REPUBLIQUE DE COTE D'IVOIRE
Union - Discipline -Travail

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

IT Academy
PROFESSIONAL TRAINING
AUDITS CONSULTING AND EXPERTISE

University of Technologies and Solutions Integrator

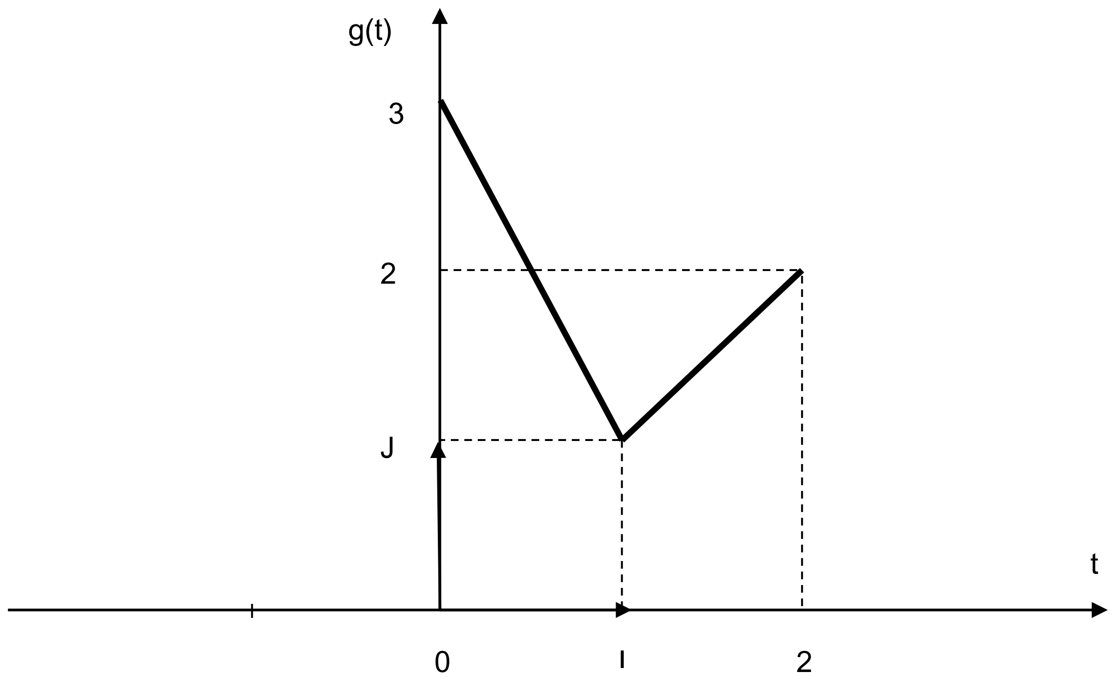
Epreuve de : **TRAITEMENT DE SIGNAUX & MATHEMATIQUES**	**BTS BLANC N°1** (13.04.2021) / 8h – 12h	**Année académique** : 2020 - 2021
		Filière : RIT ABIDJAN
		Durée : 4 heures
		Coefficient : 4

EXERCICE 1 :

PARTIE I :

On considère le signal électrique périodique et pair dont la représentation sur la demi-période est donnée dans le repère orthonormé (O,I,J) ci-dessous :

(Unité graphique : 2 carreaux ⟶ 1cm).



1. Montrer que $g(t) = \begin{cases} -2t + 3 \; si \; 0 \leq t \leq 1 \\ t \qquad si \; 1 \leq t < 2 \end{cases}$
2. a) Quelle est la période de g ?

   b) Représenter g sur l'intervalle $[-4\,;\, 6]$
3. a) Montrer que g est un signal à énergie infinie.

   b) Calculer la puissance Totale Pg de g.

4. a) Calculer la valeur moyenne de g.

   b) $(a_n)n \in IN$ et $(b_n)n \in IN$ désignant les coefficients de Fourier réels de g.

Montrer que $a_0 = \frac{7}{4}$ et pour $n \geq 1, a_n = \frac{4}{(\pi n)^2}\left[(-1)^n + 2 - 3\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right]$

   a) Déterminer b_n pour tout entier naturel n.

5. a) Montrer que g est développable en série de Fourier sur [0,1[.

   b) En déduire que la série de Fourier de g est donnée par :

$$Sg(t) = \frac{7}{4} + \frac{4}{n^2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n + 2 - 3cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2}\right)\right]cos\left(\frac{n\pi}{2}t\right)$$

<u>PARTIE II</u> :

Le signal g de la PARTIE I est filtré par un filtre dont la bande passante est [0 ; 1,45Hz].

On note s(t) le signal à la sortie du filtre.

1. Identifier ce filtre.
2. Déterminer l'expression de s(t).
3. Donner la représentation graphique de son spectre d'amplitude unilatérale.

   (Unité graphique : 2 carreaux $\longrightarrow$ 1cm).

4. a) En appliquant le théorème de Parseval, déterminer la puissance de s notée P_s.

   b) En déduire la valeur du rapport : $20log_{10}\left(\frac{P_s}{P_g}\right)$.

<u>EXERCICE 2</u> :

On considère le signal y(t) défini de la manière suivante :

$$y(t) = \begin{cases} U_0 \cos(2\pi f_0 t) & si\ |t| \leq 2T_0 \\ 0 & si\ non \end{cases} \qquad U_0 = 1vot \text{ et } T_0 = 1ms$$

1. Ce signal est la multiplication d'un signal m(t) par $U_0 \cos(2\pi f_0 t)$, c'est-à-dire

   $y(t) = m(t).U_0 \cos(2\pi f_0 t)$.

a) Déterminer l'expression de $m(t)$.

b) Représenter $m(t)$ sur l'intervalle $\left[-\frac{5T_0}{2},+\frac{5T_0}{2}\right]$.

c) Déterminer la transformée de Fourier $M(f)$ de $m(t)$.

d) Tracer le spectre de $m(t)$ dans l'intervalle $[-f_0;+f_0]$.

e) Représenter $y(t)$ sur l'intervalle $\left[-\frac{5T_0}{2},+\frac{5T_0}{2}\right]$.

f) Déterminer Y(f) la transformée de Fourier de $y(t)$.

g) Donner l'allure du spectre de Y(f) dans l'intervalle $[-2f_0;+2f_0]$.

2. On utilise un signal m(t) périodique de période T_1 défini comme suit :

$$y(t)=\begin{cases} A & si\ |t|\le \frac{T_1}{10} \\ 0 & si\ non \end{cases}$$

$\mathrm{A} = 10\mathrm{vot}$ et $\mathrm{T}_1 = 10\mathrm{ms}$

a) Représenter $m(t)$ sur l'intervalle $\left[-\frac{11T_1}{10},+\frac{5T_1}{10}\right]$.

b) Former le développement en série de Fourier complexe de $m(t)$ noté, $Sm(t)$.

c) Représenter le spectre bilatéral d'amplitude de $Sm(t)$ dans l'intervalle $[-15f_1;+15f_1]$ sachant que $f_1=\frac{1}{T_1}$

d) Calculer la puissance moyenne totale de $m(t)$.

EXERCICE 3 :

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, muni da sa base canonique $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$.

Soit θ un angle fixé, et f_θ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$A_\theta=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -sin\theta \\ -1 & 0 & cos\theta \\ -sin\theta & cos\theta & 0 \end{pmatrix}$$

1. Démontrer que le polynôme caractéristique de A_θ est

$P_\theta\,(x)=-x^3+\ 2x+sin2\theta.$

2. a) En calculant $P_\theta\,(0)$, déterminer pour quelles valeurs de $\theta \in \mathbb{R}$, f_θ n'est pas un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

   b) Déterminer le noyau N et l'image Im de f_π, où f_π désigne f_θ pour $\theta = \pi$.

   (on précisera une base de chacun de ces sous-espaces vectoriels).

3. On pose $\theta = \frac{\pi}{4}$ et $f_{\frac{\theta}{4}} = f$, puis on considère les vecteurs :

   $e'_1 \;\; = e_1 cos\theta + e_2 sin\theta$; $\quad e'_2 \;\; = f(e_2)$; $\quad e'_3 \;\; = f(e_3)$

   a) Démontrer que le système $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

   b) Démontrer que la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$' à la base $\mathcal{B}$ est :

   $$Q = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

   c) Préciser la matrice A' de f dans la base $\mathcal{B}$'.

4. On pose à présent que $\theta = 0$

   b) Montrer que les vecteurs $u = (1{,}0{,}1)$, $v = (-1, \sqrt{2}, 1)$, et $w = (-1, -\sqrt{2}, 1)$ constituent une base $\mathcal{B}'' = (u, v, w)$ de $\mathbb{R}^3$ et que ce sont des vecteurs propres de A_0, associés respectivement aux valeurs propres 0,$\sqrt{2}, et - \sqrt{2}$

   c) Résoudre le système différentiel suivant :

   $$(S) \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + z \\ \dfrac{dz}{dt} = y \end{cases}$$

****