MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

DIRECTION DES EXAMENS ET CONCOURS
DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR (DECOES)

REPUBLIQUE DE COTE D'IVOIRE
Union - Discipline - Travail

BREVET DE TECHNICIEN SUPERIEUR / SESSION 2010

FILIERE TERTIAIRE : FINANCES -COMPTABILITE

EPREUVE : **MATHEMATIQUES, STATISTIQUES ET PROBABILITE**

Durée de l'épreuve : 3 Heures

Coefficient de l'épreuve : 2

Cette épreuve comporte 03 pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3. Le candidat recevra une feuille de papier millimétré. L'usage des tables financières et statistiques est autorisé.

EXERCICE 1 : ETUDE DE FONCTION

1ère PARTIE

Soit f la fonction de]0 ; + ∞[dans IR définie par : $f(x) = \frac{1+\ln x}{x^2}$

1) Etudier les variations de la fonction f.

2) On désigne par (C) la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O,\vec{I},\vec{J})$,et par K le point d'intersection de la courbe (C) avec l'axe des abscisses.
   a) Calculer les coordonnées du point K.
   b) Donner une équation de la tangente à la courbe (C) au point K.

3) Soit g la fonction de]0 ; + ∞ [dans IR définie par : $g(x) = 1 - x + \ln x$.
   a) Etudier les variations de la fonction g.
   b) Déduire de la question précédente le signe de g(x) suivant les valeurs de x.

2e PARTIE

On désigne par h la fonction définie de]0 ; + ∞[dans IR par : $h(x) = \frac{-2 - (x+1)\ln x}{x}$.

1) Calculer $\lim\limits_{x \to 0} h(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$

2) On admet que h est dérivable sur]0 ; + ∞[
   a) Vérifier que $\forall x \in]0 ; +\infty[$ $h'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$
   b) Dresser le tableau de variation de h.

3- a) Montrer que h réalise une bijection de l'intervalle] 0 ; + ∞[dans l'intervalle] -∞ ; + ∞[
   b) En déduire que l'équation h(x) = 0 admet une solution unique α et que $\ln(\alpha) = \frac{-2}{1+\alpha}$

c) Donner un encadrement de α, en déduire celui de $\ln(\alpha)$.

4) On désigne par (Γ) la courbe représentative de la fonction h dans le plan muni d'un repère orthonormé.

a) Etudier les branches infinies de (Γ).

b) Construire la courbe (Γ).

EXERCICE 2 : CALCUL MATRICIEL

1ère PARTIE

On considère la matrice M définie par :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que M est une matrice inversible.

2) Déterminer la matrice inverse M^{-1} de M.

2e PARTIE

Une entreprise assure la production de trois types d'objets appelés respectivement A, B, C.

- Tout programme hebdomadaire de production de ces objets s'exprime par une matrice $\mathcal{P}$ définie par :

$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$, où u, v, w désignent respectivement les quantités d'objets A, B, C fabriqués pendant la semaine donnée. Par exemple : dire que pour une semaine donnée, le programme de production des objets A, B, C est la matrice $\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 30 \end{pmatrix}$ revient à dire, que pour la semaine considérée, l'entreprise a fabriqué 20 objets A, 10 objets B et 30 objets C.

- Pour réaliser un programme hebdomadaire de production de ces objets A, B, C, on utilise un kit de ressources qui s'exprime aussi par une matrice $\mathcal{R} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ où x, y, z

désignent respectivement le nombre de kilogrammes de matières premières, le nombre d'heures de main d'œuvre et le nombre de kilowattheures.
Dans cette entreprise, le système de production obéit à l'égalité matricielle suivante $M \times \mathcal{R} = \mathcal{P}$. où M désigne la matrice donnée dans la 1ere partie.

1) Déterminer l'égalité matricielle équivalente à l'égalité $M \times \mathcal{R} = \mathcal{P}$.

2) Déterminer le programme hebdomadaire de production, correspondant au kit de ressources $\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 230 \\ 130 \\ 100 \end{pmatrix}$

3) Déterminer le kit de ressources qu'il faut pour réaliser le programme hebdomadaire de production $\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 30 \end{pmatrix}$.

<u>EXERCICE 3</u> : Probabilité

Une entreprise fabrique par jour, des jouets qu'elle conditionne dans des sacs appropriés à raison de 100 jouets par sacs. La probabilité qu'un jouet qu'elle fabrique soit défectueux est de 0,05.

On désigne par X la variable aléatoire « X égale au nombre de jouets défectueux conditionnés dans un sac ».

1°) Montrer que X suit une loi Binomiale dont on précisera les paramètres.

2°) Déterminer le nombre de jouets défectueux que pourrait contenir en moyenne un sac de jouets fabriqués par cette entreprise.

3°) Montrer que la loi Binomiale que suit la variable aléatoire X, peut être approchée par une loi de POISSON dont on précisera le paramètre.

4°) Utiliser la loi de POISSON pour calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

A : « Il y a exactement 2 jouets défectueux parmi les jouets conditionnés dans 1 sac. »

B : « Il y a au plus 4 jouets défectueux parmi les jouets conditionnés dans 1 sac. »

C : « Il y a au moins 5 jouets défectueux parmi les jouets conditionnés dans 1 sac. »

5°) Quel serait le chiffre d'affaires moyen d'un commerçant, qui revendrait au prix unitaire de 15 000 F les jouets contenus dans un sac.

****