y & si \quad 0 < z < y \\ 0 & ailleurs \end{cases} \end{aligned}$$

d'où, la densité conditionnelle de X relativement à (Y,Z).est définie pour tout

$(y,z) \in \mathbb{R}^2$, $0 < z < y$, par :

$$\begin{aligned} f_X(x \mid y,z) &= \frac{f(x,y,z)}{f_{(Y,Z)}(y,z)} \\ &= \begin{cases} \exp-(x-y) & si \quad 0 < z < y < x \\ 0 & ailleurs \end{cases} \end{aligned}$$

(a) La densité marginale $f_{(X,Y)}$ du couple (X,Y) est donnée par :

$$f(x,y) = \begin{cases} f_X(x)\, f_Y(y \mid x) & si \quad 0 < y < x \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

donc :

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2} y^2 \exp -y & si \quad 0 < y < x \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

L'inverse de la transformation :

$$\begin{aligned} U &= X+Y \\ V &= X-Y \end{aligned}$$

est la transformation :

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{2}(U+V) \\ Y &= \frac{1}{2}(U-V) \end{aligned}$$

Le Jacobien de cette dernière est :

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

d'où pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} f_{(U,V)}(u,v) &= f\left(\frac{1}{2}(u+v), \frac{1}{2}(u-v)\right)|J| \\ &= \frac{1}{16}(u-v)^2 \exp -\frac{1}{2}(u+v) \end{aligned}$$

(b) Calculons les densités marginales f_U et f_V de U et V respectivement :

$$\begin{aligned} f_U(u) &= \int_{\mathbb{R}} f_{(U,V)}(u,v)\,dv \\ &= \begin{cases} 0 & si \quad u \leq 0 \\ \displaystyle\int_0^u \frac{1}{16}(u-v)^2 \exp -\frac{1}{2}(u+v)\,dv & si \quad u > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & si \quad u \leq 0 \\ \displaystyle\frac{1}{16}\left[u^2 - 4u + 8 - 8\exp -\frac{u}{2}\right]\exp -\frac{u}{2} & si \quad u > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} f_V(v) &= \int_{\mathbb{R}} f_{(U,V)}(u,v)\,du \\ &= \begin{cases} 0 & si \quad v \leq 0 \\ \displaystyle\int_0^u \frac{1}{16}(u-v)^2 \exp -\frac{1}{2}(u+v)\,du & si \quad v > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & si \quad v \leq 0 \\ \exp -v & si \quad v > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

D'où, les densités conditionnelles de U relativement à V et de V relativement à V sont définies par :

$$\begin{aligned} f_U(u \mid v) &= \frac{f_{(U,V)}(u,v)}{f_V(v)} \\ &= \begin{cases} \displaystyle\frac{1}{16}(u-v)^2 \exp -\frac{1}{2}(u-v) & si \quad 0 < v < u \\ 0 & ailleurs \end{cases} \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} f_V(v \mid u) &= \frac{f_{(U,V)}(u,v)}{f_U(u)} \\ &= \begin{cases} \displaystyle\frac{1}{16}\frac{(u-v)^2}{u^2 - 4u + 8 - 8\exp -\frac{u}{2}}\exp -\frac{v}{2} & si \quad 0 < v < u \\ 0 & ailleurs \end{cases} \end{aligned}$$

(c) Les variables aléatoires U et V ne sont pas indépendantes car :

$$f_U(u \mid v) \neq f_U(u)$$

Exercice 16
Soient X et Y un couple de variables aléatoires normales indépendantes de moyennes μ et μ', et de variances σ^2 et σ'^2 respectivement.

1. Quelle est la densité de probabilité du couple (X, Y) ?
2. On pose :

$$\begin{cases} U = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \\ \\ V = \dfrac{X-\mu'}{\sigma'} \end{cases}$$

   (a) Quelle est la densité du couple (U, V) ?
   (b) U et V sont-elles indépendantes ?

3. On considère la variable aléatoire Z définie par :

$$Z = \frac{U}{V}$$

   (a) Déterminer la densité de probabilité du couple (U, Z).
   (b) En déduire la densité de Z.

4. Déterminer la densité de probabilité de la variable aléatoire :

$$T = X + Y$$

Solution 16
On a :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp -\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2 \ , \ x \in \mathbb{R}$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sigma'\sqrt{2\pi}} \exp -\frac{1}{2\sigma'^2}(y-\mu')^2 \ , \ y \in \mathbb{R}$$

1. La densité f du couple (X, Y) est défini pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par :

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f_X(x) f_X(x) \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma\sigma'} \exp -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{y-\mu'}{\sigma'}\right)^2\right] \end{aligned}$$

   (a) La transformation inverse de la transformation :

$$\begin{cases} U = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \\ V = \dfrac{Y-\mu'}{\sigma'} \end{cases}$$

est :

$$\begin{cases} X = \sigma U + \mu \\ \\ Y = \sigma' V + \mu' \end{cases}$$

Son jacobien est égal à :

$$\begin{aligned} J &= \begin{vmatrix} \sigma & 0 \\ \\ 0 & \sigma' \end{vmatrix} \\ &= \sigma\sigma' \end{aligned}$$

d'où la densité $f_{(U,V)}$ de (U,V) est définie pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ par :

$$\begin{aligned} f_{(U,V)}(u,v) &= f(\sigma u + \mu, \sigma' v + \mu')\,|J| \\ &= \frac{1}{2\pi} \exp -\frac{1}{2}\left(u^2+v^2\right) \end{aligned}$$

(b) Calculons les densités marginales f_U et f_V de U et V respectivement :

(i) Pour tout $u \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned} f_U(u) &= \int_{\mathbb{R}} f_{(U,V)}(u,v)\,dv \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi} \exp -\frac{1}{2}\left(u^2+v^2\right) dv \\ &= \frac{1}{2\pi} \exp -\frac{1}{2}u^2 \int_{\mathbb{R}} \exp -\frac{1}{2}v^2 dv \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp -\frac{1}{2}u^2 \end{aligned}$$

(ii) Puisque la densité $f_{(U,V)}$ du couple (U,V) est symétrique, donc pour tout $v \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned} f_V(v) &= f_U(v) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp -\frac{1}{2}v^2 \end{aligned}$$

(c) Les variables aléatoire U et V sont indépendantes puisque pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$:

$$f_{(U,V)}(u,v) = f_U(u)\, f_V(v)$$

2. La transformation inverse de la transformation :

$$\begin{cases} U = U \\ Z = \dfrac{V}{U} \end{cases}$$

est :

$$\begin{cases} U = U \\ V = UZ \end{cases}$$

Son Jacobien est égal à :

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \\ z & u \end{vmatrix} = u$$

d'où la densité $f_{(U,V)}$ du couple (U,V) :

$$\begin{aligned} f_{(U,Z)}(u,z) &= f_{(U,V)}(u,uz)\,|J| \\ &= \frac{|u|}{2\pi}\exp -\frac{1}{2}u^2\left(1+z^2\right) \end{aligned}$$

pour tout $(u,z) \in \mathbb{R}^2$.
Il en résulte que la densité f_Z de Z est donnée pour tout $z \in \mathbb{R}$.par :

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{\mathbb{R}} f_{(U,Z)}(u,z)\,du \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{|u|}{2\pi}\exp -\frac{1}{2}u^2\left(1+z^2\right)du \\ &= \frac{1}{\pi\left(1+z^2\right)} \end{aligned}$$

C'est la densité de probabilité de la loi de Cauchy.

3. La densité de probabilité de la variable aléatoire :

$$T = U + V$$

est définie pour tout $t \in \mathbb{R}$.par :

$$\begin{aligned} f_T(t) &= \int_{\mathbb{R}} f_{(U,V)}(u,t-u)\,du \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi}\exp -\frac{1}{2}\left(u^2+(t-u)^2\right)du \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\exp -\frac{t^2}{4} \end{aligned}$$

c'est la densité de la loi normale $\mathcal{N}(0,2)$.

Exercice 17
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent une même loi de probabilité dont la densité est définie par :

$$f(t) = \frac{1}{t^2} \quad , \quad t \geq 1$$

1. On pose :

$$\begin{cases} U = XY \\ V = \dfrac{X}{Y} \end{cases}$$

   (a) Quelle est la densité de probabilité du couple (U, V) ?
   (b) U et V sont-elles indépendantes ?

2. Déterminer les lois marginales de U et V.
3. Déterminer la densité de probabilité et la fonction de répartition de la variable aléatoire :

$$Z = \sqrt{U}$$

Solution 17

1. Pour tout $t \in [1, +\infty[$ on a :

$$f_X(t) = f_Y(t) = \frac{1}{t^2}$$

Puisque les variables aléatoires X et Y sont indépendantes alors la densité f du couple (X, Y) est définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$$

d'où :

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2 y^2} & si \quad (x, y) \in [1, +\infty[\times [1, +\infty[\\ 0 & si \quad (x, y) \notin [1, +\infty[\times [1, +\infty[\end{cases}$$

   (a) L'inverse de la transformation :

$$\begin{cases} U = XY \\ V = \dfrac{X}{Y} \end{cases}$$

   est la transformation :

$$\begin{cases} X = \sqrt{UV} \\ Y = \sqrt{\dfrac{U}{V}} \end{cases}$$

Son Jacobien J est :

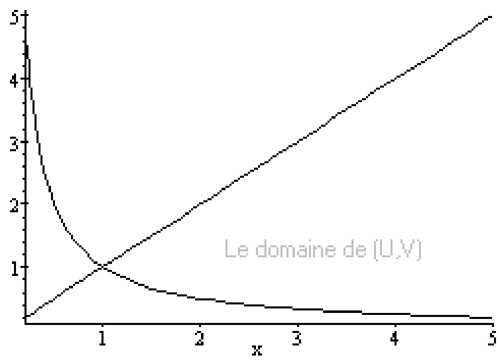
$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} & \dfrac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} \\ \\ \dfrac{1}{2\sqrt{uv}} & -\dfrac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v^3}} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2v}$$

La densité $f_{(U,V)}$ de (U,V) est définie pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ par :

$$f_{(U,V)}(u,v) = f\left(\sqrt{uv}, \sqrt{\frac{u}{v}}\right)|J|$$

Et comme le domaine $D_{(U,V)}$ où la densité $f_{(U,V)}$ de (U,V) est non nul est donnée par :

$$D_{(U,V)} = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u \geq 1 \ , \ \frac{1}{u} \leq v \leq u\right\}$$



on en déduit que la densité $f_{(U,V)}$ de (U,V) est définie :

$$\begin{aligned} f_{(U,V)}(u,v) &= f\left(\sqrt{uv}, \sqrt{\frac{u}{v}}\right)|J| \\ &= \begin{cases} \dfrac{1}{2u^2v} & si \quad (u,v) \in D_{(U,V)} \\ 0 & \quad (u,v) \notin D_{(U,V)} \end{cases} \end{aligned}$$

(b) Les domaines D_U et D_V où les densités f_U de U et f_V de V sont non nulles correspondent respectivement à la $1^{ère}$ projection et à la $2^{ème}$ projection de $D_{(U,V)}$ d'où :

$$D_U = [1, +\infty[$$

et :

$$D_V =]0, +\infty[$$

Et comme :

$$D_{(U,V)} \neq D_U \times D_V$$

donc, les variables aléatoires U et V ne sont pas indépendantes.

2. Calculons les densités marginales f_U de U et f_V de V respectivement.

(a) On a :

$$\begin{aligned} f_U(u) &= \int_{\mathbb{R}} f_{(U,V)}(u,v)\, dv \\ &= \begin{cases} 0 & si \quad u < 1 \\ \displaystyle\int_{\frac{1}{u}}^{u} \frac{1}{2u^2 v} dv & si \quad u \geq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & si \quad u < 1 \\ \dfrac{\ln u}{u^2} & si \quad u \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

(b) On a :

$$\begin{aligned} f_V(v) &= \int_{\mathbb{R}} f_{(U,V)}(u,v)\, du \\ &= \int_{\sup\left(v, \frac{1}{v}\right)}^{+\infty} \frac{1}{2u^2 v} du \end{aligned}$$

(i) si $0 < v \leq 1$ alors :

$$\begin{aligned} f_V(v) &= \int_{\frac{1}{v}}^{+\infty} \frac{1}{2u^2 v} du \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(ii) si $v \geq 1$ alors :

$$\begin{aligned} f_V(v) &= \int_{v}^{+\infty} \frac{1}{2u^2 v} du \\ &= \frac{1}{2v^2} \end{aligned}$$

En résumé :

$$f_V(v) = \begin{cases} 0 & v \leq 0 \\ \dfrac{1}{2} & 0 < v \leq 1 \\ \dfrac{1}{2v^2} & v \geq 1 \end{cases}$$

(a) On a :

$$Z = \sqrt{U} \Longleftrightarrow U = Z^2$$

d'où :

$$\frac{du}{dz} = 2z$$

La densité f_Z de Z est définie pour tout $z \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= f_U\left(z^2\right)\left|\frac{du}{dz}\right| \\ &= \begin{cases} 0 & si \quad z < 1 \\ \dfrac{4}{z^3}\ln z & si \quad z \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

(b) La fonction de répartition F_Z de Z est définie pour tout $z \in \mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \int_{-\infty}^{z} f_Z(t)\,dt \\ &= \begin{cases} 0 & si \quad z \leq 1 \\ \displaystyle\int_1^z \frac{4}{t^3}\ln t dt & si \quad z \geq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & si \quad z \leq 1 \\ 1 - \dfrac{1 + 2\ln z}{z^2} & si \quad z \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice 18

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires dont la densité de probabilité est définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{K}{\sqrt{xy}} & si \quad x > 0\ ,\ y > 0\ ,\ x + y < 1 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

1. Déterminer la constante K
2. Déterminer les lois marginales et conditionnelles de X et Y.
3. X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Déterminer la droite de régression de Y en X.

Solution 18
Posons :

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \ , \ y > 0 \ , \ x + y < 1\right\}$$

Pour tout $(x,y) \in D$ on a :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{K}{\sqrt{xy}} & si \quad (x,y) \in D \\ \\ 0 & si \quad (x,y) \notin D \end{cases}$$

1. Calculons la constante K :

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\, dxdy &= \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} \frac{K}{\sqrt{xy}} dy\right] dx \\ &= K\pi \end{aligned}$$

   D'où :

$$K = \frac{1}{\pi}$$

2. Puisque la densité f de (X,Y) est symétrique, donc X et Y suivent une même loi de probabilité.

   (a) La densité marginale f_X de X est donnée par :

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, dy \\ &= \begin{cases} 0 & si \quad x \notin \,]0,1[\\ \\ \displaystyle\int_0^{1-x} \frac{1}{\pi\sqrt{xy}} dy & si \quad x \in \,]0,1[\end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & si \quad x \notin \,]0,1[\\ \dfrac{2}{\pi}\sqrt{\dfrac{1-x}{x}} & \quad\; x \in \,]0,1[\end{cases} \end{aligned}$$

   (b) La densité marginale f_Y de Y est donnée par :

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= f_X(y) \\ &= \begin{cases} 0 & si \quad y \notin \,]0,1[\\ \\ \dfrac{2}{\pi}\sqrt{\dfrac{1-y}{y}} & si \quad y \in \,]0,1[\end{cases} \end{aligned}$$

(c) La densité conditionnelle de X relativement à Y est définie pour tout $y \in]0,1[$ par :

$$\begin{aligned} f_X(x \mid y) &= \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x(1-y)}} \quad si \;\; 0 < x < 1-y \end{aligned}$$

(d) La densité conditionnelle de Y relativement à X est définie pour tout $x \in]0,1[$ par :

$$\begin{aligned} f_Y(y \mid x) &= f_X(y \mid x) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{y(1-x)}} \quad si \;\; 0 < y < 1-x \end{aligned}$$

3. Les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes car :

$$f(x,y) \neq f_X(x) f_Y(y)$$

(a) On a :

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)\, dx \\ &= \int_0^1 \frac{2}{\pi} x \sqrt{\frac{1-x}{x}} dx \\ &= \frac{1}{4} \\ &= E[Y] \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} E\left[X^2\right] &= \int_{\mathbb{R}} x^2 f_X(x)\, dx \\ &= \int_0^1 \frac{2}{\pi} x^2 \sqrt{\frac{1-x}{x}} dx \\ &= \frac{1}{8} \\ &= E\left[Y^2\right] \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} V[X] &= E\left[X^2\right] - E[X]^2 \\ &= \frac{1}{16} \\ &= V[Y] \end{aligned}$$

(b) On a :

$$
\begin{aligned}
E[XY] &= \iint_{\mathbb{R}^2} xyf(x,y)\,dxdy \\
&= \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} \frac{1}{\pi} xy \frac{1}{\sqrt{xy}} dy\right] dx \\
&= \frac{1}{24}
\end{aligned}
$$

d'où :

$$
Cov[X,Y] = E[XY] - E[X]E[Y] = -\frac{1}{48}
$$

(c) Déterminons les coefficients a et b de la droite régression de Y en X.
On a :

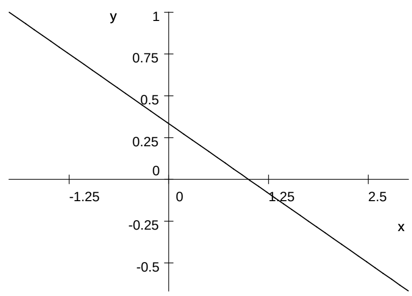
$$
\begin{aligned}
a &= \frac{Cov[X,Y]}{V[X]} \\
&= -\frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
b &= E[Y] - aE[X] \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

d'où la droite régression de Y en X :

$$
y = -\frac{1}{3}[x-1]
$$



La droite de régression de Y en X

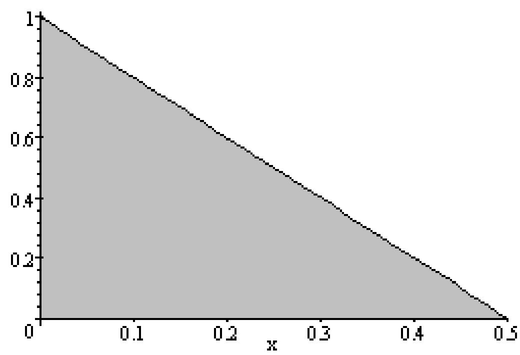
Exercice 19
Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires dont la densité de probabilité est définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} K \sin \frac{\pi}{2}(2x+y) & si \quad x>0\ ,\ y>0\ ,\ 2x+y<1 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

1. Déterminer la constante K
2. Déterminer les lois marginales X et Y.
3. X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer la matrice des variances et covariances de X et Y.
5. Déterminer la droite de régression de Y en X
6. Calculer la densité conditionnelles de X relativement à Y et de Y relativement à X.

Solution 19
Posons :

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x>0\ ,\ y>0\ ,\ 2x+y<1\right\}$$



Le domaine D

On a :

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & si \quad (x,y) \notin D \\ K \sin \frac{\pi}{2}(2x+y) & \quad (x,y) \in D \end{cases}$$

1. On a :

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dxdy &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^{1-2x} K \sin \frac{\pi}{2}(2x+y)\,dy\right] dx \\ &= \frac{2K}{\pi^2} \end{aligned}$$

d'où :

$$K = \frac{\pi^2}{2}$$

2. Les densités marginales f_X et f_Y de X et Y sont données respectivement par :

$$\begin{array}{rcl} f_X(x) & = & \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy \\ & = & \left\{ \begin{array}{ll} 0 & si \quad x \notin \left]0, \dfrac{1}{2}\right[\\ \displaystyle\int_0^{1-2x} \frac{\pi^2}{2} \sin\frac{\pi}{2}(2x+y)\,dy & si \quad x \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right[\end{array} \right. \\ & = & \left\{ \begin{array}{ll} 0 & si \quad x \notin \left]0, \dfrac{1}{2}\right[\\ \pi\cos\pi x & si \quad x \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right[\end{array} \right. \end{array}$$

et :

$$\begin{array}{rcl} f_Y(y) & = & \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx \\ & = & \left\{ \begin{array}{ll} 0 & si \quad y \notin]0,1[\\ \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}(1-y)} \frac{\pi^2}{2} \sin\frac{\pi}{2}(2x+y)\,dx & si \quad y \in]0,1[\end{array} \right. \\ & = & \left\{ \begin{array}{ll} 0 & si \quad y \notin]0,1[\\ \dfrac{\pi}{2}\cos\dfrac{\pi}{2}y & si \quad y \in]0,1[\end{array} \right. \end{array}$$

3. Les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes car :

$$f(x,y) \neq f_X(x)\, f_Y(y)$$

(a) On a :

$$\begin{array}{rcl} E[X] & = & \displaystyle\int_{\mathbb{R}} x f_X(x)\,dx \\ & = & \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \pi x \cos\pi x dx \\ & = & \dfrac{\pi-2}{2\pi} \end{array}$$

et :

$$\begin{aligned}
E\left[X^2\right] &= \int_{\mathbb{R}} x^2 f_X(x)\,dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \pi x^2 \cos \pi x dx \\
&= \frac{\pi^2+8}{4\pi^2}
\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
V[X] &= E\left[X^2\right] - E[X]^2 \\
&= \frac{\pi+1}{\pi^2}
\end{aligned}$$

(b) On a :

$$\begin{aligned}
E[Y] &= \int_{\mathbb{R}} y f_Y(y)\,dy \\
&= \int_0^1 \frac{\pi}{2} y \cos \frac{\pi}{2} y dy \\
&= \frac{1}{2} E[X] \\
&= \frac{\pi-2}{4\pi}
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
E\left[Y^2\right] &= \int_{\mathbb{R}} y^2 f_Y(y)\,dy \\
&= \int_0^1 \frac{\pi}{2} y^2 \cos \frac{\pi}{2} y dy \\
&= \frac{1}{4} E\left[X^2\right] \\
&= \frac{\pi^2+8}{16\pi^2}
\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
V[Y] &= E\left[Y^2\right] - E[Y]^2 \\
&= \frac{1}{4} V[X] \\
&= \frac{\pi+1}{4\pi^2}
\end{aligned}$$

(c) On a :

$$\begin{aligned}
E[XY] &= \iint_{\mathbb{R}^2} xyf(x,y)\,dxdy \\
&= \iint_D \frac{\pi^2}{2} xy \sin\frac{\pi}{2}(2x+y)\,dxdy \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \left[\int_0^{1-x} \frac{\pi^2}{2} xy \sin\frac{\pi}{2}(2x+y)\,dy\right] dx \\
&= \frac{\pi+2}{2\pi}
\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
Cov[X,Y] &= E[XY] - E[X]E[Y] \\
&= \frac{1}{8\pi^2}\left(3\pi^2 + 12\pi - 4\right)
\end{aligned}$$

(d) La matrice des variances et covariances de (X,Y) est définie par :

$$\begin{aligned}
\Sigma_{(X,Y)} &= \begin{bmatrix} V[X] & Cov[X,Y] \\ Cov[X,Y] & V[Y] \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \dfrac{\pi+1}{\pi^2} & \dfrac{1}{8\pi^2}\left(3\pi^2+12\pi-4\right) \\ \dfrac{1}{8\pi^2}\left(3\pi^2+12\pi-4\right) & \dfrac{\pi+1}{4\pi^2} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

4. Déterminons les coefficients a et b de la droite régression de Y en X :

$$y = ax + b$$

On a :

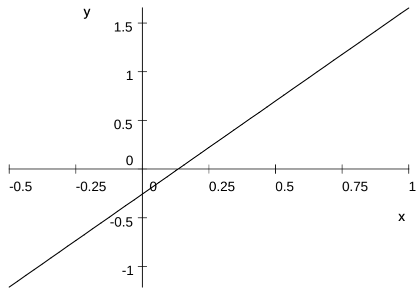
$$\begin{aligned}
a &= \frac{Cov[X,Y]}{V[X]} \\
&= \frac{3\pi^2 + 12\pi - 4}{8(\pi+1)}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
b &= E[Y] - aE[X] \\
&= \frac{\pi-2}{4\pi} - \frac{3\pi^2 + 12\pi - 4}{8(\pi+1)} \frac{\pi-2}{2\pi}
\end{aligned}$$

d'où la droite régression de Y en X :

$$y = \frac{3\pi^2 + 12\pi - 4}{8(\pi+1)}x + \frac{\pi - 2}{4\pi} - \frac{3\pi^2 + 12\pi - 4}{8(\pi+1)}\frac{\pi-2}{2\pi}$$



La droite de régression de Y en X

(a) La densité conditionnelle de X relativement à Y est définie pour tout $y \in \left]0, 1\right[$ par :

$$\begin{aligned} f_X(x \mid y) &= \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} \\ &= \begin{cases} \pi \dfrac{\sin \dfrac{\pi}{2}(2x+y)}{\cos \dfrac{\pi}{2} y} & si \quad 0 < x < \dfrac{1}{2}(y-1) \\ 0 & ailleurs \end{cases} \end{aligned}$$

(b) La densité conditionnelle de Y relativement à X est définie pour tout $x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ par :

$$\begin{aligned} f_Y(y \mid x) &= \frac{f(x,y)}{f_X(x)} \\ &= \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} \dfrac{\sin \dfrac{\pi}{2}(2x+y)}{\cos \pi x} & si \quad 0 < y < 1 - 2x \\ 0 & ailleurs \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice 20
Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires dont la densité de probabilité est définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} K & si \quad x > 0 \ , \ x^2 + y^2 < 1 \\ \\ 0 & \quad ailleurs \end{cases}$$

1. Déterminer la constante K
2. Déterminer les lois marginales X et Y.
3. X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer la matrice des variances et covariances de X et Y.
5. Déterminer la droite de régression de Y en X
6. Calculer la densité conditionnelles de X relativement à Y et de Y relativement à X.

Solution 20
Posons :

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \ , \ x^2 + y^2 < 1\right\}$$

On a :

$$f(x,y) = \begin{cases} K & si \quad (x,y) \in D \\ \\ 0 & si \quad (x,y) \notin D \end{cases}$$

1. On a :

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\, dxdy &= \iint_D K dxdy \\ &= K\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

d'où :

$$K = \frac{2}{\pi}$$

2. Les densités marginales f_X et f_Y de X et Y sont données respectivement par :

$$\begin{array}{rcl} f_X(x) & = & \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy \\ & = & \left\{ \begin{array}{lll} 0 & si & x \notin]0,1[\\ \displaystyle\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2}{\pi} dy & si & x \in]0,1[\end{array} \right. \\ & = & \left\{ \begin{array}{lll} 0 & si & x \notin]0,1[\\ \dfrac{4}{\pi}\sqrt{1-x^2} & si & x \in]0,1[\end{array} \right. \end{array}$$

et :

$$\begin{array}{rcl} f_Y(y) & = & \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx \\ & = & \left\{ \begin{array}{lll} 0 & si & y \notin]-1,1[\\ \displaystyle\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{2}{\pi} dx & si & y \in]-1,1[\end{array} \right. \\ & = & \left\{ \begin{array}{lll} 0 & si & y \notin]-1,1[\\ \dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2} & si & y \in]-1,1[\end{array} \right. \end{array}$$

3. Les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes car :

$$f(x,y) \neq f_X(x)\, f_Y(y)$$

(a) On a :

$$\begin{array}{rcl} E[X] & = & \displaystyle\int_{\mathbb{R}} x f_X(x)\,dx \\ & = & \displaystyle\int_0^1 \frac{4}{\pi} x\sqrt{1-x^2}dx \\ & = & \dfrac{4}{3\pi} \end{array}$$

et :

$$\begin{array}{rcl} E\left[X^2\right] & = & \displaystyle\int_{\mathbb{R}} x^2 f_X(x)\,dx \\ & = & \displaystyle\int_0^1 \frac{4}{\pi} x^2\sqrt{1-x^2}dx \\ & = & \dfrac{1}{4} \end{array}$$

d'où :

$$\begin{aligned} V[X] &= E\left[X^2\right] - E[X]^2 \\ &= \frac{9\pi^2 - 64}{36\pi^2} \end{aligned}$$

(b) On a :

$$\begin{aligned} E[Y] &= \int_{\mathbb{R}} y f_Y(y)\, dy \\ &= \int_{-1}^{1} \frac{2}{\pi} y \sqrt{1-y^2} dy \\ &= 0 \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} E\left[Y^2\right] &= \int_{\mathbb{R}} y^2 f_Y(y)\, dy \\ &= \int_{-1}^{1} \frac{2}{\pi} y^2 \sqrt{1-y^2} dy \\ &= E\left[X^2\right] \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} V[Y] &= E\left[Y^2\right] \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

(c) On a :

$$\begin{aligned} E[XY] &= \iint_{\mathbb{R}^2} xyf(x,y)\, dxdy \\ &= \iint_{D} \frac{2}{\pi} xydxdy \\ &= \int_0^1 \left[\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2}{\pi} xydy \right] dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} Cov[X,Y] &= E[XY] - E[X]E[Y] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Les variables aléatoires sont non corrélées mais ne sont pas indépendantes.

(d) La matrice des variances et covariances de (X, Y) est définie par :

$$\begin{aligned}\Sigma_{(X,Y)} &= \begin{bmatrix} V[X] & Cov[X,Y] \\ Cov[X,Y] & V[Y] \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \dfrac{9\pi^2-64}{36\pi^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{4} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

4. Déterminons les coefficients a et b de la droite régression de Y en X :

$$y = ax + b$$

On a :

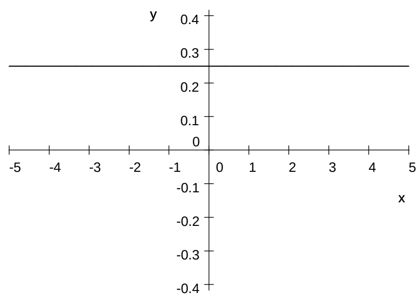
$$\begin{aligned} a &= \frac{Cov[X,Y]}{V[X]} \\ &= 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} b &= E[Y] - aE[X] \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

d'où la droite régression de Y en X :

$$y = \frac{1}{4}$$



La droite de régression de Y en X

(a) La densité conditionnelle de X relativement à Y est définie pour tout $y \in]-1, 1[$ par :

$$\begin{aligned} f_X(x \mid y) &= \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} \\ &= \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}} & si \quad 0 < x < \sqrt{1-y^2} \\ 0 & ailleurs \end{cases} \end{aligned}$$

(b) La densité conditionnelle de Y relativement à X est définie pour tout $x \in]0, 1[$ par :

$$\begin{aligned} f_Y(y \mid x) &= \frac{f(x,y)}{f_X(x)} \\ &= \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}} & si \quad -\sqrt{1-x^2} < y < \sqrt{1-x^2} \\ 0 & ailleurs \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice 21

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite et Y une variable aléatoire, indépendante de X, qui prend ses valeurs dans l'ensemble $\{-1, 1\}$ telle que :

$$P[Y = 1] = p$$

où $p \in]0, 1[$.
Déterminer la loi de probabilité de :

$$Z = XY$$

Solution 21

Notons F_Z la fonction de répartition de Z et F_X celle de X.
On a :

$$[Z < z] = [X > -z, Y = -1] \oplus [X < z, Y = 1]$$

donc :

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P[Z < z] \\ &= P[X > z, Y = -1] + P[X < z, Y = 1] \\ &= P[X > -z] P[Y = -1] + P[X < z] P[Y = 1] \end{aligned}$$

et comme X suit une loi normale centrée réduite, alors :

$$P[X > -z] = P[X < z]$$

d'où :

$$\begin{array}{rcl} F_Z(z) & = & (1-p) F_X(z) + pF_X(z) \\ & = & F_X(z) \end{array}$$

Il en résulte que Z suit la loi normale centrée réduite.

Exercice 22
Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires indépendantes suivant toutes les deux la même loi uniforme sur l'intervalle $[-2, 1]$.
Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire :

$$T = \inf(X, Y)$$

Solution 22
Notons F_X, F_Y et F_Z les fonctions de répartition de X, Y et Z respectivement et f_X, f_Y et f_Z leurs densités respectives.
On a :

$$\begin{array}{rcl} F_X(u) & = & F_Y(u) \\ & = & \left(\dfrac{u+2}{3}\right) \chi_{[-2,1]}(u) + \chi_{[1,+\infty[}(u) \\ & = & F(u) \end{array}$$

et :

$$\begin{array}{rcl} f_X(u) & = & f_Y(u) \\ & = & \dfrac{1}{3} \chi_{[-2,1]}(u) \\ & = & f(u) \end{array}$$

Puisque :

$$T = \inf(X, Y)$$

alors :

$$\begin{array}{rcl} P[T \geq t] & = & P[X \geq t, Y \geq t] \\ & = & P[X \geq t] P[Y \geq t] \\ & = & [1 - F(t)]^2 \end{array}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
F_T(t) &= P[T < t] \\
&= 1 - [1 - F(t)]^2 \\
&= \left[1 - \left(\frac{1-t}{3}\right)^2\right] \chi_{[-2,1]}(t) + \chi_{[1,+\infty[}(t)
\end{aligned}$$

Il en résulte que :

$$\begin{aligned}
f_T(t) &= F_T'(t) \\
&= \frac{2}{9}(1-t)\,\chi_{[-2,1]}(t)
\end{aligned}$$

Exercice 23
Un appareil électrique fonctionne avec trois piles P_i, $i \in \{1, 2, 3\}$.
La durée de vie de la pile P_i est une variable aléatoire X_i. Les trois variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 sont indépendantes et suivent une même loi exponentielle de paramètre λ, $\lambda > 0$.
L'appareil s'arrête de fonctionner dès que deux piles sont usées.
Soit T la variable aléatoire représentant le temps de fionctionnement de l'appareil électrique.
Déterminer la loi de probabilité de T et calculer son espérance mathématique et sa variance.

Solution 23
Soit F et f la fonction de répartition et la densité de probabilité de la loi exponentielle de paramètre λ.
On a :

$$F(t) = 1 - \exp -\lambda t \ \ , \ \ t \geq 0$$

$$f(t) = \lambda \exp -\lambda t \ \ , \ \ t > 0$$

1. Désignons par F_T et f_T la fonction de répartition et la densité de probabilité de T respectivement.
   Puisque :

$$\begin{aligned}
[T < t] &= [X_1 < t, X_2 < t, X_3 \geq t] \oplus [X_1 < t, X_2 \geq t, X_3 < t] \\
&\quad \oplus [X_1 \geq t, X_2 < t, X_3 < t] \oplus [X_1 < t, X_2 < t, X_3 < t]
\end{aligned}$$

et puisque X_1, X_2 et X_3 sont indépendantes alors :

$$\begin{array}{rcl} F_T(t) & = & P[T < t] \\ & = & 3[F(t)]^2[1 - F(t)] + [F(t)]^3 \\ & = & [F(t)]^2[3 - 2F(t)] \\ & = & [1 - \exp -\lambda t]^2[1 - 2\exp -\lambda t] \quad , \quad t \geq 0 \end{array}$$

d'où :

$$f_T(t) = 6\lambda[1 - \exp -\lambda t]\exp -2\lambda t \quad , \quad t > 0$$

2. On a :

$$\begin{array}{rcl} E[T] & = & \displaystyle\int_{\mathbb{R}} t f_T(t)\,dt \\ & = & \displaystyle\int_0^{+\infty} 6\lambda t[1 - \exp -\lambda t]\exp -2\lambda t dt \\ & = & \dfrac{5}{6\lambda} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} E[T^2] & = & \displaystyle\int_{\mathbb{R}} t^2 f_T(t)\,dt \\ & = & \displaystyle\int_0^{+\infty} 6\lambda t^2[1 - \exp -\lambda t]\exp -2\lambda t dt \\ & = & \dfrac{19}{18\lambda^2} \end{array}$$

d'où :

$$\begin{array}{rcl} V[T] & = & E[T^2] - E[T]^2 \\ & = & \dfrac{13}{36\lambda^2} \end{array}$$

Exercice 24

1. Soit X et Y deux variables aléatoires absolument continues telles que le couple (X, Y) admette une densité de probabilité f.
   Démontrer que la variable aléatoire :
   $$T = X + Y$$
   a pour densité la fonction définie pour tout $t \in R$ par :
   $$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, t - x)\,dx$$

2. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent des lois exponentielles de paramètres λ et μ respectivement.
Déterminer la densité de probabilité de la variable aléatoire :
$$T = X + Y$$

3. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent des lois uniformes sur les intervalles $[0, a]$ et $[0, b]$ respectivement.
Déterminer la densité de probabilité de la variable aléatoire :
$$T = X + Y$$

Solution 24

1. Notons d'abord que la fonction :
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, u-x)\, dx \end{array}$$
est une densité de probabilité.
Démontrons que c'est la densité de la variable aléatoire :
$$T = X + Y$$
Pour tout $t \in \mathbb{R}$, désignons par $D(t)$ le domaine de $\mathbb{R}^2$:
$$D(t) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y < t\right\}$$
alors :
$$\begin{aligned} P_{X+Y}(]-\infty, t[) &= P[X + Y < t] \\ &= P[(X, Y) \in D(t)] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{t-x} f(x, y)\, dy\right] dx \end{aligned}$$
Effectuons le changement de variable :
$$u = x + y$$
Alors :
$$\begin{aligned} P_{X+Y}(]-\infty, t[) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{t} f(x, u-x)\, du\right] dx \\ &= \int_{-\infty}^{t} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, u-x)\, dx\right] du \end{aligned}$$

Il en résulte que la densité de probabilité de $X+Y$ est la fonction f_{X+Y} définie pour tout $u \in \mathbb{R}$ par :

$$f_{X+Y}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, u-x)\, dx$$

2. Notons f_X et f_Y les densités de probabilité de X et Y respectivement.
On a :

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq 0 \\ \\ \lambda \exp -\lambda x & si \quad x > 0 \end{cases}$$

et :

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & si \quad y \leq 0 \\ \\ \mu \exp -\mu y & si \quad y > 0 \end{cases}$$

La densité f_{X+Y} de la variable aléatoire :

$$T = X + Y$$

est définie pour tout $u \in \mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} f_{X+Y}(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, u-x)\, dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, f_Y(u-x)\, dx \\ &= \begin{cases} 0 & si \quad u \leq 0 \\ \\ \lambda\mu \exp(-\mu u) \int_0^u \exp(\mu - \lambda) x dx & si \quad u > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

(a) si $\lambda = \mu$ alors :

$$f_{X+Y}(u) = \begin{cases} 0 & si \quad u \leq 0 \\ \\ \lambda^2 u \exp -\lambda u & si \quad u > 0 \end{cases}$$

(b) si $\lambda \neq \mu$ alors :

$$f_{X+Y}(u) = \begin{cases} 0 & si \quad u \leq 0 \\ \\ \dfrac{\lambda\mu}{\lambda - \mu}\left[\exp(-\mu u) - \exp(-\lambda u)\right] & si \quad u > 0 \end{cases}$$

3. Notons f_X et f_Y les densités de probabilité de X et Y respectivement.
   Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a :
   $$f_X(t) = \frac{1}{a}\chi_{[0,a]}(t)$$
   et :
   $$f_Y(t) = \frac{1}{b}\chi_{[0,b]}(t)$$
   La densité f_{X+Y} de $X+Y$ est définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par :
   $$\begin{aligned}
   f_{X+Y}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, t-x)\,dx \\
   &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-x, x)\,dx \\
   &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t-x)\,f_Y(x)\,dx \\
   &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{ab}\chi_{[0,a]}(t-x)\,\chi_{[0,b]}(x)\,dx \\
   &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{ab}\chi_{[t-a,t]}(x)\,\chi_{[0,b]}(x)\,dx \\
   &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{ab}\chi_{[t-a,t]\cap[0,b]}(x)\,dx
   \end{aligned}$$
   Or :

   (a) si $0 \leq t \leq a$ alors :
   $$[t-a, t] \cap [0, b] = [0, t]$$
   (b) si $a \leq t \leq b$ alors :
   $$[t-a, t] \cap [0, b] = [t-a, t]$$
   (c) si $b \leq t \leq a+b$ alors :
   $$[t-a, t] \cap [0, b] = [t-a, b]$$
   Il en résulte que :
   $$f_{X+Y}(t) = \frac{1}{ab}\left[t\chi_{[0,a]}(t) + a\chi_{[a,b]}(t) + (a+b-t)\,\chi_{[b,a+b]}(t)\right]$$

Les Lois Usuelles

Exercice 1
Soient X et Y deux variables aléatoires binomiales indépendantes de paramètres (n, p) et (m, p) respectivement.

1. Quelle est la loi de probabilité de :
$$Z = X + Y$$
2. Quelle est la loi conditionnelle de X sous l'hypothèse $[Z = a]$?
3. Soit T une variable aléatoire telle que la loi conditionnelle de T sachant $[X = x]$ est binomiale de paramètres (x, α).
Montrer que T suit une loi binomiale de paramètres $(n, \alpha p)$.

Solution 1
Les lois de probabilité de X et Y sont définies respectivement par :
$$P[X = k] = C(n, k) p^k (1 - p)^{n-k} \ , \ 0 \leq k \leq n$$
et :
$$P[Y = k] = C(m, k) p^k (1 - p)^{m-k} \ , \ 0 \leq k \leq m$$
De plus X et Y sont indépendantes.

1. Pour tout k, $0 \leq k \leq n + m$, on a :
$$[Z = k] = \bigoplus_{r=0}^{k} [X = r, Y = k - r]$$
où :
$$[X = r, Y = k - r] = \emptyset \ si \ r > n \ ou \ k - r > m$$
d'où :
$$\begin{aligned} P[Z = k] &= \sum_{r=0}^{k} P[X = r, Y = k - r] \\ &= \sum_{r=0}^{k} P[X = r] P[Y = k - r] \end{aligned}$$
puisque X et Y sont indépendantes.

En remplaçant, on obtient :

$$\begin{aligned} P[Z=k] &= \left[\sum_{r=0}^{k} C(n,r)\,C(m,k-r)\right] p^k (1-p)^{n+m-k} \\ &= C(n+m,k)\,p^k (1-p)^{n+m-k} \end{aligned}$$

Z suit donc une loi binomiale d'ordre $n+m$ et de paramètre p.

2. Pour tout a, $0 \leq a \leq n+m$, et pour tout k, $0 \leq k \leq \inf(a,n)$, on a :

$$\begin{aligned} P[X=k \mid Z=a] &= \frac{P[X=k, Z=a]}{P[Z=a]} \\ &= \frac{P[X=k, Y=a-k]}{P[Z=a]} \\ &= \frac{P[X=k]\,P[Y=a-k]}{P[Z=a]} \\ &= \frac{C(n,k)\,C(m,a-k)}{C(n+m,a)} \end{aligned}$$

C'est une loi hypergéométrique.

3. Pour tout x, $0 \leq x \leq n$, et pour tout k, $0 \leq k \leq x$, on a :

$$P[T=k \mid X=x] = C(x,k)\,\alpha^k (1-\alpha)^{x-k}$$

Déterminons d'abord la loi du couple (X,T).
Pour tout x, $0 \leq x \leq n$, et pour tout k, $0 \leq k \leq x$, on a :

$$\begin{aligned} P[X=x, T=k] &= P[X=x]\,P[T=k \mid X=x] \\ &= C(n,x)\,C(x,k)\,p^x (1-p)^{n-x} \alpha^k (1-\alpha)^{x-k} \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} P[T=k] &= \sum_{x=k}^{n} P[X=x, T=k] \\ &= \sum_{x=k}^{n} C(n,x)\,C(x,k)\,p^x (1-p)^{n-x} \alpha^k (1-\alpha)^{x-k} \\ &= \sum_{r=0}^{n-k} C(n,r+k)\,C(r+k,k)\,p^{r+k} (1-p)^{n-r-k} \alpha^k (1-\alpha)^r \\ &= C(n,k)\,(p\alpha)^k \sum_{r=0}^{n-k} C(n-k,r)\,[p(1-\alpha)]^r (1-p)^{n-r-k} \\ &= C(n,k)\,(p\alpha)^k (1-p\alpha)^{n-k} \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Exercice 2
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent des lois de Poisson de paramètres λ et μ respectivement.

1. Quelle est la loi de probabilité de :
$$Z = X + Y$$
2. Quelle est la loi conditionnelle de X sous l'hypothèse $[Z = n]$?

Solution 2
Les lois de probabilité de X et Y sont définies respectivement par :
$$P[X = k] = \frac{\lambda^k}{k!} \exp -\lambda \ , \ k \in \mathbb{N}$$
et :
$$P[Y = k] = \frac{\mu^k}{k!} \exp -\mu \ , \ k \in \mathbb{N}$$
de plus, X et Y sont indépendantes.

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a :
$$[Z = k] = \bigoplus_{r=0}^{k} [X = r, Y = k - r]$$
d'où :
$$\begin{aligned} P[Z = k] &= \sum_{r=0}^{k} P[X = r, Y = k - r] \\ &= \sum_{r=0}^{k} P[X = r] P[Y = k - r] \\ &= \frac{1}{k!} \left[\sum_{r=0}^{k} \frac{k!}{r! (k - r)!} \lambda^r \mu^{k-r} \right] \exp - (\lambda + \mu) \\ &= \frac{(\lambda + \mu)^k}{k!} \exp - (\lambda + \mu) \end{aligned}$$
Z suit donc une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout k, $0 \leq k \leq n$, on a :

$$\begin{aligned} P[X = k \mid Z = n] &= \frac{P[X = k, Z = n]}{P[Z = n]} \\ &= \frac{P[X = k, Y = n - k]}{P[Z = n]} \\ &= \frac{P[X = k] P[Y = n - k]}{P[Z = n]} \end{aligned}$$

puisque X et Y sont indépendantes.
En remplaçant, on obtient :

$$P[X = k \mid Z = n] = C(n, k) \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)^k \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu}\right)^{n-k}$$

Donc, la loi conditionnelle de X sous l'hypothèse $[Z = n]$ est une loi binomiale d'ordre n et de paramètre $\dfrac{\lambda}{\lambda + \mu}$.

Exercice 3
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent une même loi géométrique de paramètre p

1. Quelle est la loi de probabilité de :
$$Z = \max(X, Y)$$
2. Quelle est la loi de probabilité de :
$$T = X + Y$$
3. Quelle est la loi conditionnelle de T sous l'hypothèse $[X = k]$?
Calculer l'espérance mathématique de T sous cette hypothèse.

Solution 3
Les lois de probabilité de X et Y sont définies pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ par :

$$\begin{aligned} P[X = k] &= P[Y = k] \\ &= p(1 - p)^{k-1} \end{aligned}$$

De plus, X et Y sont indépendantes.

1. Calculons la fonction de répartition F de la variable aléatoire :
$$Z = \max(X, Y)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\begin{aligned} F(n) &= P[Z < n] \\ &= P[\max(X,Y) < n] \\ &= P[X < n, Y < n] \\ &= P[X < n]\,P[Y < n] \\ &= \left[\sum_{k=1}^{n-1} p(1-p)^{k-1}\right]^2 \\ &= \left[1-(1-p)^{n-1}\right]^2 \end{aligned}$$

D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\begin{aligned} P[Z = n] &= F(n+1) - F(n) \\ &= p(1-p)^{n-1}\left[2-(2-p)(1-p)^{n-1}\right] \end{aligned}$$

2. Déterminons la loi de probabilité de la variable aléatoire :

$$T = X + Y$$

Pour tout k, $k \geq 2$, on a :

$$[T = k] = \bigoplus_{r=1}^{k-1} [X = r, Y = k - r]$$

d'où :

$$\begin{aligned} P[T = k] &= \sum_{r=1}^{k-1} P[X = r, Y = k - r] \\ &= \sum_{r=1}^{k} P[X = r]\,P[Y = k - r] \\ &= (k-1)\,p^2(1-p)^{k-1} \end{aligned}$$

3. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout n, $n \geq k+1$, on a :

$$\begin{aligned} P[T = n \mid X = k] &= \frac{P[X = k, T = n]}{P[X = k]} \\ &= \frac{P[X = k, Y = n - k]}{P[X = k]} \\ &= P[Y = n - k] \\ &= p(1-p)^{n-k-1} \end{aligned}$$

L'espérance mathématique de T sous cette hypothèse est donnée par :

$$\begin{aligned} E[T \mid X = k] &= \sum_{n=k+1}^{+\infty} nP[T = n \mid X = k] \\ &= \sum_{n=k+1}^{+\infty} np(1-p)^{n-k-1} \\ &= p\sum_{r=o}^{+\infty} (r+k+1)(1-p)^r \\ &= k + 1 + \frac{1-p}{p} \end{aligned}$$

Exercice 4
Soient X et Y deux variables indépendantes suivant la même loi de Bernouilli de paramètre p, $0 \leq p \leq 1$

1. Déterminer les lois de probabilité des variables aléatoires :

$$\begin{aligned} U &= X + Y \\ V &= X - Y \end{aligned}$$

2. U et V sont-elles indépendantes ?

Solution 4
On a :

$$P[X = k] = P[Y = k] = p^k (1-p)^{1-k} \quad , \quad k \in \{0, 1\}$$

1. (a) La variable aléatoire :

$$U = X + Y$$

prend ses valeurs dans l'ensemble $\{0, 1, 2\}$.

(i) On a :

$$[U = 0] = [X = 0, Y = 0]$$

d'où :

$$\begin{aligned} P[U = 0] &= P[X = 0, Y = 0] \\ &= P[X = 0]P[Y = 0] \\ &= (1-p)^2 \end{aligned}$$

(ii) On a :

$$[U = 1] = [(X, Y) = (0, 1)] \oplus [(X, Y) = (1, 0)]$$

d'où :

$$\begin{aligned} P[U = 1] &= P[\{(X, Y) = (0, 1)\} \oplus \{(X, Y) = (1, 0)\}] \\ &= P[X = 0] P[Y = 1] + P[X = 1] P[Y = 0] \\ &= 2p(1 - p) \end{aligned}$$

(iii) On a :

$$P[U = 2] = P[X = 1, Y = 1]$$

d'où :

$$\begin{aligned} P[U = 1] &= P[X = 1, Y = 1] \\ &= P[X = 1] P[Y = 1] \\ &= p^2 \end{aligned}$$

Remarquons que U suit une loi binomiale d'ordre 2 et de paramètre p.

(b) La variable aléatoire :

$$V = X - Y$$

prend ses valeurs dans l'ensemble $\{-1, 0, 1\}$.

(i) On a :

$$[V = -1] = [X = 0, Y = 1]$$

d'où :

$$\begin{aligned} P[V = -1] &= P[X = 0, Y = 1] \\ &= P[X = 0] P[Y = 1] \\ &= p(1 - p) \end{aligned}$$

(ii) On a :

$$P[V = 0] = [(X, Y) = (0, 0)] \oplus [(X, Y) = (1, 1)]$$

d'où :

$$\begin{aligned} P[V = 0] &= P[\{(X, Y) = (0, 0)\} \oplus \{(X, Y) = (1, 1)\}] \\ &= P[X = 0] P[Y = 0] + P[X = 1] P[Y = 1] \\ &= p^2 + (1 - p)^2 \end{aligned}$$

(iii) On a :

$$[V = 1] = [X = 1, Y = 0]$$

d'où :

$$\begin{aligned} P[V = 1] &= P[X = 1, Y = 0] \\ &= P[X = 1] P[Y = 0] \\ &= p(1 - p) \end{aligned}$$

2. Les variables aléatoires U et V ne sont pas indépendantes car :

$$\begin{aligned} P[U = 0, V = 0] &= P[X = 0, Y = 0] \\ &= (1 - p)^2 \end{aligned}$$

alors que :

$$P[U = 0] P[V = 0] = (1 - p)^2 \left[p^2 + (1 - p)^2\right]$$

Exercice 5
Deux personnes jouent à "pile" ou "face" n fois chacune.

1. Quelle est la probabilité que chacune des deux personnes obtienne k fois le côté "pile" ?
2. Quelle est la probabilité que les deux personnes obtiennent le même nombre de fois "pile" ?

Solution 5
Le nombre de "pile" obtenu par l'une ou l'autre des deux personnes en jetant la pièce n fois est une variable binomiale d'ordre n et de paramètre $\dfrac{1}{2}$.

1. Pour tout k, $0 \leq k \leq n$, la probabilité p_{ik} que la $i^{ème}$ personne obtienne k fois "pile" est :

$$\begin{aligned} p_{ik} &= C(n, k) \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \\ &= C(n, k) \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

d'où, pour tout k, $0 \leq k \leq n$, la probabilité p_k que les deux personnes obtiennent chacune k fois "pile" est :

$$p_k = p_{1k} p_{2k} = \left[C(n, k) \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]^2$$

2. Ainsi, la probabilité p que les deux personnes obtiennent le même nombre de fois "pile" est :

$$\begin{aligned} p &= \sum_{k=0}^{n} p_k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left[C(n,k) \left(\frac{1}{2}\right)^n \right]^2 \\ &= C(2n,n) \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \end{aligned}$$

Exercice 6
On estime que la probabilité pour un nouveau-né d'être primapare est p, et celle d'être multipare est $q = 1 - p$. On étudie cette parité dans une maternité.

1. Quelle est la probabilité pour que les k premiers nouveaux-nés soient tous des miltipares ?
2. Quelle est la probabilité pour que le premier primapare soit précédé de k multipares ?
3. Quelle est la probabilité pour que le $r^{\text{ème}}$ primapare soit le $k^{\text{ème}}$ nouveau-né ?

Solution 6
Notons d'abord que les naissances sont indépendantes.

1. La probabilité p_1 que les k premiers nouveaux-nés soient tous des multipares est :
$$p_1 = q^k$$
2. La probabilité p_2 que le premier primapare soit précédé de k multipares est :
$$p_2 = pq^k$$
3. Le $r^{\text{ème}}$ primapare est le $k^{\text{ème}}$ nouveau-né, donc il y a $r - 1$ primapares parmi les $k - 1$ premières naissances, puis un primapare à la $k^{\text{ème}}$ naissance.
D'où la probabilité p_3 de cet événement est :
$$\begin{aligned} p_3 &= \left[C(k-1, r-1)\, p^{r-1} q^{(k-1)-(r-1)} \right] p \\ &= C(k-1, r-1)\, p^r q^{k-r} \end{aligned}$$
C'est la loi binomiale négative.

Exercice 7
Un groupe de $2n$ filles et $2n$ garçons est séparé en deux sous groupes de même effectif.
Quelle est la probabilité que dans chaque sous groupe il y a autant de filles que de garçons ?

Solution 7
Le nombre de groupes d'effectif $2n$ d'un ensemble à $4n$ éléments est :

$$C(4n, 2n) = \frac{(4n)!}{(2n)!\,(2n)!}$$

Le nombre de groupes à n filles parmi les $2n$ filles et n garçons parmi les $2n$ garçons est :

$$C(2n, n)\, C(2n, n) = \left(\frac{(2n)!}{n!n!}\right)^2$$

D'où, la probabilité p que dans chaque sous groupe il y a autant de filles que de garçons est :

$$\begin{aligned} p &= \frac{[C(2n, n)]^2}{C(4n, 2n)} \\ &= \frac{[(2n)!]^4}{(n!)^4\,(4n)!} \end{aligned}$$

C'est une distribution hypergéométrique.

Exercice 8
dans une loterie, il y a 400 billets et 4 prix.
Une personne détient dix billets.
Quelle est la probabilité qu'elle gagne au moins un lot ?

Solution 8
Désignons par p_k la probabilité pour que la personne gagne exactement k lots.
Pour tout k, $0 \leq k \leq 4$, on a :

$$p_k = \frac{C(4, k)\, C(396, 10 - k)}{C(400, 10)}$$

La probabilité p pour que la personne gagne au moins un lot est :

$$\begin{aligned} p &= \sum_{k=1}^{4} p_k \\ &= 1 - p_0 \\ &= 0.096662 \end{aligned}$$

Exercice 9
On distribue les 52 cartes d'un jeu à quatre joueurs A, B, C et D.
Soient a, b, c et d le nombre d'as reçus par les joueurs respectivement, $a+b+c+d = 4$.

1. Quelle est la probabilité d'une répartition (a, b, c, d) ?
2. On considère les répartitions $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ où l'un des joueurs, sans préciser lequel, reçoit α as, un autre β as, un autre γ as et un autre δ as.
   Combien y a-t-il de répartitions de ce type ?
   Evaluer la probabilité de chacune de ces répartitions

Solution 9
1. Nous sommes en présence d'une distribution polyhypergéométrique.
   Notons $p(a, b, c, d)$ la probabilité de la répartition (a, b, c, d).
   On a alors :
   $$p(a, b, c, d) = \frac{C(13, a)\, C(13, b)\, C(13, c)\, C(13, d)}{C(52, 4)}$$
2. Notons $p'(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ la probabilité de la répartition $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$.
   Il y a cinq type de répartitions $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$:
   (a) les répartitions du type $(4, 0, 0, 0)$: l'un des quatre joueurs reçoit les quatre as.
   Le nombre de possibilités correspondantes est :
   $$C(4, 1) = 4$$
   D'où :
   $$\begin{aligned} p'(4, 0, 0, 0) &= 4p(4, 0, 0, 0) \\ &= 1.0564 \times 10^{-2} \end{aligned}$$

(b) les répartitions du type $(3,1,0,0)$: l'un des quatre joueurs reçoit trois as, un deuxième un as.
Le nombre de possibilités correspondantes est :

$$A(4,2) = 12$$

D'où :

$$\begin{aligned} p'(3,1,0,0) &= 12p(3,1,0,0) \\ &= 0.1648 \end{aligned}$$

(c) les répartitions du type $(2,2,0,0)$: deux joueurs reçoivent chacun deux as.
Le nombre de possibilités correspondantes est :

$$C(4,2) = 6$$

D'où :

$$\begin{aligned} p'(2,2,0,0) &= 6p(2,2,0,0) \\ &= 0.13484 \end{aligned}$$

(d) les répartitions du type $(2,1,1,0)$: l'un des quatre joueurs reçoit deux as, deux autres reçoivent chacun un as.
Le nombre de possibilités correspondantes est :

$$P(2,1,1) = 12$$

D'où :

$$\begin{aligned} p'(2,1,1,0) &= 12p(2,1,1,0) \\ &= 0.5843 \end{aligned}$$

(e) les répartitions du type $(1,1,1,1)$: chaque joueur reçoit un as.
Le nombre de possibilités correspondantes est :

$$C(4,4) = 1$$

D'où :

$$\begin{aligned} p'(1,1,1,1) &= p(1,1,1,1) \\ &= 0.1055 \end{aligned}$$

Exercice 10
On considère deux urnes contenant chacune dix boules : la première deux noires et huit blanches, la deuxième cinq noires et cinq blanches.

1. On tire de la première urne trois boules simultanément et on désigne par X la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches obtenues lors du

tirage.
Déterminer la loi de probabilité de X et son espérance mathématique.

2. On tire trois boules simultanément de l'une des deux urnes. Elles sont toutes blanches. Quelle est la probabilité de les avoir tirées de la première urne ?

Solution 10

1. (a) Déterminons la loi de probabilité de X.
Puisque l'urne ne contient que deux boules noires, donc au moins l'une des trois boules tirées serait blanche.
Comme X suit une loi hypergéométrique, alors pour tout k, $1 \leq k \leq 3$, on a :

$$P[X = k] = \frac{C(8, k)\, C(2, 3 - k)}{C(10, 3)}$$

D'où :

$$\begin{aligned} P[X = 1] &= \frac{1}{15} \\ P[X = 2] &= \frac{7}{15} \\ P[X = 3] &= \frac{7}{15} \end{aligned}$$

(b) Calculons l'espérance mathématique de X.
On a :

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{k=1}^{3} kP[X = k] \\ &= 2.4 \end{aligned}$$

2. Considérons les événements :

B : "les trois boules sont blanches"
U_1 : "les tirages sont effectués de la première urne"
U_2 : "les tirages sont effectués de la deuxième urne"

On a :

$$\begin{cases} P[U_1] = P[U_2] = \dfrac{1}{2} \\[2ex] P[B \mid U_1] = P[X = 3] = \dfrac{7}{15} \\[2ex] P[B \mid U_2] = \dfrac{C(5, 3)\, C(5, 0)}{C(10, 3)} = \dfrac{1}{12} \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{aligned} P[U_1 \mid B] &= \frac{P[U_1]\,P[B \mid U_1]}{P[U_1]\,P[B \mid U_1] + P[U_2]\,P[B \mid U_2]} \\ &= \frac{28}{33} \end{aligned}$$

Exercice 11
Un industriel vend des paquets de thé par lot de 25 paquets.
chaque paquet est supposé peser cent grammes, mais le côntrole statistique a établi, à partir de l'expérience antérieure de l'usine, que deux pour cent des paquts produits n'ont pas un poids réglementaire, c'est à dire qu'ils pèsent moins de cent grammes.

1. On choisit au hasard un lot.
   Calculer la probabilité P_1 qu'on y trouve au moins un paquet de thé non réglementaire.
2. On choisit au hasard cinq lots.
   Déterminer :
   (a) la probabilité P_2 que chaque lot contient au moins un paquet de thé non réglementaire.
   (b) la probabilité P_3 que chaque lot contient exactement un paquet de thé non réglementaire.
   (c) la probabililité P_4 que quatre lot contiennent au plus trois paquets de thé non réglementaires et le cinquième plus de trois paquets non réglementaires.
3. Un épicier achète à l'industriel cent lots.
   Déterminer l'espérance mathématique du nombre de lots qui contiennent :
   (a) exactement trois paquets non réglementaires
   (b) au moins deux paquets non réglementaires
   (c) au plus trois paquets non réglementaires

Solution 11
Désignons par X la variable aléatoire représentant le nombre de paquets de thé non réglementaires dans un lot donné. Alors X est une variable binomiale d'ordre $n = 25$ et de paramètre $p = 0.02$: $\mathfrak{B}(n,p)$

$$P[X = k] = C(25,k)\,(0.02)^k\,(0.98)^{25-k}$$

et :

$$E[X] = np = 0.5$$

1. La probabilité P_1 de trouver au moins un paquet de thé non réglementaire est :

$$\begin{aligned} P[X \geq 1] &= 1 - P[X < 1] \\ &= 1 - P[X = 0] \\ &= 0.60346 \end{aligned}$$

2. Notons X_i,$1 \leq i \leq 5$, la variable aléatoire représentant le nombre de paquets de thé non réglementaires dans le $i^{ème}$ lot. Alors $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ constituent un 5-échantillon de variable parente X, c'est àdire que $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ sont des variables aléatoires indépendantes qui suivent la même loi que X.

   (a) La probabilité que le $i^{ème}$ lot contient au moins un paquet de thé non réglementaire.est :

   $$P[X_i \geq 1] = P[X \geq 1]$$

   donc la probabilité P_2 que chaqu'un des cinq lots contient au moins un paquet de thé non réglementaire est :

   $$\begin{aligned} P_2 &= \prod_{i=1}^{5} P[X_i \geq 1] \\ &= (P[X \geq 1])^5 \\ &= 8.0028 \times 10^{-2} \end{aligned}$$

   (b) La probabilité qu'un lot contient exactement un paquet de thé non réglementaire est :

   $$P[X = 1] = 0.30789$$

   D'où, la probabilité P_3 que chaque lot contient exactement un paquet de thé non réglementaire est :

   $$\begin{aligned} P_3 &= \prod_{i=1}^{5} P[X_i = 1] \\ &= (P[X = 1])^5 \\ &= 2.7668 \times 10^{-2} \end{aligned}$$

(i) La probabililité qu'un lot contient au plus trois paquets de thé non réglementaires est :

$$\begin{aligned} P[X \leq 3] &= \sum_{k=0}^{3} P[X = k] \\ &= \sum_{k=0}^{3} C(25, k)(0.02)^k (0.98)^{25-k} \\ &= 0.99855 \end{aligned}$$

(ii) La probabililité qu'un lot contient plus de trois paquets de thé non réglementaires est :

$$\begin{aligned} P[X \geq 3] &= 1 - P[X < 3] \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{2} C(25, k)(0.02)^k (0.98)^{25-k} \\ &= 1.3243 \times 10^{-2} \end{aligned}$$

(iii) Donc, .la probabililité P_4 que quatre lot contiennent au plus trois paquets de thé non réglementaires et le cinquième plus de trois paquets non réglementaires est :

$$\begin{aligned} P_4 &= C(5, 4)(P[X \leq 3])^4 P[X \geq 3] \\ &= 0.065832 \end{aligned}$$

(a) Désignons par Y_k la variable aléatoire égale au nombre de lots, parmi les cent lots acheté par l'épicier, contenat chacun exactement k paquets non réglementaires. Alors, la variable aléatoire Y_k est distribuée selon une loi binomiale d'ordre $n = 100$ et de paramètre $p = P[X = k]$:

$$P[Y_k = i] = C(100, i)(P[X = k])^i (1 - P[X = k])^{100-i}$$

En particulier, pour $k = 3$, on obtient :

$$\begin{aligned} P[Y_3 = i] &= C(100, i)(P[X = 3])^i (1 - P[X = 3])^{100-i} \\ &= C(100, i)(0.011798)^i (0.988202)^{100-i} \end{aligned}$$

Puisque :

$$P[X = 3] = 0.011798$$

Il en résulte que :

$$\begin{aligned} E[Y_3] &= np \\ &= 1.1798 \end{aligned}$$

(b) Désignons par T_k la variable aléatoire égale au nombre de lots, parmi les cent lots acheté par l'épicier, contenat chacun au moins k paquets non réglementaires. Alors, la variable aléatoire T_k est distribuée selon une loi binomiale d'ordre $n = 100$ et de paramètre $p = P[X \geq k]$:

$$P[T_k = i] = C(100, i)(P[X \geq k])^i (1 - P[X \geq k])^{100-i}$$

En particulier, pour $k = 2$, on obtient :

$$\begin{aligned} P[T_2 = i] &= C(100, i)(P[X \geq 2])^i (1 - P[X \geq 2])^{100-i} \\ &= C(100, i)(0.088645)^i (0.911355)^{100-i} \end{aligned}$$

Puisque :

$$P[X \geq 2] = 0.088645$$

Il en résulte que :

$$\begin{aligned} E[T_2] &= np \\ &= 8.8645 \end{aligned}$$

(c) Désignons par S_k la variable aléatoire égale au nombre de lots, parmi les cent lots acheté par l'épicier, contenat chacun au plus k paquets non réglementaires. Alors, la variable aléatoire S_k est distribuée selon une loi binomiale d'ordre $n = 100$ et de paramètre $p = P[X \leq k]$:

$$P[S_k = i] = C(100, i)(P[X \leq k])^i (1 - P[X \leq k])^{100-i}$$

En particulier, pour $k = 3$, on obtient :

$$\begin{aligned} P[S_3 = i] &= C(100, i)(P[X \leq 3])^i (1 - P[X \leq 3])^{100-i} \\ &= C(100, i)(0.99855)^i (0.00145)^{100-i} \end{aligned}$$

Puisque :

$$P[X \leq 3] = 0.99855$$

Il en résulte que :

$$\begin{aligned} E[S_3] &= np \\ &= 99.855 \end{aligned}$$

Exercice 12

On considère une urne contenant b boules blanches et $a - b$ boules noires.
On tire au hasard une boule de l'urne, on note sa couleur, puis on la remet dans l'urne en y remettant en même temps r boules de la même couleur que la boule tirée, $r \in \mathbb{Z}$.

On effectue ainsi n tirages et note X la variable aléatoire donnant le nombre de boules blanches obtenues sur ces n tirages.

1. Quelle est la probabilité d'avoir k boules blanches aux k premiers tirages puis $(n-k)$ boules noires aux $(n-k)$ tirages suivants ?
2. En déduire la loi de probabilité de X.
3. Quelles sont les lois obtenues dans chacun des deux cas suivants :
   (a) $r = 0$?
   (b) $r = -1$?

Solution 12

1. La probabilité p_k d'avoir k boules blanches aux k premiers tirages puis $(n-k)$ boules noires aux $(n-k)$ tirages suivants est :

$$\begin{aligned} p_k &= \frac{b}{a}\frac{b+r}{a+r}...\frac{b+(k-1)r}{a+(k-1)r}\frac{a-b}{a+kr}\frac{(a-b)+r}{a+(k+1)r}...\frac{(a-b)+(n-k-1)r}{a+(n-1)r} \\ &= \frac{\left[\prod_{i=0}^{k-1}(b+ir)\right]\left[\prod_{i=0}^{n-k-1}((a-b)+ir)\right]}{\prod_{i=0}^{n-1}(a+ir)} \end{aligned}$$

2. Il en résulte que :

$$\begin{aligned} P[X=k] &= C(n,k)\,p_k \\ &= C(n,k)\frac{\left[\prod_{i=0}^{k-1}(b+ir)\right]\left[\prod_{i=0}^{n-k-1}((a-b)+ir)\right]}{\prod_{i=0}^{n-1}(a+ir)} \end{aligned}$$

   (a) Lorsque $r=0$, les tirages sont alors effectués avec remise, et la loi de X est donc une loi binomiale d'ordre n et de paramètre $\frac{b}{a}$: $\mathcal{B}\left(n,\frac{b}{a}\right)$:

$$\begin{aligned} P[X=k] &= C(n,k)\frac{\left[\prod_{i=0}^{k-1}b\right]\left[\prod_{i=0}^{n-k-1}(a-b)\right]}{\prod_{i=0}^{n-1}(a+ir)} \\ &= C(n,k)\left(\frac{b}{a}\right)^k\left(\frac{a-b}{a}\right)^{n-k} \end{aligned}$$

(b) dans le cas où $r = -1$, les tirages sont alors effectués sans remise, et la loi de X est donc une loi hypergéométrique :

$$\begin{aligned} P[X=k] &= C(n,k)\frac{\left[\prod_{i=0}^{k-1}(b-i)\right]\left[\prod_{i=0}^{n-k-1}((a-b)-i)\right]}{\prod_{i=0}^{n-1}(a-i)} \\ &= \frac{C(b,k)\,C(a-b,n-k)}{C(a,n)} \end{aligned}$$

Exercice 13
Une usine fabrique quatre cent lampes électriques à l'heure.
On admet que le nombre X de lampes défectueuses produites en une heure suit une loi de Poisson de paramètre α.

1. On suppose
$$\alpha = 15$$
Calculer :
$$P[X > 15]$$
2. Déterminer la plus grande valeur entière du paramètre α tel que :
$$P[X > 20] \leq 0.05$$

Solution 13
Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a :

$$P[X=k] = \frac{\alpha^k}{k!}e^{-\alpha}$$

1. Si :
$$\alpha = 15$$
alors :
$$\begin{aligned} P[X>15] &= 1 - P[X \leq 15] \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{15}\frac{\alpha^k}{k!}e^{-\alpha} \\ &= 0.43191 \end{aligned}$$

2. La relation :

$$P[X > 20] \leq 0.05$$

équivaut à :

$$P[X \leq 20] \geq 0.95$$

d'où :

$$\alpha = 14$$

Exercice 14
Un artilleur a une probabilité de $\dfrac{1}{5}$ d'atteindre une certaine cible.
Il tire dix coups et on compte le nombre de fois N où il atteint la cible.

1. Quelle est la loi de probabilité de N ?
2. Quelle est la probabilité qu'il ait touché la cible une fois ?
3. Quelle est la probabilité qu'il ait touché la cible au moins une fois ?

Solution 14

1. N suit une loi binimiale d'ordre 10 et de paramètre $\dfrac{1}{5}$: $\mathcal{B}\left(10, \dfrac{1}{5}\right)$.
   D'où, pour tout k, $0 \leq k \leq 10$, on a :
$$P[N = k] = C(10, k)\left(\frac{1}{5}\right)^k \left(\frac{4}{5}\right)^{10-k}$$
2. La probabilité p_1 que l'artilleur ait touché la cible une fois est :
$$\begin{aligned} p_1 &= P[N = 1] \\ &= C(10, 1)\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)^9 \\ &= 0.26844 \end{aligned}$$
3. La probabilité P_1 que l'artilleur ait touché la cible au moins une fois est :
$$\begin{aligned} P_1 &= \sum_{k=1}^{10} P[N = k] \\ &= 1 - P[N = 0] \\ &= 0.89263 \end{aligned}$$

Exercice 15
Une agence de renseignements A comprend plusieurs services spécialisés. Soit S l'un d'entre eux.
Le nombre de clients qui s'adresse à l'agence A au cours d'une journée est une variable aléatoire X qui suit une loi de Poisson de paramètre δ.
Désignons par Y la variable aléatoire représentant le nombre de clients s'adressant au service S.

1. Quelle est la probabilité, qu'un jour donné, n clients s'adresse à l'agence ?
2. Chaque client a la probabilité p de consulter le service S.
   Quelle est la probabilité qu'au cours d'une journée où n clients sont venus, k d'entre eux ont aient consulté le service S ?
3. Déterminet la loi conjointe de (X, Y).
4. En déduire la loi de probabilité de la variable aléatoire Y.

Solution 15

1. Pour tout n, $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$P[X = n] = \frac{\delta^n}{n!} e^{-\delta}$$

2. Si chaque client a la probabilité p de consulter le service S, la loi conditionnelle de Y, sous l'hypothèse $[X = n]$, est une loi binomiale d'ordre n et de paramètre p :

$$P[Y = k \mid X = n] = C(n, k) p^k (1 - p)^{n-k}$$

pour tout k, $0 \leq k \leq n$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout k, $0 \leq k \leq n$, on a :

$$\begin{aligned} P[X = n, Y = k] &= P[X = n] P[Y = k \mid X = n] \\ &= \frac{\delta^n}{k!(n-k)!} p^k (1 - p)^{n-k} e^{-\delta} \end{aligned}$$

4. Il en résulte que la loi marginale de Y est donnée pour tout $k \in \mathbb{N}$ par :

$$P[Y = k] = \sum_{n \in \mathbb{N}} P[X = n, Y = k]$$

Or :

$$n \geq k$$

donc :

$$\begin{aligned}
P[Y=k] &= \sum_{n=k}^{\infty} P[X=n, Y=k] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P[X=n+k, Y=k] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P[X=n+k]\, P[Y=k \mid X=n+k] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{k!n!} \delta^{n+k} p^k (1-p)^n e^{-\delta} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{k!n!} (\delta p)^k [\delta(1-p)]^n e^{-\delta} \\
&= \frac{(\delta p)^k}{k!} e^{-\delta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\delta(1-p)]^n}{n!} \\
&= \frac{(\delta p)^k}{k!} e^{-\delta} e^{\delta(1-p)} \\
&= \frac{(\delta p)^k}{k!} e^{-\delta p}
\end{aligned}$$

donc Y suit une loi de Poisson de paramètre δp.

Exercice 16
Le nombre de voitures fabriquées par une usine suit une loi de Poisson de paramètre λ, $\lambda > 0$.
La probabilité pour qu'une voiture présente un défaut de fabrication est p, $p > 0$.

1. Sachant que N voitures ont été fabriquées par l'usine, calculer la probabilité pour que k d'entre elles présentent un défaut.
2. Calculer la probabilité que k voitures produites soient défectueuses.

Solution 16
Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de voiture fabriquées par l'usine.
On a :

$$P[X=k] = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \ , \ k \in \mathbb{N}$$

Désignons par D la variable aléatoire représentant le nombre de voitures défectueuses fabriquées par l'usine.

1. Sous l'hypothèse $[X = N]$, la variable aléatoire D suit une loi binomiale d'ordre N et de paramètre p: $\mathcal{B}(N, p)$.
   D'où, pour tout k, $0 \leq k \leq N$ on a :
$$P[D = k \mid X = N] = C(N, k)\, p^k (1-p)^{N-k}$$
2. Il en résulte que :
$$\begin{aligned}
P[D = k] &= \sum_{N=k}^{+\infty} P[X = N, D = k] \\
&= \sum_{N=k}^{+\infty} P[X = N]\, P[D = k \mid X = N] \\
&= \sum_{N=0}^{+\infty} P[X = N + k]\, P[D = k \mid X = N + k] \\
&= \sum_{N=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{N+k}}{(N+k)!} e^{-\lambda} C(N + k, k)\, p^k (1-p)^N \\
&= \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda} \sum_{N=0}^{+\infty} \frac{[\lambda(1-p)]^N}{N!} \\
&= \frac{(\lambda p)^k}{k!} \exp -\lambda \exp \lambda (1-p) \\
&= \frac{(\lambda p)^k}{k!} \exp -\lambda p
\end{aligned}$$
   D suit donc une loi de Poisson de paramètre λp.

Exercice 17
Soient $X_1, ..., X_n$ n variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes une même loi exponentielle de paramètre λ, $\lambda > 0$.
Déterminer la loi de la variable aléatoire :
$$Z_n = X_1 + ... + X_n$$

Solution 17
Soit $.f$ la densité de probabilité de loi exponentielle de paramètre λ, et pour tout k, $1 \leq k \leq n$, soit f_k la densité de $X_1 + ... + X_k$.
On a :
$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq 0 \\ \lambda \exp -\lambda x & si \quad x > 0 \end{cases}$$

Démontrons, par récurrence sur n, que la densité f_n de $X_1 + ... + X_n$.est définie pour tout $x > 0$ par :

$$f_n(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} \exp -\lambda x$$

les variables aléatoires $X_1, ..., X_n$ étant indépendantes

(1) Pour $n = 1$, la propriétés est vraie.
(2) Suposons que pour tout k, $1 \leq k \leq n-1$, la densité f_k de $X_1 + ... + X_k$ est :

$$f_k(x) = \frac{\lambda^k}{(k-1)!} x^{k-1} \exp -\lambda x \quad , \quad x > 0$$

Puisque $X_1, ..., X_n$ sont indépendantes, alors :

$$\begin{aligned} f_n(x) &= (f_{n-1} * f)(x) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{n-1}(t) f(x-t)\, dt \\ &= \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \displaystyle\int_0^x \left[\frac{\lambda^{n-1}}{(n-2)!} t^{n-2} e^{-\lambda t}\right] \left[\lambda e^{-\lambda(x-t)}\right] dt & x > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \displaystyle\frac{\lambda^n}{(n-2)!} e^{-\lambda x} \int_0^x t^{n-2} dt & x > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \displaystyle\frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x} & x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

d'où le résultat.

Exercice 18
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent des lois normales $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ et $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ respectivement.
Déterminer la loi de la variable aléatoire :

$$T = X + Y$$

Solution 18
On a :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} \exp -\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 \ , \ x \in \mathbb{R}$$

et :

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} \exp -\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 \ , \ x \in \mathbb{R}$$

Puisque X et Y sont indépendantes alors :

$$\begin{aligned}
f_{X+Y}(u) &= (f_X * f_Y)(u) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\, f_Y(u-t)\, dt \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{t-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{u-t-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right] dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\sqrt{2\pi}} \exp -\frac{1}{2\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)}\left[u-(\mu_1+\mu_2)\right]^2
\end{aligned}$$

Puisque pour tout a, $a > 0$, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\left(ax^2+bx+c\right)\right] dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp \frac{b^2-4ac}{4a}$$

Donc la variable aléatoire :

$$T = X + Y$$

suit une loi normale de moyenne $\mu_1+\mu_2$ et de variance $\sigma_1^2+\sigma_2^2$:$\mathcal{N}\left(\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2\right)$

Exercice 19
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent des lois normales $\mathcal{N}(0,1)$ et $\mathcal{N}\left(\mu,\sigma^2\right)$ respectivement.

1. Calculer :
   (a) $P[X < 2.41]$
   (b) $P[X < 1.09]$
2. Déterminer x tel que :
   (a) $P[X < x] = .975$
   (b) $P[X < x] = .883$

3. Trouver une relation entre $P[X < x]$ et $P[X < -x]$
4. Montrer que :

$$P[a < X < b] = P[X < b] - P[X < a]$$

5. En déduire $P[-a < X < a]$ en fonction de $P[X < a]$.
6. Montrer que :

$$P[Y < y] = P\left[X < \frac{y-\mu}{\sigma}\right]$$

Calculer alors :

$$P[3 < Y < 4]$$

lorsque $\mu = 4$ et $\sigma = 2$.

7. On suppose que :

$$\begin{cases} P[Y > 1] = .8413 \\ P[Y > 9] = .0228 \end{cases}$$

Déterminer alors μ et σ.

Solution 19

1. D'après la table de la loi normale centrée réduite on a :

$$P[X < 2,41] = .92$$

$$P[X < 1,09] = .8621$$

2. D'après la table de la loi normale centrée réduite on a :

$$P[X < x] = 0,975 \quad \Longrightarrow \quad x = 1.96$$

$$P[X < x] = 0,883 \quad \Longrightarrow \quad x = 1.19$$

3. Puisque la densité de la loi normale centrée réduite est une fonction paire, alors on a :

$$\begin{aligned} P[X < -x] &= P[X \geq x] \\ &= 1 - P[X < x] \end{aligned}$$

4. On a :

$$\begin{aligned}]a,b[=]-\infty,b[-]-\infty,a] &\Longrightarrow P[a < X < b] = P[X < b] - P[X \leq a] \\ &\Longrightarrow P[a < X < b] = P[X < b] - P[X < a] \end{aligned}$$

puisque X est absolument continue.

5. On a :

$$\begin{aligned} P[-a < X < a] &= P[X < a] - P[X < -a] \\ &= 2P[X < a] - 1 \end{aligned}$$

6. Puisque X est la variable aléatoire centrée réduite associée à Y, alors :

$$P[Y < y] = P\left[X < \frac{y-\mu}{\sigma}\right]$$

Calculons :

$$P[3 < Y < 4]$$

lorsque $\mu = 4$ et $\sigma = 2$.

On a :

$$\begin{aligned} P[3 < Y < 4] &= P[Y < 4] - P[Y < 3] \\ &= P[X < 0] - P[X < -0.5] \\ &= P[X < 0] - (1 - P[X < 0.5]) \\ &= .5 - 1 + .6915 \\ &= .1915 \end{aligned}$$

7. On a :

$$\left\{\begin{array}{l} P[Y > 1] = .8413 \\ P[Y > 9] = .0228 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} P\left[X > \frac{1-\mu}{\sigma}\right] = .8413 \\ P\left[X > \frac{9-\mu}{\sigma}\right] = .0228 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} P\left[X < \frac{\mu-1}{\sigma}\right] = .8413 \\ P\left[X < \frac{9-\mu}{\sigma}\right] = .9772 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} \frac{\mu-1}{\sigma} = 1 \\ \frac{9-\mu}{\sigma} = 2 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} \sigma = \frac{8}{3} \\ \mu = \sigma + 1 \end{array}\right.$$

Exercice 20
La taille des individus d'une certaine population est une variable aléatoire normale de moyenne 171 cm et d'écart-type 4 cm

1. Un individu étant choisi au hasard et X étant sa taille en cm.
   Déterminer la probabilité des événements suivants :
   (a) $[X = 175\,\text{cm}]$ à un cm près,
   (b) $[X < 160\,\text{cm}]$
   (c) $[X > 190\,\text{cm}]$
   (d) $[|X - 171| > 8]$.
2. On choisit au hasard dix personnes dans la population et l'on note M_{10} la moyenne des tailles des individus choisis.
   (a) Calculer l'espérance mathématique et la variance de M_{10}.
   (b) Déterminer a tel que :
   $$P[|M_{10} - 171| > a] = 0.1$$
3. On choisit au hasard n personnes dans la population et l'on note M_n la moyenne des tailles des individus choisis.
   (a) Calculer l'espérance mathématique et la variance de M_n.
   (b) En admettant que M_n suit une loi normale, déterminer a tel que :
   $$P[|M_n - 171| > a] = 0.1$$
   (c) Démontrer que pour tout a, $a > 0$, on a :
   $$\lim_{n\to\infty} P[|M_n - 171| > a] = 0$$

Solution 20
Soit N la variable aléatoire normale centrée réduite associée à X :

$$N = \frac{X - 171}{4}$$

1. D'après la table de la loi normale centrée réduite on a :

   (a)
$$\begin{aligned} P[174 \leq X \leq 176] &= P[X \leq 176] - P[X \leq 174] \\ &= P\left[N \leq \frac{176-171}{4}\right] - P\left[N \leq \frac{174-171}{4}\right] \\ &= P[N \leq 1.25] - P[N \leq .75] \\ &= .8944 - .7734 \\ &= .121 \end{aligned}$$

   (b)
$$\begin{aligned} P[X < 160] &= P\left[N < \frac{160-171}{4}\right] \\ &= P[N < -2.75] \\ &= 1 - P[N < 2.75] \\ &= .003 \end{aligned}$$

   (c)
$$\begin{aligned} P[X > 195] &= 1 - P\left[N < \frac{195-171}{4}\right] \\ &= 1 - P[N < 6] \\ &= 0 \end{aligned}$$

   (d)
$$\begin{aligned} P[|X-171| > 8] &= P[|N| > 2] \\ &= 1 - P[|N| < 2] \\ &= 2 - 2P[N < 2] \\ &= .0456 \end{aligned}$$

2. Soit $X_1, ..., X_{10}$ le 10-échantillon tiré de la population.
   On a :
$$M_{10} = \sum_{k=1}^{10} X_k$$
   M_{10} est la moyenne empirique du 10-échantillon.

   (a) Il en résulte que :
$$\begin{aligned} E[M_{10}] &= E[X] \\ &= 171\,\text{cm} \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} V[M_{10}] &= \frac{V[X]}{10} \\ &= 1.6\,\mathrm{cm}^2 \end{aligned}$$

et par conséquent :

$$\begin{aligned} \sigma[M_{10}] &= \frac{\sigma[X]}{\sqrt{10}} \\ &= 1.2649\,\mathrm{cm} \end{aligned}$$

M_{10} suit une loi normale $\mathcal{N}(171\,\mathrm{cm}, 1.6\,\mathrm{cm}^2)$

(b) On a :

$$\begin{aligned} P[|M_{10}-171|>a] &= P\left[\frac{|M_{10}-171|}{\sigma[M_{10}]}>\frac{a}{\sigma[M_{10}]}\right] \\ &= 2-2P\left[\frac{M_{10}-171}{\sigma[M_{10}]}<\frac{a}{\sigma[M_{10}]}\right] \end{aligned}$$

d'où :

$$P[|M_{10}-171|>a]=.1$$

équivaut à :

$$P\left[\frac{M_{10}-171}{\sigma[M_{10}]}<\frac{a}{\sigma[M_{10}]}\right]=.9$$

d'où :

$$\frac{a}{\sigma[M_{10}]}=.8289$$

et finalement :

$$a=1.0485$$

3. Soit $X_1,...,X_n$ le n-échantillon tiré de la population.
On a :

$$M_n=\sum_{k=1}^{n}X_k$$

M_n est la moyenne empirique du n-échantillon.

(a) Il en résulte que :

$$E[M_n]=E[X]=171\,\mathrm{cm}$$

et :

$$V[M_n]=\frac{V[X]}{n}=\frac{16}{n}$$

et par conséquent :

$$\sigma[M_n] = \frac{\sigma[X]}{\sqrt{n}} = \frac{4}{\sqrt{n}}$$

M_n suit une loi normale $\mathcal{N}\left(171\,\text{cm}, \frac{16}{n}\,\text{cm}^2\right)$.

(b) Par un calcul analogue on aboutit à :

$$\frac{a}{\sigma[M_n]} = .8289$$

d'où :

$$a = \frac{3.3156}{\sqrt{n}}$$

(c) D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, pour tout a, $a > 0$, on a :

$$\begin{aligned} P[|M_n - 171| > a] &\leq \frac{V[M_n]}{a^2} \\ &\leq \frac{16}{na^2} \end{aligned}$$

d'où pour tout a, $a > 0$, on a :

$$\lim_{n\to\infty} P[|M_n - 171| > a] = 0$$

Exercice 21

Une machine fabrique en série une des pièces utilisées dans la construction d'un appareil électroménager.

Le diamètre de cette pièce doit être 10 cm, mais une marge de tolérance m est permise, c'est à dire toute pièce dont le diamètre est élément de l'intervalle $[10 - m, 10 + m]$ est acceptée.

On admet que la diamètre L de la pièce est une variable aléatoire normale de moyenne $\mu = 10\,\text{cm}$ et d'écart-type $\sigma = 0.12\,\text{cm}$.

1. Calculer :

   (a) la probabilité qu'une pièce mesure moins de 9.85 cm.

   (b) la probabilité qu'une pièce mesure moins de 10.21 cm sachant qu'elle mesure plus de 9.85 cm.

2. Sur 4375 pièces usinées, 924 ont dû être refusées : motié d'entre elles étant trop grandes et les autres trop petites.
   Déterminer la marge de tolérance m.
3. En supposant que le réglage de la machine permette que la variable aléatoire L soit toujours régie par une loi normale de moyenne $\mu = 10\,\text{cm}$ et d'écart-type σ, quelle valeur faudrait-il donner à σ pour que 90% de la production de cette machin esoit acceptés ?

Solution 21
Soit.:

$$D = \frac{L-\mu}{\sigma}$$

la variable aléatoire normale centrée réduite associée à L.

1. (a) On a :

$$\begin{aligned} P[L < 9.85] &= P\left[D < \frac{9.85-10}{0.12}\right] \\ &= P\left[D < \frac{9.85-10}{0.12}\right] \\ &= P[D < -1.25] \\ &= 1 - P[D < 1.25] \\ &= 0.1056 \end{aligned}$$

   (b) On a :

$$\begin{aligned} P[L < 10.21 \mid L > 9.85] &= \frac{P[(L < 10.21) \cap (L > 9.85)]}{P[L > 9.85]} \\ &= \frac{P[9.85 < L < 10.21]}{P[L > 9.85]} \\ &= \frac{P[L < 10.21] - P[L < 9.85]}{P[L > 9.85]} \end{aligned}$$

   Or :

$$\begin{aligned} P[L < 10.21] &= P\left[D < \frac{10.21-10}{0.12}\right] \\ &= P[D < 1.75] \\ &= 0.9599 \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} P[L > 9.85] &= 1 - P[L < 9.85] \\ &= P[D < 1.25] \\ &= 0.8944 \end{aligned}$$

d'où :

$$P[L < 10.21 \mid L > 9.85] = 0.95517$$

2. On a :

$$\begin{aligned} P[L \notin [10 - m, 10 + m]] &= P\left[D \notin \left[\frac{-m}{0.12}, \frac{m}{0.12}\right]\right] \\ &= 1 - P\left[D \in \left[\frac{-m}{0.12}, \frac{m}{0.12}\right]\right] \\ &= 2 - 2P\left[D < \frac{m}{0.12}\right] \end{aligned}$$

or :

$$\begin{aligned} P[L \notin [10 - m, 10 + m]] &= \frac{924}{4375} \\ &= 0.2112 \end{aligned}$$

donc :

$$P\left[D < \frac{m}{0.12}\right] = 0.8944$$

d'où :

$$\frac{m}{0.12} = 1.25$$

et finalement :

$$m = 0.15$$

3. Puisque la relation :

$$P[L \in [10 - m, 10 + m]] = 0.90$$

est équivalente à :

$$P\left[D < \frac{m}{\sigma}\right] = 0.95$$

alors :

$$\frac{m}{\sigma} = 1.65$$

et finalement :

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{0.15}{1.65} \\ &\simeq 0.09 \end{aligned}$$

Exercice 22
T_n désigne une variable aléatoire de Student à n degrés de liberté.

1. Déterminer t tel que :
   (a) $P[T_7 < t] = .95$
   (b) $P[T_{24} < t] = .6$
2. Calculer :
   (a) $P[T_5 < .92]$
   (b) $P[T_7 < 3]$
3. Déterminer n tel que :
   (a) $P[T_n < 2.6] = .99$
   (b) $P[T_n < 1.94] = .95$
4. Trouver une relation entre $P[T_n < x]$ et $P[T_n < -x]$
5. En déduire $P[-a < T_n < a]$ en fonction de $P[T_n < a]$
   Déterminer a tel que :
$$P[-a < T_5 < a] = .95$$

Solution 22

1. D'après la table de la fonction de répartition de la loi Student à n degrés de liberté, on a :
$$P[T_7 < t] = .95 \quad \Longrightarrow \quad t = 1.9$$
$$P[T_{24} < t] = .6 \quad \Longrightarrow \quad t = .256$$
2. D'après la table de la fonction de répartition de la loi Student à n degrés de liberté, on a :
$$P[T_5 < 0,92] = .8$$
$$P[T_7 < 3] = .99$$
3. D'après la table de la fonction de répartition de la loi Student à n degrés de liberté, on a :
$$P[T_n < 2,6] = .99 \quad \Longrightarrow \quad n = 15$$
$$P[T_n < 1,94] = .95 \quad \Longrightarrow \quad n = 6$$

4. Puisque la densité de probabilité de la variable aléatoire de Student à n degrés de liberté est une fonction paire, donc :

$$\begin{aligned} P[T_n < x] &= P[T_n > -x] \\ &= 1 - P[T_n < -x] \end{aligned}$$

5. On en déduit que :

$$\begin{aligned} P[-a < T_n < a] &= P[T_n < a] - P[T_n < -a] \\ &= 2P[T_n < a] - 1 \end{aligned}$$

En particulier :

$$\begin{aligned} P[-a < T_5 < a] = .95 &\Longrightarrow 2P[T_5 < a] - 1 = .95 \\ &\Longrightarrow P[T_5 < a] = .975 \\ &\Longrightarrow a = 2.57 \end{aligned}$$

Exercice 23

χ_n désigne une variable aléatoire du Khi-deux à n degrés de liberté.

1. Déterminer x tel que :
   (a) $P[\chi^2_{26} < x] = .75$
   (b) $P[\chi^2_{21} < x] = .01$
2. Calculer :
   (a) $P[\chi^2_3 < 1.21]$
   (b) $P[\chi^2_5 < 9.24]$
3. Déterminer n tel que :
   (a) $P[\chi^2_n < 3.36] = .5$
   (b) $P[\chi^2_n < 2.20] = .1$

Solution 23

1. D'après la table de la fonction de répartition de la loi du Khi-deux à n degrés de liberté , on a :

$$P[\chi^2_{26} < x] = .75 \Longrightarrow x = 30.4$$

$$P[\chi^2_{21} < x] = .01 \Longrightarrow x = 8.9$$

2. D'après la table de la fonction de répartition de la loi du Khi-deux à n degrés de liberté , on a :

$$P\left[\chi_3^2 < 1,21\right] = 0.25$$

$$P\left[\chi_5^2 < 9,24\right] = 0.9$$

3. D'après la table de la fonction de répartition de la loi du Khi-deux à n degrés de liberté , on a :

$$P\left[\chi_n^2 < 3.36\right] = .5 \quad \Longrightarrow \quad n = 4$$

$$P\left[\chi_n^2 < 2.2\right] = .1 \quad \Longrightarrow \quad n = 6$$

Exercice 24

$F_{n,m}$ désigne une variable aléatoire de Fisher à (n, m) degrés de liberté.

1. Déterminer f tel que :
   (a) $P\left[F_{2,5} < f\right] = .95$
   (b) $P\left[F_{12,8} < f\right] = .95$
2. Déterminer f tel que :
   (a) $P\left[F_{20,11} < f\right] = .99$
   (b) $P\left[F_{16,3} < f\right] = .99$

Solution 24

1. D'après la table de la fonction de répartition de la loi de Fisher à (n, m) degrés de liberté , on a :

$$P\left[F_{2,5} < f\right] = .95 \quad \Longrightarrow \quad f = 5.79$$

$$P\left[F_{12,8} < f\right] = .95 \quad \Longrightarrow \quad f = 3.28$$

2. D'après la table de la fonction de répartition de la loi de Fisher à (n, m) degrés de liberté , on a :

$$P\left[F_{20,11} < f\right] = .99 \quad \Longrightarrow \quad f = 4.1$$

$$P\left[F_{16,3} < f\right] = .99 \quad \Longrightarrow \quad f = 5.29$$