

BREVET DE TECHNICIEN SUPERIEUR / SESSION 2009

FILIERE TERTIAIRE : FINANCES - COMPTABILITE

EPREUVE : **MATHEMATIQUES, STATISTIQUES ET PROBABILITE**

Durée de l'épreuve : 3 Heures

Coefficient de l'épreuve : 2

EXERCICE 1 : ETUDE DE FONCTION

Partie I : Etude d'une fonction

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, définie par $f(x) = -x + 4 + e^{x-3}$.

On pose $g(x) = (x-3) \left[-1 + \frac{1}{x-3} + \frac{e^{x-3}}{x-3} \right]$

- 1 -
 - a) Montrer que lorsque $x \mapsto +\infty$, $g(x) = f(x)$.
 - b) Etudier les variations de la fonction f
- 2 - On désigne par (C) la courbe de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) du plan
 - a/ Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = -x + 4$ est asymptote à (C) en $-\infty$
 - b/ Etudier la position de la courbe (C) par rapport à la droite (Δ) .
- 3 - On désigne par A le point de la courbe (C) où la tangente (T) est perpendiculaire à la droite (Δ) .
 - a/ Déterminer les coordonnées du point A .
 - b/ Déterminer une équation de la tangente (T) .
- 4 - On pose $h(x) = \left(\frac{x-3}{x} \right) \left[-1 + \frac{1}{x-3} + \frac{e^{x-3}}{x-3} \right]$
 - a) Montrer que lorsque $x \mapsto +\infty$, $h(x) = \frac{f(x)}{x}$.
 - b) Etudier la branche infinie de (C) en $+\infty$.
 - c) Construire (Δ) , (T) et (C) .

- 5) - On appelle valeur moyenne d'une fonction continue f sur un intervalle $[a; b]$, le nombre M défini par :

$$M = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

On considère la fonction F de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, définie par :

$$F(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x + e^{x-3}.$$

- a/ Vérifier que F est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
- b/ Déterminer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[1; 7]$.

Partie II : Application économique

La Briqueterie LAMBERTINI fabrique par semaine, entre 1 dizaine de tonnes et 7 dizaines de tonnes de briques. On sait que x dizaines de tonnes de briques fabriquées par semaine, engendrent des coûts $h(x)$ exprimés en millions de francs. Ces coûts $h(x)$ vérifient la relation $h(x) = -x + 4 + e^{x-3}$.

- 1 - Déterminer les coûts de production respectifs de 10t, 20t et 70t de briques fabriqués par semaine.
- 2 - Déterminer le nombre de tonnes de briques qu'il faut fabriquer par semaine, pour minimiser les coûts de production. Préciser ce coût minimum.
- 3 - Quel est par semaine, le coût moyen de fabrication de briques, que supporte la briqueterie LAMBERTINI ?

EXERCICE 2 : CALCULS MATRICIELS

I – On considère la fonction polynôme f définie par : $f(x) = -x^3 + 5x^2 + x - 5$

- 1 - Calculer $f(1)$.
- 2 - Factoriser $f(x)$.

II – On considère la matrice A définie par : $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

- 1 - On désigne par M , la matrice définie par : $M = A - xI$, où $x \in \mathbb{R}$, et I désigne la matrice carrée unité d'ordre 3.
 - a/ - Calculer le déterminant de la matrice M .
 - b/ - Pour quelles valeurs du réel x , la matrice M est-elle inversible ?
- 2 - a/ - Calculer A^2 et A^3 ; puis trouver la matrice N définie par :
 $N = -A^3 + 5A^2 + A - 5I$.
b/ - En déduire que A est inversible, et trouver sa matrice inverse A^{-1}

III – En utilisant le calcul matriciel, résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 2x - 2y + z = 20 \\ -2x + y - 2z = -23 \\ x - 2y + 2z = 22 \end{cases}$$

EXERCICE 3 : PROBABILITE

Une avenue comporte 15 (quinze) intersections munies chacune d'un feu tricolore. Pour chacun de ces feux, le rouge dure 35 secondes, l'orange 5 secondes et le vert 20 secondes.

Un automobiliste décide de parcourir cette avenue, de bout en bout.

- 1 - Quelle est la probabilité de trouver à une de ces intersections :
 - a/ le feu au vert
 - b/ le feu au rouge
 - c/ le feu à l'orange.

2 - L'arrêt est obligatoire à une intersection si le feu est au rouge ou à l'orange. Quelle est pour cet automobiliste, la probabilité de s'arrêter à une intersection ?

3 - On suppose que les 15 feux fonctionnent de façon indépendante, et que la probabilité de s'arrêter est $\frac{2}{3}$. Soit X le nombre d'arrêts pour cet automobiliste qui parcourt cette avenue.

a/ Montrer que X suit une loi Binomiale $B(n,p)$ que l'on précisera.

b/ Calculer la probabilité pour cet automobiliste de :

- * ne s'arrêter aucune fois.
- * s'arrêter exactement deux fois.
- * s'arrêter au moins 3 fois.

4°/ Combien de fois en moyen, s'arrêtera-t-il probablement de la 1^{ère} à la 15^e intersection ?
