IT Academy

Année Académique
2020 - 2021
Durée : 2H00

EXAMEN DE MATHEMATIQUES

EXERCICE 1 : 10 points

L'espace vectoriel IR³ est muni de la base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$. On considère l'endomorphisme f de IR³ définie par :

$$f(x, y, z) = (2x - 2y + z\,; 2x - 3y + 2z\,;\ -x + 2y)$$

1. Déterminer la matrice A associée à f relativement à la base canonique de IR³.
2. a) L'endomorphisme f est-il un automorphisme de IR³ ? Justifier votre réponse.
   b) Déterminer $kerf$ et l'image Imf .
3. Pour tout réel x, on pose $K = A - xI$ et $P(x) = \det K$
   a) Calculer $P(x)$. Que représente $P(x)$?
   b) En déduire les racines de $P(x)$. Que représentent les racines de $P(x)$?
   c) f est – elle diagonalisable ? Justifier votre réponse.
4. Soit le système d'équations linéaires (S) dont l'écriture matricielle est :
   $$X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (S) \Leftrightarrow AX = -3X$$
   Résoudre (S).
5. Soient les vecteurs $v_1 = (2; 1; 0), v_2 = (1; 0; -1)\ et\ v_3 = (1; 2; -1)$ de $\mathbb{R}^3$.
   a) Montrer que la famille de vecteurs $B' = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   b) Ecrire la matrice C de f dans la base B'. Quelle est sa nature ?
   c) Déterminer P la matrice de passage de la base B à la base B'.
6. Déterminer l'inverse de P et montrer que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

EXERCICE 2 : 5 points

1. Décomposer en éléments simples $F(p) = \frac{p+21}{(p+1)(p^2+9)}$
2. Résoudre, en utilisant la transformation de Laplace l'équation différentielle suivante :

$$x'' + 9x = 20e^{-t} \qquad \text{avec } x(0^+) = 0 \ \ et \ x'(0^+) = 1$$

EXERCICE 3 : 5 points

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' - 4y = (-x+1)e^x$.

1. Résoudre l'équation (E') : $y'' \ \ - 4y = 0$
2. Déterminer les nombres réels a et b tels que la fonction g définie par : $g(x) = (ax+b)e^x$soit une solution particulière de (E).
3. a) Donner l'ensemble des solutions de (E).

   b) Déterminer la solution f de (E) dont la courbe représentative dans un repère orthonormé passe par le point A (0 ; 1) et admet en ce point une tangente parallèle à la droite d'équation $y + x = 0$.