

BREVET DE TECHNICIEN SUPERIEUR / SESSION 2014

FILIERE INDUSTRIELLE : INFORMATIQUE - DEVELOPPEUR D'APPLICATION

EPREUVE : **MATHEMATIQUES GENERALES ET STATISTIQUES**

Durée de l'épreuve : 3 Heures

Coefficient de l'épreuve : 3

EXERCICE 1

L'objectif de cet exercice est de déterminer la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dont le terme général d'indice n noté x_n est solution de l'équation $(E_n) : x^n + x - 1 = 0$, sur $[0, +\infty[$.

PARTIE A

1. Déterminer la solution x_2 de (E_2)
2. Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n définie sur $[0, +\infty[$ par $f_n(x) = x^n + x - 1$
 - a) Etudier le sens de variation de f_n sur $[0, +\infty[$.
 - b) Démontrer que l'équation (E_n) admet une solution unique positive que l'on notera x_n .
 - c) Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < x_n < 1$

PARTIE B

On considère la fonction numérique à variable réelle f définie par $f(x) = \frac{\ln(1-x)}{\ln x}$. On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal, (O, I, J) . Unités graphiques : $OI = 4$ cm ; $OJ = 2$ cm. Soit D_f l'ensemble de définition de f .

1. Justifier que $D_f =]0 ; 1[$.
2. Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
3. Tracer la courbe (C) dans le repère (O, I, J) .
4. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(x_n) = n$ ((x_n) étant la suite définie dans la partie A)
5. a) En utilisant le sens de variation de f , démontrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
b) Démontrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ .
c) Préciser la valeur de ℓ .

EXERCICE 2

Soit m un nombre réel. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$ et f_m l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$f_m(x, y, z) = (x + my + mz, mx + y + mz, -2x - 2y + z)$$

On désigne par A_m la matrice de f_m relativement à la base B .

- 1-
 - a) Déterminer la matrice A_m
 - b) Montrer que $\det A_m = (5m + 1)(1 - m)$.
 - c) En déduire l'ensemble des valeurs de m pour lesquelles f_m est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.
- 2- On donne $m = 1$.
 - a) Déterminer le noyau de l'endomorphisme f_1 noté N_1 et donner une base de N_1 .
 - b) Déterminer l'image I_1 de l'endomorphisme f_1 et donner une base de I_1 .
- 3- On considère l'automorphisme f_0 obtenu pour $m = 0$.
et les vecteurs
$$\begin{aligned}u_1 &= e_1 - e_2 + 3e_3 \\u_2 &= -e_1 + 2e_3 \\u_3 &= e_2\end{aligned}$$
 - a) Démontrer que $B' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la matrice de passage P de B à B' .
 - b) Soit T la matrice de f_0 relativement à la base B' ;
montrer que $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
 - c) Démontrer par récurrence sur n que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2n & 1 \end{pmatrix}$
 - d) On admet que $T^n = P^{-1} A_0^n P, \forall n \in \mathbb{N}^*$
en déduire alors A_0^n en fonction de n .

EXERCICE 3

Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes.
Les résultats approchés seront arrondis à 10^{-3} près.

Dans un groupe d'assurance, on s'intéresse aux sinistres susceptibles de survenir, une année donnée, aux véhicules de la flotte d'une importante entreprise de maintenance de chauffage collectif.

$$X \sim P(0,28) = \frac{0,28}{x!} e^{-0,28}$$

1) Etude du nombre de sinistre par véhicule

Soit X la variable aléatoire qui, à tout véhicule tiré au hasard dans un des parcs de la flotte associe le nombre de sinistres survenant pendant l'année considérée.
On admet que X suit la loi de Poisson de paramètre 0,28.

- Calculer la probabilité qu'un véhicule tiré au hasard dans le parc n'ait aucun sinistre pendant l'année considérée.
- Calculer la probabilité qu'un véhicule tiré au hasard dans le parc ait, au plus deux sinistres pendant l'année considérée.

2) Etude du nombre de sinistre dans une équipe de 15 conducteurs.

On note E l'événement « un conducteur tiré au hasard dans l'ensemble des conducteurs de l'entreprise n'a pas de sinistre pendant l'année considérée. »

On admet que la probabilité de l'événement E est 0,6.

On tire au hasard 15 conducteurs dans l'effectif des conducteurs de l'entreprise.

Cet effectif est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement de 15 conducteurs à un tirage avec remise de 15 conducteurs.

On considère la variable aléatoire Y qui, à tout prélèvement de 15 conducteurs, associe le nombre de conducteurs n'ayant pas de sinistre pendant l'année considérée.

- Justifier que la variable aléatoire Y suit une loi binomiale et déterminer ses paramètres.
- Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, 10 conducteurs n'aient pas de sinistres pendant l'année considérée.

3) Etude du coût des sinistres.

Dans ce qui suit, on s'intéresse au coût d'une certaine catégorie de sinistres survenus dans l'entreprise pendant l'année considérée.

On considère la variable aléatoire C qui, à chaque sinistre associe son coût en milliers de francs CFA.

On admet que C suit la loi normale de moyenne 1 200 F CFA et d'écart type 200 F CFA.

Calculer la probabilité qu'un sinistre tiré au hasard parmi les sinistres de ce type, a un coût variant entre 1000 et 1 500 milliers de francs.

- On considère un échantillon de 100 véhicules prélevés au hasard dans le parc de véhicules mis en service depuis 6 mois. Ce parc contient suffisamment de véhicules pour qu'on puisse assimiler ce tirage à un tirage avec remise.

On constate que 91 véhicules de cet échantillon n'ont pas eu de sinistres.

$$X \sim P(0,28) \Rightarrow X \in \pi^3, A(X) = (0,28)$$

08 h 12

- a) Donner une estimation ponctuelle du pourcentage p de véhicule de ce parc qui n'ont pas eu de sinistre 6 mois après leur mise en service.
- b) Déterminer un intervalle de confiance du pourcentage p avec le coefficient de confiance 95%.
