

FICHE DE TD Nro 1 FASA 1 2023

EXERCICE 1

Soit $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ une application continue vérifiant $f \circ f = f$.

- Etudier l'équation $f(x) = x$. Tracer un graphe possible pour f .
- On suppose de plus f dérivable. Déterminer f .
- Y-a-t-il d'autres solutions si f n'est pas nécessairement dérivable ?

EXERCICE 2

Soit $f :]a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, (a peut-être $-\infty$), une fonction dérivable telle que $f'(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$. Conjecture : Alors le graphe de f a une direction asymptotique horizontale en $+\infty$, c'est-à-dire (tome 1 chapitre E) le quotient $f(x)/x$ tend vers 0 en $+\infty$.

EXERCICE 3

Tracer le graphe des fonctions ci-dessous : On étudiera les variations de ces fonctions, et on précisera les branches infinies, tangentes aux points remarquables.

$$a. f(x) = e^{1/x} \sqrt{x(x+2)}$$

$$b. f(x) = (x-1)e^{x/(x-1)}$$

EXERCICE 4

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable, à dérivée continue, et x_0 un réel. Montrer que si $f'(x_0) \neq 0$, alors f est monotone au voisinage de x_0 .

EXERCICE 5

Soient f et g des fonctions dérivables au voisinage de a , et telles que $f(a) = g(a) = 0$. On suppose que la dérivée $g'(x)$ ne s'annule pas au voisinage de a .

- Montrer que si le rapport $f'(x)/g'(x)$ a une limite b lorsque x tend vers a , alors le rapport $f(x)/g(x)$ a également pour rapport b .
- Donner un cas pratique qui traduit la réalité de la fonction $f(x)/g(x)$.

EXERCICE 6

Soit D la couronne définie par $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ et f la fonction définie sur D par

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \sin(\pi\sqrt{x^2 + y^2})$$

Déterminer $f(D)$.

EXERCICE 7

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable au voisinage de 0, telle que $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, et $f''(0) \neq 0$.

- a. Montrer qu'il existe un intervalle $[a, b]$ tel que
 - $a < 0 < b$
 - $f(a) = f(b)$
 - la restriction de f à $[a, 0]$, ou à $[0, b]$ est injective.
- b. Définir à l'aide de f une bijection continue de $[a, 0]$ sur $[0, b]$.

EXERCICE 8

On définit une fonction g par $g(x) = 1$, si $x \leq 1$, $g(x) = 1 - (e^{-\frac{(x-1)^2}{2}})$, si $x > 1$, et on pose

$$G(x) = \int_0^x g(t) dt.$$

- a. Etudier la continuité et la dérivabilité de G . Préciser l'aspect de son graphe au voisinage du point d'abscisse $x = 2$, en donnant l'équation de la tangente en ce point, et la position de la courbe par rapport à sa tangente.
- b. Tracer le graphe de G .
- c. Combien l'équation $G(x) = x - 1$ a-t-elle de solutions dans l'intervalle $] -\infty; 2]$?
- d. donner un cas pratique qui traduit la réalité de la fonction $G(x)$.