MATHEMATIQUES

- SUPPORT DE COURS & CAHIER D'APPLICATION
- SERIES D'EXERCICES
- QUELQUES DEVOIRS
- QUELQUES BACS

ETABLISSEMENT : ………………………………………………………………

CLASSE :………………………………………………………………………

ANNEE SCOLAIRE : *2018/2019*

PRENOM & NOM :……………………………………………………………

TELEPHONE : …………………………………………………………………

T^{le}L

EDITEUR

MONSIEUR ABDOU SALAM DIOP

PROFESSEUR DE MATHEMATIQUES AU LYCEE DE KOKI

abdousalamdiop13@gmail.com

ACADEMIE DE LOUGA
LYCEE DE KOKI
PROFESSEUR: M. A S DIOP

ANNEE SCOLAIRE : 2018/2019
CLASSE : TERMINALE L'1 et L2

PROGRAMME

- <u>DOMAINE 1 : ALGEBBRE</u>
  - Chapitre 0 : RAPPEL DES METHODES DE FACTORISATION D'UN POLYNOME
  - Chapitre I : COMPOSITION DE FONCTIONS
- <u>DOMAINE 2 : ANALYSE</u>
  - Chapitre II: COMPLEMENTS SUR LES LIMITES ET CONTINUITE
  - Chapitre III : DERIVATION
  - Chapitre IV : ETUDE DE FONCTIONS
  - Chapitre V : FONCTION LOGARITHME NEPERIEN
  - Chapitre VII : SUITES NUMERIQUES
  - Chapitre VIII : FONCTION EXPONENTIELLE
  - Chapitre X : PRIMITIVES ET INTEGRALES
- <u>DOMAINE 3 : ORGANISATION DES DONNEES</u>
  - Chapitre VI : DENOMBREMENT ET PROBABILITE
  - Chapitre IX : STATISTIQUE A DEUX VARIABLES

SUPPORT DE COURS ET CAHIER D'APPLICATION

Chapitre I
COMPOSITION DE FONCTIONS

Activité 1

Soient les fonctions $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = x^3$.

1. Calculer l'image de 4 par la fonction f, on appelle cette image a. Calculer l'image de a par g.
2. Calculer l'image de 2 par la fonction g, on appelle cette image b. Calculer l'image de b par f.
3. Compléter les phrases suivantes : $g(a) = g[f(\ldots)] = \cdots$ *et* $f(b) = f[g(\ldots)] = \cdots$

Correction : ……………………………………………………………………………………………

………

………

………

Définition 1

Soient $\boldsymbol{f}$ et $\boldsymbol{g}$ deux fonctions définies respectivement sur les ensembles $\boldsymbol{D_f}$ et $\boldsymbol{D_g}$. La fonction obtenue en appliquant successivement $\boldsymbol{f}$, puis $\boldsymbol{g}$ est la **composée** de $\boldsymbol{f}$ par $\boldsymbol{g}$. Elle se note $\boldsymbol{g}\mathrm{o}\boldsymbol{f}$ et se lit **«$\boldsymbol{g}$** rond **$\boldsymbol{f}$».**

La fonction gof est défini sur l'ensemble D des réels $x \in \boldsymbol{D_f}$ tels que $f(x) \in \boldsymbol{D_g}$ par :

$$(\boldsymbol{g}\mathrm{o}\boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{g}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})]$$

Fig.1

Exemple 1

Soient f et g deux fonctions définies par $f(x) = -2x + 1$ et $g(x) = x^2$. Déterminons les expressions explicites de $gof(x)$ et $fog(x)$**.** Puis calculer $fog(2)$ et $gof(-1)$.

………

………

………

………

………

………

………

Application 1

Soient $f(x) = 3x + 1$ et $g(x) = \sqrt{x}$, déterminer les expressions explicites de $gof(x)$ et $fog(x)$**.**

Puis calculer $fog(0)$ et $gof(\frac{8}{3})$.

$Correction$:……

………
………

………

………

………

TAF1 (Travail A Faire N°1)

Soient $f(x) = x^2 + \frac{1}{2}x + 3$ et $g(x) = 3 - x$, déterminer les expressions explicites de $gof(x)$ et $fog(x)$**.** Puis calculer $fog(0)$ et $gof(-1)$.

Remarque 1

- Les composées de fonctions gof et fog sont en général différentes.
- Toute fonction non élémentaire peut être vue (ou décomposée) comme une composée de fonctions élémentaires.

FIN

AUTRES EXEMPLES

Résumé des Définitions, Propriétés et Théorèmes

NOTES

Chapitre II
COMPLEMENTS SUR LES LIMITES ET CONTINUITE

I. RAPPEL SUR LES LIMITES

1) Limites de références

Soit n un entier naturel non nul et k un nombre réel quelconque, nous admettons les résultats suivants.

Limites en un réel a	Limites en $+\infty$	Limites en $-\infty$
$\lim\limits_{x->a} k = k$	$\lim\limits_{x->+\infty} k = k$	$\lim\limits_{x->-\infty} k = k$
$\lim\limits_{x->a} x = a$	$\lim\limits_{x->+\infty} x = +\infty$	$\lim\limits_{x->-\infty} x = -\infty$
$\lim\limits_{x->a} x^n = a^n$	$\lim\limits_{x->+\infty} \frac{1}{x} = 0$	$\lim\limits_{x->-\infty} \frac{1}{x} = 0$
Pour tout a≥0, $\lim\limits_{x->a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$	$\lim\limits_{x->+\infty} x^n = +\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty \; si\ n\ est\ pair \\ -\infty \; si\ n\ est\ impair \end{cases}$
$\lim\limits_{x->a} \|x\| = \|a\|$	$\lim\limits_{x->+\infty} \frac{k}{x^n} = 0$	$\lim\limits_{x->-\infty} \frac{k}{x^n} = 0$
$\lim\limits_{x->0^-} \frac{1}{x} = -\infty$	$\lim\limits_{x->+\infty} \|x\| = +\infty$	$\lim\limits_{x->-\infty} \|x\| = +\infty$
$\lim\limits_{x->0^+} \frac{1}{x} = +\infty$	$\lim\limits_{x->+\infty} \sqrt{x} = +\infty$	

2) Opérations sur les limites

Soit ℓ et ℓ' deux nombres réels. Les limites en x_0 peuvent être des limites en **+∞** , en **-∞**, en a (a un nombre réel quelconque), des limites à droite ou à gauche. Mais bien entendu toutes les limites utilisées doivent être de la même nature : c'est-à-dire, par exemple, qu'il n'est pas question d'utiliser le tableau avec $\lim\limits_{x->+\infty} f(x)\ et\ \lim\limits_{x->0} g(x)$.

a) Limite d'une somme f + g

On a :

$$\boxed{\lim_{x->x_0} (f+g)(x) = \lim_{x->x_0} f(x) + \lim_{x->x_0} g(x)}$$

Et nous admettons les résultats du tableau suivant :

$\lim\limits_{x->x_0} f(x)$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x->x_0} g(x)$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x->x_0} (f+g)(x)$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F I

FI :_Forme_indéterminée

Exemple 1

Soient $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = -\frac{2}{x^3}$ deux fonctions. Calculons la limite en 1 de f, g et $f+g$.

……

……

Application 1

Soient $f(x) = x^2$ et $g(x) = -\frac{2}{x^4}$ deux fonctions. Calculer la limite en $-\infty$ de , g et $f + g$.

Correction :..

....

TAF 1

1. Soit $f(x) = x^3$ et $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ deux fonctions. Calculer la limite en $+\infty$ de f, g et $f + g$.
2. Soit $f(x) = x - 1$ et $g(x) = \frac{-1}{x+1}$ deux fonctions. Calculons la limite en 2 de f , g et $f + g$.

b) Limite d'un produit $f \times g$

On a :

$$\boxed{\lim_{x->x_0} (f \times g)(x) = [\lim_{x->x_0} f(x)] \times [\lim_{x->x_0} g(x)]}$$

Et nous admettons les résultats du tableau suivant :

$\lim_{x->x_0} f(x)$	ℓ	$\ell > 0$	$\ell > o$	$\ell < o$	$\ell < o$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim_{x->x_0} g(x)$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim_{x->x_0} (f \times g)(x)$	$\ell \times \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F I

Exemple 2

Soient $f(x) = -3$ et $g(x) = \frac{1}{x^2}$ deux fonctions. Calculons la limite en $+\infty$ de f, g et $f \times g$.

....

....

Application 2

Soit $f(x) = 1 - x^5$ et $g(x) = -2x^2$ deux fonctions. Calculer la limite en $-\infty$ de f, g et $f \times g$.

Correction :..

....

TAF 2

1. Soit $f(x) = x^3 - 8$ et $g(x) = \frac{1}{x^2+2x+4}$ deux fonctions. Calculer la limite en 2 de f, g et $f \times g$.
2. Soit $f(x) = x - 1$ et $g(x) = \frac{1}{x}$ deux fonctions. Calculer la limite en 0^- de f, g et $f \times g$.

c) Limite d'un quotient $\frac{f}{g}$

On a :

$$\boxed{\lim_{x->x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim_{x->x_0} f(x)}{\lim_{x->x_0} g(x)}}$$

Et nous admettons les résultats du tableau suivant :

$\lim\limits_{x->x_0} f(x)$	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	0
$\lim\limits_{x->x_0} g(x)$	$\boldsymbol{l' \neq 0}$	$\pm\infty$	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' > 0$	$l' < 0$	$\pm\infty$	0^+	0^-	0^+	0^-	0
$\lim\limits_{x->x_0} (\frac{f}{g})(x)$	$\boldsymbol{\frac{l}{l'}}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Exemple 3

1. Soit $f(x) = x^2 - 3x - 1$ et $g(x) = x - 2$ deux fonctions. Calculons la limite en 1 de f, g et $\frac{f}{g}$.

……

……

2. Soit $f(x) = \frac{x^2-3x-1}{x-3}$, Calculons la limite en 3^+ de f.

……

……

……

……

Application 3

1. Soit $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x-3}$, Calculer la limite en 2 de f.

Correction :……………………………………………………………………………………………

……

2. Soit $f(x) = \frac{x^2-3x-1}{x-3}$, Calculer la limite en 3^- de f.

Correction :……………………………………………………………………………………………

……

……

……

TAF 3

1. Soit $f(x) = \frac{2x^2-3x+1}{x-2}$, Calculer la limite en 2^+ de f.

2. Soit $f(x) = \frac{x^2-2}{x-\sqrt{2}}$, Calculer la limite en 2 de f.

d) Limite d'une composée $f \circ g$

Si $\lim\limits_{x->a} g(x) = b$ et $\lim\limits_{X->b} f(X) = l$ (en posant $X = g(x)$) alors $\lim\limits_{x->a} f[g(x)] = l$

Exemple 4

1. Soit $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$, Calculons la limite en $-\infty$ de f.

……

……

……

……

Application 4

1. Soit $f(x) = \sqrt{x^3 - 3x + 4}$, Calculons la limite en $+\infty$ de f

Correction :………

……

……

TAF 4

1. Soit $f(x) = \sqrt{\frac{4x^3-3x+4}{x^3+1}}$, Calculons la limite en $+\infty$ de f.

Remarque 1

Lorsque le tableau ne donne pas de résultat général, on parle souvent de **Forme Indéterminée** (**FI**).
Les formes indéterminées sont de quatre types : $+\infty - \infty$ **ou** $-\infty + \infty$ **;** $\mathbf{0} \times \pm\infty$ **;** $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$ **et** $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$**.**

2. Levée d'une indétermination

a) Limite en l'infini d'une fonction polynôme et rationnelle

Propriété 1

En $+\infty$ ou en $-\infty$, un **polynôme** a la même limite que son terme de plus haut degré.

Exemple 5

1. Calculons la limite de $f(x) = x^2 - 4x + 1$ en $+\infty$.

……

……

2. Calculons la limite de $f(x) = -x^7 + 3x^4 - 4x$ en $-\infty$.

……

Application 5

1. Soit $f(x) = x^3 - 3x + 1$, déterminer son ensemble de définition D_f puis calculer les limites aux bornes de D_f.

Correction :...

....

....

....

2. Soit $f(x) = -x^7 + 3x^4 - 4x$, Déterminer son ensemble de définition D_f puis calculer les limites aux bornes de D_f.

Correction :...

....

....

....

TAF5

1. Soit $f(x) = x^3 - 3x$, déterminer son ensemble de définition D_f puis calculer les limites aux bornes de D_f.
2. Soit $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + \frac{1}{x}$, déterminer son ensemble de définition D_f puis calculer les limites aux bornes de D_f.

Propriété 2

En $+\infty$ ou en $-\infty$**,** une fonction **rationnelle** a la même limite que le quotient du terme de plus haut degré du numérateur par le terme de plus haut degré du dénominateur.

Exemple 6

1. Calculons la limite de $f(x) = \frac{x^2-6x+3}{x+2}$ en $+\infty$.

....

....

2. Calculons la limite de $f(x) = \frac{-x^2-6x+3}{x^4+3x^3-1}$ en $-\infty$.

....

....

Application 6

1. Soit $f(x) = \frac{x^2-2x+3}{3x^2+3x-1}$, calculer la limite de f en $-\infty$.

$Correction$: ....

....

....

2. Soit $f(x) = \frac{-x^3-6x+3}{x^2-100}$, calculer la limite de f en $+\infty$.

$Correction$: ....

....

....

TAF6

1. Soit $f(x) = \frac{x^3-8}{3x^2-1}$, calculer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Soit $f(x) = \frac{-4x^3-x^2-6x+3}{2x^3-6x+3}$, calculer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) La factorisation en vue de simplifier

Propriété 3

Pour déterminer la **limite** en $\boldsymbol{a}$ d'une fonction du type $\frac{f}{g}$ telle que $\boldsymbol{f(a) = g(a) = 0}$, on peut parfois mettre $(\boldsymbol{x - a})$ en facteur au numérateur et au dénominateur, puis simplifier avant de calculer la limite en a.

Exemple 7

Soit $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$, calculons la limite de f en -1.

....

....

....

Application 7

Soit $f(x) = \frac{x-3}{x^2-9}$, calculer la limite de f en 3.

$Correction$: ....

....

....

TAF7

1. Soit $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+4x+3}$, calculer la limite de f en -1.
2. Soit $f(x) = \frac{x^3-3x+2}{x-1}$, calculer la limite de f en 1.

c) Multiplication par l'expression conjuguée

Propriété 4

Lorsqu'on a une **fonction irrationnelle**, la multiplication par **l'expression conjuguée** peut parfois aider à lever la forme indéterminée.

Exemple 8

Soit $f(x) = \sqrt{x^2+2} + x$, calculons la limite de f en$-\infty$.

………

………

………

Application 8

Soit $f(x) = \frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}$, calculer la limite de f en 3 .

Correction : ………

………

………

TAF8

Soit $f(x) = \frac{\sqrt{2x+1}-1}{3x}$, calculer la limite de f en 0 .

II. BRANCHES INFINIES

NB : dans toute la suite $\boldsymbol{f}$ et $\boldsymbol{g}$ désignent des fonctions numériques, $\boldsymbol{D_f}$ et $\boldsymbol{D_g}$ leurs ensembles de définition respectifs, $\boldsymbol{C_f}$ et $\boldsymbol{C_g}$ leurs courbes représentatives respectives.

1) Asymptotes d'une courbe

a) Asymptote Verticale

Propriété 5

Soit $\boldsymbol{a}$ un nombre réel, lorsque $\lim\limits_{x->a} \boldsymbol{f(x)} = \pm\infty$ **ou** $\lim\limits_{x->a^+} \boldsymbol{f(x)} = \pm\infty$ **ou** $\lim\limits_{x->a^-} \boldsymbol{f(x)} = \pm\infty$ alors la droite d'équation $(\boldsymbol{D}): \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ est asymptote verticale à la courbe $(\boldsymbol{C_f})$ en $\pm\infty$.

Exemple 9

Soit $f(x) = \frac{2-x}{x+3}$, calculons $\lim\limits_{x->-3^-} f(x)$ puis déduisons en l'équation d'une asymptote verticale.

………

………

………

Application 9

Soit $f(x) = \frac{2-x}{x+3}$, calculer $\lim\limits_{x->-3^+} f(x)$ puis en déduire l'équation d'une asymptote verticale.

Correction : ………

………

……

Illustration graphique

Fig2 **Fig3**

TAF9

Soit $f(x)=\frac{x^2-3x+5}{x}$, Montrer que la droite d'équation $(D): x=0$ est asymptote verticale de C_f en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) Asymptote Horizontale

Propriété 6

Soit b un nombre réel, lorsque $\lim\limits_{x->-\infty} f(x)=b$ **ou** $\lim\limits_{x->+\infty} f(x)=b$ alors la droite d'équation $(D): y=b$ est asymptote horizontale de la courbe (C_f) en $-\infty$ ou respectivement en $+\infty$.

Exemple 10

Soit $f(x)=\frac{3-x}{x+4}$, calculons $\lim\limits_{x->-\infty} f(x)$ puis déduisons en l'équation d'une asymptote horizontale.

……

……

……

……

Application 10

Soit $f(x)=\frac{2x^2+x-5}{3x^2+2}$, calculer $\lim\limits_{x->+\infty} f(x)$ puis en déduire l'équation d'une asymptote horizontale.

Correction : ……

……

……

……

Illustration graphique

Fig4 **Fig5**

TAF10

Soit $f(x) = \frac{x^2-3x+5}{x^3}$, Montrer que la droite d'équation $(D): y = 0$ est asymptote verticale de (C_f) en $-\infty$ et en $+\infty$.

c) Asymptote Oblique

Propriété 7-1

La droite d'équation $(\boldsymbol{D}): \boldsymbol{y} = \boldsymbol{ax} + \boldsymbol{b}$ (avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$) est une asymptote oblique de la courbe $(\boldsymbol{C_f})$ en $-\infty$ ***(respectivement en*** $+\infty$***)*** lorsque $\lim\limits_{x->-\infty}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - (\boldsymbol{ax} + \boldsymbol{b})] = \mathbf{0}$ ***(respectivement*** $\lim\limits_{x->+\infty}[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - (\boldsymbol{ax} + \boldsymbol{b})] = 0$***).***

Exemple 11

Soit $f(x) = \frac{x^2-6x-7}{2x+4}$, montrons que la droite $(\boldsymbol{D}): \boldsymbol{y} = \frac{1}{2}\boldsymbol{x} - \mathbf{4}$ est une asymptote oblique de la courbe $\boldsymbol{C_f}$ en $-\infty$ ***(puis en*** $+\infty$***)***.

Correction : ....

....

....

....

....

Application 11

Soit $f(x) = \frac{3x^2-x+2}{x-3}$, montrer que la droite $(\boldsymbol{D}): \boldsymbol{y} = \mathbf{3}\boldsymbol{x} + \mathbf{8}$ est une asymptote oblique de la courbe $\boldsymbol{C_f}$ en $+\infty$ ***(puis en*** $-\infty$***)***.

Correction : ....

....

....

....

....

Illustration graphique

Fig6 **Fig7**

Remarque 2

Les courbes représentatives de deux fonctions $\boldsymbol{f}$ et $\boldsymbol{g}$ sont asymptotes l'une de l'autre en $\pm\infty$ lorsque $\lim\limits_{x->\pm\infty} [f(x) - g(x)] = 0.$

TAF11

1. Soit $f(x) = \frac{2x^2+x+2}{x+1}$, montrer que $f(x)$ peut s'écrire sous la forme $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$ (a, b et c sont des nombres à déterminer).
2. En déduire une asymptote oblique à la courbe $\boldsymbol{C_f}$ en $+\infty$ ***(puis en*** $-\infty$***)***.

2) Branche parabolique

Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty \overset{alors}{\Longrightarrow}$ la courbe $C_f$possède une **Branche parabolique** ou une **Asymptote Oblique** en $\pm\infty$.

Théorème 1

$Si \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$

Je calcule

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

$Si \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$

Alors C_f admet une **Branche Parabolique** de direction **(OX)** en $\pm\infty$

$Si \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \pm\infty$

Alors C_f admet une **Branche Parabolique** de direction **(OY)** en $\pm\infty$

Propriété 7-2

$Si \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a;\ a \in \mathbb{R}^*$

Je calcule .

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - ax]$

$Si \lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - ax] = \pm\infty$

Alors C_f admet une **Branche Parabolique** la droite d'équation $(\boldsymbol{D}): \boldsymbol{y = ax}$ en $\pm\infty$

$Si \lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - ax] = b$

Alors C_f admet une **Asymptote Oblique** la droite d'équation $(\boldsymbol{D}): \boldsymbol{y = ax + b}$ en $\pm\infty$; $b \in \mathbb{R}$

Fig8

Exemple 12

1. Soit $f(x) = \sqrt{x}$, déterminons D_f puis étudions les branches infinies de C_f.

....

....

....

....

2. Soit $f(x) = x^2$, déterminons D_f puis étudions la branche infinie de C_f en $-\infty$.

....

....

....

....

3. Soit $f(x) = \frac{8x^2-2x+7}{4x+1}$, déterminons D_f puis étudions la branche infinie de C_f en $+\infty$.

....

....

....

....

Application 12

1. Soit $f(x) = \sqrt{-x+2}$, déterminer D_f puis étudier la branche infinie de C_f en $-\infty$.

Correction :...

....

....

....

2. Soit $f(x) = -2x^2$, déterminer D_f puis étudier la branche infinie de C_f en $-\infty$.

Correction :...

....

....

....

3. Soit $f(x) = \frac{8x^2-2x+7}{4x+1}$, déterminer D_f puis étudier la branche infinie de C_f en $-\infty$.

Correction :...

....

....

....

TAF12

On donne $f(x) = \frac{2x^2+6x}{x+3}$, déterminer D_f puis étudier la branche infinie de C_f en $+\infty$.

Propriété 7-3

Si $\boldsymbol{f}$ est fonction rationnelle telle que $\boldsymbol{f(x)} = \frac{\boldsymbol{N(x)}}{\boldsymbol{D(x)}}$ $\boldsymbol{avec\ d°N - d°D = 1} \overset{\boldsymbol{alors}}{\Longrightarrow}$ la division euclidienne peut permettre de déterminer l'Asymptote Oblique d'équation $(\boldsymbol{D}): \boldsymbol{y} = \boldsymbol{Q(x)};$ $(avec\ Q(x) le\ quotient\ de\ la\ division\ euclidienne\ )$ de la courbe C_f.

Exemple 13

Soit $f(x) = \frac{2x^2+6x}{x+3}$, étudions la branche infinie de C_f en $+\infty$.

……

……

……

……

Application 13

Soit $f(x) = \frac{8x^2-2x+7}{4x+1}$, étudier la branche infinie de C_f en $+\infty$.

Correction :………

……

……

……

TAF13

On donne $f(x) = \frac{2x^2+6x}{x+3}$, déterminer D_f puis étudier les branches infinies de C_f en $+\infty$.

NB2

Les Propriétés 7-1 ; 7-2 et 7-3 permettent toutes de montrer ou déterminer l'équation de l'Asymptote Oblique d'une courbe.

III. CONTINUITE D'UNE FONCTION

1) Continuité en un point

Définition 1

Soit $\boldsymbol{f}$ une fonction définie sur un intervalle $\boldsymbol{I}$ contenant le réel $\boldsymbol{a}$ (c'est-à-dire $f(a)$ existe et est fini). On dit que $\boldsymbol{f}$ **est continue en** $\boldsymbol{a}$ lorsque :

$$\lim_{x->a} \boldsymbol{f(x)} = \boldsymbol{f(a)}$$

Exemple 14

Soit $f(x) = x^3 - 1$, montrons que f est continue en 1.

……

……

Application 14

Soit $f(x) = -x^3 + 2x^2 - 1$, montrer que f est continue en -2.

Correction :……

……

……

TAF14

On donne $f(x) = \frac{x^2-1}{x}$, étudier la continuité de f en 1 puis en 0.

Propriété 8

$\boldsymbol{f}$ **est continue en** $\boldsymbol{a} \overset{ssi}{\Leftrightarrow} \lim\limits_{x->a^-} \boldsymbol{f(x)} = \lim\limits_{x->a^+} \boldsymbol{f(x)} = \boldsymbol{f(a)}$

Remarque 3

- Si f et g sont continues en a alors :
  - La fonction kf est continue en a ;
  - La fonction $|f|$ est continue en a ;
  - Si de plus $f(a) \geq 0$ alors la fonction $\sqrt{f}$ est continue en a ;
  - La fonction $f + g$ est continue en a ;
  - La fonction $f \times g$ est continue en a ;
  - Si de plus $g(a) \neq 0$ alors la fonction $\frac{f}{g}$ est continue en a .
- Si f est continue en a et g est continue en $f(a)$ alors la fonction gof est continue en a.
- La fonction f est continue sur un intervalle I signifie que f est continue en tout point de I ; cet intervalle I est appelé ensemble de continuité de f $et\ I \subset D_f$.
- Si f est continue sur I et g continue sur J alors :
  - La fonction $f + g$ est continue sur $I \cap J$;
  - La fonction $f \times g$ est continue sur $I \cap J$;
  - La fonction $\frac{f}{g}$ est continue sur $I \cap J - \{x \in J / g(x) = 0\}$.
- Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.
- Toute fonction rationnelle est continue sur son ensemble de définition.

2) Illustration graphique de la continuité

Fig.9 **fig.10**

3) Prolongement par continuité

Propriété 9

Soit $\boldsymbol{f}$ une fonction définie sur un intervalle $]\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}]$ et vérifiant $\lim\limits_{x->a} \boldsymbol{f(x)} = \boldsymbol{l}$ (l est un nombre réel) $\overset{alors}{\Longrightarrow}$ la fonction $\boldsymbol{g}$ définie sur $[\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}]$ par $\begin{cases} \boldsymbol{g(x) = f(x)\ si\ x \neq a} \\ \boldsymbol{g(a) = l} \end{cases}$ est appelée le **prolongement par continuité** de f en a.

Exemple 15

Soit $f(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2+x-6}$ définie sur $]-\infty;-3[\cup]-3;2[\cup]2;+\infty[$, montrons que f est prolongeable par continuité en 2 et donnons son prolongement par continuité.

………

………

………

………

………

Application 15

Soit $f(x) = \frac{x+3}{x^2+x-6}$ définie sur $]-\infty;-3[\cup]-3;2[\cup]2;+\infty[$, montrer que f est prolongeable par continuité en -3 et donner son prolongement par continuité.

Correction :……

………

………

………

………

TAF15

On donne $f(x) = \frac{x^2+3x+2}{x+2}$:

a) Déterminer D_f ;

b) Etudier la continuité de f en -2 ;

c) f est-elle prolongeable par continuité en -2 ? Si oui, déterminer ce prolongement par continuité.

FIN

AUTRES EXEMPLES

Résumé des Définitions, Propriétés et Théorèmes

NOTES

AUTRES EXEMPLES

Résumé des Définitions, Propriétés et Théorèmes

NOTES

Chapitre III
DERIVABILITE

I. DERIVABILITE D'UNE FONCTION EN UN POINT

1) Mise en route

Fig.1

Aux origines la dérivation était un problème purement géométrique, il s'agissait de connaitre le coefficient directeur (ou la pente) d'une droite particulière qu'on appelle **tangente** à une courbe. Sur la Fig.1, le coefficient directeur de la droite (AM) ou le taux d'accroissement de f entre X et a est $\frac{f(X)-f(a)}{X-a}$. Lorsque X tend vers a (c'est-à-dire : M tend vers A), la droite (AM) tend vers la droite (T), tangente à la courbe (C_f) en A. La pente de la tangente à la courbe en A peut donc être vue comme étant la limite lorsque x $tend$ $vers$ a du quotient $\frac{f(X)-f(a)}{X-a}$. Cette pente est aussi appelée ***nombre dérivée*** de la fonction f en a. Il est noté $f'(a)$ et quand il existe (fini), on dit que la fonction f est dérivable en a.

Définition 1

Soit $\boldsymbol{f}$ une fonction définie sur un intervalle ouvert $]\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}[$ contenant le réel $\boldsymbol{x_0}$. On dit que $\boldsymbol{f}$ est **dérivable** en x_0 si $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est **finie.** Cette limite est appelée **nombre dérivée** de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{x_0}$ et est notée $\boldsymbol{f'(x_0)}$. On écrit $\boldsymbol{f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$

Exemple 1

Soit $f(x)=3x+2$, étudions la dérivabilité de f en 1.

………

………

………

………

Application 1

Soit $f(x)=x^2-1$, calculer $f'(2)$.

Correction :…………………………………………………………………………………………

………

………

………

TAF1

On donne $f(x) = \frac{x}{2x+1}$, calculer $f'(-1)$.

2) Dérivabilité à gauche et dérivabilité à droite

Définition 2

Soit $\boldsymbol{f}$ une fonction définie sur un intervalle ouvert $]\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}[$ contenant le réel $\boldsymbol{x_0}$.

- Lorsque $\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ **est finie,** on dit que $\boldsymbol{f}$ est **dérivable à gauche** en $\boldsymbol{x_0}$ **.** le nombre dérivée de f à gauche en x_0 est notée $\boldsymbol{f_g}'(\boldsymbol{x_0})$ et on écrit $\boldsymbol{f_g}'(\boldsymbol{x_0}) = \lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.
- Lorsque $\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ **est finie,** on dit que $\boldsymbol{f}$ est **dérivable à droite** en $\boldsymbol{x_0}$ **.** le nombre dérivée de f à droite en x_0 est notée $\boldsymbol{f_d}'(\boldsymbol{x_0})$ et on écrit $\boldsymbol{f_d}'(\boldsymbol{x_0}) = \lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Propriété 1

Une fonction $\boldsymbol{f}$ est **dérivable** en $\boldsymbol{x_0} \overset{ssi}{\Leftrightarrow} \boldsymbol{f}$ **est dérivable à gauche et à droite en** $\boldsymbol{x_0}$ et qu'en plus les nombres dérivés à gauche et à droite sont **égaux.**

Remarque 1

Une fonction $\boldsymbol{f}$ définie sur un intervalle $[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}]$ est **dérivable** sur $[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}] \overset{ssi}{\Leftrightarrow} \boldsymbol{f}$ est **dérivable** en tout point de $]\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}[$ **,** dérivable à gauche en $\boldsymbol{b}$ et dérivable à droite en $\boldsymbol{a}$**.**

Exemple 2

Soit $f(x) = \sqrt{x}$, étudions la dérivabilité de f à gauche et à droite en 1 puis déduisons la dérivabilité de f en 1.

....

....

....

....

Application 2

Soit $f(x) = \frac{1}{x}$, étudier la dérivabilité de f à gauche et à droite en -2 puis en déduire la dérivabilité de f en -2.

Correction :..

....

....

....

....

TAF2

On donne $f(x) = |x|$, étudier la dérivabilité de f à gauche et à droite en 0 puis en déduire la dérivabilité de f en 0.

3) Dérivabilité et continuité

Propriété 2

> <u>Si</u> une fonction $\boldsymbol{f}$ est **dérivable** en un point $\boldsymbol{x_0}$ (respectivement sur un intervalle $\boldsymbol{I}$) $\overset{alors}{\Longrightarrow}$ $\boldsymbol{f}$ est **continue** en $\boldsymbol{x_0}$ (respectivement sur un intervalle $\boldsymbol{I}$).

NB1

La réciproque de la **Propriété 2** est **fausse**.

II. INTERPRETATION GRAPHIQUE DE LA DERIVABILITE

1) Equation de la tangente en un point d'abscisse $\boldsymbol{x_0}$.

Il s'agit ici de déterminer l'équation de la tangente à la courbe $(\boldsymbol{C_f})$ au point d'abscisse $\boldsymbol{x_0}$.

Propriété 3

> Soit $\boldsymbol{f}$ une fonction définie en $\boldsymbol{x_0}$,
> <u>si</u> $\boldsymbol{f}$ est **dérivable** en $\boldsymbol{x_0}$ $\overset{alors}{\Longrightarrow}$ la courbe $\boldsymbol{C_f}$ admet une **tangente** notée (T) et d'équation $(\boldsymbol{T}): \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$ au point d'abscisse $\boldsymbol{x_0}$.

Exemple 3

Soit $f(x) = \sqrt{x}$, déterminons une équation de la tangente (T) à $(\boldsymbol{C_f})$ au point d'abscisse 1.

………

………

………

Fig.2

Application 3

Soit $f(x) = \frac{1}{x}$, déterminer une équation de la tangente (T) à $(\boldsymbol{C_f})$ au point d'abscisse -2.

Correction :………

………

………

………

TAF3

On donne $f(x) = x^2 + 2x - 3$, déterminer une équation de la tangente (T) à $(\boldsymbol{C_f})$ au point A(0 ; -3).

2) Equations de demi-tangentes à gauche et à droite en un point d'abscisse donnée

Propriété 4

- Si $\boldsymbol{f}$ est **dérivable à gauche** en $\boldsymbol{x_0} \overset{alors}{\Longrightarrow}$ la courbe $(\boldsymbol{C_f})$ admet une **demi-tangente** notée (T_g) au point d'abscisse $\boldsymbol{x_0}$ à gauche. Son équation est
  $(\boldsymbol{T_g}): \boldsymbol{y = f_g{}'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$.
- Si $\boldsymbol{f}$ est **dérivable à droite** en $\boldsymbol{x_0} \overset{alors}{\Longrightarrow}$ la courbe $(\boldsymbol{C_f})$ admet une **demi-tangente** notée (T_d) au point d'abscisse $\boldsymbol{x_0}$ à droite. Son équation est
  $(\boldsymbol{T_d}): \boldsymbol{y = f_d{}'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$.

Remarque 1

- Si $\boldsymbol{f'(x_0) = 0} \overset{alors}{\Longrightarrow}$ la tangente (T) est parallèle à l'axe des abscisses (OX).
- Si $\boldsymbol{f_g{}'(x_0) = f_d{}'(x_0)} \overset{alors}{\Longrightarrow}$ les tangentes (T_g) et (T_d) sont **confondues**.
- Si $\boldsymbol{f_g{}'(x_0) \neq f_d{}'(x_0)} \overset{alors}{\Longrightarrow}$ les tangentes (T_g) et (T_d) forment un point **anguleux** : voir **Fig3.**

Fig.3

TAF4

On donne $f(x) = \begin{cases} x^2 si\ x \leq 1 \\ \frac{1}{x}\ si\ x > 1 \end{cases}$, déterminer les équations des demi-tangentes (T_g) et (T_d).

3) Equation d'une demi-tangente verticale en un point d'abscisse donnée

Propriété 5

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a; x_0]$ **(**respectivement $[x_0; b[$ **)**.
Si $\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty$ **(**respectivement $\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty$**) :** donc f n'est pas dérivable en $x_0 \overset{alors}{\Longrightarrow}$ la courbe C_f admet une **demi-tangente verticale** au point d'abscisse x_0.

Exemple 4

Montrons que la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 0.

……

……

……

Fig.4

Application 4

Montrer que la fonction $f(x) = \sqrt{x+3}$ a une demi-tangente verticale au point d'abscisse - 3.

Correction :………

……

……

TAF5

Montrer que la fonction $f(x) = \sqrt{2x-1}$ a une demi-tangente verticale au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.

III. FONCTION DERIVEE

Définition 3

Soit $\boldsymbol{f}$ une fonction **dérivable** sur un intervalle. On appelle **dérivée** de la fonction $\boldsymbol{f}$, la fonction notée $\boldsymbol{f'}$ définie par $\boldsymbol{f' : x \longmapsto f'(x)}$.

Remarque 2

- On appelle **intervalle de dérivabilité** de la fonction $\boldsymbol{f}$, noté $\boldsymbol{D_{f'}}$ l'intervalle sur le quel la fonction $\boldsymbol{f'}$ est définie. Il est toujours inclus dans l'ensemble de définition $\boldsymbol{D_f}$.
- Toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$ et une fonction rationnelle sur son ensemble de définition.

1) Dérivées de quelques fonctions de référence.

FONCTION f	FONCTION DERIVEE f'	$D_{f'}$
$f(x) = k \text{ avec } k \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sqrt{x}$ avec $x \geq 0$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$f(x) = x^n \text{ avec } n \in \mathbb{N}^*$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x} \text{ avec } x \neq 0$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n} \text{ avec } x \neq 0$	$f'(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$

Exemple 5

Calculons les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

$f(x) = 5$;……………………………………………………………………………………………………

$f(x) = -2x$;…………………………………………………………………………………………………

$f(x) = 5x + 2$;………………………………………………………………………………………………

$f(x) = x^3$;……………………………………………………………………………………………………

$f(x) = \frac{1}{x^2}$;……………………………………………………………………………………………………

Application 5

Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

$f(x) = -54$;……………………………………………

$f(x) = 4x$;……………………………………………

$f(x) = \frac{3}{2}x - 2$;……………………………………………

$f(x) = x^7$;……………………………………………

$f(x) = \frac{1}{x^3}$;……………………………………………

TAF6

Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

$f(x) = 10^3$; $g(x) = x\sqrt{2}$; $h(x) = -\frac{1}{3}x + 5$; $t(x) = 3x^7$; $k(x) = -\frac{4}{x}$.

2) Opérations sur les fonctions dérivées

Soient $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ deux fonctions dérivables sur un même intervalle ouvert $\boldsymbol{I}$ et $\boldsymbol{k}$ un nombre réel, on admet les résultats du tableau suivant :

f	ku	$u+v$	$u \times v$	u^n	$\frac{1}{v}$	$\frac{u}{v}$	$\sqrt{u}$	uov	$\frac{ax+b}{cx+d}$
f'	ku'	$u'+v'$	$u'v+v'u$	$nu'u^{n-1}$	$-\frac{v'}{v^2}$	$\frac{u'v-v'u}{v^2}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$v' \times u'[v]$	$\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

Exemple 6

Calculons les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

$f(x) = x^3 + 4x^2 - 5$;……………………………………………

……………………………………………

$f(x) = -2x(x^2+1)$;……………………………………………

……………………………………………

$f(x) = (x-1)^3$;……………………………………………

……………………………………………

$f(x) = \frac{1}{2x+4}$;……………………………………………

……………………………………………

$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$;……………………………………………

……………………………………………

$f(x) = \sqrt{2x-7}$;……………………………………………

……………………………………………

$f = uov$ avec $u(x) = \sqrt{x}$ et $v(x) = 2x - 7$;……………………………………………

……………………………………………

Application 6

Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

$f(x) = x^3 - 3x - 1$;……………………………………………………………………………………………………

………

$f(x) = x^2\sqrt{x}$;………………………………………………………………………………………………………

………

$f(x) = (x^2 + 3)^2$;……………………………………………………………………………………………………

………

$f(x) = \frac{2x+1}{3x+4}$;…………………………………………………………………………………………………

………

$f(x) = \sqrt{x^2 - 2}$;…………………………………………………………………………………………………

………

$f = uov\ avec\ u(x) = x^2 et\ v(x) = x^2 + 3$;…………………………………………………………………

………

TAF7

Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

$f(x) = x^3 - 3x - 1$; $f(x) = x\sqrt{x+3}$; $f(x) = (2x - 3)^4$; $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$; $f(x) = 2\sqrt{x^3 + x}$;

3) Dérivée et sens de variation

Définition 4

Soit $\boldsymbol{f}$ une fonction **dérivable** sur un intervalle $\boldsymbol{I}$:

- Si $\boldsymbol{f'(x) \geq 0}$ pour tout $x \in I \overset{alors}{\Longrightarrow} f$ est dite **croissante** sur I.
- Si $\boldsymbol{f'(x)} > 0$ pour tout $x \in I \overset{alors}{\Longrightarrow} f$ est dite **strictement croissante** sur I.
- Si $\boldsymbol{f'(x) \leq 0}$ pour tout $x \in I \overset{alors}{\Longrightarrow} f$ est dite **décroissante** sur I.
- Si $\boldsymbol{f'(x)} < 0$ pour tout $x \in I \overset{alors}{\Longrightarrow} f$ est dite **strictement décroissante** sur I.
- Si $\boldsymbol{f'(x) = 0}$ pour tout $x \in I \overset{alors}{\Longrightarrow} f$ est dite **constante** sur I.

Exemple 7

Déterminons le sens de variation des fonctions suivantes :

$f(x) = -2x + 25$; ……………………………………………………………………………………………………

………

………

$f(x) = x^2 - 4x$; ………………………………………………………………………………………………………

……

……

Application 7

Etudier le sens de variation des fonctions suivantes :

$f(x) = 5x - 2$; ……

……

……

$f(x) = x^3 - 3x + 1$; ………………………………………………………………………………………………………

……

……

……

……

……

TAF8

Etudier le sens de variation des fonctions suivantes :

$f(x) = -12$; $g(x) = -4x + 3$; $h(x) = 3x^2 + 2x + 1$; $k(x) = \frac{x+2}{x+3}$;

Théorème 1

- Si f est une fonction **définie**, **continue** et **strictement monotone** (croissante ou décroissante) sur un intervalle $\boldsymbol{I} \overset{alors}{\Longrightarrow} \boldsymbol{f}$ réalise une **bijection** de $\boldsymbol{I}$ vers $\boldsymbol{f(I)}$.
- Si f est une fonction **dérivable** et **strictement monotone** sur un intervalle $\boldsymbol{I} \overset{alors}{\Longrightarrow} \boldsymbol{f}$ réalise une **bijection** de $\boldsymbol{I}$ vers $\boldsymbol{f(I)}$.

4) Tableau de variation

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $I =]a; b[$, suivant le signe de $f'(x)$ on a les tableaux ci-contre :

- **1^er^ cas** : $f'(x) > 0$

x	a		b
$f'(x)$		+	
f			$\lim\limits_{x \to b} f(x)$
		$\nearrow$	
	$\lim\limits_{x \to a} f(x)$		

- **2^ème^ cas** : $f'(x) < 0$

x	a		b
$f'(x)$		-	
f	$\lim\limits_{x \to a} f(x)$		
		$\searrow$	
			$\lim\limits_{x \to b} f(x)$

NB2

Si $a \in D_f$ $\boldsymbol{ou}$ $b \in D_f \overset{alors}{\Longrightarrow}$ au lieu de calculer $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ **ou** $\lim\limits_{x \to b} f(x)$ on peut calculer directement $f(a)$ **ou** $f(b)$.

Exemple 8

Soit la fonction $f(x) = x^2 - 3x - 4$. Dérivons f, étudions le sens de variation de f puis établissons le tableau de variation de f.

………

………

………

………

………

………

Application 8

On donne $f(x) = x^2 + 2x - 6$. Dériver f, étudier le signe de f' , en déduire le sens de variation de f puis établir le tableau de variation de f.

Correction :………

………

………

………

………

………

TAF9

Soit $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 5$

1) Déterminer D_f ; 2) Dériver f ; 3) Etudier le signe de f' et en déduire le sens de variation de f ; 4) Dresser le tableau de variation de f.

5) Extrémum

Propriété 6

Soit $\boldsymbol{f}$ une fonction **dérivable** sur un intervalle $\boldsymbol{I} =]\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}[$ contenant le nombre réel $\boldsymbol{x_0}$. Si $\boldsymbol{f'(x) = 0}$ et si $\boldsymbol{f'(x)}$ **change de signe de part et d'autre de** $\boldsymbol{x_0} \overset{\boldsymbol{alors}}{\Longrightarrow} f(x_0)$ est un **extrémum** de f sur I.

Théorème 2

- On dit que la fonction f possède en x_0 le **maximum relatif** $\boldsymbol{M = f(x_0)} \overset{\boldsymbol{ssi}}{\Leftrightarrow}$ il existe un intervalle $\boldsymbol{I}$ contenant $x_0$et inclus dans D_f tel que pour tout $x \in \boldsymbol{I}$, on ait $\boldsymbol{f(x) \leq M}$**.**
- On dit que la fonction f possède en x_0 le **minimum relatif** $\boldsymbol{m = f(x_0)} \overset{\boldsymbol{ssi}}{\Leftrightarrow}$ il existe un intervalle $\boldsymbol{I}$ contenant $x_0$et inclus dans D_f tel que pour tout $x \in \boldsymbol{I}$, on ait $\boldsymbol{m \leq f(x)}$**.**

Illustrations

- $\boldsymbol{m = f(x_0)}$ est un minimum relatif de f sur $]a; b[$.

x	a		x_0		b
$f'(x)$		-	0	+	
f		$\searrow$	m	$\nearrow$	

- $\boldsymbol{M = f(x_0)}$ est un maximum relatif de f sur $]a; b[$.

x	a		x_0		b
$f'(x)$		+	0	-	
f		$\nearrow$	M	$\searrow$	

Remarque 3

- $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{m}$ sont des nombres réels ;
- On dit que f est **bornée** sur $\boldsymbol{I} \overset{ssi}{\Leftrightarrow}$ pour tout $x \in \boldsymbol{I}$, on a $\boldsymbol{m} \leq \boldsymbol{f(x)} \leq \boldsymbol{M}$**.**
- On parlera de **maximum absolu** $\boldsymbol{M}$ et de **minimum absolu** $\boldsymbol{m}$ lorsque l'intervalle $\boldsymbol{I}$ s'élargit à l'ensemble de définition D_f (c'est-à-dire si $I = D_f$).

Exemple 9

Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

1. Déterminons D_f ;
2. Calculons les limites aux bornes de D_f ;
3. Dérivons f, étudions le signe de f' et déduisons le sens de variation de f puis le tableau de variation de f.
4. Déterminons les extrémums de f sur les intervalles $]-\infty; 2[$ et $]0; +\infty[$.
5. Montrons que f réalise une bijection de l'intervalle $]0; 2[$ vers un intervalle J à déterminer.

Correction : Voir partie exercice

Application 9

Soit $f(x) = x^3 - 3x + 1$

1. Déterminer D_f ;
2. Calculer les limites aux bornes de D_f ;
3. Dériver f, étudier le signe de f' et en déduire le sens de variation de f puis le tableau de variation de f.
4. Déterminer les extrémums de f sur les intervalles $]-\infty; 1[$ et $]-1; +\infty[$.
5. Montrer que f réalise une bijection de l'intervalle $]1; +\infty[$ vers un intervalle J à déterminer.

Correction : Voir partie exercice

TAF10

Soit $f(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$

1. Déterminer D_f ;
2. Calculer les limites aux bornes de D_f ;
3. Dériver f, étudier le signe de f' et en déduire le sens de variation de f puis le tableau de variation de f.
4. Déterminer les extrémums de f sur les intervalles $\left]-1; 1+\sqrt{2}\right[$ et $\left]1-\sqrt{2}; +\infty\right[$.
5. Montrer que f réalise une bijection de l'intervalle $]-\infty; -1[$ vers un intervalle J à déterminer.

FIN

AUTRES EXEMPLES

Résumé des Définitions, Propriétés et Théorèmes

NOTES

Chapitre III
ETUDE DE FONCTIONS

I. RAPPEL : PARITE ET ELEMENTS DE SYMETRIE

1) Parité

Définition 1

Soit f une fonction d'ensemble de définition D_f :

- f est dite **paire** $\overset{ssi}{\Leftrightarrow}$ pour tout $x \in D_f$, on a : $-x \in D_f$ et $\boldsymbol{f(-x) = f(x)}$.
- f est dite **impaire** $\overset{ssi}{\Leftrightarrow}$ pour tout $x \in D_f$, on a : $-x \in D_f$ et $\boldsymbol{f(-x) = -f(x)}$.

Remarque 1

Si pour tout $x \in D_f$, on a : $-x \in D_f,\ f(-x) \neq f(x)\ et f(-x) \neq -f(x) \overset{alors}{\Longrightarrow} f$ n'est ni paire ni impaire.

Exemple 1

1. Etudions la parité de la fonction $f(x) = 3x^3 - 2x$.

……

……

……

2. Etudions la parité de la fonction $f(x) = x^2 + 5$.

……

……

……

3. Etudions la parité de la fonction $f(x) = -2x^3 - 3$

……

……

……

Application 1

1. Etudier la parité de la fonction $f(x) = 7x^2 - 2x + 1$.

……

……

……

2. Etudions la parité de la fonction $f(x) = \frac{x^2+3}{x^2-7}$

……

……

3. Etudier la parité de la fonction $f(x) = \frac{1}{x^3}$.

……

……

……

TAF1

Etudier la parité des fonctions suivantes : $f(x) = x^3 + 3x + 1$; $g(x) = \frac{x^3+2x}{x}$;

$h(x) = x^2 - 1$; $t(x) = \sqrt{x+4}$.

Interprétation graphique

Propriété 1

- Dans un repère orthogonal, une fonction f est **paire** $\overset{ssi}{\Leftrightarrow}$ **l'axe des ordonnées** (OY) est un **axe de symétrie** de la courbe (C_f).
- Dans un repère quelconque, une fonction f est **impaire** $\overset{ssi}{\Leftrightarrow}$ **l'origine du repère** (O) est un **centre de symétrie** de la courbe (C_f).

Fig.1 **Fig.2**

Conséquence 1 (de la Propriété 1**)**

- Lorsqu'une fonction f est paire, on peut restreindre son **domaine d'étude** sur $\boldsymbol{D_E} = \boldsymbol{D_f} \cap \mathbb{R}_+$. La courbe obtenue est ensuite complétée par **symétrie axiale** par rapport à l'axe des ordonnées.
- Lorsqu'une fonction f est impaire, on peut restreindre son **domaine d'étude** sur $\boldsymbol{D_E} = \boldsymbol{D_f} \cap \mathbb{R}_+$. La courbe obtenue est ensuite complétée par **symétrie centrale** par rapport à l'origine du repère.

2) Eléments de symétrie

Propriété 2

- La **droite** $(\boldsymbol{D}): \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ est **axe de symétrie** de la courbe $(\boldsymbol{C_f}) \overset{ssi}{\Leftrightarrow}$ pour tout $x \in \boldsymbol{D_f}$, on a :

  $\boldsymbol{2a - x \in D_f}$ **et** $\boldsymbol{f(2a - x) - f(x) = 0.}$

- Le **point** $\boldsymbol{A}\binom{a}{b}$ est **centre de symétrie** de la courbe $(\boldsymbol{C_f}) \overset{ssi}{\Leftrightarrow}$ pour tout $x \in \boldsymbol{D_f}$, on a :

  $\boldsymbol{2a - x \in D_f}$ **et** $\boldsymbol{f(2a - x) + f(x) = 2b.}$

Exemple 2

1. Soit $f(x) = -x^2 + 2x + 3$, montrons que la droite $(D): x = 1$ est un axe de symétrie de (C_f).

....

....

....

....

....

2. Soit $f(x) = \frac{x-3}{2-x}$, montrons que le point $\boldsymbol{A}\binom{\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{-1}}$ est un centre de symétrie de la courbe (C_f).

....

....

....

....

....

Application 2

1. Soit $f(x) = \mathrm{x}^2 + 4\mathrm{x} + 3$, montrer que la droite $(D): x = -2$ est un axe de symétrie de (C_f).

....

....

....

....

....

2. Soit $f(x) = \frac{3x}{x+1}$, montrer que le point $\boldsymbol{A}\binom{\boldsymbol{-1}}{\boldsymbol{3}}$ est un centre de symétrie de la courbe (C_f).

....

....

………

………

………

TAF2

1. Soit $f(x) = 3x^2 - 6x + 7$, montrer que la droite $(D): x = 1$ est un axe de symétrie de (C_f).

2. Soit $f(x) = (x-1)^3 + 1$,montrer que le point $\boldsymbol{A}\binom{1}{1}$ est un centre de symétrie de la courbe (C_f).

II. RESOLUTION ALGEBRIQUE ET GRAPHIQUE D'EQUATIONS ET D'INEQUATIONS

$$f(x) = 0 \; ou \; f(x) \geq y \; ou \; f(x) \leq y \; ou \; f(x) > y \; ou \; f(x) < y$$

Rappel 1

(C_f), la représentation graphique de la fonction f est l'ensemble des points $\boldsymbol{M}\binom{x}{y}$ du plan vérifiant :

$\boldsymbol{x \in D_f \; et \; y = f(x)}$.

1) Les points d'intersections avec les axes de coordonnées

Propriété 3

- Pour trouver les **points d'intersections** entre (C_f) et **l'axe des abscisses** du repère: on résout l'équation $\boldsymbol{f(x) = 0}$. Ce qui donne les points $\boldsymbol{A_i}\binom{x_i}{0}$ avec x_i la ou les solution(s) de l'équation $f(x) = 0$.
- Pour trouver le **point d'intersection** entre (C_f) et **l'axe des ordonnées** du repère : on calcule $\boldsymbol{f(0)}$. Ce qui donne le point $\boldsymbol{A}\binom{0}{f(0)}$ s'il existe.

Exemple 3

Soit $f(x) = x^2 + x - 2$,déterminons les points d'intersections entre (C_f) et les axes de coordonnées.

………

………

………

………

………

Application 3

Soit $f(x) = x^2 + \frac{5}{2}x + 1$,déterminer les points d'intersections entre (C_f) et les axes de coordonnées.

Correction :………

………

………

………

………

TAF3

Déterminer les points d'intersections entre (C_f) et les axes de coordonnées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = x^3 - 4x^2 - x + 4$
2. $f(x) = 2x^2 - x + 3$
3. $f(x) = \frac{x^2-1}{x-2}$

2) Position relative d'une courbe par rapport à une droite

Propriété 4

Pour déterminer la **position d'une courbe** $(\boldsymbol{C_f})$ **par rapport à une droite** $(\boldsymbol{D})$: $\boldsymbol{y = ax + b}$, on étudie le signe de $\boldsymbol{f(x) - y}$:

- Si $\boldsymbol{f(x) - y > 0} \overset{alors}{\Longrightarrow}$ la courbe $\boldsymbol{C_f}$ **est au dessus** de la droite $(\boldsymbol{D})$**.**
- Si $\boldsymbol{f(x) - y < 0} \overset{alors}{\Longrightarrow}$ la courbe $\boldsymbol{C_f}$ **est en dessous** de la droite $(\boldsymbol{D})$**.**
- Si $\boldsymbol{f(x) - y = 0} \overset{alors}{\Longrightarrow}$ la courbe $\boldsymbol{C_f}$ et la droite $(\boldsymbol{D})$ sont **sécantes.**

Exemple 4

Etudions la position relative de (C_f),la courbe de la fonction $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$ avec la droite $(\boldsymbol{D})$: $\boldsymbol{y = -x - 1.}$

………

………

………

………

………

………

Application 4

Etudier la position relative de (C_f),la courbe de la fonction $f(x) = x^2 + 3x - 5$ avec la droite $(\boldsymbol{D})$: $\boldsymbol{y = 2x - 3.}$

Correction :………

………

………

………

………

………

<u>TAF4</u>

Etudier la position relative de (C_f),la courbe de la fonction $f(x) = \frac{x+4}{x-1}$ avec la droite $(\boldsymbol{D}): \boldsymbol{y} = \boldsymbol{3x}$.

III. ETUDE ET REPRESENTATION GRAPHIQUE D'UNE FONCTION

1) Plan d'étude d'une fonction

Pour étudier une fonction, on peut suivre le plan suivant :

- On détermine l'ensemble de définition de la fonction ;
- On étudie la parité de la fonction ;
- On calcule les limites aux bornes de l'ensemble de définition (ou du domaine d'étude si la fonction est paire ou impaire) et on en déduit les éventuelles branches infinies ;
- On calcule la fonction dérivée, on étudie le sens de variation et on dresse le tableau de variation ;
- On détermine les points d'intersection de la courbe avec les axes de coordonnées ;
- On calcule les images de quelques points ;
- On trace la courbe représentative de la fonction.

2) Exemples d'étude de fonctions

<u>Exemple 5</u> : TD N°1- Exercice

<u>Correction</u> : voir cahier d'exercices

<u>Application 5</u> : TD N°1- Problème 1

<u>Correction</u> : voir cahier d'exercices

<u>TAF5</u> : TD N°1- Problème 2

FIN

AUTRES EXEMPLES

Résumé des Définitions, Propriétés et Théorèmes

NOTES

Chapitre IV
FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

I. GENERALITES

Activité 1

Avec la calculatrice remplir le tableau suivant :

a	-2	-1	0	0,25	0,5	0,75	1	2	5
$\ln a$									

Définition 1

On appelle **fonction logarithme népérien**, la fonction numérique définie sur $]\mathbf{0};+\infty[$ vers $\mathbb{R}$ telle que $\mathbf{\ln(1)=0}$ $\boldsymbol{et}$ $\boldsymbol{(lnx)'=\frac{1}{x}}$.

Notation 1

- la fonction ln est notée $ln\colon \begin{matrix}]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln x \end{matrix}$
- la fonction dérivée de ln est notée $ln'\colon \begin{matrix}]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{x} \end{matrix}$

Remarque 1

- Si $a \in]-\infty;0]$ alors $\ln a$ n'existe pas.
- Si $a \in]0;1[$ $alors$ $\ln a < 0$
- Si $a \in]1;+\infty[$ $alors$ $\ln a > 0$

Propriété 1

Pour tous nombres réels $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ strictement positifs et pour tout entier relatif $\boldsymbol{n}$, on a les propriétés suivantes :

- $\boldsymbol{\ln(ab) = \ln a + \ln b}$ **(**Propriété fondamentale**)**
- $\boldsymbol{\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a}$
- $\boldsymbol{\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b}$
- $\boldsymbol{\ln a^n = n \ln a}$
- $\boldsymbol{\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a}$

Exemple 1

Ecrivons $A = \ln\left(\frac{9}{2}\right) - \ln 16 + \ln\sqrt{3}$ en fonction de $ln2$ et $\ln 3$.

....

....

....

....

Application 1

Ecrire $A = \ln\left(\frac{3}{4}\right) - \ln 18 + \ln 9$ en fonction de $ln2\ et \ln 3$.

$Correction$:...

....

....

TAF1

Ecrire $A = \ln\left(\frac{1}{8}\right) + \ln 24 - \ln 81$ en fonction de $ln2\ et \ln 3$.

II. EQUATIONS-INEQUATIONS-SYSTEMES

Propriété 2

Pour tous nombres réels $\boldsymbol{a}\ et\ \boldsymbol{b}$ strictement positifs, on a les propriétés suivantes :

- $\ln \boldsymbol{a} = \ln \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$
- $\ln \boldsymbol{a} > \ln \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} > \boldsymbol{b}$
- $\ln \boldsymbol{a} < \ln \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$

NB1

- Avant de résoudre une équation ou inéquation comportant le logarithme népérien, on cherche d'abord l'ensemble sur lequel l'équation ou l'inéquation est définie. On retient que si $\boldsymbol{u}$ est fonction numérique alors $\ln \boldsymbol{u}$ existe ssi $\boldsymbol{u} > \mathbf{0}$.
- On appelle base du logarithme népérien, l'unique nombre réel noté $\boldsymbol{e} = \mathbf{2,718281}$ ... tel que $\boldsymbol{ln\ e} = \mathbf{1}$.
- Pour tout rationnel r , on a : $\ln \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{rln\ e} = \boldsymbol{r}$.

Exemple 2

Résolvons dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes

1) $\ln x = 0$

....

....

....

2) $\ln x < 0$

....

....

....

3) $\ln(x + 3) = 0$

……

……

……

……

Application 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes

1) $\ln(2x - 1) = 0$

……

……

……

2) $2\ln x - 3\ln 2 \leq 0$

……

……

……

3) $\ln(x - 4) = \ln(2x - 3)$

……

……

……

……

TAF 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1) $\ln(x^2 + 5x + 6) \geq 0$
2) $3\,(\ln x)^2 - 2\ln x - 1 = 0$
3) $\ln(2x - 1) - \ln(1 + x) < \ln 3$

III. ETUDE DE LA FONCTION $\ln u$

Propriété 3

Soit $\boldsymbol{u(x)}$ une fonction numérique d'ensemble de définition $\boldsymbol{D_u}$, la fonction composée

$\boldsymbol{f(x) = \ln[u(x)]}$ admet :

- Pour **ensemble de définition** $\boldsymbol{D_f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, u(x) > 0\}}$.
- Pour **fonction dérivée** $\boldsymbol{f'(x) = \frac{U'(x)}{U(x)}}$.

Exemple 3

Déterminons D_f *et* $f'(x)$ pour chacune des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \ln(-3x + 1)$

………

………

………

2) $f(x) = \ln(\sqrt{2x-1})$

………

………

Application 3

Déterminer D_f et $f'(x)$ pour chacune des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \ln(x^2 - 3x + 2)$

………

………

………

………

2) $f(x) = \ln(\frac{x-1}{x+1})$

………

………

………

………

TAF 3

Déterminer D_f et $f'(x)$ pour chacune des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \ln|x-3|$
2) $f(x) = x + 2 - \ln x$

Propriété 3

Soit $\boldsymbol{n}$ un entier naturel, nous admettons les limites usuelles suivantes :

- $\lim\limits_{x->0^+} \ln x = -\infty$
- $\lim\limits_{x->+\infty} \ln x = +\infty$
- $\lim\limits_{x->+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$; $\lim\limits_{x->+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$
- $\operatorname{Lim}\limits_{x->0^+} (x \ln x) = 0$; $\lim\limits_{x->0^+} (x^n \ln x) = 0$
- $\lim\limits_{x->0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x->0} \frac{\ln x}{x-1} = 1$
- $\lim\limits_{x->0^+} [x(\ln x)^n] = 0$

Exemple 4

Etudions la fonctions $f(x) = \ln x$.

………

……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……

<u>Application 4</u>

On pose $f(x) = \ln(\frac{x-2}{x+2})$.

1) Déterminer D_f.
2) Calculer les limites aux bornes de D_f.
3) Etudier la parité de f.
4) Calculer $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f.
5) Déterminer les points d'intersection entre C_f et les axes de coordonnées.
6) Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse $x = 3$.
7) Dresser un tableau de valeurs puis tracer C_f.

$\boxed{\text{FIN}}$

AUTRES EXEMPLES

Résumé des Définitions, Propriétés et Théorèmes

NOTES

Chapitre V
DENOMBREMENT ET PROBABILITE

I. DENOMBREMENT

1) Théorie des ensembles

a) Cardinal d'un ensemble fini

Définition 1

- Un **ensemble** est dit **fini** lorsqu'on peut compter les éléments qui le constituent.
- Le nombre d'éléments d'un ensemble fini E est appelé le cardinal de E, on le note $card(E)$.

Exemple 1

- Si $E = \{a; b; c; d\}$ alors card(E)= 4
- Si $A = \{2; 4; 5; 7; 10; 12\}$ alors card(A)= 6
- Si $F = \{binta; Fatou; Awa\}$ alors card(E)= 3

Application 1

- Si $F = \{l'ensemble\ des\ filles\ de\ la\ classe\ \}$ alors card(F)= ……………………………………………………
- Si $G = \{l'ensemble\ des\ garçons\ de\ la\ classe\}$ alors card(G)= ……………………………………………

Remarque 1

L'ensemble contenant aucun élément est appelé ensemble vide, il est noté ∅ et $card(\emptyset) = 0$.

b) Réunion, Intersection, et complémentaire

Définition 2

- La **réunion** de deux ensembles $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ est l'ensemble des éléments qui sont dans A ou dans B. On la note $\boldsymbol{A \cup B}$.
- L'**intersection** de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui sont dans A et dans B. On la note $\boldsymbol{A \cap B}$**.**
- Soit $\boldsymbol{E}$ un ensemble et $\boldsymbol{A}$ une partie de E (c'est-à-dire tout élément de A est aussi élément de E : $on\ note\ A \subset E$). Le **complémentaire** de A dans E est l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans A. On le note $\boldsymbol{\overline{A}}$ ou $\boldsymbol{E \setminus A}$.

Remarque 2

Soit E un ensemble, A et B deux parties de E, on a :

- $\boldsymbol{A \cup \overline{A} = E}$
- $\boldsymbol{A \cap \overline{A}} = \emptyset$
- $\boldsymbol{A} \cup \emptyset = \boldsymbol{A}$
- $\boldsymbol{A} \cap \emptyset = \emptyset$
- $\boldsymbol{A} \cup \mathbb{R} = \mathbb{R}$
- $\boldsymbol{A} \cap \mathbb{R} = \boldsymbol{A}$
- $\overline{\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}} = \overline{\boldsymbol{A}} \cap \overline{\boldsymbol{B}}$

- $\overline{\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}} = \overline{\boldsymbol{A}}\cup\overline{\boldsymbol{B}}$
- Lorsque $\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B} = \emptyset$, on dit que les ensembles A et B sont **disjoints**.

c) Cardinal de $A \cup B$

Propriété 1

Soient $\boldsymbol{A}$ **et** $\boldsymbol{B}$ deux parties d'un ensemble fini E, on a :

$\boldsymbol{card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A\cap B)}$.

Remarque 3

Soient $\boldsymbol{A}$ **et** $\boldsymbol{B}$ deux parties d'un ensemble fini E, on a :

- $\boldsymbol{card(\overline{A}) = card(E) - card(A)}$.
- $\boldsymbol{card(A\ /\ B) = card(A) - card(A\cap B)}$.
- $\boldsymbol{card(B\ /\ A) = card(B) - card(A\cap B)}$.

d) Produit cartésien

Définition 3

- Soient $\boldsymbol{A}$ **et** $\boldsymbol{B}$ deux ensembles, on appelle **produit cartésien** $\boldsymbol{A \times B}$ (lire A croix B) l'ensemble des **couples** $(\boldsymbol{a};\boldsymbol{b})$ avec $a \in A\ et\ b \in B$.
- Le produit cartésien de trois ensembles $\boldsymbol{E_1 \times E_2 \times E_3}$ est tout **triplet** $(\boldsymbol{a_1}\ ;\boldsymbol{a_2}\ ;\boldsymbol{a_3})$ avec $a_1 \in E_1, a_2 \in E_2\ et\ a_3 \in\ E_3$.
- Le produit cartésien de p-ensembles $\boldsymbol{E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_p}$ est tout **p-uplet** $(\boldsymbol{a_1}\ ;\boldsymbol{a_2}\ ;\ldots;\boldsymbol{a_p})$ avec $a_1 \in E_1, a_2 \in E_2, \ldots , a_p \in\ E_p$.

Propriété 2

- Soient $\boldsymbol{A}$ **et** $\boldsymbol{B}$ deux ensembles, on a : $\boldsymbol{card(A \times B) = card(A) \times card(B)}$.
- Soient $E_1, E_2\ et\ E_3$ trois ensembles,on a: $card(E_1 \times E_2 \times E_3) = card(E_1) \times card(E_2) \times card(E_3)$
- Soient $E_1, E_2, \ldots, E_p$ p ensembles, on a :

$$\boldsymbol{card(E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_p) = card(E_1) \times card(E_2) \times \ldots \times card(E_p)}$$

Exemple 1

La piscine olympique de Dakar accueille 100 enfants. Deux sports leurs sont proposés : le Football et le basketball.

A la question : aimez-vous le football ? 60 enfants lèvent la main.

A la question : aimez-vous le basketball ? 45 enfants lèvent la main.

A la question : aimez-vous le football et le basketball ? 18 enfants lèvent la main.

En posant respectivement E, F et B l'ensemble de tous les enfants, l'ensemble des enfants qui aiment le football et l'ensemble des enfants qui aiment le basketball.

1) Calculons $cardE, cardF, cardB, card(F \cap B), card(F \cup B), card(F/B) et\ card\ (B/F)$.

………
………
………
………
………
………
………
………

2) Calculons $card(\bar{F})$ et $card(\bar{B})$.

………
………
………
………

3) Calculons $card(F \times B)$

………
………
………
………

<u>Application 1</u>

Sur une liste de 25 candidats autorisés à faire les épreuves du second tour au BAC 2018, 13 choisissent de reprendre l'arabe, 17 choisissent de reprendre les mathématiques. Sachant qu'il y'a deux (02) candidats qui n'ont choisis aucune de ces deux matières, remplir le tableau suivant.

En posant respectivement C, A et M l'ensemble des candidats, l'ensemble des candidats qui reprennent l'arabe et l'ensemble des candidats qui reprennent les mathématiques.

Calculer $card(C), card(A), card(M), card(\bar{A}), card(\bar{M}), card(\bar{A} \cap \bar{M}), card(A \cup M),$

$$card(A \cap M),$$

	ceux qui reprennent les mathématiques	ceux qui ne reprennent pas les mathématiques	Total
ceux qui reprennent l'arabe			
ceux qui ne reprennent pas l'arabe			
Total			

………
………
………
………
………
………
………
………

………
………
………
………

TAF1

2) Modèles de dénombrement

Définition 4 : factoriel n

Pour tout entier naturel non nul $\boldsymbol{n}$, on appelle **factoriel n** le produit noté $\boldsymbol{n}!$ Et défini par

$\boldsymbol{n}! = \boldsymbol{1} \times \boldsymbol{2} \times \boldsymbol{3} \times \ldots (\boldsymbol{n}-\boldsymbol{2})(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{1})\boldsymbol{n}$. On admet que $\boldsymbol{0}! = \boldsymbol{1}$.

Exemple 2

Calculons le factoriel des nombres suivants :

1 ! = ………………………………… ; 3 != ……………………………………………… ; 5 != ………………………………………………

$3!\,6! = \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$; $\frac{12!}{9!} = \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$; $\frac{5!}{2!3!} = \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$

Application 2

Calculer le factoriel des nombres suivants :

2 ! = ………………………………… ; 4 != ……………………………………………… ; 6 != ………………………………………………

$2!\,5! = \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$; $\frac{10!}{3!} = \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$; $\frac{5!}{2!\,3!} = \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$

TAF 2

1) Simplifier $\frac{(n+1)!}{n!}$
2) Montrer que $6!\,7! = 10!$

a) P-listes

Définition 5

Soit $\boldsymbol{E}$ un ensemble fini de cardinal $\boldsymbol{n}$ et $\boldsymbol{p}$ un entier naturel non nul. On appelle **p-listes** d'éléments de E tout **p-uplet** du produit cartésien $\underbrace{\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{E} \times \ldots \times \boldsymbol{E}}_{p\ fois} = \boldsymbol{E}^{\boldsymbol{p}}$.

Propriété 3

Le **nombre total** de **p-listes** d'un ensemble E à $\boldsymbol{n}$ éléments est égal à $\boldsymbol{n}^{\boldsymbol{p}}$.

Remarque 4

Dans une p-listes l'ordre est important et les éléments peuvent être répétés.

Exemple 3

- Soit $E = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ calculons le nombre de mot de passe à 4 chiffres d'éléments de E qu'on peut former.

  ……

  ……

  ……

- Soit $E = \{0; 1\}$ calculons le nombre de 8-listes d'éléments de E.

  ……

  ……

  ……

Application 3

- Soit $E = \{a; b; c; \dots; z\}$ calculer le nombre de mot de passe à 5 lettres de l'alphabet qu'on peut former.

  ……

  ……

  ……

- Soit $E = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ calculer le nombre de numéro de téléphone à 9 chiffres qu'on peut former.
- ……

  ……

  ……

  Soit $E = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ calculer le nombre de numéro de téléphone à 9 chiffres et commençant par 76 qu'on peut former.

  ……

  ……

  ……

TAF3

Une urne contient 2 boules vertes, 3 boules jaunes et 5 boules rouges. On tire successivement avec remise 3 boules de l'urne.

1) Déterminer le nombre total de tirages possibles.
2) Déterminer le nombre de tirages contenant 3 boules rouges.
3) Déterminer le nombre de tirages contenant 3 boules de même couleur.
4) Déterminer le nombre de tirages contenant 2 boules rouges et 1 boule verte dans cet ordre.
5) Déterminer le nombre de tirages contenant 2 boules rouges et 1 boule verte.
6) Déterminer le nombre de tirages contenant au plus 1 boule rouge.
7) Déterminer le nombre de tirages contenant au moins 1 boule rouge.

b) Arrangement

Définition 6:

Soit E un ensemble fini de cardinal $\boldsymbol{n}$ et $\boldsymbol{p}$ un entier naturel non nul. On appelle **arrangement** de $\boldsymbol{p}$ éléments de E ou **p-arrangement** tout **p-uplet** de E d'éléments deux à deux distincts.

Propriété 3

Le **nombre total d'arrangement** de de $\boldsymbol{p}$ éléments de E avec $\boldsymbol{card(E) = n}$ est noté $\boldsymbol{A_n^p}$ et défini par

$$\boldsymbol{A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}}$$

Remarque 5

- Un p-arrangement est une p-listes dans laquelle les éléments ne sont pas répétés.
- Dans un arrangement l'ordre est important et les éléments ne sont pas répétés.
- $A_n^0 = 1$; $A_n^1 = n$; $A_n^n = n!$

Exemple 4

- Soit $E = \{a; b; c; \ldots; z\}$ calculons le nombre total d'arrangement de 4 éléments de E.
  ……
  ……
  ……
- Une course de chevaux comporte 20 partants. Calculons le nombre total de podium ou de tiercé ou d'arrivée des 3 premiers.
  ……
  ……
  ……

Application 4

- Soit $E = \{a; b; c; \ldots; z\}$ calculer le nombre total de mot de 5 lettres ayant un sens ou non et de lettres deux à deux distinctes de l'alphabet.
  ……
  ……
  ……
- Un porte manteau comporte 5 patères. De combien de façon peut-on y accrocher 3 t-shirts ?
  ……
  ……
  ……

TAF4

Reprendre le TAF3 en considérant un tirage successive sans remise.

c) Permutation

Définition 7

Soit E un ensemble fini de cardinal $\boldsymbol{n}$. On appelle **permutation** des éléments de E tout **arrangement** des $\boldsymbol{n}$ éléments de E.

Propriété 3

- Le **nombre total de permutation** des $\boldsymbol{n}$ éléments de E distincts est égal à $\boldsymbol{n}!$.
- Le **nombre total de permutations** des $\boldsymbol{n}$ éléments de E dont : $\boldsymbol{n_1}$éléments sont identiques, $\boldsymbol{n_2}$ éléments sont identiques, …, $\boldsymbol{n_r}$ éléments sont identiques est égal à $\frac{\boldsymbol{n}!}{\boldsymbol{n_1}!\times\boldsymbol{n_2}!\times\ldots\times\boldsymbol{n_r}!}$.

Exemple 5

- Soit $E = \{c; e; s; \}$ calculons le nombre total de mot de 3 lettres ayant un sens ou non.
  ………
  ………
  ………
- Soit $E = \{s; e; s; \}$ calculons le nombre total de mot de 3 lettres ayant un sens ou non.
  ………
  ………
  ………

Application 4

- Soit $E = \{a; b; c; \ldots; z\}$ calculer le nombre total de mot de 5 lettres ayant un sens ou non et de lettres deux à deux distinctes de l'alphabet.
  ………
  ………
  ………
- De combien de façon peut-on faire assoir 5 invités sur 5 chaises ?
  ………
  ………
  ………

TAF5

Déterminer le nombre total de mots qu'on peut former à partir du mot BACCALAUREAT.

Remarque 6

Le nombre d'**anagramme** d'un mot est le nombre total de mots qu'on peut former à partir des lettres du mot en dehors du mot.

Exemple 6

Le nombre total d'anagrammes du mot sucre est ……………………………………………………………………

Application 6

Déterminer le nombre total d'anagrammes du mot terminale.

……
……
……

TAF6

Déterminer le nombre d'anagrammes du mot BACCALAUREAT.

d) Combinaison

Définition 8

Soit E un ensemble fini de cardinal $\boldsymbol{n}$ et $\boldsymbol{p}$ un entier naturel tel que $\mathbf{0} \leq \boldsymbol{p} \leq \boldsymbol{n}$. On appelle **combinaison** des p éléments de E ou **p-combinaison toute partie de $\boldsymbol{E}$** ayant p éléments.

Propriété 4

Le **nombre total de combinaisons** de **p** éléments de E est noté $\boldsymbol{C_n^p}$ et défini par $\boldsymbol{C_n^p} = \frac{\boldsymbol{n}!}{\boldsymbol{p}!(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p})!}$.

Remarque 7

- Dans une combinaison l'ordre des éléments n'a pas d'importance et les éléments ne sont pas répétés.
- $\boldsymbol{C_n^0 = 1}$; $\boldsymbol{C_n^1 = n}$; $\boldsymbol{C_n^n = 1}$; $\boldsymbol{C_n^p = C_n^{n-p}}$

Exemple 7

- Calculons le nombre de 5-combinaisons des 26 lettres de l'alphabet.
  ………
  ………
  ………
- Calculons le nombre de bureaux de 3 personnes que l'on peut élire dans une assemblée de 20 députés.
  ………
  ………
  ………

Application 7

Dans une classe de 20 élèves on veut former des groupes de balayage de 5 élèves.

1) Combien de groupe peut-on former ?
2) Cette classe compte 12 filles et 8 garçons. Combien de groupe peut-on former contenant :
   a) Exactement 2 filles.
   b) Au plus 2 filles.
   c) Au moins 1 fille.

Correction : ……………………………………………………………………………………………

………

………

………

………

………

TAF7

Reprendre le TAF3 en considérant que le tirage se fait simultanément.

II. PROBABILITE

1) Vocabulaire

a) Expérience aléatoire

On appelle **expérience aléatoire**, une expérience ou épreuve faisant intervenir le hasard et dont on ne peut pas prévoir le résultat (ou l'issue).

b) Eventualité

On appelle **éventualité** ou **issue** un résultat d'une expérience aléatoire.

c) Univers

On appelle **univers** l'ensemble de toutes les éventualités d'une expérience aléatoire. On le note en général **Ω (**lire oméga**).**

d) Evénement

On appelle **événement** toute partie de l'univers.

Donnons les différents événements particuliers :

- **Evénement élémentaire** : c'est un événement constitué d'une seule éventualité.
- **Intersection de deux événements** : c'est l'événement noté $''\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{et}\ \boldsymbol{B}''ou\ ''\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}''$ qui est réalisé ssi les événements A et B sont simultanément réalisés.
- **Réunion de deux événements** : c'est l'événement noté $''\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{ou}\ \boldsymbol{B}''ou\ ''\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}''$ qui est réalisé ssi l'un au moins des événements A ou B est réalisé.
- **Evénements incompatibles** : c'est deux événements qui n'ont aucune éventualité en commun. On a $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \emptyset$**.**
- **Evénements contraires** : c'est deux événements incompatibles et dont la réunion donne l'univers. On note $\overline{\boldsymbol{A}}$ l'événement contraire de A.
- **Evénement certain** : c'est un événement qui est toujours réalisé.
- **Evénement impossible** : c'est un événement qui ne se réalise jamais.

2) Définition et Propriété

Définition 9

Soit $\boldsymbol{\Omega}$ l'univers associé à une expérience aléatoire. On appelle **probabilité** $\boldsymbol{P}$ toute application qui à tout événement $\boldsymbol{A}$ de $\boldsymbol{\Omega}$ associe le nombre réel $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) \in [\mathbf{0}; \mathbf{1}]$**.** Cette application est telle que :

- La somme des probabilités des événements élémentaires **vaut 1**. Ainsi on a $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{\Omega}) = \mathbf{1}$**.**
- La probabilité d'un événement **impossible vaut 0**. Ainsi on a $\boldsymbol{P}(\emptyset) = \mathbf{0}$.
- La probabilité d'un événement est égale à la somme des probabilités des événements élémentaires qui le compose.

Propriété 5

- Soient $\boldsymbol{A}\ et\ \boldsymbol{B}$ deux événements de l'univers Ω, on a $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) + \boldsymbol{P}(\boldsymbol{B}) - \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B})$**.**
- Si $\boldsymbol{A}\ et\ \boldsymbol{B}$ sont incompatibles alors $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) + \boldsymbol{P}(\boldsymbol{B})$.
- soit $\overline{\boldsymbol{A}}$ l'événement contraire de A, on a : $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) = \mathbf{1} - \boldsymbol{P}(\overline{\boldsymbol{A}})$**.**

3) Equiprobabilité

Définition 10

Des événements élémentaires sont dits **équiprobables** lorsqu'ils tous la même chance (probabilité) de se réaliser.

Propriété 6

Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire. Dans le cas de l'équiprobabilité, la probabilité d'un événement A vaut : $\boldsymbol{P(A)} = \frac{\boldsymbol{card(A)}}{\boldsymbol{card(\Omega)}} = \frac{\boldsymbol{nombre\ de\ cas\ favorables\ \text{à}\ A}}{\boldsymbol{nombre\ de\ \text{r}\acute{e}sultats\ possibles}}$

Exemple 8

On lance un dé non truqué numéroté de 1 à 6. On considère l'événement élémentaire A : '' obtenir la face 3'' et l'événement B :''obtenir la face 2 ou 3 ou 4''

1) Calculons P(A) et P(B).
2) Calculons $P(A \cap B), P(A \cup B) et\ P(\bar{A})$.

……
……
……
……
……
……

Application 8

Dans un panier de 10 pommes, 3 sont pourries. On tire au hasard simultanément 2 pommes du panier.

1) Déterminer le nombre de tirages possibles.
2) Calculer la probabilité de tirer :
   a) Deux pommes pourries ;
   b) Deux pommes dont une seule est pourrie ;
   c) Au plus une pomme est pourrie.

Correction : ………

……
……
……
……
……
……
……
……

TAF8

Huit coureurs dont 3 sénégalais et 5 étrangers participent à une course dont les 3 premiers sont primés.

1) Quel est le nombre de podiums possibles?
2) Calculer la probabilité des événements suivants :
   A :'' la course est gagnée par un sénégalais.''
   B :''un sénégalais et un seul est sur le podium?

FIN

AUTTRES EXEMPLES

Résumé des Définitions, Propriétés et Théorèmes

NOTES

Chapitre VI
SUITES NUMERIQUES

I. GENERALITES

Définition 1

On appelle **suite numérique $\boldsymbol{U}$** ou $(\boldsymbol{U_n})$ toute application de l'ensemble $\mathbb{N}$ (ou d'une partie I de $\mathbb{N}$) vers l'ensemble $\mathbb{R}$. On la note $\boldsymbol{U: n \longmapsto U(n) = U_n}$.

Remarque 1

- U_0 est appelé le terme de rang 0, U_1 le terme de rang 1,…, U_n le terme de rang n.
- Lorsque I désigne l'ensemble de définition de la suite U, on peut la noter $(U_n)_{n\in I}$.
- Lorsque $I = [n_0; +\infty[$ on peut noter la suite U par $(U_n)_{n\geq n_0}$.
- La notation (U_n) désigne la suite et U_n désigne l'image de l'entier n.
- Une suite est déterminée par la donnée de son premier terme et de sa raison.

Exemple 1

1) La suite : 2 – 5 – 8 – 11 – 14 – 17 - …. est une suite de premier terme 2 et de raison 3.
2) La suite : 1 – 2 – 4 – 8 – 16 – 32 – 64- … est une suite de premier terme 1 et de raison 2.

Application 1

Donner le premier terme et la raison de la suite : 6 – 9 – 12– 15 – 18 – 21 - ….

TAF1

Donner le premier terme et la raison de la suite : 3 – 1 – (-3)– (-5) – (-7) – (-9) - ….

1) Différentes écritures d'une suite

a) Suite définie de façon explicite : $\boldsymbol{U_n = f(n)}$

Le terme général U_n est exprimé en fonction de $\boldsymbol{n}$. Connaissant la valeur de n, on calcule directement la valeur du terme U_n.

Exemple 2

Pour tout $n \geq 0$ on définit la suite $U_n = \frac{1}{n+1}$. Calculons U_0, U_1, U_2 et U_3.

………

………

Application 2

Pour tout $n \geq 0$ on définit la suite $U_n = 3n^2 + 2n - 1$. Calculons U_0, U_1, U_2 et U_3.

Correction: ………

………

………

TAF 2

Pour tout $n \geq 3$ on définit la suite $U_n = \ln(n-2)$. Calculer $U_3, U_{4,} U_5$ et U_6.

b) Suite définie de façon récurrente : $\boldsymbol{U_{n+1} = f(U_n)}$

Le terme général est exprimé en fonction d'un autre terme de la suite. Connaissant un certain termes précédant U_n, on calcule la valeur du terme U_n.

Exemple 3

Soit (U_n)la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_n = {U_n}^2 - 1 \end{cases}$, calculons les termes $U_{1,} U_2$ et U_3.

……

……

Application 3

Soit (U_n)la suite définie par : $\begin{cases} U_1 = -2 \\ U_n = 3U_{n-1} + 2 \end{cases}$, calculons les termes $U_{2,} U_3$ et U_4.

Correction :………

……

……

TAF 3

Soit (U_n)la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{U_n - 1}{2} \end{cases}$, calculons les termes $U_{1,} U_2$ et U_3.

2) Sens de variation d'une suite

Propriété 1

Soit $(U_n)_{n \in I}$ une suite numérique :

- Si pour tout $n \in I$, $\boldsymbol{U_n \leq U_{n+1}}$ alors la suite (U_n) est **croissante** sur I.
- Si pour tout $n \in I$, $\boldsymbol{U_n \geq U_{n+1}}$ alors la suite (U_n) est **décroissante** sur I.
- Si pour tout $n \in I$, $\boldsymbol{U_n = U_{n+1}}$ alors la suite (U_n) est **constante** ou **stationnaire** sur I.

Méthode 1

Pour étudier le sens de variation d'une suite, on peut :

- Etudier le signe de $\boldsymbol{U_{n+1} - U_n}$ puis comparer $\boldsymbol{U_{n+1}}$ $\boldsymbol{et}$ $\boldsymbol{U_n;}$
- Comparer $\boldsymbol{\frac{U_{n+1}}{U_n}}$ et **1** pour une suite à termes positifs.

II. SUITES ARITHMETIQUES

Définition 2

On appelle **suite arithmétique** une suite de nombres où on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre $\boldsymbol{r}$ appelé **raison** de la suite arithmétique.On a:$\boldsymbol{U_{n+1} = U_n + r}$

Exemple 4

1) La suite : $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \boldsymbol{U_n + 2} \end{cases}$ est une suite arithmétique de premier terme $U_0 = 3$ et de raison $r = 2$

2) La suite : $\begin{cases} V_1 = 10 \\ V_{n+1} = \boldsymbol{V_n - 5} \end{cases}$ est une suite arithmétique de premier terme $V_1 = 10$ et de raison $r = -5$.

Application 4

Déterminer le premier terme et la raison de la suite arithmétique suivante : $\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_{n+1} = \boldsymbol{U_n + \frac{1}{2}} \end{cases}$

TAF 4

Déterminer le premier terme et la raison de la suite arithmétique suivante : $\begin{cases} U_1 = \ln\frac{3}{2} \\ U_{n-1} = \boldsymbol{U_n - ln2} \end{cases}$

Méthode 2

Pour prouver qu'une suite est arithmétique, il suffit de montrer que pour tout n, $U_{n+1} - \boldsymbol{U_n = r}$ (la différence de deux termes consécutifs) est toujours égale à un nombre réel r (qui ne dépend pas de n).

Remarque 2

Soit (U_n) une suite arithmétique de raison r :

- Si $\boldsymbol{r > 0}$ alors la suite (U_n) est **croissante**.
- Si $\boldsymbol{r < 0}$ alors la suite (U_n) est **décroissante.**
- Si $\boldsymbol{r = 0}$ alors la suite (U_n) est **constante.**

Propriété 2

1) Relation entre deux termes d'une suite arithmétiques : $\boxed{\boldsymbol{U_n = U_p + (n-p)r}}$

- **Si p = 0**, la relation entre le premier terme $\boldsymbol{U_0}$ **et** $\boldsymbol{U_n}$ **est :** $\boldsymbol{U_n = U_0 + nr.}$
- **Si p = 1**, la relation entre le terme $\boldsymbol{U_1}$ **et** $\boldsymbol{U_n}$ **est :** $\boldsymbol{U_n = U_1 + (n-1)r.}$

2) Formule permettant de calculer la somme des n premiers termes d'une suite arithmétique :

$$\boldsymbol{S_n = U_p + U_{p+1} + \cdots + U_n = \frac{Premier\ terme + dernier\ terme}{2} \times nombre\ de\ termes = \frac{U_p + U_n}{2} \times (n - p + 1)}$$

- Si p = 0 , $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n = \frac{U_0+U_n}{2} \times (n+1)$.
- Si p = 1 , $S_n = U_1 + U_2 + \cdots + U_n = \frac{U_1+U_n}{2} \times n$.
- Si p = 3 et n = 10, $S = U_3 + U_4 + \cdots + U_{10} = \frac{U_3+U_{10}}{2} \times 8$.

Application 5

Soit (U_n) la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \boldsymbol{U_n} + \mathbf{5} \end{cases}$

1) Montrer que (U_n) est une suite arithmétique. Préciser sa raison et son premier terme.
2) Donner la formule explicite de la suite (U_n).
3) Calculer S_{20}.

III. SUITES GEOMETRIQUES

Définition 3

On appelle **suite géométrique** une suite de nombres où on passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par le même nombre $\boldsymbol{q}$(non nul) appelé **raison** de la suite géométrique.

On a: $\boldsymbol{U_{n+1} = q \times U_n}$.

Exemple 6

1) La suite : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}\boldsymbol{U_n} \end{cases}$ est une suite géométrique de premier terme $U_0 = 2$ et de raison $q = \frac{1}{2}$
2) La suite : $\begin{cases} V_0 = 1 \\ V_{n+1} = \mathbf{3}\boldsymbol{V_n} \end{cases}$ est une suite géométrique de premier terme $V_0 = 1$ et de raison $q = 3$.

Application 6

Donner le premier terme et la raison de la suite : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = -3U_n \end{cases}$

TAF6

Donner le premier terme et la raison de la suite : $\begin{cases} U_1 = 2 \\ U_{n+1} = e^1 U_n \end{cases}$

Méthode 3

Pour prouver qu'une suite est géométrique, il suffit de montrer que pour tout n, $\boldsymbol{\frac{U_{n+1}}{U_n} = q}$ (le rapport de deux termes consécutifs) est toujours égale à un nombre réel q (qui ne dépend pas de n).

Remarque 3

Soit (U_n) une suite arithmétique de raison r à termes positifs:

- Si $q > 1$ alors la suite (U_n) est **strictement croissante**.
- Si $0 < q < 1$ alors la suite (U_n) est **strictement décroissante.**
- Si $q = 1$ alors la suite (U_n) est **constante.**

Propriété 2

1) Relation entre deux termes d'une suite géométrique : $\boxed{U_n = q^{n-p} \times U_p}$

- **Si p = 0**, la relation entre le premier terme **U_0 et U_n est : $U_n = q^n \times U_0$.**
- **Si p = 1**, la relation entre le premier terme **U_1 et U_n est : $U_n = q^{n-1} \times U_1$.**

2) Formule permettant de calculer la somme des n premiers termes d'une suite géométrique :

$$\boxed{S_n = U_p + U_{p+1} + \cdots + U_n = Premier\ terme \times \frac{1-q^{nombre\ de\ termes}}{1-q} = U_p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q} \text{ Pour tout p} < n \text{ et } q \neq 1}$$

- Si p = 0 , $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n = U_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.
- Si p = 1 , $S_n = U_1 + U_2 + \cdots + U_n = U_1 \times \frac{1-q^n}{1-q}$.
- Si p = 3 et n = 10, $S = U_3 + U_4 + \cdots + U_{10} = U_3 \times \frac{1-q^8}{1-q}$.

Application 7

Soit (U_n) la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = 3U_n \end{cases}$

1) Montrer que (U_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.
2) Donner la formule explicite de la suite (U_n).
3) Calculer S_{20}.

IV. CONVERGENCE D'UNE SUITE

Définition 4

Une suite est dite **convergente** si elle admet une **limite finie** en $+\infty$. C'est-à-dire

$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = l$ (l un nombre réel), on dit que la suite (U_n) converge vers l.

Propriété 3

➢ Soit (U_n) une suite géométrique de raison q, on a :

- $Si\ q > 1\ alors\ \lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty.$
- $Si\ -1 < q < 1\ alors\ \lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0.$
- $Si\ q \leq -1\ alors\ (q^n)\ n'a\ pas\ de\ limite.$
- $Si\ q = 1\ alors\ \lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1.$

➢ Soit (U_n) une suite arithmétique de raison r, on a :

- $Si\ r > 0\ alors\ \lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$
- $Si\ r < 0\ alors\ \lim\limits_{n \to +\infty} U_n = -\infty$

FIN

AUTRES EXEMPLES

Résumé des Définitions, Propriétés et Théorèmes

NOTES

Chapitre VII
FONCTION EXPONENTIELLE NEPERIENNE

I. GENERALITES

Introduction

La fonction ln est dérivable et strictement croissante sur $]0;+\infty[$ donc elle réalise une bijection de $]0;+\infty[$ vers $ln(]0;+\infty[) = \left]\lim_{x\to 0^+} \ln x ; \lim_{x\to+\infty} \ln x;\right[=]-\infty;+\infty[$. Cette bijection est appelée fonction **exponentielle népérienne**.

Définition 1

On appelle **fonction exponentielle népérienne**, la fonction numérique notée $\mathbf{exp(x)}$ $\boldsymbol{ou}$ $\boldsymbol{e^x}$, définie de $\mathbb{R}$ vers $]\mathbf{0};+\infty[$ telle que $e^0 = 1$ et $(e^x)' = e^x$.

Remarque 1

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $e^x > 0$.
- $\begin{cases} ln\, a = b \\ a \in]0;+\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = e^b \\ b \in]-\infty;+\infty[\end{cases}$
- $x = 0 \Leftrightarrow e^x = 1$
- $x > 0 \Leftrightarrow e^x > 1$
- $x < 0 \Leftrightarrow 0 < e^x < 1$
- $e^1 = e$

Propriété 1

Pour tous nombres réels $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ et tout entier relatif $\boldsymbol{n}$**,** on a les propriétés suivantes :

- $\boldsymbol{e^{a+b} = e^a \times e^b}$ (Propriété fondamentale)
- $\boldsymbol{e^{-1} = \frac{1}{e}}$
- $\boldsymbol{e^{-a} = \frac{1}{e^a}}$
- $\boldsymbol{e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}}$
- $\boldsymbol{(e^a)^n = e^{an}}$
- $\boldsymbol{\ln e^a = a}$
- $\boldsymbol{e^{\ln a} = a \quad avec\ a > 0}$

Exemple 1

Ecrivons de la façon la plus simple possible les nombres suivants :

$A = e^3 \times e^{-3} =$ ....

$B = \ln(\sqrt{e}) =$ ....

Application 1

Ecrire de la façon la plus simple possible les nombres suivants :

$A = e^{1-\ln 2} =$ ……………………………………………………………………………………………

$B = (e^{\ln 3})^2 =$ ……………………………………………………………………………………………

TAF1

Ecrire de la façon la plus simple possible les nombres suivants :

$A = \ln\left(\sqrt{e^3}\right)$; $B = e^{-\ln 4}$

II. EQUATIONS-INEQUATIONS-SYSTEMES

Propriété 2

Pour tous nombres réels $\boldsymbol{a}$ *et* $\boldsymbol{b}$ on a les propriétés suivantes :

- $\boldsymbol{e^a = e^b \Leftrightarrow a = b}$
- $\boldsymbol{e^a > e^b \Leftrightarrow a > b}$
- $\boldsymbol{e^a < e^b \Leftrightarrow a < b}$

Exemple 2

Résolvons dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes

1) $e^{2x+3} = 1$

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

2) $e^{3x+1} = e^{-3}$

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

3) $e^{-x+3} < 2$

……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

Application 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes

1) $e^{2x-3} = 5$

………
………
………

2) $2(e^x)^2 + 3e^x - 2 = 0$

………
………
………
………

3) $e^{-2x^2-x+1} \leq 1$

………
………
………
………

TAF2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1) $e^{x^2-3x+2} = e^{-5x+1}$
2) $2e^{3x} + 3e^{2x} - 2e^x - 3 = 0$

III. ETUDE DE LA FONCTION e^u

Propriété 3

Soit $\boldsymbol{u(x)}$ une fonction numérique définie et dérivable sur $\boldsymbol{D_u}$, la fonction composée

$\boldsymbol{f(x) = e^{u(x)}}$ admet :

- Pour **ensemble de définition** $\boldsymbol{D_f = D_u}$
- Pour **fonction dérivée** $\boldsymbol{f'(x) = u'(x)e^{u(x)}}$

Exemple 3

Déterminons D_f *et* $f'(x)$ pour chacune des fonctions suivantes :

1) $f(x) = e^{x^2-x+3}$

………
………
………

2) $f(x) = x + 1 + e^x$

………
………

Application 3

Déterminer D_f *et* $f'(x)$ pour chacune des fonctions suivantes :

1) $f(x) = x + \ln(e^x + 1)$

………

………

………

………

2) $f(x) = e^{\frac{1}{x}} + x$

………

………

………

………

TAF 3

Déterminer D_f *et* $f'(x)$ pour chacune des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \frac{e^x+1}{e^x-1}$
2) $f(x) = xe^{-x+2}$

Propriété 3

Soit $\boldsymbol{\alpha}$ un nombre réel strictement positif, nous admettons les limites usuelles suivantes :

- $\lim\limits_{x->-\infty} e^x = 0$
- $\lim\limits_{x->+\infty} e^x = +\infty$
- $\lim\limits_{x->-\infty} xe^x = 0$; $\lim\limits_{x->-\infty} x^\alpha e^x = 0$
- $\lim\limits_{x->0} \frac{e^x-1}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x->+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$; $\lim\limits_{x->+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$

Exemple 4

Etudions la fonctions $f(x) = e^x$.

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

Application 4

Exercice ………….. de la série

FIN

AUTRES EXEMPLES

Résumé des Définitions, Propriétés et Théorèmes

NOTES

Chapitre VIII
STATISTIQUES

I- VOCABULAIRE

1) POPULATION

On appelle population, l'ensemble sur lequel porte l'étude menée. Une population peut donc être constituée de personnes, d'objets ou d'animaux.

2) INDIVIDU

On appelle individu, tout élément d'une population donnée.

3) ÉCHANTILLON

On appelle échantillon, toute partie non vide de la population.

4) CARACTÈRE

C'est toute propriété ou information étudiée sur une population ou sur un échantillon. Il existe deux types de caractères :

- Les caractères qualitatifs : qui ne s'expriment pas par un nombre réel. Exemple : sexe, nationalité…
- Les caractères quantitatifs : qui s'expriment par un nombre réel. Exemple : taille, poids, âge…

II- SERIES STATISTIQUES DOUBLES

Si on étudie un caractère X sur une population, l'ensemble noté (x_i) des valeurs prises par le caractère X est dit : **série statistique simple** (ou à une variable).

Il arrive qu'on étudie simultanément deux caractères X et Y sur les individus d'une population donnée. Dans ce cas, l'ensemble des couples de valeurs $(x_i; y_i)$ est appelé **série statistique double** (ou à deux variables).

Exemple A: sur une classe de terminale, on étudie simultanément les notes en maths X et en philo Y de 7 élèves. Le relevé est confiné dans le tableau suivant :

x_i	03	06	08	14	14	10	11
y_i	05	09	07	11	15	10	13

NB : dans toute la suite, on travaillera avec l'**exemple A**

1) NUAGE DE POINTS

Dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$, l'ensemble des points $\boldsymbol{M_i(x_i;\ y_i)}$ est appelé **nuage de points.**

Application 1: représenter le nuage de points de l'**exemple A.** Prendre 0,5 cm pour l'unité sur (OX) et (OY).

Correction :………
………
………
………
………
………
………
………
………
………

2) MOYENNES DE X ET Y

L'effectif total noté N est égal au nombre d'individus de la population. Dans l'**exemple A**, N = 7.

- La moyenne de X est notée $\bar{X}$ et on a : $\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \cdots + x_n}{N}$
- La moyenne de Y est notée $\bar{Y}$ et on a : $\bar{Y} = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + \cdots + y_n}{N}$

Application 2: dans l'**exemple A**, calculer $\bar{X}$ et $\bar{Y}$.

Correction :...

....

....

....

....

....

....

3) POINT MOYEN DU NUAGE

Le point moyen du nuage est le point **G($\bar{X}$; $\bar{Y}$).**

Application 3: placer le point G de l'**exemple A** dans le repère.

4) VARIANCE ET ECART-TYPE DE X ET Y

- La variance de X est le réel positif noté **V(X)** et vaut : $V(X) = \frac{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 + {x_4}^2 + \cdots + {x_n}^2}{N} - \bar{X}^2$
- L'écart-type de X est noté $\sigma(X)$ et on a : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

On définit de même la variance et l'écart-type de Y.

Application 4: dans l'**exemple A**, calculer la variance et l'écart-type de X puis ceux de Y.

5) COVARIANCE DE X ET Y :

La covariance de X et Y est le réel noté $\mathbf{cov}(X;Y)$, défini par:

$$\operatorname{cov}(X;Y) = \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4 + \cdots + x_ny_n}{N} - \bar{X}\bar{Y}$$

Application 5: dans l'**exemple A**, calculer la covariance de X et Y.

Correction :...

....

....

....

....

....

....

6) COEFFICIENT DE CORRELATION LINEAIRE :

On appelle coefficient de corrélation linéaire le réel noté $r(X;Y)$ défini par : $r(X;Y) = \frac{\operatorname{cov}(X;Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$

Application 5: dans l'**exemple A**, calculer $r(X;Y)$.

Correction :...

....

III- AJUSTEMENT LINEAIRE

Ajuster de manière linéaire un nuage, c'est trouver une droite proche des points du nuage. On peut ajuster de plusieurs façons un nuage.

➢ **Ajustement par la méthode des moindres carrés :** (droites de régression)

Ici, la droite recherchée s'appelle droite de régression :

a) Droite de régression de y en x

La droite de régression de y en x est notée $Dy_{/x}$ et son équation est :

$$\boxed{Dy_{/x} : \ y - \overline{Y} = a(x - \overline{X}) \quad avec \ a = \frac{\operatorname{cov}(X;Y)}{V(X)}}$$

b) Droite de régression de x en y

La droite de régression de x en y est notée $Dx_{/y}$ et son équation est :

$$\boxed{Dx_{/y} : \ x - \overline{X} = b(y - \overline{Y}) \quad avec \ b = \frac{\operatorname{cov}(X;Y)}{V(Y)}}$$

➢ **Ajustement par la méthode de Mayer :**

On découpe le nuage de points en deux sous-nuages de mêmes effectifs (à une unité prés), puis on calcule les deux points moyens $\mathbf{G_1}$ et $\mathbf{G_2}$ des deux sous-nuages : la droite $\mathbf{(G_1G_2)}$ est un ajustement linéaire de la série.

NB:

- On admet que **$-1 \leq r \leq 1$.**
- la **corrélation** linéaire entre les deux variables est **forte ou bonne** si : **$0,87 \leq |r| \leq 1$**.
- Si r = 1 alors les droites $Dx_{/y}$ et $Dy_{/x}$ sont confondues : on dit que l'ajustement linéaire est parfait.

Application 6: dans l'**exemple A**, donner la droite de régression de x en y, puis celui de y en x.

Correction :..
....
....
....
....
....
....
....
....
....

EXERCICE D'APPLICATION : BAC 1999 – TD N°5

FIN

AUTRES EXEMPLES

Résumé des Définitions, Propriétés et Théorèmes

NOTES

Chapitre IX

CALCUL INTEGRAL

I. PRIMITIVES

1) ACTIVITE

Dans chacun des cas suivants, déterminer une fonction F dérivable sur un intervalle I que l'on précisera et dont la dérivée est la fonction f :

a) $f: x -> 1$ **b)** $f: x -> 3x^2$ **c)** $f: x -> -\frac{1}{x^2}$ **d)** $f: x -> \frac{1}{\sqrt{x}}$

Correction : ....

....

....

....

Définition 1 :

Soit $\boldsymbol{f}$ une fonction définie sur un intervalle ***I*** . On appelle **primitive** de $\boldsymbol{f}$ sur ***I*** toute fonction ***F*** définie de ***I*** vers $\mathbb{R}$, dérivable sur ***I*** et telle que, pour tout élément $\boldsymbol{x} \in$ ***I*** , ***F'***$(\boldsymbol{x})$ = $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$.

Exemple1 :

- La fonction $F(x) = x^2$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f(x) = 2x$.
- Les fonctions $F_1(x) = x^2 + 3$ et $F_2(x) = x^2 - \sqrt{3}$ sont aussi des primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction

  $f(x) = 2x$.
- La fonction $F_1(x) = \sqrt{x}$ et $F_2(x) = \sqrt{x} + \frac{3}{7}$ sont des primitives sur $]0; +\infty[$ de la fonction $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
- La fonction $F_1(x) = 3x + \sqrt{x}$ est une primitive sur $]0; +\infty[$ de la fonction $f(x) = 3 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Propriété 1 :

Si $\boldsymbol{f}$ est une fonction **continue** sur un intervalle ***I***, alors $\boldsymbol{f}$ admet une **primitive** sur ***I*** .

Propriété 2 :

Si $\boldsymbol{f}$ admet une primitive ***F*** sur ***I*** alors $\boldsymbol{f}$ admet une infinité de primitives sur ***I,*** elles sont de la forme : $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{k}$ pour tout $k \in \mathbb{R}$.

Propriété 3 :

Soient $\boldsymbol{f}$ et $\boldsymbol{g}$ deux fonctions définies sur un intervalle ***I*** et soit $\boldsymbol{\alpha}$ un nombre réel :

- Si ***F*** est une primitive de $\boldsymbol{f}$ **sur *I*** alors $\boldsymbol{\alpha F}$ est une primitive de $\boldsymbol{\alpha f}$ sur ***I.***
- Si ***F*** et ***G*** sont respectivement des primitives de $\boldsymbol{f}$ et $\boldsymbol{g}$ sur ***I*** alors ***F*** +***G*** est une primitive de $\boldsymbol{f}$+$\boldsymbol{g}$ sur ***I.***

2) PRIMITIVE DE FONCTIONS ELEMENTAIRES

Fonction f	Une fonction primitive F
$f(x) = a$ (a une constante)	$F(x) = ax$
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2$
$f(x) = x^2$	$F(x) = \frac{1}{3}x^3$
$f(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\})$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = ln\, x$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$

3) PRIMITIVE DE FONCTION U

Soit u une fonction **dérivable** sur un intervalle ***I***, on a :

Fonction f	Une fonction primitive F
$u'(x)[u(x)]^n$	$\frac{[u(x)]^{n+1}}{n+1}$
$\frac{u'(x)}{[u(x)]^n}$; $(n \in \mathbb{N} \setminus \{1\})$	$-\frac{1}{(n-1)[u(x)]^{n-1}}$
$\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$2\sqrt{u(x)}$
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$ln[u(x)]$
$u'(x)e^{[u(x)]}$	$e^{[u(x)]}$

Application 1

Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = 2x + 5$; **b)** $f(x) = x^3 - 6x$; **c)** $f(x) = x - \sqrt{x}$ **d)** $f(x) = 2e^{(2x+5)}$

II. INTEGRALE

Définition 2:

Soit f une fonction **continue** sur un intervalle ***I***, a et b deux éléments de ***I***. On appelle **intégrale** (ou somme) de a à b de f, le nombre réel $F(b) - F(a)$, où F est une **primitive** de f sur **I**. On note $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Exemple2 :

- $\int_1^5 x^2 dx = [\frac{x^3}{3}]_1^5 = \frac{5^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{125}{3} - \frac{1}{3} = \frac{124}{3}$.
- $\int_{-1}^2 (x+3)dx = \left[\frac{x^2}{2} + 3x\right]_{-1}^2 = \left[\frac{2^2}{2} + 3(2)\right] - \left[\frac{(-1)^2}{2} + 3(-1)\right] = (2+6) - \left(\frac{1}{2} - 3\right)$

$$\int_{-1}^{2} (x+3)dx = 8 - \left(-\frac{5}{2}\right) = 8 + \frac{5}{2} = \frac{21}{2}$$

- $\int_1^3 \frac{5}{x}dx = [5ln\, x]_1^3 = 5ln3 - 5ln1 = 5ln3 - 5\times 0 = 5ln3.$

III . CACLCUL D'AIRES

Propriété 4:

Soit f une fonction **continue** sur un intervalle ***I***, **(C)** sa courbe représentative dans le repère orthogonal (O, I, J), **a** et **b** deux éléments de ***I*** tels que **a<b**. $\int_a^b |f(x)|dx$**Uₐ** est **l'aire** du domaine **D** délimité par **(C), l'axe des abscisses** et les droites d'équations **x = a** et **x = b.** **(**l'unité d'aire : U_a = OI x OJ)

Remarque 1

- Si f est **positive** sur I (c'est-à-dire pour tout x ∈ ***I*** , f(x) ≥ 0) alors $\mathcal{A}\,(D) = \int_a^b f(x)dx$ $\mathbf{U_a}$
- Si f est **négative** sur I (c'est-à-dire pour tout x ∈ ***I*** , f(x) ≤ 0) alors $\mathcal{A}\,(D') = -\int_a^b f(x)dx$ $\mathbf{U_a}$
- Dans un repère d'unités graphiques m cm en abscisses et n cm en ordonnées, l'unité d'aire $\mathbf{U_a} = m \times n\ cm^2$.

Propriété 5:

Soient f et g deux fonctions continues sur ***I***, k un nombre réel et **a** et **b** deux éléments de ***I***.
On a :

- $\int_a^a f(x)dx = 0$. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$
- $\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$. $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$

Exemple 3:

Soit $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Déterminons une primitive de f puis calculons en cm² l'aire du domaine délimité par (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 0 et x = 4 dans le repère d'unité graphique 1cm en abscisses et 2 cm en ordonnées.
On a $\mathcal{A} = \int_0^3 |f(x)|dx = \int_0^3 \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx = [\sqrt{x}]_0^3 = \sqrt{3} - \sqrt{0} = \sqrt{3}$; **Ua = 1x2 = 2** cm² **d'ou**
A = $2\sqrt{3}$ cm².

Application 2

a) Soit $f(x) = x^3$. Déterminer une primitive de f puis calculer en cm² l'aire du domaine délimité par (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations x = -1 et x = 2.

b) Soit $f(x) = (x+1)^2$. Déterminer une primitive de f puis calculer en cm² l'aire du domaine délimité par (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations x = -1 et x = 2.

Correction : ....

....

....

....

FIN

AUTRES EXEMPLES

Résumé des Définitions, Propriétés et Théorèmes

NOTES

SERIES D'EXERCICES

SERIE TD N°1 – 10 / 2018

FONCTIONS NUMERIQUES

EXERCICE 1 :

Factoriser au mieux par la méthode de Horner les polynômes P, Q, R et S définis par :

$P(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$; $Q(x) = -2x^3 - 6x^2 + 12x + 16$;

$R(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{6}x^2 - \frac{7}{6}x - \frac{1}{6}$; $S(x) = x^4 + 6x^3 - 11x^2 - 60x + 100$

EXERCICE 2

Soit $P(x) = -2x^3 + x^2 + 8x - 4$

1) Calculer P(2), en déduire une factorisation de P.
2) Résoudre $P(x) = 0$ *puis* $P(x) \geq 0$.
3) Déduire de la résolution de $P(x) = 0$, les solutions de l'équation $-2(x+2)^3 + (x+2)^2 + 8(x+2) - 4$
4) Soit $f(x) = \frac{-2x^3+x^2+8x-4}{x^2-4x+3}$.
   a) Déterminer le domaine de définition D_f de f.
   b) Déterminer les réels a, b, c *et* d *tels que pour tous* $x \in D_f$: $f(x) = ax + b + \frac{dx+c}{x^2-4x+3}$.

EXERCICE 3

Considérons les fonctions : $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$; $g(x) = \sqrt{x-5}$ *et* $h(x) = \frac{x+1}{x-1}$.

a) Déterminer les expressions explicites de $fog(x), gof(x), hof(x), foh(x), goh(x)$ *et* $hog(x)$

b) Calculer $fog(5), hof(1), foh(0), goh\left(\frac{3}{2}\right)$ *et* $hog(5)$.

EXERCICE 4: Déterminer le domaine de définition D_f puis calculer les limites aux bornes de D_f pour chacune des fonctions suivantes. En déduire les éventuelles asymptotes.

a) $f(x) = \frac{-3x}{x+1}$ **b)** $f(x) = \frac{x^2-2x-3}{x-2}$; **c)** $f(x) = \sqrt{x^2-4}$

d) $f(x) = -5x^2 + 3x(x^2 - x + 7) + 2x - 1$; **e)** $f(x) = \frac{-x^2+2x-6}{\sqrt{-4x+5}}$;

EXERCICE 5: Etudier la limite en x_0 de la fonction f et préciser les asymptotes à la courbe C_f.

1) $f(x) = 7x^2 + x + 1$, $x_0 = 2$ et $x_0 = \pm\infty$ **5)** $f(x) = \frac{x^2+2x-3}{3x^2-2x-1}$, $x_0 = 1$, $x_0 = -\frac{1}{3}$ et $x_0 = -\infty$

2) $f(x) = \frac{x^3-8}{x-2}$ $x_0 = 2$ et $x_0 = \pm\infty$ **6)** $f(x) = \frac{x+1}{x}$; $x_0 = -2$, $x_0 = 0$ et $x_0 = \pm\infty$

3) $f(x) = \frac{x-9}{\sqrt{x}-3}$; $x_0 = 9$ et $x_0 = +\infty$ **7)** $f(x) = \frac{1}{(x-1)^5}$; $x_0 = 3$

4) $f(x) = \frac{x^3+5x^2+7x+33}{x^4+4x^3+3x^2-4x-4}$; $x_0 = -\infty$, $x_0 = -2$, $x_0 = -1$, $x_0 = 1$.

EXERCICE 6: calculer la limite à gauche et à droite de x_0.

1) $f(x) = x^2 + x + 1$; $x_0 = 2$ 4) $f(x) = \frac{-3x}{x+1}$; $x_0 = -1$

2) $f(x) = \frac{x^2-4}{x}$; $x_0 = 0$ 5) $f(x) = \frac{x^2-2x-3}{x-2}$; $x_0 = 2$

3) $f(x) = \frac{-1}{(x-4)^2}$; $x_0 = 4$ 6) $f(x) = \frac{-2}{(x-3)^3}$; $x_0 = 3$

EXERCICE 7 :

A- Étudier la continuité de f en a pour chacune des fonctions suivantes.

1) $f(x)=7x^3-5x+7 \quad a=-1$

2) $f(x)=4x^2-8x^4+1$; $a=1$

3) $f(x)=\frac{7}{2}x-\frac{4}{5}x^3+8$; $a=2$

4) $f(x)=\frac{x^2+x-6}{x^2-7x+10} \quad x_0=2$

5) $f(x)=\frac{1+\sqrt{3x-1}}{\sqrt{x-3}}$; $a=4$

6) $f(x)=\sqrt{3x^2-2}$; $a=-2$

7) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x+2}}-\frac{7}{\sqrt{x+1}}$; $a=0$.

8) $f(x)=\frac{6x^3+5x^2-x-1}{2x^2+2x+4} \quad x_0=-\frac{1}{2}$

<u>B</u>- Soit h la fonction définie par : $\begin{cases} h(x)=\frac{x}{1+x+x^2} & \text{si } x\geq 0 \\ h(x)=\frac{x^2}{1-x} & \text{si } x<0 \end{cases}$ étudier la continuité de h en 0.

<u>EXERCICE 8</u> : étudier la parité de la fonction f dans chacun des cas suivants.

a) $f(x)=2x+5$; **c)** $f(x)=x^3-6x$; **e)** $f(x)=x-\sqrt{x}$

b) $f(x)=x^2-3$; **d)** $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2+1}$; **f)** $f(x)=\frac{x^2-1}{x}$

<u>EXERCICE 9 :</u> le plan est muni d'un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$. C_f est la représentation graphique de la fonction f. Démontrer dans chacun des cas que la droite (D) est un axe de symétrie de C_f.

a) $f(x)=x^2+4x+3$ $\quad$ $(D): x=-2$

b) $f(x)=-x^2+2x+3$ $\quad$ $(D): x=1$

c) $f(x)=3x^2-6x+7$ $\quad$ $(D): x=1$

d) $f(x)=\frac{x^2-x-2}{x^2-x+1}$ $\quad$ $(D): x=\frac{1}{2}$

<u>EXERCICE 10 :</u> le plan est muni d'un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$. C_f est la représentation graphique de la fonction f. Démontrer dans chacun des cas que le point A est un centre de symétrie de C_f :

a) $f(x)=\frac{3x}{x+1}$ $\quad$ $A(-1;3)$

b) $f(x)=(x-1)^3+1$ $\quad$ $A(1;1)$

c) $f(x)=\frac{x^2}{x+2}$ $\quad$ $A(-2;-4)$

d) $f(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-3}$ $\quad$ $A(1;0)$

<u>EXERCICE 11 :</u> dans chacun des cas suivants, préciser l'ensemble de dérivabilité de f, puis déterminer la fonction dérivée.

1°) $f(x)=\frac{x^3}{3}+2x^2+3x$; **6°)** $f(x)=(2x^2+5)^3$

2°) $f(x)=(2x^2+1)(3x-1)$; **7°)** $f(x)=\frac{x^2+1}{x+3}$

3°) $f(x)=3x^2-5x+2$; **8°)** $f(x)=x^4-2x^2+1$

4°) $f(x)=\frac{1}{4}x^4-2x^3+\frac{9}{2}x^2-4x+1$; **9°)** $f(x)=\frac{x^2\ 2x+1}{x-1}$

5°) $f(x)=\sqrt{2x+1}$; **10°)** $f(x)=\dfrac{2x^3-x^2-x+3}{x^2-1}$

PROBLEME 1:

On considère la fonction numérique f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\frac{8x^2-2x+7}{4x+1}$. On désigne par C_f la courbe représentative de f dans le plan rapporté au repère orthogonal (O,I,J) unité : 0,5 cm sur (OY) et 2 cm sur (OX).

1) a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.

b) Calculer les limites en $-\infty$; $+\infty$ et $-\frac{1}{4}$.

c) En déduire que la droite (D) : $x=-\frac{1}{4}$ est asymptote verticale à C_f.

2) a) Démontrer que pour tout élément $x\in\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{4}\right\}$, $f(x)=2x-1+\frac{8}{4x+1}$.

b) Démontrer que pour tout élément $x\in\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{4}\right\}$, $f'(x)=\frac{2(4x-3)(4x+5)}{(4x+1)^2}$.

c) Dresser le tableau de signe de $(4x-3)(4x+5)$.

d) Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur les intervalles $\left]-\infty;\frac{-5}{4}\right[$ et $\left]\frac{3}{4};+\infty;\right[$.

e) Préciser le sens de variation de f sur $\left]\frac{-5}{4};\frac{-1}{4}\right[$ et $\left]\frac{-1}{4};\frac{3}{4}\right[$.

f) dresser le tableau de variation de f.

3) a) Démontrer que la droite (Δ) : $y=2x-1$ est asymptote à C_f.

b) Préciser la position de C_f par rapport à (Δ).

c) Calculer f(-3), f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2) et f(3).

d) Placer ces points puis tracer (D), (Δ) et C_f dans un même repère.

PROBLEME 2 : soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{x^2-6x-7}{2x+4}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) Étudier les variations de f (limites aux bornes, dérivée et tableau de variation).

2) a) Montrer que, pour tout $x\neq-2$, f (x) peut se mettre sous la forme $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{2x+4}$ où a, b et c sont trois réels à déterminer.

b) Donner une équation cartésienne de l'asymptote oblique à C_f

c) étudier la position relative de l'asymptote et C_f

3) a) Déterminer les coordonnées du point I, point d'intersection des deux asymptotes à C_f

b) Montrer que I est le centre de symétrie de C_f

4) On désigne par A et B les points d'intersection de C_f avec l'axe des abscisses et par C celui de C_f avec l'axe des ordonnées.

a) Déterminer les coordonnées de A, B et C.

b) déterminer les équations des tangentes à C_f en A et en B.

c) Calculer les coordonnées du point D, intersection des deux tangentes trouvées en b)

5) Tracer la courbe C_f, les asymptotes et les tangentes sur le même graphique d' unité 2 cm.

PROBLEME 3 : on étudie la fonction $f: x \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

1) déterminer son ensemble de définition D_f.

2) Étudier les limites aux bornes de D_f.

3) Calculer la dérivée f ' de f et étudier son signe. Dresser le tableau de variation de f.

4) Tracer C_f.

PROBLEME 4 : on désigne par C_g la représentation graphique de la fonction $g(x) = x^3 - 3x + 2$

1) **a)** Déterminer l'ensemble de définition de g.
b) Calculer les limites de g aux bornes de l'ensemble de définition.
2) **a)** Déterminer la fonction g ' dérivée de g. En déduire le sens de variation de g.
b) Dresser le tableau de variation de g.
3) **a)** Déterminer une équation de la tangente (T) à C_g au point A d'abscisse 0.
b) Étudier la position de de C_g par rapport à (T).
4) Construire C_g.
5) Démontrer que le point A est un centre de symétrie de C_g.

PROBLEME 5 : BAC 2016/ 2ème GROUPE / EXERCICE 2
PROBLEME 6: BAC 2017/ 1er GROUPE / EXERCICE 3
EXERCICE 5 : BAC 2018/ 1er GROUPE / EXERCICE 3

CES EXERCICES ADDITIONNELS SONT DESTINES AUX ELEVES REUNIS EN GROUPE DE TRAVAIL.

PROBLEME 5 : le repère (O, I, J) est orthogonal. On désigne par (C_f) la représentation graphique de la fonction $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-1}$.

1) **a)** Déterminer l'ensemble de définition de f.
b) Démontrer que f est une fonction paire. En déduire l'ensemble d'étude de f.
2) Calculer les limites de f aux bornes de l'ensemble d'étude.
3) **a)** Déterminer la fonction dérivée f ' de f. En déduire le sens de variation de f.
b) Dresser le tableau de variation de f.
4) Construire (C_f).

PROBLEME 6 :

on considère la fonction réelle f d'une variable réelle définie par $f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{9}{x+3}$.

1) Quel est l'ensemble de définition D de f? Étudier le comportement de f aux bornes de chacun des intervalles composant D.
2) Calculer la dérivée f ' de f et étudier son signe. Dresser le tableau de variation de f.
3) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a une solution et une seule que l'on calculera. Construire dans un plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) : unité 2 cm, la courbe représentative (C) de la fonction f.
4) Soit A le point commun à (C) et à l'axe des abscisses. Écrire l'équation de la tangente (T) en A à (C). Déterminer l'intersection de (T) avec l'axe des ordonnées.

PROBLEME 7 : le repère (O, I, J) est orthogonal. On désigne par (C_{fg}) la représentation graphique de la fonction $g(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 1$.

1) **a)** Déterminer l'ensemble de définition de g.

b) Calculer les limites de g aux bornes de l'ensemble de définition.

2) **a)** Déterminer la fonction dérivée g ' de g. En déduire le sens de variation de f.

b) Dresser le tableau de variation de f.

3) Construire (C_g).

4) Démontrer que la droite (D) d'équation x = 1 est un axe de symétrie de (C_g).

PROBLEME 8 :

soit f une fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2 - x} + x$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.

2) **a)** Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b) Déterminer la limite de f en $-\infty$. Que peut-on en déduire pour la courbe de f ?

3) la fonction f est elle dérivable en 0 ?en 1 ? Que peut-on en déduire pour la courbe de f ?

4) **a)** Déterminer la limite en $+\infty$ de $\frac{f(x)}{x}$.

b) Déterminer la limite en $+\infty$ de [f(x) – 2x]. En déduire que la courbe de f admet une asymptote oblique en $+\infty$.

5) Construire la courbe (C_f) de f.

Au travail !

<u>EXERCICE 5 :</u> BAC 2017/ 1er GROUPE / EXERCICE 1
<u>EXERCICE 5 :</u> BAC 2017/ 2ème GROUPE / EXERCICE 2
<u>EXERCICE 5 :</u> BAC 2018/ 2ème GROUPE / EXERCICE 2 & 3

ACADEMIE DE LOUGA ANNEE SCOLAIRE 2018-2019 **CLASSE TERMINALE L**

LYCEE DE KOKI **PROF: M. DIOP**

SERIE TD N°3 - ………../ 2019

DENOMBREMENT ET PROBABILITE

I- DENOMBREMENT

EXERCICE 1

Un sac contient neuf jetons portant respectivement les numéros : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et 9.

1) On tire successivement, sans remise, trois jetons du sac. Le résultat obtenu est un nombre de trois chiffres.

Le premier jeton donne le chiffre des unités, le deuxième celui des dizaines et le troisième celui des centaines.

a) Déterminer le nombre de résultats possibles.

b) Calculer les cardinaux des ensembles suivants :

A :«le chiffre des unités du nombre obtenu est 9»;

B :«le chiffre 9 figure dans le nombre obtenu».

2) On tire un jeton du sac, on note le chiffre qu'il porte puis on le remet dans le sac. On répète trois fois cette opération. On obtient ainsi un nombre de trois chiffres de la même façon qu'à la question n°1.

a) Déterminer le nombre de possibilités.

b) Calculer les cardinaux des ensembles suivants :

C :«le chiffre des unités du nombre obtenu est 9»;

D :«le chiffre 9 figure exactement une fois dans le nombre obtenu».

EXERCICE 2

Une pièce de théâtre est jouée par un groupe de 10 acteurs (et actrices) désignés au hasard dans un troupe de 25 artistes comportant 14 femmes et 11 hommes dont DIEK et NGOR.

1) De combien de façons peut-on choisir le groupe de 10 acteurs pour jouer la pièce ?

2) Combien y a-t-il de groupes comprenant seulement 3 hommes ?

3) Combien y a-t-il de groupes comprenant autant de femmes que d'hommes ?

4) Combien y a-t-il de groupes comprenant au moins 2 femmes ?

5) Combien y a-t-il de groupes comprenant NGOR ?

6) Combien y a-t-il de groupes comprenant NGOR et DIEK ?

7) Combien y a-t-il de groupes comprenant NGOR ou DIEK ?
8) Combien y a-t-il de groupes comprenant ni NGOR ni DIEK ?
9) Combien y a-t-il de groupes comprenant NGOR et pas DIEK ?

EXERCICE 3

Une classe de 30 élèves dont 12 filles et 18 garçons doit élire un comité composé d'un président, d'un vice-président et d'un secrétaire dans cet ordre.

1) Combien de comités peut-on former?
2) Combien de comités peut-on former sachant que le poste de secrétaire doit être occupé par une fille?
3) Quel est le nombre de comités pour les quels le président est un garçon et le secrétaire une fille?
4) Quel est le nombre de comités pour les quels le président et le vice-président sont de sexes différents?

II- PROBABILITE

EXERCICE 1 : BAC 2018 – 2ème groupe

Une boite contient les huit lettres du mot CAFEBOOK. Un élève tire au hasard et simultanément trois lettres de la boite.

a) Calculer le nombre de tirages possibles.
b) Calculer la probabilité de l'événement A :'' tirer deux consonnes et une voyelle.''
c) Calculer la probabilité de l'événement B :'' tirer au moins une voyelle.''

EXERCICE 2 : BAC 2017

Dix candidats dont quatre garçons et six filles se présentent à un concours pour lequel les trois premiers sont primés. Il n'y a pas d'ex-aequo.
1) Déterminer le nombre de façons de primer les trois premiers.
2) Calculer la probabilité des évènements suivants :
  a) A : ''le premier prix est obtenu par une fille.''
  b) B :''aucune fille n'est primée.''
  c) C :''un seul garçon est primé et il est le troisième.''
  d) D :''un seul garçon est primé.''

EXERCICE 3 : BAC 2016

Un touriste revient de vacances avec 15 films : 2 films de photographies d'Italie, 8 films de photographies du Sénégal, 5 films de photographies du Niger. Aucune marque distinctive ne permet d'identifier les films. Le touriste décide de faire développer 11 films parmi les 15 films. (On donnera les résultats sous forme décimale approchée à 10^{-4} près).
1) Combien y'a-t-il de choix différents possibles de 11 films parmi les 15?
2) Quelle est la probabilité pour que, parmi les 11 films développés, il y ait :
  a) Tous les films sur le Sénégal?
  b) Aucun film sur l'Italie?
  c) Autant de films sur le Sénégal que sur le Niger?
  d) Deux fois plus de films sur le Niger que sur l'Italie?

EXERCICE 4 : BAC 2015

Un lycée a choisi ses 15 délégués de classe : 7 garçons et 8 filles, parmi ces dernières, figure Nabou.

1) Ces délégués se réunissent pour élire un gouvernement scolaire de cinq membres comprenant : un président, un premier ministre, un ministre de l'intérieur, un ministre de la culture et des sports et un ministre des finances, sans cumul de postes.

a) Quel est le nombre de gouvernements possibles ?

b) Calculer la probabilité des évènements suivants :

A « Nabou est élue présidente »

B « Le premier ministre et le ministre des finances sont des filles »

C « Le gouvernement scolaire comprend 2 filles et 3 garçons ».

2) Pour représenter le lycée à un jumelage, ces délégués doivent choisir entre eux une délégation de cinq membres quelconques ne jouant aucun rôle.

a) Combien y a-t-il de délégations possibles ?

b) Calculer la probabilité des événements suivants :

D « la délégation comprend 2 garçons et 3 filles »

E « la délégation comprend au moins une fille »

EXERCICE 5 : BAC 2011

Une urne contient n boules ($n \in \mathbb{N}^*$) dont 7 sont blanches et (n -7) sont noires. On tire successivement sans remise deux boules de l'urne, les boules ont la même probabilité d'être tirées.

1) On suppose que la probabilité de tirer deux boules de même couleur vaut $\frac{19}{40}$. Calculer la probabilité de tirer deux boules de couleurs différentes.

2) **a)** soit Ω l'univers, montrer que $\text{card}\Omega = n(n-1)$.

b) Déterminer n sachant que $\text{card}\Omega = 240$.

3) On suppose que n = 16. Calculer la probabilité des événements :

a) A : « la première boule tirée est blanche et la deuxième boule tirée est noire».

b) B : «on tire deux boules blanches».

EXERCICE 6 : BAC 2018/ 1er GROUPE / EXERCICE 1

EXERCICE 7 : BAC 2018/ 2ème GROUPE / EXERCICE 1

EXERCICES POUR LES GROUPES DE TRAVAIL ET ENCADREMENTS

EXERCICE 1

1) Combien de mots de quatre lettres peut-on former avec un alphabet de 26 lettres :

a) En admettant une répétition des lettres;

b) Sans lettres « double ».

2) Combien peut-on former de codes comportant 3 lettres distinctes suivies de deux chiffres distincts? Exemple : BAC19

EXERCICE 2

La confédération internationale de football décide de classer par ordre les 3 meilleurs joueurs de l'année 2017, parmi un groupe de 10 joueurs choisis par les journalistes sportifs.
Parmi les 10 joueurs figurent 3 Africains :Sadio Mané, Mahrez et Aubamayang:

1) Calculer le nombre de classements possibles.

2) Calculer le nombre de classements tels que :

a) Les 3 joueurs choisis soient tous des Africains ;

b) Sadio Mané soit élu meilleur joueur parmi les 3 joueurs choisis ;

c) Mahrez figure parmi les 3 joueurs choisis ;

d) Seul le premier des 3 joueurs choisis, est Africain ;

e) Il y a au moins un africain parmi les 3 joueurs choisis.

EXERCICE 3 : BAC 2013

En marge du sommet de l'OCI, un groupe de 12 hommes d'affaires dont 5 saoudiens, 4 marocains et 3 sénégalais s'étant réunis, décident d'élire un bureau composé d'un président, d'un vice-président et d'un secrétaire pour coordonner leurs activités ; une personne ne peut pas cumuler deux fonctions.

1) Déterminer le cardinal de l'univers Ω .

2) Calculer la probabilité des événements suivants :

A « le bureau est composé de 3 hommes de même nationalité » ;

B «le bureau est composé de 3 hommes de nationalités différentes » ;

C « un sénégalais est élu président» ;

D « un sénégalais et un saoudien prennent les postes de président et de vice-président».

EXERCICE 4

Une urne contient 3 boules jaunes, cinq boules rouges et deux boules vertes.

1) On tire simultanément trois boules de l'urne.

a) Quelle est la probabilité d'avoir un tirage unicolore?

b) Quelle est la probabilité d'avoir exactement deux boules de même couleur ?

2) On tire successivement trois boules sans remise.

a) Quelle est la probabilité d'avoir des boules rouges uniquement ?

b) Quelle est la probabilité de ne pas avoir une boule verte au deuxième tirage ?

EXERCICE 5 : BAC 2011

Pour représenter la région de Thiès au festival national des arts, le comité régional doit choisir une délégation de six artistes parmi : quatre chanteurs dont deux femmes, trois danseurs dont deux femmes, deux artistes peintres hommes, deux coiffeuses et un coiffeur. Le comité décide de choisir simultanément et au hasard les six artistes.

1) Combien y-a-t-il de délégations possibles ?

2) Quelle est la probabilité qu'il y ait autant d'hommes que de femmes dans la délégation?

3) Quelle est la probabilité de former une délégation où tous les arts sont représentés et qui comporte trois chanteurs ?

4) Parmi les artistes il y a exactement un chanteur et un danseur de la ville de Thiès. Combien de délégations peut-on alors former comportant exactement un chanteur et un artiste de la ville de Thiès?

AU TRAVAIL !

ACADEMIE DE LOUGA ANNEE SCOLAIRE 2018-2019 **CLASSE TERMINALE L**

LYCEE DE KOKI **PROF: M. DIOP**

SERIE TD N°4 - ………/2019

SUITES NUMERIQUES-STATISTIQUES-INTEGRALES

I. SUITES NUMERIQUES

EXERCICE 1 : BAC 2010

Le prix d'un livre est de 2000F CFA en l'an 2010; ce prix augmente de 8% chaque année.

Soit P_0 = 2000F le prix en l'an 2010 et P_n le prix de ce livre en 2010 + n ($n \in \mathbb{N}$).

1) Calculer les Prix P_1 et P_2 de ce livre en 2011 et 2012.
2) a- Exprimer P_{n+1} en fonction de P_n. En déduire la nature de la suite (P_n).
b- Exprimer P_n en fonction de n.
3) Un parent d'élève décide d'acheter un exemplaire de ce livre chaque année. Quelle somme dépenserait-il de 2010 à 2020?

EXERCICE 2: BAC 2012

En l'an 2010, une entreprise a décidé de verser une prime annuelle à chacun de ses employés. Cette prime augmente de 5 000F chaque année.
La prime initiale est U_1 = 50 000F et on note U_n la prime individuelle versée la n^{ième} année.
1) Calculer U_2 et U_3.
2) **a.** Exprimer U_{n+1} en fonction de U_n. En déduire la nature de la suite (U_n).
b. Ecrire U_n en fonction de n.
3) En quelle année la prime atteindra-t-elle 145 000F ?
4) Déterminer le montant total des primes que percevrait un employé de 2010 à 2029.

EXERCICE 3 : BAC 2015

On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = \frac{2}{5}U_n + 3$.

1) Calculer U_1, U_2 et U_3.
2) (V_n) est la suite définie, pour tout entier naturel n, par $V_n = U_n - 5$.
a. Démontrer que la suite (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$.

b. Exprimer V_n en fonction de n.

3) En déduire l'expression de U_n en fonction de n.

4) On note $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \ldots + V_n$. Exprimer S_n en fonction de n.

<u>EXERCICE 4</u> : BAC 2005 : Criquets pèlerins

Suite à l'invasion des criquets pèlerins dans la zone du delta, la direction de la protection des végétaux (DPV) lance sa campagne de lutte.

1) La DPV envisage de diminuer chaque jour la surface infestée de 8%. Celle-ci était au départ U_0=2000 (en hectare).

a) Calculer U_1 et U_2 les surfaces infestées restantes au premier et au deuxième jour.
b) Exprimer en fonction de n la surface infestée restante n jours aprés le début de l'opération.
c) Calculer le nombre de jours nécessaires pour traiter la moitié de la surface infestée.

2) La DPV a utilisé au premier jour de lutte P_1=1000 (en litre) de pesticide et décide d'ajouter chaque jour 400 litres de plus que le jour précédent.

a) Calculer les quantités P_1 et P_2 de pesticide utilisées au deuxième et troisième jour de lutte.
b) Exprimer P_n, la quantité de pesticide utilisée le $n^{ième}$ jour, en fonction de n.
c) Quelle est la quantité totale de pesticide utilisée aprés 20 jours de traitement. Le litre de pesticide coûte 18000 francs. A combien s'élève la somme dépensée en pesticide

durant 20 jours de lutte ?

<u>EXERCICE 5 :</u> BAC 2016/ 2ème GROUPE / EXERCICE 3
<u>EXERCICE 6 :</u> BAC 2017/ 2ème GROUPE / EXERCICE 3

II. <u>STATISTIQUES</u>

<u>EXERCICE 1 :</u> BAC 2010

Au cours d'une séance d'essais un pilote d'automobile doit, quand il reçoit un signal sonore dans son casque, arrêter le plus rapidement possible son véhicule.
Au moment du top sonore, on mesure la vitesse V_i en Km/h de l'automobile puis la distance Y_i en mètre nécessaire pour arrêter le véhicule. On obtient les résultats suivants pour six essais.

V_i (Km/h)	27	43	62	80	98	115
Y_i (m)	6,8	20,5	35,9	67,8	101,2	135,8

On pose pour les six valeurs de V_i, $X_i = V_i^2$ et on considère la série double (X_i, Y_i).

1) Compléter le tableau suivant.

X_i						
Y_i						

2) Construire le nuage de points associés à cette série dans un repère orthogonal.
X_i en abscisse avec 1cm pour 1000,
Y_i en ordonnée avec 1cm pour 10.

3) **a.** Déterminer la droite de régression de y en x, tracer cette droite dans le repère précédent.
b. En déduire la valeur estimée de x pour une distance d'arrêt de 180m puis la vitesse du véhicule.
c. Quelle est la distance d'arrêt estimée pour une vitesse de 150 Km/h?

<u>EXERCICE 2</u> : BAC 2012

Le tableau suivant donne le nombre d'abonnés d'un opérateur téléphonique en fonction des tarifs pratiqués.

Prix de la minute de communication en F CFA : X_i	200	240	220	160	150	140
Nbre d'abonnés : Y_i	250 000	190 000	230 000	300 000	310 000	320 000

1) calculer le coefficient de corrélation linéaire r de la série statistique (x, y).
2) Déterminer l'équation de la droite de régression de y en x, Dy/x.
3) Donner une estimation du nombre d'abonnés pour un tarif de 100F la minute.

<u>EXERCICE 3</u> : BAC 1999

L'étude du commerce extérieur d'un pays de 1999 à 1996 pour les importations et les exportations exprimés en milliards de francs donne le tableau suivant.

Importation X	2,8	3,2	3,8	4,4	6,4	5,7	7,4
Exportation Y	2	2,6	3,2	3,8	5	5,5	6,5

1) Calculer :
  a) Les moyennes $\bar{X}$ et $\bar{Y}$.
  b) Les variances V(X) et V(Y).
  c) Les écarts types σ(X) et σ(Y).
2) Calculer le coefficient de corrélation entre X et Y.
3) Existe-t-il une corrélation entre les importations et les exportations ?

<u>EXERCICE 4 :</u> BAC 2016

En vue d'étudier les conséquences de l'émission de gaz à effet de serre sur la température dans une partie de la planète, on a relevé la température moyenne annuelle de cette partie, et le tableau ci-dessous donne les résultats de cette étude.

Année	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
X_i Rang de l'année	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T_i température en Degré Celsius	34,36	34,52	34,56	34,76	34,88	34,90	35,02	35	35,16	35,24
$Y_i = T_i - 34$										

1) Compléter le tableau ci-dessus et représenter le nuage de point (X_i , Y_i) de cette série statistique . on prendra 1 cm pour un rang de l'année et 5 cm pour 1 degré Celsius.
2) **a.** Calculer les coordonnées du point moyen G.
  b. Calculer la variance de X et la variance de Y.
3) **a.** En plus du point G, la droite de régression de Y en X, (D), passe par le point A(3 ; 0,61). A l'aide d'un système de deux équations à 2 inconnues, montrer que (D) a pour équation : Y = 0,092X + 0,334.
  b. En déduire la covariance de X et Y puis le coefficient de corrélation linéaire.
4) En supposant que l'évolution se poursuit, dans les mêmes conditions, quelle température peut-on prévoir en 2020?

III. INTEGRALES

<u>EXERCICE 1:</u> déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1) $f(x) = 2x + 5$; **3)** $f(x) = x^3 - 6x$; **5)** $f(x) = x - \sqrt{x}$ **7)** $f(x) = 2e^{(2x+5)}$

2) $f(x) = x^2 - 3$; **4)** $f(x) = \frac{3}{34x-4}$; **6)** $f(x) = \frac{2}{\sqrt{2x+1}}$ **8)** $f(x) = 2xe^{(x^2-\sqrt{2})}$

<u>EXERCICE 2 :</u>

c) Soit $f(x) = x^3 - 3x + 2$. Déterminer une primitive de f puis calculer en cm^2 l'aire du domaine délimité par (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$.

d) Soit $(x) = x + 1 - e^x$. Déterminer une primitive de f puis calculer en cm^2 l'aire du domaine délimité par (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

e) Soit $f(x) = x + 1 - \ln x$. Déterminer une primitive de f puis calculer en cm^2 l'aire du domaine délimité par (C_f), les droites d'équations $y = 0$, $x = 0$ et $x = 4$.

f) Soit $f(x) = x + 1 + e^x$ Déterminer une primitive de f puis calculer en cm^2 l'aire du domaine délimité par (C_f), les droites d'équations $y = x + 1$, $x = 1$ et $x = 4$.

<u>EXERCICE 3</u> : (BAC 2008) Soit la fonction g définie par $g(x) = \frac{2x^2+x-5}{x^2+x-6}$.

1) Donner le domaine de définition D_g de g.

2) Déterminer les réels a, b, c tels que : Pour tout $x \in D_g$; $g(x) = a + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x+3}$.

3) Soit la fonction G définie sur [3; 5] par $G(x) = 2x + \ln(x - 2) - 2\ln(x + 3)$. Montrer que G est une primitive de g sur [3; 5]. Calculer l'intégrale $I = \int_3^5 g(x)dx$.

<u>EXERCICE 4</u> : (BAC 2006) Soit la fonction définie par $G(x) = 2x + \ln(\frac{3x+1}{x-1})$.

1) a) Déterminer D_G ensemble de définition de G.

b) Calculer $G'(x)$ pour tout $x \in]1; +\infty[$.

2) On pose $g(x) = 2 + \frac{3}{3x+1} - \frac{1}{x-1}$ pour tout $x \in]1; +\infty[$. Montrer que $g(x) = 2 - \frac{4}{(3x+1)(x-1)}$ pour tout $x \in]1; +\infty[$.

3) Calculer $I = \int_2^3 g(x)dx$.

<u>EXERCICE 5 :</u> BAC 2018/ 1er GROUPE / EXERCICE 2

AU TRAVAIL !