EXERCICE 2

Soit m un nombre réel. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $B_0 = (e_1, e_2, e_3)$ et f_m l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$f_m(x,y,z) = ((1-m)x - 3y + 3z \;;\; 3x + (-5-m)y + 3y;\; 6x - 6y + (4-m)z)$

On désigne par A_m la matrice de f_m relativement à la base B.

1) a) Montrer que $^tA_m = \begin{bmatrix} 1-m & 3 & 6 \\ -3 & -5-m & -6 \\ 3 & 3 & 4-m \end{bmatrix}$

(où t_{A_m} désigne la transposée de la matrice de A_m)

b)En déduire A_m.

NB : toute matrice plaquée est nulle.

2) On désigne par g(m) le déterminant de la matrice A_m.

a) Calculer g(m).

b) Calculer g(-2) et g(4)

c) En déduire les valeurs de m pour lesquelles f_m est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

3) On donne m = -1 et $A_{-1} = A$ et $f_{-1} = f$

a) Déterminer le noyau N de f et donner une base de N.

b) Déterminer l'image I de f et donner une base de I.

c) Déterminer le rang de l'endomorphisme f, noté rg (f)

4) On donne dans $\mathbb{R}^3$:

$u_1 = e_1 - e_2 + 3e_3$

$u_2 = -e_1 + 2e_2$

$u_3 = e_3$

a) Montrer que $B_1 = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Déterminer la matrice de passage P de la base B_0 à la base B_1.

c) La matrice P est – elle inversible ? si oui calculer P^{-1}

5) Soit D la matrice de f de la base B_1 à la base B_0 telle que $D = \overset{-1}{P}AP$. Calculer D.

6) On donne $v = -3e_1 + 2e_2 - e_3$ les coordonnées du vecteur v dans la base B_0.

Déterminer les coordonnées de v dans la base B_1.

****

c/ Montrer que la matrice de f^k dans la base canonique B est :

$$\begin{pmatrix} 2^k-k & k+1-2^k & k \\ -k & k+1 & k \\ 2^k-1 & 1-2^k & 1 \end{pmatrix}$$

d/ Déterminer les réels x, y et z tels que $A^3\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}$

EXERCICE 3 C

Une société de transport exploite 100 cars pour transporter des biens. Elle repère s un échantillon de 30 jours choisis au hasard, le nombre de camions Titan en panne.

Pannes x_i	3	4	5	6	7	8
Nombre de jours n_i	3	7	10	8	1	1

1 - Calculer la moyenne $\bar{x}$ et l'écart-type σ de cet échantillon. s

2 - Donner une estimation ponctuelle de la moyenne m et de l'écart-type σ du nombre camions Titan en panne pour la population des jours ouvrables de l'année.

3 - On désigne par X la variable aléatoire qui, à tout échantillon de taille 30, associe moyenne du nombre de camions Titan en panne chaque jour.
Déterminer un intervalle de confiance de la moyenne m de la population de seuil confiance de 95%.

4 - On estime qu'aucun camion Titan de la société n'a jamais eu plus de 8 pannes en 3 jours et qu'un camion est exploitable lorsqu'il présente au plus 4 pannes en 30 jours.

On prélève un groupe de 45 camions-Titan parmi les 100, au hasard et avec remis On désigne par Z la variable aléatoire qui à tout groupe de 45 camions, associe nombre de camions exploitables.

a/ Donner la loi de Z.

b/ Préciser ses paramètres et son espérance mathématique.

****