REPUBLIQUE DE COTE D'IVOIRE
Union - Discipline -Travail

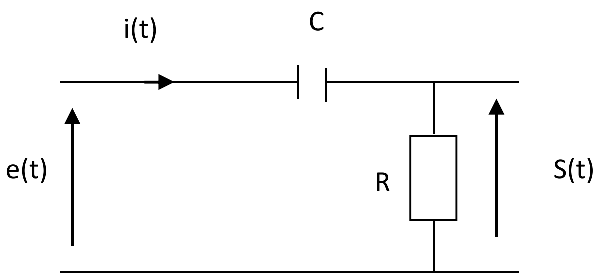
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Année Académique 2020 - 202
Durée : 2H30
Niveau : BTS2 RIT
Date : 17 – 06 - 2021

EXAMEN DE TRAITEMENT DE SIGNAL

EXERCICE 3 : 7 points

On considère le circuit R-C ci – dessous.



Avec $C = 1F \; et \; R = 1\Omega$

1°) En utilisant la loi des mailles, montrer que l'équation différentielle liant la sortie s et l'entrée e est définie par (E): $RC\frac{ds}{dt} + s(t) = RC\frac{de}{dt}$ avec $s(0^+) = 0$ et $e(0^+) = 0$

2°) Le signal d'entrée e est défini sur IR par :

$$e(t) = \begin{cases} 0 & si \; t < 0 \\ t & si \; 0 \leq t < 2 \\ 2 & si \; t \geq 2 \end{cases}$$

a) Représenter graphiquement la fonction e sur IR.

b) Montrer que $e(t) = tu(t) - (t-2)u(t-2)$ (la fonction u étant la fonction échelon unité ou fonction de d'Heaviside)

c) Sachant que $E(p) = \mathrm{L}[e(t)]$ (où L désigne la transformée de Laplace). Déterminer E(p).

3°) On appelle fonction de transfert du circuit R-C, la fonction H définie par :

$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$ (où S(p)= L$[s(t)]$ et E(p)= L$[e(t)]$)

a) En appliquant la transformée de Laplace à chaque membre de l'égalité de l'équation différentielle (E) définie en 1°)-c, montrer que :

$$H(p) = \frac{RCp}{1 + RCp} = \frac{p}{1 + p}$$

b) Montrer que $S(p) = H(p)E(p) = \frac{p(1-e^{-2p})}{(p+1)\,p^2}$

c) Décomposer en éléments simples dans IR la fraction rationnelle :

$G(p) = \frac{p}{(p+1)\,p^2}$

d) En déduire $s(t)$, l'original de S(p).

EXERCICE 3 : 8 points

Soit $f: IR \rightarrow IR$, la fonction $f, paire,\ 2\pi -$ périodique définie par :
$f(t) = (t-\pi)^2$, $t \in [0\,;\,\pi]$

1. Tracer le graphe de $f\ sur\ [-4\pi; 4\pi]$.
2. Calculer $f(3\pi)$ et $f(4\pi)$
3. a) Calculer les coefficients de Fourier trigonométriques de f,

   b) Montrer que la série de Fourier f s'écrit :

$$Sf(t) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=-}^{\infty} \frac{\cos(nt)}{n^2}$$

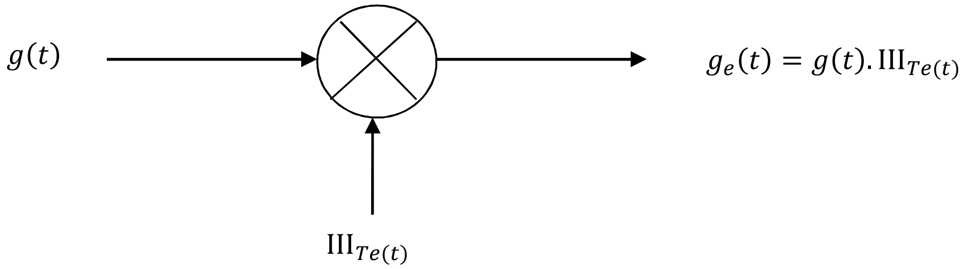
4. Etudier la convergence de la série de Fourier de f.
5. En déduire les sommes des séries suivantes :

   $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ puis $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$

6. Montrer que : $\forall x \in IR,\ \frac{\pi^3 + (x-\pi)^3}{3} = \frac{\pi^2}{3}x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^3}\sin(nx)$

EXERCICE 2 : 5 points

On échantillonne un signal analogique $g(t) = 10sin_c(10t)$ à l'aide d'un échantillonneur idéal de période d'échantillonnage $T_e = 25ms$ $(sin_c(t)$ désigne sinus cardinal de t).



On admet que $TF\ [III_{Te}(t)] = F_e.III_{Fe}(f)$ où $F_e = \frac{1}{T_e}$ et $III_{Te}(t)$ est le peigne de Dirac de période T_e.

1. Représenter l'allure du signal échantillonné $g_e(t)$.

2. Montrer que $G_e(f) = F_e[\ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} G(f - kF_e)\ ]$.
3. a) Déterminer le spectre $G(f)$ de $g(t)$

   b) Représenter le spectre de $g(t)$.
4. a) Donner la fréquence minimal d'échantillonnage. F_{min} de $g(t)$.

   b) Le théorème de Shannon est-il respecté ? Justifiez.

   c) Représenter alors le spectre du signal échantillonné sur trois périodes.