



PRODUIT SCALAIRE - ENSEMBLE DES POINTS

PRODUIT SCALAIRE DANS LE PLAN

GROUPE ENSEIGNER LES MATHS

PAR GILDAS MBA OBIANG

Fomesoutra.com
ça s'entraîne !
Docs à portée de main

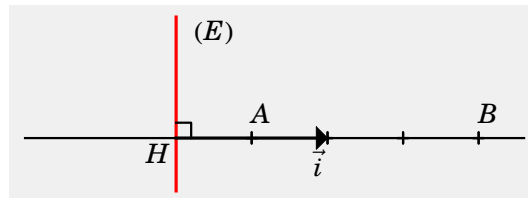
1 Ligne de niveau $\vec{u} \cdot \vec{AM} = k$

Proposition 1 On donne un vecteur non nul $\vec{u}$ et un réel k . On considère (E) l'ensemble des points M du plan tels que $\vec{u} \cdot \vec{AM} = k$. Soit B le point du plan tel que $\vec{AB} = \vec{u}$.

Alors l'ensemble (E) est la droite orthogonale à la droite (AB) au point H défini par $\overline{AH} = \frac{k}{\overline{AB}}$. En particulier si $k=0$, l'ensemble (E) est la droite perpendiculaire (AB) passant par A .

Démonstration. Soit H le projeté orthogonal de M sur la droite (AB) .

$$\begin{aligned} M \in (E) &\iff \vec{AB} \cdot \vec{AM} = k \\ M \in (E) &\iff \vec{AB} \cdot \vec{AH} = k \\ M \in (E) &\iff \vec{AB} \times \overline{AH} = k \\ M \in (E) &\iff \overline{AH} = \frac{k}{\overline{AB}} \end{aligned}$$



On a montré que $M \in (E) \iff \overline{AH} = \frac{k}{\overline{AB}}$, donc par suite (E) est la droite orthogonale à la droite (AB) au point H défini par $\overline{AH} = \frac{k}{\overline{AB}}$. $\square$

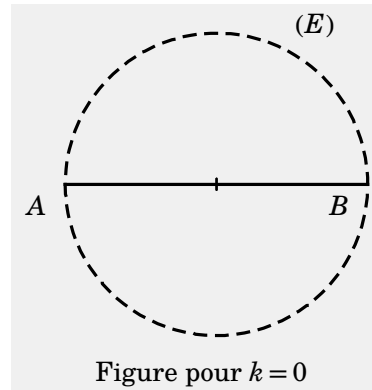
2 Ligne de niveau $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = k$

Proposition 2 On donne un vecteur non nul $\vec{u}$ et un réel k . On considère (E) l'ensemble des points M du plan tels que $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = k$. Soit I le milieu du segment $[AB]$.

- si $k + IA^2 = 0$ alors (E) est réduit au singleton $\{I\}$
- si $k + IA^2 > 0$ alors (E) est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{k + IA^2}$
En particulier si $k = 0$ alors (E) est le cercle de diamètre $[AB]$
- si $k + IA^2 < 0$ alors (E) l'ensemble vide.

Démonstration. Soit I le milieu du segment $[AB]$.

$$\begin{aligned} M \in (E) &\iff \vec{MA} \cdot \vec{MB} = k \\ M \in (E) &\iff (\vec{MI} + \vec{IA}) \cdot (\vec{MI} - \vec{IA}) = k \\ M \in (E) &\iff MI^2 - IA^2 = k \\ M \in (E) &\iff MI^2 = k + IA^2 \end{aligned}$$



Ce qui permet d'en déduire :

- si $k + IA^2 = 0$ alors (E) est réduit au singleton $\{I\}$
- si $k + IA^2 > 0$ alors (E) est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{k + IA^2}$. En particulier si $k = 0$ alors (E) est le cercle de diamètre $[AB]$
- si $k + IA^2 < 0$ alors (E) l'ensemble vide. □

3 Application

ABC est un triangle quelconque.

1. Construire sur la même figure :
 - a) l'ensemble E_1 des points M tels que $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$
 - b) l'ensemble E_2 des points M tels que $\vec{AB} \cdot \vec{MC} = 0$
2. Démontrer que E_1 et E_2 ont deux points communs si et seulement si : $0 < \vec{AB} \cdot \vec{AC} < AB^2$

Solution.

1. a) D'après la **proposition 2**, l'ensemble E_1 des points M tels que $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$ est le cercle de diamètre $[AB]$.
- b) D'après la **proposition 1**, l'ensemble E_2 des points M tels que $\vec{AB} \cdot \vec{MC} = 0$ est la droite orthogonale à la droite (AB) passant par C .

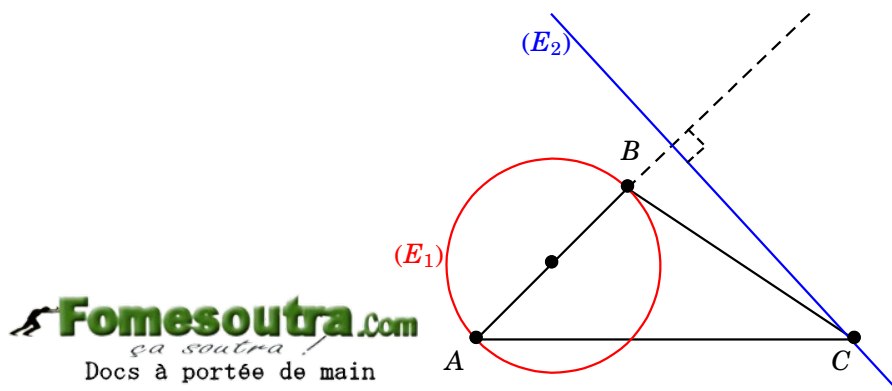
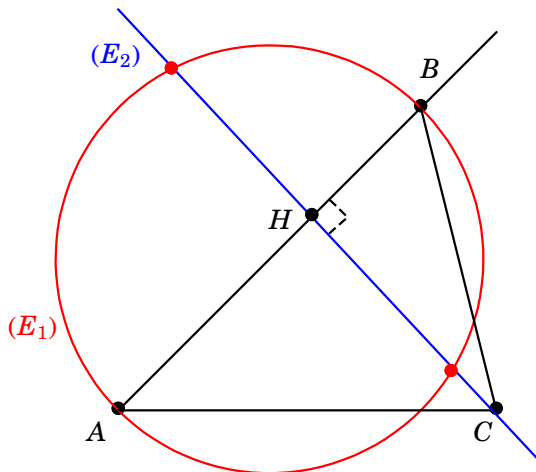


Figure.

2. Démontrer que E_1 et E_2 ont deux points communs si et seulement si : $0 < \vec{AB} \cdot \vec{AC} < AB^2$

Condition nécessaire : on suppose que E_1 et E_2 ont deux points communs et montre la double inégalité $0 < \vec{AB} \cdot \vec{AC} < AB^2$. Dans ce cas, on a la représentation suivante :



Cas E_1 et E_2 ont deux points communs.

Soit H le pied de la hauteur issu du point C . On a $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AH}$ et $H \in [AB]$ par suite, de l'égalité $\vec{AB} \cdot \vec{AH} = AB \times AH \cos(\vec{AB}, \vec{AH}) = AB \times AH < AB^2 = \vec{AB} \cdot \vec{AB}$. Ainsi, on a montré que $\vec{AB} \cdot \vec{AC} < AB^2$.

De plus, si M est l'un point des points de l'intersection de E_1 et E_2 alors on a

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = (\vec{AM} + \vec{MB}) \cdot (\vec{AM} + \vec{MC}) = AM^2 + \vec{AM} \cdot \vec{MC} - \vec{MA} \cdot \vec{MB} + \vec{MB} \cdot \vec{MC}$ c'est-à-dire $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AM^2 + \vec{AB} \cdot \vec{MC} - \vec{MA} \cdot \vec{MB}$ par suite, $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AM^2 > 0$ car $M \neq A$.

Condition suffisante : on suppose la double inégalité $0 < \vec{AB} \cdot \vec{AC} < AB^2$ et on montre que E_1 et E_2 ont deux points communs.

On a vu que si $0 < \vec{AB} \cdot \vec{AC} < AB^2$ alors H le pied de la hauteur issu du point C appartient au segment $[AB]$ car sinon $\vec{AB} \cdot \vec{AC} > AB^2$. Ainsi, la droite (CH) coupe le cercle de diamètre $[AB]$ en deux points distincts. Ainsi, E_1 et E_2 ont deux points communs.

Fomesoutra.com
ça soutra !
Docs à portée de main

FIN