

<u>Epreuve de :</u> MATHEMATIQUES GENERALES & STATISTIQUES	BTS BLANC N°1 (25.04.2023) / 8h – 11h	Année académique : 2022 - 2023
		Filière : IDA
		Durée : 2
		Coefficient : 3

Cette épreuve comporte trois pages numérotée 1/2, 2/3 et 3/3. Portables & assimilés interdits »

L'usage de la calculatrice scientifique est autorisé

EXERCICE 1 : Étude d'une famille de fonctions

A tout entier naturel non nul n , on associe la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \frac{4e^{nx}}{e^{nx}+7}$

On note C_n la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

PARTIE I : Etude de la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x) = \frac{4e^x}{e^x+7}$

1. a) Démontrer que la courbe C_1 admet deux asymptotes dont on précisera les équations.
b) Démontrer que la fonction f_1 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
c) Démontrer que pour tout réel x on a $0 < f_1(x) < 4$
2. a) Déterminer les coordonnées de I_1 , intersection de la droite (D) d'équation $y = 2$ et de la courbe C_1 .
b) Déterminer une équation de la tangente (T_1) à la courbe C_1 au point I_1 .
3. a) Montrer que pour tout réel $m \in]0 ; 4[$, l'équation $f_1(x) = m$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$. On notera α cette solution.
b) Déterminer l'expression exacte de α en fonction de m .
4. a) Dresser le tableau de variation de la fonction f_1 .
b) Justifier que la courbe C_1 passe par le point $A(0; \frac{1}{2})$.
c) Tracer dans un même repère, C_1 , (D), ses asymptotes et sa tangente (T_1) .

PARTIE II : Etude de certaines propriétés de f_n

1. a) Pour tout entier naturel non nul n , démontre que les courbes C_n admettent les mêmes asymptotes.
b) Justifie que toutes les courbes C_n passent par le même point $A(0; \frac{1}{2})$.

c) Justifie que pour tout entier naturel non nul n , $f_n'(x) = \frac{28ne^{nx}}{(e^{nx}+7)^2}$

d) En déduire que les fonctions f_n sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}$.

2. a) Montrer que pour tout entier non nul n , la courbe C_n et la droite d'équation $y = 2$ ont un unique point d'intersection dont on précisera les coordonnées. On note I_n ce point.

b) Déterminer une équation de la tangente (T_n) à la courbe C_n au point I_n .

c) Montrer que les tangentes (T_n) sont concourantes en un point dont on déterminera les coordonnées. (*Indication : on peut constater qu'elles ont toutes la même ordonnée à l'origine*).

3. Tracer C_1 , C_2 et C_3 dans un même repère.

EXERCICE 2 :

1^{ère} Partie :

On considère les matrices suivantes $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ et $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. a) Montrer que A est inversible.

b) Déterminer la matrice inverse de A^{-1} de A .

2. $\forall x \in \mathbb{R}$, on pose $K = A - xI_3$ et $P(x) = \det(K)$.

a) Donner l'expression de $P(x)$.

b) Calculer $P(3)$.

c) En déduire les zéros de $P(x)$.

3. On pose $N = -A^3 + 12A^2 - 45A + 54I_3$

a) Calculer A^2 et A^3

b) Calculer la matrice N .

c) Montrer que A est inversible et donner son inverse sous la forme matricielle.

2^{ème} partie :

Une entreprise fabrique des appareils de trois types A, B et C. Les besoins en acier, en peintures et en heures de travail pour fabriquer un appareil de chaque type sont regroupés dans le tableau ci-dessous :

	A	B	C
Quantité d'acier (Kg)	4	1	1
Quantité de peinture (Kg)	1	4	1
Nombre d'heures de travail (Kg)	1	1	4

On désigne respectivement par x , y et z les quantités d'appareils de types A, B et C fabriquées par mois, par cette entreprise.

1. Sachant que cette entreprise a utilisé exactement 5 900 Kg d'acier, 7 100 Kg de peinture et 8 000 heures de travail, donner le système (S) des 3 équations linéaires de 1^{er} degré à 3 inconnues x , y et z qui traduisent les données de problème.
2. Donner l'écriture matricielle du système (S).
3. En utilisant le calcul matriciel, calculer x , y et z .