REPUBLIQUE DE COTE D'IVOIRE
Union - Discipline -Travail

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

IT Academy

University of Technologies and Solutions Integrator

Epreuve de : **MATHEMATIQUES & TRAITEMENT DE SIGNAUX**	**BTS BLANC N°1** (26.04.2022) / 8h – 10h	**Année académique** : 2021 - 2022
		Filière : RIT
		Durée : 2
		Coefficient : 4

EXERCICE 1

On Considère la fonction g de IR, périodique, de période π, définie par :

$g(t) = t(\pi - t) \quad si\ t \in [0; \pi[$

1. a) Tracer, dans un repère orthogonal (O, i, j), la courbe représentative de la restriction de la fonction g à l'intervalle $[-2\pi; 2\pi[$.
   b) Montrer que g est paire.
2. a) Calculer les coefficients réels de Fourier.
   b) Vérifier que g satisfait aux conditions de Dirichlet sur IR.
   c) Ecrire la série de Fourier Sg(t) de g.
   d) En donnant à t une valeur particulière, montrer que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

3. La valeur efficace de la fonction g est telle que : $g^2{}_{eff} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} g^2(t)\,dt$
   a) Calculer $g^2{}_{eff}$
   b) La valeur efficace de la fonction g peut également s'exprimer à l'aide des coefficients de Fourier de g :
   $g^2{}_{eff} = a^2{}_0 + \frac{1}{2}\sum_1^{+\infty} a^2{}_n$ (Formule de Parseval).

Soit P le nombre défini par : $P = a^2{}_0 + \frac{1}{2}(a^2{}_1 + a^2{}_2 + a^2{}_3 + a^2{}_4 + a^2{}_5)$

Donner l'approximation décimale P_1 de P à 10^{-3} près par excès

On peut observer que $\frac{P_1}{g^2{}_{eff}}$ est supérieur à 0,999.

Le nombre P_1 est donc une bonne approximation de $g^2{}_{eff}$

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 2 :

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$\begin{cases} f(e_1) = 3e_1 - e_2 + 3e_3 \\ f(e_1 + 2e_2 + e_3) = 3e_2 - e_3 \\ f(e_1 + e_3) = 2e_1 - e_2 + 3e_3 \end{cases}$$

On note A la matrice associée à f dans la base $\mathcal{B}$.

1. Montrer que $t_A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ où t_A désigne la transposée de la matrice A. ***NB :***

   toute matrice plaquée ne sera pas prise en compte.

2. On note g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$G = A - 2I \text{ où } I = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   a) Déterminer G et vérifier que g n'est pas un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

   b) Déterminer le noyau Ker(g) et l'image Im(g) de g.

3. On considère les vecteurs suivants :

   $v_1 = (1,1,1)$; $v_2 = (0,1,-1)$ *et* $v_3 = (1,1,0)$ tel que $f(v_3) = 2v_3 - v_2$

   a) Montrer que $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

   b) Déterminer $f(v_1)$, $f(v_2)$ en fonction de v_1, v_2, v_3.

   c) En déduire des valeurs propres de f et donner la matrice T de f dans la base $\mathcal{B}'$

4.

   a) Si λ est une valeur propre de f associée au vecteur u, montrer par récurrence sur k, que λ^k est valeur propre de $f^k = fofofo \ldots of$, ($\boldsymbol{k}$ ***fois***) associé à u.

   b) On note P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et soit $Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

   Calculer PQ.

Scanné avec CamScanner

c) En déduire que la matrice P est inversible et calculer son inverse P^{-1}.

5. On admet que $A^3 = PT^3P^{-1} = \begin{pmatrix} 15 & -7 & -7 \\ -17 & 13 & 5 \\ 31 & -19 & -11 \end{pmatrix}$ et que $T^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & k2^{k-1} \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}$

a) Déterminer la matrice A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

b) On considère les vecteurs $(U_n), (V_n), et\ (W_n)$ qui sont trois suites récurrentes linéaires d'ordre 1 vérifiant :$\forall n\ n \in \mathbb{N}, \begin{cases} U_{n+1} = 3U_n - V_n - W_n \\ V_{n+1} = -U_n + 2V_n \\ W_{n+1} = 3U_n - 2V_n \end{cases}$

Montrer que $\begin{pmatrix} U_n \\ V_n \\ W_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} U_0 \\ V_0 \\ W_0 \end{pmatrix}$

c) Si $U_0 = 1, V_0 = 1, W_0 = 1$.

Déterminer le terme général des suites $(U_n), (V_n), et\ (W_n)$.

****

Scanné avec CamScanner