J. 19 1494

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

REPUBLIQUE DE COTE D'IVOIRE
Union - Discipline - Travail

DIRECTION DES EXAMENS ET DES CONCOURS

BREVET DE TECHNICIEN SUPERIEUR / SESSION 2019

FILIERE INDUSTRIELLE : INFORMATIQUE – DEVELOPPEUR D'APPLICATION

EPREUVE : MATHEMATIQUES GENERALES ET STATISTIQUES

Durée de l'épreuve : 3 Heures **Coefficient de l'épreuve : 3**

EXERCICE 1 :

On considère la fonction numérique f définie sur $]-\infty, 1[$ par $f(x) = \dfrac{2}{(x-1)^2} e^{\frac{x+1}{x-1}}$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal (O, I, J) unité graphique 2 cm.

PARTIE A

1°) a) On pose $t = \dfrac{2}{x-1}$, prouver l'égalité $\dfrac{2}{(x-1)^2} e^{\frac{x+1}{x-1}} = \dfrac{e}{2} t^2 e^t$

b) En déduire la limite de f quand x tend vers 1 par valeurs inférieures.

c) Déterminer la limite de f en $-\infty$.

2°) a) Démontrer que : $\forall\, x \in]-\infty, 1[$,

$$f'(x) = \frac{-4x}{(x-1)^4} e^{\frac{x+1}{x-1}}$$

b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

c) Tracer la courbe (C) de f.

PARTIE B

On pose $g(\alpha) = \int_0^{\alpha} f(x)\, dx$ avec α un nombre réel tel que $0 < \alpha < 1$

1°) Quelle est la limite de $g(\alpha)$ quand α tend vers 1par valeurs inférieures ?

2°) Quelle est l'aire en cm^2 du domaine limité par la courbe (C), l'axe des abscisses, les droites d'équations respectives $x = -\alpha$ et $x = \alpha$?

EXERCICE 2 :

On considère l'espace vectoriel IR^3 muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

Pour tout nombre réel m, on définit f_m l'endomorphisme de IR^3 par :
$f_m(x, y, z) = [\,(5 - m)x + 8y - 7z\,;\ -2x - (3 + m)y + 2z\,;\ 2x + 4y - (4 + m)z\,]$

1- a- Déterminer la matrice A_m de f_m relativement à la base $\mathcal{B}$. (N.B. : Toute matrice plaquée est nulle)

b- On pose $P(m) = \det A_m$. Démontrer que $P(m) = (1 - m)(m + 1)(m + 2)$

c- Déterminer les valeurs de m pour lesquelles f_m est un automorphisme de IR^3.

2- On pose m = 1.

a- Déterminer la matrice A_1 de l'endomorphisme f_1.

b- Déterminer le noyau de f_1 et en donner une base.

c- Quel est le rang de f_1 ? Justifier.

3- On donne les vecteurs.

$u_1 = 2e_1 - e_2$
$u_2 = e_1 + e_2 + 2e_3$
$u_3 = e_1 + e_3$

a- Démontrer que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de IR^3.

b- On pose $f = f_0$ et D la matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}'$.
Déterminer D.

4- Soit (u_n), (v_n) et (w_n) les suites récurrentes définies par

$$\forall n \in IN, \quad \begin{cases} u_{n+1} = 5u_n + 8v_n - 7w_n \\ v_{n+1} = -2u_n - 3v_n + 2w_n \\ w_{n+1} = 2u_n + 4v_n - 4w_n \end{cases} \qquad \text{avec } u_0 = 1\ ;\ v_0 = 3\ ;\ w_0 = -2$$

On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ et $X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix}$

a) Ecrire le système ci-dessus sous sa forme matricielle et en déduire que $X_{n+1} = A_o X_n$.

b) Démontrer par récurrence que $\forall n \in IN$, $X_n = A_o^n X_o$

c) On admet que $A_o^n = P D^n P^{-1}$ où P est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

Exprimer u_n , v_n et w_n en fonction de n.

EXERCICE 3 :

Une entreprise fabrique des pièces d'ordinateurs. Ces pièces sont considérées comme conformes si leur longueur est comprise entre 79,8 mm et 80,2 mm.

1) On note L la variable aléatoire qui, à chaque pièce fabriquée, associe la longueur en mm. On admet que L suit une loi normale de moyenne 80 et d'écart type 0,0948.

On prélève une pièce au hasard dans la production

a) Déterminer la probabilité que la pièce soit conforme.

b) En déduire la probabilité que la pièce ne soit pas conforme.

2) On admet que si l'on prélève au hasard, une pièce dans la production, la probabilité que cette pièce ne soit pas conforme est $p = 0{,}035$.

Dans la suite de l'exercice , une pièce est jugée défectueuse si elle est non conforme.
On note X, la variable aléatoire représentant le nombre de pièces défectueuses dans un lo
de 100 pièces.

a) Quelle est la loi suivie par X ? Justifier.

b) On note A l'événement «le nombre de pièces défectueuses du lot est égal à 2 » et B l'évènement « le nombre de pièces défectueuses du lot est au moins égal 2 ».
Calculer P(A) et P(B) à 10^{-4} près.

c) Un lot de 100 pièces est envoyé à un client, le lot est accepté s'il contient au plus pièces défectueuses.
Déterminer à 10^{-3} près, la probabilité que le client refuse le lot.

3) L'entreprise souhaite améliorer la qualité de la production. Pour cela, on projette changer le processus de fabrication de pièces. On définit une nouvelle variable Y qui chaque pièce à produire, selon le nouveau processus, associera sa longueur.

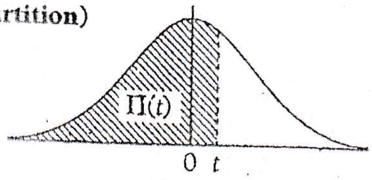
La variable aléatoire Y suit la loi normale de moyenne $m = 80$ et d'écart type σ'.

Déterminer σ' pour que, en prenant une pièce au hasard dans la future production, probabilité d'obtenir une pièce conforme soit égale à 0 ,99.

****

Loi normale centrée réduite (répartition)

Probabilité cumulée $\Pi(t) = \int_{-\infty}^{t} f(u)du = P(T \leqslant t)$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7290	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8254	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	09236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9779	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

Cas des grandes valeurs de t

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$\Pi(t)$	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Nota : La table donne les valeurs de $\Pi(t)$ pour $t \geqslant 0$. Si t est négatif on prend le complément à l'unité de la valeur lue dans la table. $\Pi(-t) = 1 - \Pi(t)$.