RCICE 3 :

n considère l'espace vectoriel IR^3 muni de sa base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$ et $f_{a,b}$ désigne l'endomorphisme de IR^3 défini par :

$$\begin{cases} f_{a,b}(e_1) = a\,e_2 + b\,e_3 \\ f_{a,b}(e_2) = b\,e_1 + a\,e_3 \\ f_{a,b}(e_3) = a\,e_1 + b\,e_2 \end{cases} \qquad (a \in IR^*, b \in IR^*)$$

1°)

a) Soit $A_{a,b}$ la matrice de l'endomorphisme $f_{a,b}$ relativement à la base canonique de IR^3.

Montrer que $t_{A_{a,b}} = \begin{bmatrix} o & a & b \\ b & o & a \\ a & b & o \end{bmatrix}$ ($t_{A_{a,b}}$ désigne la transposée de la matrice $A_{a,b}$)

b) Montrer que $\forall a,b \in IR^*$, $a^2 - ab + b^2$ est strictement positif (on pourra utiliser la forme canonique de a^2-ab+b^2 considéré comme polynôme du second degré en a).

2°)

a) Calculer le déterminant de la matrice $A_{a,b}$

b) On rappelle que $a^3 + b^3 = (a + b)\ (a^2 - ab + b^2)$

Pour quelles valeurs de a et b $\in IR^*$, l'endomorphisme $f_{a,b}$ est-il un automorphisme de IR^3 ? Justifier.

c) Déterminer le noyau N_2, de l'endomorphisme $f_{2,-2}$ ($f_{2,-2}$ désigne l'endomorphisme $f_{a,b}$ pour a = 2 et b = -2)

d) Déterminer l'image I_2 de $f_{2,-2}$

3°) Désormais a = b et différent de zéro.

a) Montrer que les réels – a et 2a sont des valeurs propres de la matrice $A_{a,a}$

b) Donner le spectre de la matrice $A_{a,\,a}$ noté s p ($A_{a,\,a}$)

c) Déterminer le sous-espace propre E (-a) associé à la valeur propre – a et le sous-espace propre associé à la valeur propre 2a noté E (2a)