COLLECTION "LE REPÈRE"

MATHS

NOUVEAUX PROGRAMMES
APC

2de C

Éditions SuperNova

Mathématiques

2de C

OKAIGNI Okpo Dorgeles — Professeur de Lycée
KOUASSI Esso Roland, — Professeur de Lycée
KONE Drissa, — Professeur de Lycée
SANOGO Souleymane — Professeur de Lycée

Sous la supervision de

M. TUO Pienan

Inspecteur de l'Enseignement Secondaire

Ex 1 à 41 P22 à 25

Editions SuperNova
L'innovation au service de la qualité

Sommaire

9 STATISTIQUE

10 PRODUIT SCALAIRE

11 ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS DANS $\mathbb{R}$

12 HOMOTHÉTIES

13 ÉTUDE DE FONCTIONS DE REFERENCE

14 ROTATION

15 ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS DANS $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

1 Vecteurs et points du plan

Notions essentielles :

- Vecteurs du plan
- Mesure algébrique
- Bases et repères du plan

SITUATION D'APPRENTISSAGE

Pour récompenser les meilleurs élèves des classes de seconde C d'un lycée, la direction de l'établissement leur propose l'activité suivante :
Pour repérer un trésor caché, un pirate a écrit : "à partir de l'arbre creux, faire 10 grands pas vers l'ouest, puis 7 grands pas vers le sud".
Certains de vos amis de classe se demandent comment s'y prendre pour retrouver le trésor. Le chef d'établissement vous informe que la salle multimédia de l'établissement est à votre disposition.
Vous décidez donc de faire des recherches sur les vecteurs et le repérage dans le plan via internet.

I- ACTIVITÉS DE DÉCOUVERTE

I- VECTEURS

1- Vecteur et translation

Activité 1

1- Marque deux points dinsticts A et B du plan.

2-a) Marque un point M qui n'est pas sur (AB) et construis le point N tel que le quadrilatere ABNM soit un parallélogramme.

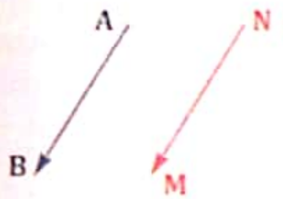
b) Détermine une application t du plan dans lui-même telle que : $t(M) = N$.

c) Trouve deux autres couples (M_2,N_2) et (M_3,N_3) tels que : $t(M_2)= N_2$ et $t(M_3) = N_3$.

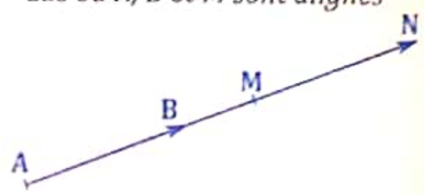
Je fais le point de l'activité

- Le point N ainsi construit est l'image du point M par la translation t de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
- L'ensemble des couples de points (M, N) où N est l'image de M par t est le vecteur $\overrightarrow{AB}$.
- L'ensemble des vecteurs du plan est le plan vectoriel noté $\mathcal{V}$. Les éléments de $\mathcal{V}$ sont notés $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ ...

Cas général



Cas où A, B et M sont alignés



- $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN}$, on dit que (A, B) et (M, N) sont des représentants du vecteur $\vec{u}$.

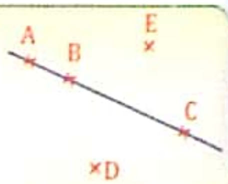
J'évalue mes acquis

On donne les points A, B , C, D et E de la figure ci-contre.

1- Reproduis la figure sur ton cahier.

2- Construis l'image du point A par la translation du vecteur $\overrightarrow{DE}$.

3- Construis l'image du point C par la translation du vecteur $\overrightarrow{EA}$.



2- Connaître la propriété relative à l'existence et à l'unicité du point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$

Activité 2

Soit O un point du plan, et $\vec{u}$ un vecteur non nul.
Justifie qu'il existe un point M et un seul tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$

Je fais le point de l'activité

- M est l'image du point O par la translation du vecteur $\vec{u}$.
- M ainsi défini existe et est unique et verifie $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.

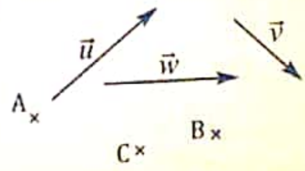
J'évalue mes acquis

On donne les points A, B C et les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ comme l'indique la figure ci-contre.

1- Reproduis la figure sur ta feuille.

2- Construis les points M, N et P tels que :

a) $\vec{u} = \overrightarrow{AM}$; b) $\vec{v} = \overrightarrow{BN}$; c) $\vec{w} = \overrightarrow{CP}$



3- Connaître la définition d'une combinaison linéaire de vecteurs

Activité 3

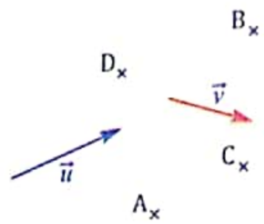
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

A, B,C et D quatre points du plan comme l'indique la figure ci-contre.

a) Reproduis la figure.

b) Construis un représentant du vecteur $2\vec{u} + 3\vec{v}$ d'origine D.

c) Construis un représentant du vecteur $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CB}$ d'origine A.



Je fais le point de l'activité

- $2\vec{u} + 3\vec{v}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
- 2 et 3 sont appelés les coefficients de cette combinaison linéaire.

J'évalue mes acquis

On donne les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

1- Identifie une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ parmi les vecteurs suivants :

a) $\vec{u}$ b) $\vec{u} + 2\vec{w}$ c) $2\vec{u} - 3\vec{v}$

2- Identifie une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ parmi les vecteurs suivants :

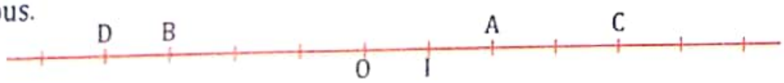
a) $\frac{1}{2}\vec{w}$ b) $2\vec{v} + 5\vec{w}$ c) $2\vec{u} + 3\vec{v} - 4\vec{w}$

II- MESURE ALGEBRIQUE

Connaître la définition de la mesure algébrique d'un couple de points – Notion de distance – Vecteur unitaire

Activité 4

Sur une droite graduée de repère (O, I), on donne les points A, B, C et D comme l'indique la figure ci-dessous.



1- Détermine pour les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{AD}$, les nombres réels a, b, c et d tels que :

$\overrightarrow{AB} = a\overrightarrow{OI}$; $\overrightarrow{AC} = b\overrightarrow{OI}$; $\overrightarrow{BD} = c\overrightarrow{OD}$; $\overrightarrow{AD} = d\overrightarrow{OI}$

2- a) Donne les abscisse des points A, B, C, et D dans le repère (O, I).

b) Calcule : $x_B - x_A$; $x_C - x_A$; $x_D - x_B$; $x_D - x_A$.

c) Compare les résultats trouvés précédemment aux nombres réels a, b, c et d de 1 .

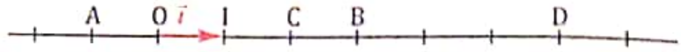
3- Calcule : $|x_B - x_A|$; $|x_D - x_B|$; $|x_D - x_A|$.

Je fais le point de l'activité

- Le nombre réel $x_B - x_A$ est la mesure algébrique du couple de points (A, B) et est noté $\overline{AB}$.
- Le nombre réel nombre positif $|x_B - x_A|$ est la distance de A à B et est noté $d(A, B)$.
- (O, I) est un repère de la droite et $d(O, I) = 1$; le vecteur $\overrightarrow{OI}$ est un vecteur unitaire.

J'évalue mes acquis

Soit la droite graduée et $\vec{i}$ un vecteur unitaire représentée ci-dessous :



a) Détermine sur le graphique; $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ et $\overline{BD}$.

b) Place des points P, Q, R tels que : $\overline{PQ} = -2$; $\overline{PR} = 3$.

c) Calcule: $d(A, B)$ et $d(P, Q)$.

III- BASE ET REPÈRE

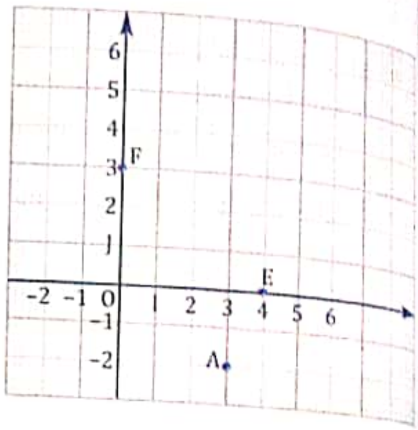
1- Connaître la définition d'une base de $\mathcal{V}$

ACTIVITÉ 5

1- O, I et J sont trois points non alignés.

a) Justifie que les vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$ ne sont pas colinéaires.

b) Reproduis le repère ci-contre et place les points B(−2 ; 2) et C(2 ; −1).



2- Soit $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs non colinéaires de $\mathcal{V}$.

On pose : $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$

Justifie que (O, I, J)est un repère du plan.

Je fais le point de l'activité

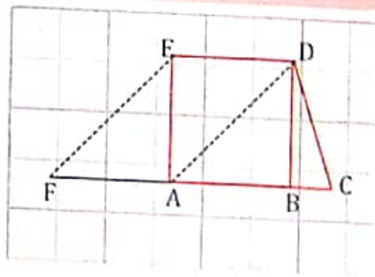
Les vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$ ne sont pas colinéaires. On dit que le couple $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ est une base de $\mathcal{V}$.
Si $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base de $\mathcal{V}$ alors les points O, I et J tels que $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$ ne sont pas alignés : (O, I, J) est un repère du plan.

J'évalue mes acquis

Justifie que :

1- $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE})$ est une base de $\mathcal{V}$.

2- $(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CF})$ est une base de $\mathcal{V}$.



2- Connaître la propriété fondamentale relative aux coordonnées d'un vecteur dans une base

ACTIVITÉ 6

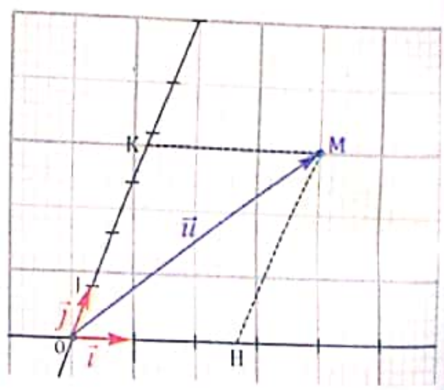
Soit (O, I, J) un repère du plan.

On pose : $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$.

Soit M un point du plan et $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$.

1- a) Construis le point H, projeté de M sur (OI) parallèlement à (OJ).

b) Construis le point K, projeté de M sur (OJ) parallèlement à (OI).



2- Soient x l'abscisse de H sur (OI) de repère (O, I) et y l'abscisse de K sur (OJ) de repère (O, J).

a) Complète chacune des égalités suivantes par le nombre qui convient : $\overrightarrow{OH} = ...\vec{i}$; $\overrightarrow{OK} = ...\vec{j}$

b) Justifie que : $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

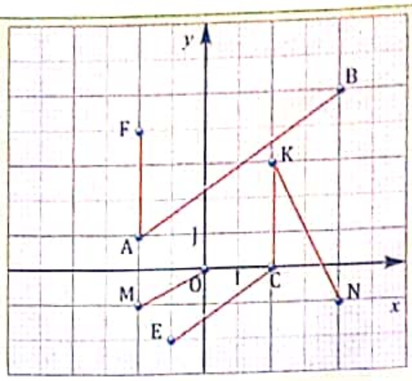
c) Soit x, y, x' et y' des nombres réels tels que $x\vec{i} + y\vec{j} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$. Justifie que : $x' = x$ et $y' = y$.

Je fais le point de l'activité

$(\vec{i}, \vec{j})$ est une base de $\mathcal{V}$. Tout vecteur de $\mathcal{V}$ peut s'écrire de façon unique comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$, c'est-à-dire il existe un unique couple de réels $(x\,;y)$ tel que: $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.
On note $\vec{u}\binom{x}{y}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

J'évalue mes acquis

Le plan est rapporté au repère (O, I, J) comme l'indique la figure ci-contre.
On pose : $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$
Les points A, B, C, E, F, K, M et N sont situés sur des nœuds du quadrillage.



Complète le tableau ci-dessous :

Vecteurs	Coordonnées	Écriture vectorielle
$\overrightarrow{AB}$	$(6\,;4)$	$\overrightarrow{AB} = 6\vec{i} + 4\vec{j}$
$\overrightarrow{AF}$		
$\overrightarrow{OM}$		
$\overrightarrow{BC}$		
$\overrightarrow{CE}$		
$\overrightarrow{CK}$		

3- Connaître la caractérisation de deux vecteurs colinéaires

ACTIVITÉ 7

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs du plan.
Démontre que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un nombre réel λ tel que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ ou $\vec{u} = \lambda\vec{v}$

Je fais le point de l'activité

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si seulement si il existe un nombre réel λ tel que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ ou $\vec{u} = \lambda\vec{v}$

J'évalue mes acquis

Réponds par vrai ou par faux
1- Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur
2- Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\vec{v} = 2\vec{u}$ sont colinéaires.
3- Soit $\vec{u}$ un vecteur. Le vecteur $-\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{u}$.

4- Connaître la norme d'un vecteur

ACTIVITÉ 8

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan et (A, B) et (C, D) deux représentations de $\vec{u}$.
1- Démontre que AB = CD
2- Détermine la longueur du vecteur $\vec{u}$.
3- Détermine la longueur du vecteur $\frac{1}{AB}\vec{u}$.

Je fais le point de l'activité

- La longueur AB est indépendante du représentant choisi de $\vec{u}$. On l'appelle la norme de $\vec{u}$.
- Le vecteur $\frac{1}{AB}\vec{u}$ est de longueur 1.

Il est dit unitaire.

J'évalue mes acquis

Réponds par vrai ou faux
1- La norme d'un vecteur est un nombre réel positif.
2- La norme d'un vecteur peut être un nombre réel négatif.
3- Si $\vec{u}$ est un vecteur unitaire alors $-\vec{u}$ est aussi un vecteur unitaire.

5- CONNAÎTRE LA DÉFINITION DE LA NORME D'UN VECTEUR DANS UNE BASE ORTHONORMÉE

ACTIVITÉ 9

$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur du plan dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$.

Soit (A, B) un représentant de $\vec{u}$.

1- Trouve une relation entre $x_B - x_A$ et x puis entre $y_B - y_A$ et y.

2- Démontre que : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Je fais le point de l'activité

On donne dans la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$ le vecteur $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

- Le nombre réel positif $\sqrt{x^2 + y^2}$ est la norme du vecteur $\vec{u}$ dans la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$.

J'évalue mes acquis

$(\vec{i}, \vec{j})$ est une base orthonormée de $\mathcal{V}$.
Calcule la norme du vecteur $\vec{u}$ dans chacun des cas suivants :
a) $\vec{u} = -3\vec{i} + 2\vec{j}$; b) $\vec{u} = -5\vec{j}$; c) $\vec{u} = 3\vec{i}$

6- Connaître la définition du déterminant d'un couple de vecteurs dans une base

ACTIVITÉ 10

$(\vec{i}, \vec{j})$ est une base du plan vectoriel $\mathcal{V}$. On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

1- On suppose qu'il existe un nombre λ tel que : $\vec{u} = \lambda\vec{u}$

Démontre que: $xy' - x'y = 0$

2- On suppose que : $xy' - x'y = 0$

Démontre que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Je fais le point de l'activité

Soient les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs définis dans une base de $\mathcal{V}$.

Le nombre réel **$xy' - x'y$** est le déterminant du couple $(\vec{u}, \vec{v})$ et on note **dét$(\vec{u}, \vec{v})$** relativement à la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

- Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}) \neq 0$.
- Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}) \neq 0$.

J'évalue mes acquis

$(\vec{i}, \vec{j})$ est une base du plan vectoriel $\mathcal{V}$.

Soient les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

1- Calcule le déterminant du couple $(\vec{u}, \vec{v})$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

2- Justifie les vecteurs $\vec{w}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{t}\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$ sont colinéaires.

J'évalue mes acquis

Soient les points A(-3 ;-2), $B\left(4 ; \frac{8}{3}\right)$ et $C\left(5 ; \frac{10}{3}\right)$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Détermine les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$.

b) Calcule dét$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$ et interprète le résultat obtenu.

c) Justifie que les points A, B et C sont alignés.

7- Déterminer les coordonnées d'une combinaison linéaire de vecteurs dans une base

Activité 11

On donne dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ de $\mathcal{V}$ les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$.

1- Détermine les coordonnées des vecteurs $\vec{u} + 3\vec{v}$ et $-\vec{u} + 2\vec{w}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

2- Soit α et β deux nombres réels et $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs.

Détermine les coordonées de $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Je fais le point de l'activité

$\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$. Soit α, β des réels.

Le vecteur $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ a pour couple de coordonnées $\begin{pmatrix}\alpha x + \beta x'\\ \alpha y + \beta y'\end{pmatrix}$.

J'évalue mes acquis

Dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, on donne $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$.

Détermine les coordonnées du vecteur $\vec{w}$ dans chacun des cas suivants :

a) $\vec{w} = \vec{u} + 2\vec{v}$; b) $\vec{w} = 2\vec{u} + 3\vec{v}$; c) $\vec{w} = -3\vec{u} + 5\vec{v}$

8- Déterminer une équation cartésienne de droite en utilisant le déterminant de deux vecteurs

Activité 12

On muni le plan du repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points A(3 ;1) , B(-1 ;-2) et le point $M(x, y)$.

1- Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$.

2- Détermine l'ensemble des points M du plan tel que A, B et M soient alignés.

Je fais le point de l'activité

- L'ensemble des points M tels que $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0$ est la droite passant par les points A et B dont une équation est : $3x - 4y - 5 = 0$.

J'évalue mes acquis

Le plan est muni du repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Détermine une équation de la droite :

1- (AB) sachant que A(4 ; 3) et B(-1 ; 2).

2- (Δ) passant par R(2 ; -1) et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$.

9- Justifier que deux droites sont parallèles en utilisant le déterminant de deux vecteurs

Activité 13

Dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan on donne les équations des droites suivantes :

(D) : $ax + by + c = 0$, $(a, b) \neq (0, 0)$.

(D') : $a'x + b'y + c = 0$, $(a', b') \neq (0, 0)$.

1- Détermine les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de (D) et d'un vecteur directeur $\vec{u}'$ de (D').

2- Démontre que (D) et (D) sont parallèles si et seulement si $\begin{vmatrix}a & b\\a' & b'\end{vmatrix} = 0$.

3- Déduis-en que (D) et (D') sont parallèles si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{u}') = 0$.

Je fais le point de l'activité

Dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, on donne les vecteurs directeurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ des droites (D_1) et (D_2) respectivement.

- Si $\det(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = 0$, alors les droites (D_1) et (D_2) sont parallèles.
- Si (D_1) et (D_2) sont parallèles, alors $\det(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = 0$.

J'évalue mes acquis

Dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, dis si les droites (D) et (D'), dont on donne les équations ou deux points, sont parallèles ou non, justifie ta réponse.

1- (D) : $y = 2x + 1$ et (D') : $-2x + y = -1$

2- (D) passe par $A\left(-5 ; \frac{20}{3}\right)$, $B\left(1 ; \frac{2}{3}\right)$ et (D') : $y = x + 2$.

II- RÉSUMÉ DE COURS

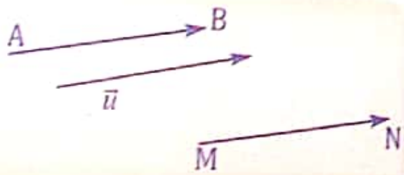
I- PLAN VECTORIEL

DÉFINITION

On appelle plan vectoriel l'ensemble de tous les vecteurs du plan et on le note $\mathcal{V}$.

PROPRIÉTÉ

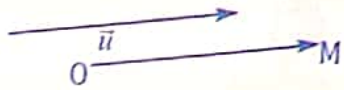
Soit $\vec{u}$ un vecteur. M, N, A et B sont quatre points tels que :
$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{u} = \overrightarrow{MN}$.
On dit que (A, B) et (M, N) sont des représentants du vecteur $\vec{u}$.



1- Conséquences immédiates

PROPRIÉTÉ FONDAMENTALE

Pour tout point O et tout vecteur $\vec{u}$,
il existe un et un seul point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.



2- Norme d'un vecteur

DÉFINITION

On appelle **norme** du vecteur $\vec{u}$ la distance AB où (A, B) est un représentant de $\vec{u}$.
On la note $\|\vec{u}\|$.

PROPRIÉTÉ

Il existe un et un seul vecteur ayant une direction donnée, un sens donné et une norme donnée.

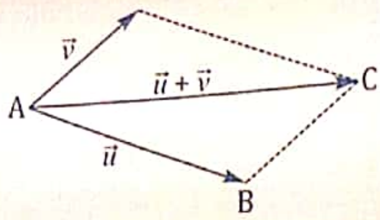
- $\|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$;
- pour tout vecteur $\vec{u}$, $\|-\vec{u}\| = \|\vec{u}\|$;

II- CALCUL VECTORIEL

1- Somme de vecteurs

PROPRIÉTÉ ET DÉFINITION

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.
A, B et C sont des points tels que : $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$.
Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est indépendant des représentants (A,B) et (B,C).
On l'appelle somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
On pose : $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$.



2- Relation de Chasles

Pour tous points A, B et C, on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

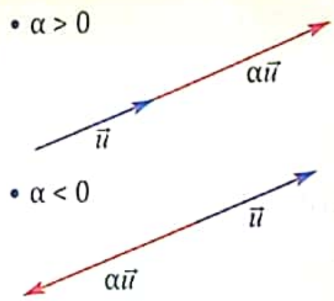
3- Inégalité triangulaire

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a : $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

4- Opérations avec les vecteurs

DÉFINITION

- Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul, α un nombre réel non nul.
Le vecteur $\alpha\vec{u}$ est le vecteur qui a pour :
  - direction celle de $\vec{u}$;
  - sens celui de $\vec{u}$ si $\alpha > 0$ et celui de $-\vec{u}$ si $\alpha < 0$;
  - norme $|\alpha|\|\vec{u}\|$.
- On pose par ailleurs pour tout vecteur $\vec{u}$ et tout nombre réel α ;
$0.\vec{u} = \vec{0}$ et $\alpha.\vec{0} = \vec{0}$.



PROPRIÉTÉ

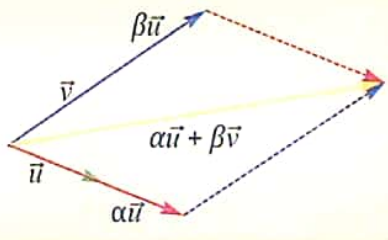
Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, pour tous nombre réel α et β on a :

- $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
- $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$
- $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$
- $\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u}$
- $1.\vec{u} = \vec{u}$
- $\alpha\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$.

5- Combinaison linéaire

DÉFINITION

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Tout vecteur de la forme $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$, où α et β sont des nombres réels, est appelé **combinaison linéaire** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
α et β sont appelés les **coefficients** respectifs de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.



Exemple

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs.
Le vecteur $2\vec{u} + 5\vec{v}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ affectés respectivement des coefficients 2 et 5.

6- Vecteurs colinéaires

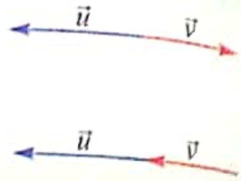
DÉFINITION

Des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits colinéaires dans les cas suivants :

- Lorsque l'un d'eux au moins est le vecteur nul.

Ou

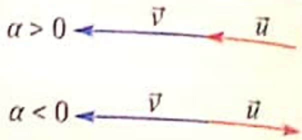
- Lorsqu'ils ont la même direction.



REMARQUES Le vecteur $\vec{0}$ est colinéaire à tout vecteur.

PROPRIÉTÉ 1

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un nombre réel α tel que : $\vec{v} = \alpha\vec{u}$ ou $\vec{u} = \alpha\vec{v}$.



REMARQUES Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs colinéaires et $\vec{v} \neq \vec{0}$, alors il existe un unique nombre réel α tel que : $\vec{u} = \alpha\vec{v}$.

Exemple

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs du plan tels que : $\vec{u} = 2\vec{v}$.
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

7- Vecteur unitaire

DÉFINITION

On appelle vecteur unitaire tout vecteur de norme 1.

III- MESURE ALGEBRIQUE D'UN COUPLE DE POINTS

DÉFINITION

Soit (D) une droite et $\vec{i}$ un vecteur directeur de (D) de norme 1.
A et B étant deux points de (D), on appelle mesure algébrique de (A, B) relativement à $\vec{i}$, l'unique nombre réel noté $\overline{AB}$ tel que $\overrightarrow{AB} = \overline{AB}.\vec{i}$.

Exemple

Soit (D) une droite et $\vec{i}$, l'un de ses vecteurs unitaires et directeurs.
On considère les points E, F, G et K suivants :

Relativement à $\vec{i}$, on a : $\overline{EF} = -8$; $\overline{EK} = 3$; $\overline{GE} = 6$; $\overline{KG} = -9$.
Relativement à $-\vec{i}$, on a : $\overline{EF} = 8$; $\overline{EK} = -3$; $\overline{GE} = -6$; $\overline{KG} = 9$.

Propriété 1

Soit (D) une droite orientée par un de ses vecteurs directeurs unitaires $\vec{i}$.
Pour tous points A, B et C de (D) et tout nombre réel α, on a :

a) $\|\vec{AB}\| = |\overline{AB}|$

b) $\overline{BA} = -\overline{AB}$

c) Lorsque A et B sont distincts :

- $\overline{AB} = AB$ si et seulement si $\vec{AB}$ et $\vec{i}$ sont de même sens.
- $\overline{AB} = -AB$ si et seulement si $\vec{AB}$ et $\vec{i}$ sont de sens contraires.

d) $\overline{AB} = 0 \Leftrightarrow A = B$

e) $\vec{AC} = \alpha\vec{AB} \Leftrightarrow \overline{AC} = \alpha\overline{AB}$

f) $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ (Relation Chalses).

La relation $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ (Relation de Chasles) n'est possible que si les points A, B et C appartiennent à une même droite.

Propriété 2

Pour des points appartenant à une même droite, le produit et le quotient de deux mesures algébriques sont indépendantes du vecteur unitaire choisi.

IV- BASES ET REPERES DU PLAN

1- Bases de $\mathcal{V}$

a) Bases de $\mathcal{V}$

Propriété fondamentale

Soient $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs non colinéaires.
Tout vecteur $\vec{u}$ s'écrit de façon unique sous la forme $x\vec{i} + y\vec{j}$ où x et y sont des nombres réels.

Définition

- Tout couple $(\vec{i}, \vec{j})$ de vecteurs non colinéaires est appelé base de $\mathcal{V}$.
- Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base de $\mathcal{V}$ et $\vec{u}$ un vecteur.

Le seul couple de nombres réels (x, y) vérifiant $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ est appelé couple de coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$. On écrit : $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Propriété 2 *(Règle de calcul sur les vecteurs)*

Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base de $\mathcal{V}$, λ un nombre réel, $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ deux vecteurs.
Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{u'}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors $(\vec{u} + \vec{u'})\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$ et $(\lambda\vec{u})\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$.

b) Bases orthonormées

Définition

- Deux vecteurs non nuls sont orthogonaux si leurs directions sont orthogonales ou si l'un au moins est nul.

Lorsque les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, on note : $\vec{u} \perp \vec{v}$.

- Une base est dite orthonormée lorsqu'elle est constituée de deux vecteurs unitaires et orthogonaux.

REMARQUES

$(\vec{i}, \vec{j})$ est une base orthonormée si et seulement si : $\vec{i} \perp \vec{j}$ et $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$.
Une base orthonormée est dite aussi orthonormale.

Propriété

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si : $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$.

c) Expression de la norme d'un vecteur dans une base orthonormée

Propriété

Soit le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée, $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Exemple

Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée de $\mathcal{V}$.
Si $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$, alors on a : $\|\vec{u}\| = \sqrt{(-2)^2 + (5)^2}$, d'où : $\|\vec{u}\| = \sqrt{29}$

d) Déterminant d'un couple de vecteurs

Définition

Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ base de $\mathcal{V}$, $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs. On appelle déterminant du couple $(\vec{u}, \vec{v})$ relativement à la base $(\vec{i}, \vec{j})$ le nombre réel $xy' - x'y$.
On note : $\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - x'y$.

REMARQUES

Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{u}'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, alors on écrit : $\det(\vec{u}, \vec{u}') = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$.

Exemple

$(\vec{i}, \vec{j})$ est une base de $\mathcal{V}$. $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ deux vecteurs donnés dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times 3 - (-3) \times 2$$
$$= 3 + 6 = 9$$

e) Propriété relative à la colinéarité de deux vecteurs

Propriété

Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base de $\mathcal{V}$.
Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.

Exemple

Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base de $\mathcal{V}$. Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -3 \\ 9 \end{pmatrix}$ deux vecteurs donnés dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{vmatrix} = 1 \times 9 - (-3) \times (-3)$$
$$= 9 - 9 = 0$$

$\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$, donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

2- Repère du plan

a) Repère du plan

Définition

- On appelle repère du plan :
  - Un triplet de points non alignés

Ou bien

  - Un triplet $(O; \vec{i}, \vec{j})$ où O est un point et $(\vec{i}, \vec{j})$ une base de $\mathcal{V}$.
- Le point O est appelé origine du repère.

Remarques

- $M(x\,;y)$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ si et seulement si $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, c'est-à-dire $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$
- Un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est orthonormé si et seulement si la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est orthonormée.

b) Calcul dans un repère

Propriété

1- Si $A\,(x_A, y_A)$ et $B\,(x_B, y_B)$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

2- Si $A\,(x_A, y_A)$ et $B\,(x_B, y_B)$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et si M est le milieu de [AB] alors $M\left(\frac{x_A + x_B}{2}\,;\,\frac{y_A + y_B}{2}\right)$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

3- Si $A\,(x_A, y_A)$, $B\,(x_B, y_B)$ et $C\,(x_C, y_C)$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et si G est le centre de gravité du triangle ABC, alors $G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}\,;\,\frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$ dans le répère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

c) Caractérisation de segment, de demi-droite et de droite

Soit A et B deux points distincts du plan et M un point du plan.

$M \in [AB] \Leftrightarrow$ il existe $\lambda \in [0;1]$ / $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB}$;

$M \in [AB) \Leftrightarrow$ il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ / $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB}$;

$M \in (AB) \Leftrightarrow$ il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ / $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB}$.

Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur d'une droite (D), tout autre vecteur directeur de (D) est de la forme $\lambda\vec{u}$ où $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

III- MÉTHODE

1- Démontrer que deux vecteurs sont colinéaires

Pour démontrer que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, on peut utiliser l'une des méthodes suivantes:

- Justifier qu'il existe un nombre réel k non nul tel que $\vec{u} = k\vec{v}$;
- Justifier que $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$, dans une base de $\mathcal{V}$;
- Justifier que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs directeurs de deux droites parallèles.

2- Démontrer que trois points sont alignés

Pour démontrer que trois points A, B et C sont alignés, on peut :

- Justifier que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

3- Démontrer qu'un point est le milieu d'un segment

Pour démontrer qu'un point I est le milieu d'un segment [AB], on peut utiliser l'une des méthodes suivantes :

- Justifier que : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$;
- Justifier que : $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$;
- Justifier que : $2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB}$;
- Justifier que pour tout point O du plan, $2\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$;
- Justifier que I a pour coordonnées $\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$ dans un repère du plan.

4- Démontrer qu'un point est centre de gravité d'un triangle

Pour démontrer qu'un point G est centre de gravité d'un triangle ABC, on peut utiliser l'une des méthodes suivantes:

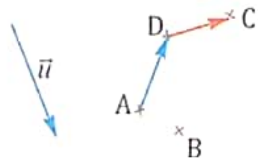
- Justifier que : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$;
- Justifier que : $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$, où I est le milieu de[BC].
- Justifier que G a pour coordonnées $\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3} ; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$ dans un repère du plan.

IV- SAVOIR-FAIRE

Savoir-faire 1- *Utiliser la définition des vecteurs pour construire*

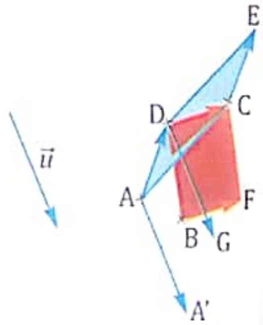
ÉNONCÉ

Les points A, B, C et D et les vecteurs $\vec{u}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont donnés ci-contre.



1- Reproduis la figure.
2- Construis l'image F du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{DC}$.
3- Construis le point E tel que $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AD}$.
4- Construis le représentant du vecteur $\vec{u}$ d'origine A.
5- Construis l'image G du point D par la translation de vecteur $\vec{u}$.

SOLUTION COMMENTÉE



2- Je construis l'image F du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{DC}$.

F est l'image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{DC}$ équivaut à DCFB est un parallélogramme.

3- Je construis le point E tel que $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AD}$ équivaut à CEDA est un parallélogramme

4- Je construis le représentant du vecteur $\vec{u}$ d'origine A.

Le représentant du vecteur $\vec{u}$ a pour origine A. Donc on place le point A' tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AA'}$

5- Je construis l'image G du point D par la translation de vecteur $\vec{u}$.

G est l'image de D par la translation de vecteur $\vec{u}$ équivaut à $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{AA'}$.

Savoir-faire 2- Déterminer les coordonnées d'un point à partir d'une égalité vectorielle

Énoncé

Dans un repère, on donne A(2 ; -1), B(3 ; 2), C(-5 ; -1) et D(0 ; 7).

1- Détermine les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{AM} = 4\overrightarrow{AB}$

2- Détermine les coordonnées du point N tel que $\overrightarrow{BN} = 2\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}$.

Solution commentée

1- Je détermine les coordonnées du point M.

On note $(x_M ; y_M)$ les coordonnées du point M.

On a : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x_M - 2 \\ y_M + 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Par ailleurs, $4\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{AM} = 4\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M - 2 = 4 \\ y_M + 1 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 6 \\ y_M = 11 \end{cases}$

Ainsi, M a pour coordonnées (6 ; 11).

2- Je détermine les coordonnées du point N.

Soit $(x_N ; y_N)$ les coordonnées du point N.

On a : $\overrightarrow{BN}\begin{pmatrix} x_N - 3 \\ y_N + 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -7 \\ 0 \end{pmatrix}$.

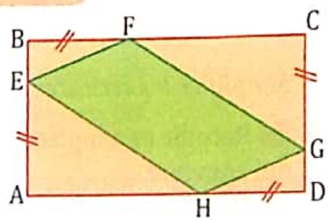
Donc : $(-2\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC})\begin{pmatrix} -17 \\ -16 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BN} = -2\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_N - 3 = -17 \\ y_N - 2 = -16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_N = -14 \\ y_N = -14 \end{cases}$

Ainsi, N a pour coordonnées (-14 ; -14)

Savoir-faire 3- Étudier une configuration géométrique à l'aide des vecteurs

Énoncé



Sur la figure ci-contre, ABCD est un rectangle tel que :
AB = 3 et AD = 5.

Les points E, F, G et H appartiennent respectivement aux segments [AB], [BC], [CD] et [DA], et AE = BF = CG = DH = 1,2.

En utilisant le repère (A, I, J) avec I ∈ [AD], AI = 1, J ∈ [AB] et AJ = 1, détermine la nature du quadrilatère EFGH.

Solution commentée

Je détermine la nature du quadrilatère EFGH.

Le quadrilatère EFGH semble être un parallélogramme.

Dans le repère choisi, on a: B(0 ; 3), D(5 ; 0), C(5 ; 3), E(0 ; 1,2), F(1,2 ; 3), G(5 ; 1,8) et H(3,8 ; 0).

Donc $\overrightarrow{EF}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1,2 - 0 \\ 3 - 1,2 \end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} 1,2 \\ 1,8 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{HG}\begin{pmatrix} 5 - 3,8 \\ 1,8 - 0 \end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{HG}\begin{pmatrix} 1,2 \\ 1,8 \end{pmatrix}$.

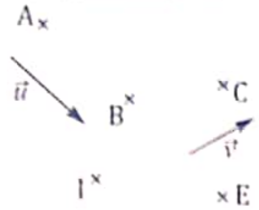
$\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{HG}$ ont les mêmes coordonnées, donc $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$. EFGH est donc bien un parallélogramme.

V- JE M'EXERCE

1- Exercices de fixation/ Application

Construire : - le point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$
- un représentant d'une combinaison linéaire de vecteurs.

1 On donne sur la figure ci-dessous les points A, B, C, E, I et les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.



a) Reproduis la figure,

b) Construis les points F, G, H et J définis par :
$\overrightarrow{EF} = \vec{v}$; $\overrightarrow{CG} = \vec{u}$; $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA}$

2 ABC est un triangle.
Construis les points M, N et P tels que :
$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB}$

Simplifier les écritures vectorielles

3 Recopie et remplace les pointillés par le vecteur qui convient.

a) $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} = ...$; b) $\overrightarrow{JK} + ... = \overrightarrow{JE}$
c) $..... + \overrightarrow{LK} = \overrightarrow{AK}$; d) $\overrightarrow{AB} - ..... = \overrightarrow{CB}$
e) $\overrightarrow{OB} - ...... = \overrightarrow{AB}$; f) $...... - \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BC}$

4 Recopie et remplace les pointillés par le nombre qui convient.

$$\text{Si } \vec{u} = \frac{2}{5}\vec{v} \text{ alors } \begin{cases} \vec{v} = ...\vec{u} \\ -\vec{v} = ...\vec{u} \\ \vec{v} = ...(-\vec{u}) \end{cases}$$

5 Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Simplifie les écritures vectorielles ci-dessous.

a) $\frac{2}{5}\left(\vec{u} + \frac{1}{4}\vec{u}\right)$ b) $\frac{3}{5}\left(10\vec{u} - \frac{5}{6}\vec{u}\right)$

c) $2 \times (-3\vec{u}) + 5\vec{v}$ d) $0,5\left(2\vec{u} - \frac{3}{0,5}\vec{v}\right)$.

6 ABCD est un parallélogramme de centre O.
Pour chaque ligne du tableau suivant, quatre réponses A, B, C et D sont proposéesdont une seule est juste. écris sur ta copie le numéro de la ligne suivie de la lettre correspond à la réponse juste

		Réponses			
N°	Enoncés	A	B	C	D
1	$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$ égal à	$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{BD}$	$\vec{0}$
2	$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$	$\overrightarrow{BD}$	$\overrightarrow{AC}$	$\vec{0}$	$\overrightarrow{AB}$
3	$\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{DA}$	$\vec{0}$	$2\overrightarrow{AO}$	$2\overrightarrow{BD}$	$2\overrightarrow{AC}$

7 ABCD est un parallélogramme de centre O.

1- Écris les sommes suivantes à l'aide d'un seul vecteur.

a) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$
b) $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$
c) $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{DA}$

2- Démontre que pour tout point M du plan :
$4\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$.

Vecteurs colinéaires : utiliser les vecteurs pour bâti une démonstration

8 Réponds par vrai (V) ou par faux (F) à chacun des affirmations suivantes :

N°	Affirmations	Réponses
1	Deux vecteurs opposés sont colinéaires	
2	Deux vecteurs égaux sont colinéaires	
3	Deux vecteurs colinéaires sont opposés	

9 ABC est un triangle.

1. Construis les points I et J tels que :
$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AC}$.
2. Démontre que les droites (IC) et (BJ) so parallèles.

10 Soit un triangle ABC.

1. Construis les points M et N tels que :
$\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.
2. Démontre que les droites (MN) et (BC) so parallèles.

11 ABCD est un parallélogramme.

1. Construis les points E et F définis par :
$\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

2. Exprime chacun des vecteurs $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{CF}$ en fonction de $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB}$.
3. Démontre que les points E, C, et F sont alignés.

Calculer des mesures algébriques

12 On considère une droite (D) muni d'un repère $(O; \vec{i})$.

1. Construis sur (D) les points A, B, et C tels que : $\overrightarrow{OA} = 3\vec{i}$; $\overrightarrow{OB} = -2\vec{i}$ et $\overrightarrow{OC} = 3{,}5\vec{i}$.
2. Détermine les abscisses des points A, B, et C dans le repère $(O; \vec{i})$.

13 Soit (D) une droite sur laquelle on a marqué deux points O et I.

1. Reproduis la droite (D) et place sur (D) les points A, B, et C d'abscisses respectives -1 ; -4 ; 3 dans le repère $(O; \overrightarrow{OI})$.
2. Calcule IA, AC, BI, OB et OC.

14 On considère une droite (D) munie d'un repère $(O, \vec{i})$.

1. Place sur (D) les points A, B, et C d'abscisses respectives 2,5 ; -3 et 4.
2. Calcule $\overline{AB}$ et AB ; $\overline{BC}$ et BC ; $\overline{AC}$ et AC.
3. Compare :
   $\overline{AB} + \overline{BC}$ et $\overline{AC}$ puis $AB + BC$ et AC

Déterminer les coordonnées d'un vecteur ou d'un point dans un repère.

15 $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base de $\mathcal{V}$. On donne les vecteurs suivants :

$\vec{u} = -\vec{i} + 2\vec{j}$; $\vec{v} = -3(\vec{i} + 2\vec{j}) + \vec{j}$; $\vec{w} = 2(\vec{i} - \vec{j})$; $\vec{z} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Détermine, les coordonnées des vecteurs $\vec{i}, \vec{j}, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{z}$, dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

16 Détermine les coordonnées des vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ et $\vec{z}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ où : $\vec{u} = 2\vec{j} - \vec{i}$;

$\vec{v} = \frac{1}{2}(\vec{i} + \vec{j}) + (\vec{i} - \vec{j})$; $\vec{w} = -3\vec{j} + 2\vec{j}$; $\vec{z} = \frac{1}{2}(-\vec{i} + 2\vec{j})$.

17 Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan. On considère les points A (3 ; -5) et B(-4 ; 1).
Calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$.

18 $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère du plan.

1. Représente les vecteurs $\vec{u} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$ et $\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{j}$ dans le plan muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
2. Détermine les coordonnées des points M et N définis par $\overrightarrow{OM} = \vec{u} + \vec{v}$ et $\overrightarrow{MN} = \vec{u} - \vec{v}$.

19 $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère du plan. Soit deux points A (4 ; -3), B (5 ; 1) et le vecteur $\vec{u}$.

1. Détermine les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$.
2. Calcule les coordonnées des points M et N tels que $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{NB} = \vec{u}$.

Utiliser le déterminant d'un couple de vecteurs pour justifier leur colinéarité

20 $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base de $\mathcal{V}$. On donne :
$\vec{u} = 2\vec{i} - 5\vec{j}$; $\vec{v} = -7\vec{i} - 4\vec{j}$.
1. Calcule $\det(\vec{u}, \vec{v})$.
2. Dis si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. Justifie ta réponse.

21 $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base de $\mathcal{V}$. On donne :
$\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} 6 \\ 15 \end{pmatrix}$.

1. Calcule $\det(\vec{u}, \vec{v})$ et conclus.
2. Calcule $\det(\vec{v}, \vec{w})$ et conclus.

22 On donne dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ les points A (2 ; 3), B (5 ; 7) et C (-7 ; -9).

1. Calcule AB et AC.
2. Calcule $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et conclus.

23 Dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points A (1 ; 3), B (-2 ; 5), C (0 ; 3) et D (6 ; -5).
Démontre que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

24 Dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on donne les points A(1 ; 3), (-2 ; 5) et C (4 ; 5).

1. Détermine les coordonnées du point G tel que : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
2. Soit I le milieu de [BC].
   Démontre que les points A, I et G sont alignés.

Déterminer l'expression d'un vecteur dans une base orthonormée
Calculer la norme d'un vecteur dans une base orthonormée

25 Le plan vectoriel $\mathcal{V}$ est muni de la base $(\vec{i}, \vec{j})$

Soit $\vec{u} = \vec{i} + 3\vec{j}$; $\vec{v} = -2\vec{i} + \vec{j}$; $\vec{w} = 2\vec{i} - \vec{j}$; $\vec{x} = 2\vec{i}$ et $\vec{y} = -3\vec{j}$.

Calcule $\|\vec{u}\|$; $\|\vec{v}\|$; $\|\vec{w}\|$; $\|\vec{x}\|$ et $\|\vec{y}\|$.

26 $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé.
On donne dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les points A (-19 ; 27), B (-3 ; -36) et C (53 ; -3).
Calcule AB, AC et BC et déduis-en la nature du triangle ABC.

27 $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base orthonormée.
On donne le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

1. Calcule $\|\vec{u}\|$.
2. Vérifie que le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}\frac{2}{\|\vec{u}\|}\\ \frac{-3}{\|\vec{u}\|}\end{pmatrix}$ est un vecteur unitaire et colinéaire à $\vec{u}$.
3. Démontre que le vecteur $\vec{v}$ est colinéaire au vecteur $\vec{u}$ dans chacun des cas suivants :

a) $\vec{W}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$; b) $\vec{W}\begin{pmatrix}-8\\6\end{pmatrix}$; c) $\vec{W}\begin{pmatrix}-1\\ \frac{3}{4}\end{pmatrix}$

2- Exercices de renforcement / approfondissement

28 ABCD est un parallélogramme de centre O.

1. Dans chaque cas, détermine ou construis s'il y a lieu, le point M tel que :

a) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BD}$; *b)* $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$
c) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CA}$; *d)* $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AC}$

2. Démontre qu'il n'existe aucun point M tel que : $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

29 1. Construis un triangle ABC tel que : AB = 5 cm, AC = 8 cm et BC = 9 cm.

2. a) Construis le point D tel que: $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$.

b) Construis le point E tel que : $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{8}\overrightarrow{AC}$.

3. a) Exprime $\overrightarrow{CE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b) Exprime $\overrightarrow{CD}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

4- Déduis de la consigne 3 que les points C, D et E sont alignés.

30 Soit PQRS un parallélogramme. Le point A est le milieu de [QR] et le point B est défini par $\overrightarrow{PB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{PR}$.
Démontre que les points S, A et B sont alignés.

31 I et J sont les milieux respectifs des segments .

1. Construis les points K et L définis par les relations vectorielles :

$\overrightarrow{IK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{CI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$.

2. Démontre que les points A, K et L sont alignés.

32 ABC est un triangle. I et J sont définis par :
$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AC}$.

1. Exprime les vecteurs $\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{BJ}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Démontre que les droites (IC) et (BJ) sont parallèles.

33 Soit un triangle ABC.

1- Construis les points Q, P et R tels que :
$\overrightarrow{BQ} = -3\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BP} = 3\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BR} = \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{BP}$

2- Démontre que R appartient à la droite (BC).

34 ABCD est un quadrilatère. On designe par I, J, K et L sont les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD] et [DA].
Démontre que pour tout point M du plan, on a :
$\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MK} = \overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{ML}$

35 Soit ABC un triangle.
On pose : $\vec{u} = (1 + \sqrt{3})\overrightarrow{AB} - \sqrt{2}\overrightarrow{BC}$,
$\vec{v} = \sqrt{2}\overrightarrow{AB} + (1 - \sqrt{3})\overrightarrow{BC}$
Démontre que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

36 Dans le plan vectoriel $\mathcal{V}$ muni de la base $(\vec{i}, \vec{j})$, on donne les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Dans chacun des cas suivants, détermine le réel m pour que les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.
a) $\vec{u}(1 ; 4)$ et $\vec{v}(m ; 2)$;
b) $\vec{u}(-m ; 2)$ et $\vec{v}(2m ; -1)$;
c) $\vec{u}(27 ; 2m)$ et $\vec{v}(2m ; 3)$.

37 Une droite est munie d'un repère $(O\ ;\ \vec{i})$. On place les points A, B, C et D de cette droite d'abscisses respectives $4\ ;\ \frac{15}{2}\ ;\ -1$ et $-\frac{11}{3}$.

1. Calcule les mesures algébriques suivantes : $\overline{AB}\ ;\ \overline{BC}\ ;\ \overline{AD}\ ;\ \overline{CA}\ ;\ \overline{AC} - \overline{AD}$ et $2\overline{OB} - \overline{BC}$.
2. Détermine l'abscisse x des points M dans chacun des cas suivants :

a) $\overline{AM} = 3$; b) $2\overline{CM} + \overline{MA} = 1$; c) $2\overline{OB} = 3\overline{AM}$; d) $0 \leq \overline{CM} \leq 2$; e) $3\overline{AM} = AC$; f) $AM^2 = 4$.

38 Soit ABCD un parallélogramme de centre O et I le milieu du segment [AB]. La parallèle à (DB) passant par C coupe (AB) en G et la parallèle à (AC) passant par D coupe (AB) en F.
Les droites (CG) et (DF) se coupent en E.

1. Démontre que : $AF = BG = AB$.
2. Démontre que : $\overrightarrow{FE} = 3\overrightarrow{DE}$.
3. Démontre que les points E, O et I sont alignés.

39 $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé.
On donne les points A(-3 ; 1), B(5 ; 3) et C(1 ; -7).

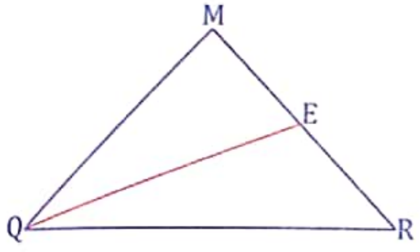
1. Calcule les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC.
2. On pose : $c = AB$, $b = AC$ et $a = BC$. Calcule a^2, b^2 et c^2.
3. Vérifie que : $GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$.

40 Dans le plan rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On donne les points :
A(0 ; -3), B(2 ; 3), C(-9 ; 0), D(-1 ; -1).

1. Calcule les coordonnées des points E et F tels que : $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{MD}$.
2. Calcule les coordonnées de $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{CF}$.
3. Démontre que les points C, E et F sont alignés.

3- Situations d'évaluation

41 La coopérative scolaire d'un lycée dispose d'un jardin ayant une forme triangulaire comme l'indique la figure ci-dessous.



Sur cette figure :

- E représente l'entrée du jardin ;
- [MQ],[MR] et [QR] sont les côtés de ce jardin ;
- [QE] est un chemin.

Dans le souci d'avoir de l'eau en permanence pour arroser les plants, le président de la coopérative décide de faire creuser un puits P à l'extérieur du jardin de telle sorte que les chemins [QE] et [PR] aient la même direction.
Un élève affirme que le point P tel que $\overrightarrow{MP} = 2\overrightarrow{QR}$ convient.
Curieux, tu décides de vérifier cette affirmation.

1. Reproduis la figure et place le point P tel que : $\overrightarrow{MP} = 2\overrightarrow{QR}$.
2. Démontre que : $\overrightarrow{RP} = 2\overrightarrow{QE}$.
3. Dis si cet élève a raison. Justifie ta réponse.

VI- RENDEZ-VOUS DES CURIEUX !

Les vecteurs : flèches du progrès.

La notion de vecteur, dégagée de tout emploi de coordonnées, est due à William Hamilton (1805-1865) et à Hermann Grassmann (1809 - 1877). Par sa grande simplification de langage, elle permit de grands progrès en mécanique, optique, géométrie... Aujourd'hui, les vecteurs sont présents dans des domaines très nombreux et très variés : économie, traitement de l'image,... Sans l'apport des vecteurs, l'analyse de la structure d'un édifice était parfois faite de façon intuitive comme le montre les illustrations ci-dessous pour le pont enjambant le Firth of Forth en écosse.

(*Source collection hyperbole, edition Nathan*)

2 Ensemble des nombres réels

Notions essentielles :

- Nombres rationnels et irrationnels
- Majorant, minorant, maximum, minimum d'un ensemble
- Valeur absolue d'un nombre réel

SITUATION D'APPRENTISSAGE

Lors d'une table ronde organisée par le club Mathématiques d'un lycée sur l'ensemble des nombres réels, tes camarades de seconde C et toi êtes surpris d'apprendre que l'ensemble $]-1 ; 1[\cap \mathbb{Q}$ n'admet ni maximum ni minimum.

Vous décidez alors de faire des recherches sur les nombres irrationnels, l'ordre dans $\mathbb{R}$, les valeurs absolues et démontrer que l'ensemble $]-1 ; 1[\cap \mathbb{Q}$ n'admet ni maximum, ni minimum.

I- ACTIVITÉS DE DÉCOUVERTE

1- CONNAÎTRE DES NOMBRES IRRATIONNELS ET LA DÉMONSTRATION PAR L'ABSURDE

Activité 1

1- L'unité est le centimètre.
ABCD est un carré de longueur de coté 1.
Justifie que la longueur de la diagonale [AC] est égale $\sqrt{2}$.

2- On se propose de démontrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.
On suppose que $\sqrt{2}$ s'écrit sous la forme $\frac{p}{q}$, où p et q sont des nombres entiers naturels tels que q est non nul.

a) Justifie que : $p^2 = 2q^2$.

b) Déduis-en que p^2 est pair.

c) On veut démontrer que p est pair.
On suppose que p est impair, c'est-à-dire qu'il existe un entier naturel k tel que $p = 2k + 1$.
Justifie que dans ce cas p^2 est impair et conclus.

d) En utilisant un raisonnement semblable au 2-c), justifie que q est pair.

e) Déduis de tout ce qui précède que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

Je fais le point de l'activité

- Nous avons vu au premier cycle que les nombres rationnels peuvent s'écrire sous la forme $\frac{p}{q}$, où (p, q) est un élément de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. On a démontré que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.
Par conséquent, il existe des nombres réels qui ne sont pas rationnels. Ces nombres sont appelés nombres irrationnels.
- Le type de raisonnement utilisé pour démontrer l'irrationnalité de $\sqrt{2}$ est appelé raisonnement par l'absurde.

Le raisonnement par l'absurde est un raisonnement qui permet de démontrer qu'une affirmation est vraie en démontrant que l'affirmation contraire est fausse.
Il consiste à supposer que l'affirmation contraire à l'affirmation initiale est vraie et à rechercher une contradiction.
Le raisonnement par l'absurde n'est correct que si l'affirmation à démontrer n'a qu'une seule affirmation contradictoire.

J'évalue mes acquis

Réponds par vrai ou par faux.

1- Un nombre réel est soit rationnel soit irrationnel.

2- 0 est un nombre irrationnel.

3- Un nombre réel x est rationnel si et seulement si il existe un couple (p, q), élément de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que : $x = \frac{p}{q}$.

2- ORDRE ET OPÉRATIONS DANS $\mathbb{R}$

Activité 2

a, b, c et d sont des nombres réels.

1- a) Recopie et complète avec ≥ ou ≤.

$a \leq b$ signifie que $b - a$ ... 0.

b) Justifie que : $c - a = (c - b) + (b - a)$.

c) Déduis-en que si $a \leq b$ et $b \leq c$, alors $a \leq c$.

2- a) Démontre que si $a \leq b$, alors $a + c \leq b + c$.

b) Déduis-en que si $a \leq b$ et $c \leq d$, alors $a + c \leq b + d$.

3- a) Démontre que si $0 \leq a \leq b$ et $c \geq 0$, alors $ac \leq bc$.

b) Déduis-en que si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$, alors $ac \leq bd$.

Je fais le point de l'activité

a, b, c et d sont des nombres réels.
$a \leq b$ signifie que $b - a \geq 0$.
Si $a \leq b$ alors $a + c \leq b + c$.
Si $a \leq b$ et $c \leq d$, alors $a + c \leq b + d$.
Si $0 \leq a \leq b$ et $c \geq 0$, alors $ac \leq bc$.
Si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$, alors $ac \leq bd$.

J'évalue mes acquis

a et b sont des nombres réels.

1- Démontre que si $0 \leq a \leq b$, alors $a^2 \leq b^2$.

2- Démontre que si $a \leq b \leq 0$, alors $b^2 \leq a^2$.

3- On suppose que $ab > 0$.

Démontre que si $a \leq b$, alors $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$.

3- CONNAÎTRE LA DÉFINITION D'UN MAJORANT, MINORANT D'UN SOUS ENSEMBLE NON VIDE

Activité 3

Soit A un ensemble tel que : A = {-3 ; -1 ; 5 ; 0 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 1}.

1- Cite deux nombres réels inférieurs ou égaux à tous les éléments de A.

2- Cite deux nombres réels supérieurs ou égaux à tous les éléments de A.

Je fais le point de l'activité

- Tout nombre réel supérieur ou égal à tous les éléments de A est un majorant de A.
- Tout nombre réel inférieur ou égal à tous les éléments de A est un minorant de A.
- Un ensemble non vide A peut avoir plusieurs majorants ou plusieurs minorants.

J'évalue mes acquis

Soit J la partie de $\mathbb{R}$ définie par : J =]-1 ; 3[.

1- Détermine trois minorants de J.

2- Détermine trois majorants de J.

4- CONNAÎTRE LA DÉFINITION DU MAXIMUM, DU MINIMUM D'UN SOUS ENSEMBLE NON VIDE

Activité 4

Soit A l'ensemble tel que : $A = [-3 ; 2]$.

1- a) Détermine l'ensemble des minorants de A.

b) Détermine le plus grand des minorants de A qui appartient à A.

c) Dis s'il en existe encore.

2- a) Détermine l'ensemble des majorants de A.

b) Détermine le plus petit des majorants de A.

Je fais le point de l'activité

- le plus grand élément d'un ensemble A, lorsqu'il existe, est appelé le maximum de A.
- le plus petit élément d'un ensemble A, lorsqu'il existe, est appelé le minimum de A.

J'évalue mes acquis

Détermine le minimum puis le maximum de l'ensemble des nombres entiers naturels de deux chiffres dans le système décimal.

5- CONNAÎTRE UNE PROPRIÉTÉ DE LA VALEUR ABSOLUE D'UN NOMBRE RÉEL

Activité 5

Soit a un nombre réel.

1- indique le plus grand des deux nombres réels $-a$ et a suivant le signe de a.

2- Déduis-en une propriété de la valeur absolue d'un nombre réel.

Je fais le point de l'activité

Le plus grand des nombres réels $-a$ et a est la valeur absolue de a.

J'évalue mes acquis

Recopie et complète chacune des égalités suivantes :

a) $\left|3 - \sqrt{10}\right| =$; b) $|\pi - 3| = \ldots$; c) $\left|1 - \frac{1}{n}\right| = \ldots$ où n est un nombre entier non nul.

6- CONNAÎTRE LES PROPRIÉTÉS DE LA VALEUR ABSOLUE D'UN NOMBRE RÉEL

Activité 6

Soit a et b deux nombres réels.

1- Démontre que : $|a| \geq 0$

2- Démontre que : $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$

3- Démontre que : $|-a| = |a|$

4- Démontre que : $|a| = |b| \Leftrightarrow a = b$ ou $a = -b$

5- a) Démontre que : $|a + b|^2 \leq (|a| + |b|)^2$

b) Déduis-en que : $|a + b| \leq |a| + |b|$

6- Démontre que : $|ab| = |a||b|$

7- a) Démontre que : $\left|\frac{1}{a}\right| = \frac{1}{|a|}$ $(a \neq 0)$

b) Déduis-en que : $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ $(b \neq 0)$

Je fais le point de l'activité

Pour tout nombres réels a et b, on a les résultats établi ci-contre.

J'évalue mes acquis

Recopie et complète :

a) $|x - 2|$et$|2 + \sqrt{5}| = |\ldots|$;

b) $\left|\frac{5 - 3\sqrt{3}}{6 - \sqrt{2}}\right| = \frac{|\ldots|}{|\ldots|} = \ldots$;

c) $|3x - 5| \leq |\ldots| + |\ldots|$.

Scanné avec CamScanner

J'évalue mes acquis

x, y, a et b sont des nombres réels

1- Recopie et complète :

a) $|x| = 2$ quivaut à $x = ...$ ou $x = ...$; b) $|x| = |y - 2|$ équivaut à $x = ...$ ou $x = ...$

c) La valeur absolue d'un nombre $a - b$ est le plus grand des réels ...ou .....

2- Écris sans le symbole valeur absolue les nombres suivants :

a) $|-3,1|$; b) $|\pi|$; c) $|14 - 26|$; d) $|\sqrt{3} - 4|$; e) $|2 - \sqrt{6}|$; f) $|3 - \sqrt{3}|$.

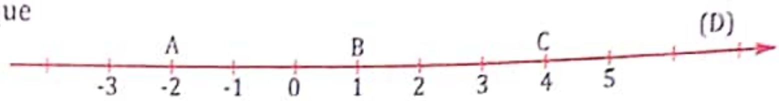
7- CONNAÎTRE LA DÉFINITION DE LA DISTANCE DE DEUX NOMBRES RÉELS

Activité 7

(D) est une droite graduée.

A, B, C, et M sont des points de (D) tels que indiqués sur la figure ci-contre.

M est d'abscisse x.



1- Calcule : $x_B - x_A$; $x_B - x_C$; $x_C - x_A$; $x_M - x_A$.

2- Précise le signe de chaque résultat obtenu à la question précédente, puis calcule $|x_B - x_A|$, $|x_B - x_C|$, $|x_C - x_A|$ et $|x_M - x_A|$.

Je fais le point de l'activité

x et y étant deux nombres réels, le nombre réel positif $|x - y|$ est appelé distance de x à y et est notée $d(x\,;y)$.

J'évalue mes acquis

Calcule la distance de x à y dans chacun des cas suivants :

a) $x = -5$ et $y = -1$;

b) $x = -8$ et $y = 3$;

c) $x = 9$ et $y = 5$.

8- RÉSOUDRE ALGÉBRIQUEMENT LES ÉQUATIONS DU TYPE $|x - a| = r, (r > 0)$

Activité 8

Soit l'équation (E) : $x \in \mathbb{R}$, $|x - 2| = 3$.

1- Ecris l'équation (E) sans le symbole "valeur absolue" en utilisant $|a| = |b|$ équivaut à $a = b$ ou $a = -b$.

2- Résous l'équation (E) dans chaque cas et détermine les solutions de (E) dans $\mathbb{R}$.

J'évalue mes acquis

1- Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $|x - 1| = 5$; b) $|x + 3| = 2$;

c) $|2x - 5| = -1$.

2- Détermine les valeurs de x pour lesquelles $d(x, 5) = 6$.

Je fais le point de l'activité

$|x - a| = r$ équivaut à $x - a = -r$ ou $x - a = r$. $(r > 0)$

9- RÉSOUDRE GRAPHIQUEMENT UNE ÉQUATION DU TYPE $|x - a| = r, (r > 0)$

Activité 9

On se propose de résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}$, l'équation $|x - 7| = 3$.

1- a) Place le nombre 7 sur une droite graduée.

b) Détermine les nombres x tels que la distance de 7 à x soit égale à 3.

On vient de résoudre graphiquement l'équation $|x - 7| = 3$.

2- Recopie et complète :

a) Résoudre graphiquement l'équation $|x - a| = r$, c'est trouver les nombres ...tels que la distance de ... à ... est égale à ....

b) Détermine l'ensemble des solutions de l'équation $|x - a| = r$.

(On distinguera trois cas : $r > 0$; $r = 0$; $r < 0$).

Je fais le point de l'activité

Pour la résolution graphique de l'équation du type $|x - a| = r$, $(r > 0)$, on trace une droite que l'on gradue, puis on place le nombre a.
Sur cette droite graduée, on détermine les nombres qui sont à une distance r de a à l'aide du compas. Autrement dit, on détermine les abscisses du point M de la droite graduée telles que $AM = r$ avec $x_A = a$ et $x_M = x$.

J'évalue mes acquis

Résous graphiquement chacune des équations suivantes :

a) $|x + 2| = 5$; b) $|x - 5| = 1$; c) $|2 - x| = 5$; d) $|x + 4| = 0$; e) $|x - 5| = -2$

10- RÉSOUDRE ALGÉBRIQUEMENT UNE INÉQUATION DU TYPE $|x - a| \leq r, (r > 0)$

Activité 10

Soit (I) : $|x - 3| \leq r$, $(r > 0)$ une inéquation dans $\mathbb{R}$.

1- Ecris l'inéquation (I) sans le symbole valeur absolue en utilisant $|a| \leq r$ équivaut à $-r \leq a$ ou $a \leq r$.

2- Résous l'inéquation (I) dans chaque cas et détermine les solutions de (I) dans $\mathbb{R}$.

Je fais le point de l'activité

- $|x - a| \leq r$, $(r > 0)$ équivaut à $-r \leq x - a \leq r$
- La solution de cette inéquation est $[a - r ; a + r]$

J'évalue mes acquis

Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations suivantes :

a) $|x - 2| \leq 5$; b) $|x + 7| \leq 3$; c) $|x - 3| \leq -1$; d) $|x + 4| \leq 0$.

11- RÉSOUDRE GRAPHIQUEMENT UNE INÉQUATION DU TYPE $|x - a| \leq r, (r > 0)$

Activité 11

On se propose de résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|x - 7| \leq 3$.

1- a) Place le nombre 7 sur une droite graduée.

b) Place ensuite les nombres x tels que la distance de 7 à x soit inférieur ou égale à 3.
Détermine ces nombres.
On vient de résoudre graphiquement l'inéquation $|x - 7| \leq 3$.

2- Recopie et complète :

a) Résoudre graphiquement l'inéquation $|x - a| \leq r$, c'est trouver les nombres ... tels que la distan
de ... à ... est inférieur ou égale à ....

b) Détermine l'ensemble des solutions de l'inéquation $|x - a| \leq r$.
(On distinguera trois cas : $r > 0$; $r = 0$; $r < 0$).

Je fais le point de l'activité

Pour la résolution graphique de l'équation du type $|x - a| \leq r$, $(r > 0)$, on trace une droite que l'on gradue, puis on place le nombre a. A l'aide du compas, on détermine les abscisses des points situés à moins d'une distance r de a.
Autrement dit, on détermine les abscisses x des points M de cette droite graduée telles que AM < r où $x_A = a$. Ce qui correspond aux abscisses des points M de la droite graduée situés à l'intérieur du disque de centre A et de rayon r.

J'évalue mes acquis

Résoudre graphiquement chacune des inéquations suivantes :

a) $|x + 1| \leq 5$; b) $|x - 3| \leq 7$; c) $|x + 3| \leq 0$

d) $|x - 5| \leq 0$; e) $|x - 5| \leq -2$.

II- RÉSUMÉ DE COURS

1- NOMBRES IRRATIONNELS

Au premier cycle, nous avons vu les nombres rationnels. Ce sont des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme $\frac{p}{q}$ où (p, q) est un élément de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$.

Il existe des nombres réels qui ne sont pas des nombres rationnels. Ils sont appelés nombres irrationnels
$\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$ et π sont des nombres irrationnels.
On a la relationd'inclusion suivante :
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

2- ORDRE ET OPÉRATIONS DANS $\mathbb{R}$

Définitions

a et b sont des nombres réels.

- a est inférieur ou égal à b signifie que $b - a$ est un nombre réel positif.
- a est inférieur strictement à b signifie que $b - a$ est un nombre réel strictement positif.

Propriétés (Ordre et addition)

a, b, c et d sont des nombres réels.

- Si $a \leq b$, alors $a + c \leq b + c$.
- Si $a \leq b$ et $c \leq d$, alors $a + c \leq b + d$.

Propriétés (Ordre et multiplication)

a, b, c et d sont des nombres réels.

- Si $0 \leq a \leq b$ et $c \geq 0$, alors $ac \leq bc$.
- Si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$, alors $ac \leq bd$.

III- MAJORANT, MINORANT, MAXIMUM ET MINIMUM D'UN ENSEMBLE NON VIDE

1- Majorant, minorant d'un ensemble non vide

DÉFINITIONS

Soit E un sous ensemble non vide de $\mathbb{R}$.

- On dit qu'un nombre réel M est un majorant de E si M est supérieur ou égal à tous les éléments de E. Un ensemble qui a un majorant est dit majoré.
- On dit qu'un nombre réel m est un minorant de E si m est inférieur ou égal à tous les éléments de E. Un ensemble qui a un minorant est dit minoré.

Soit E un sous ensemble non vide de $\mathbb{R}$, M et m des nombres réels.
M est un majorant de E signifie que : $\forall x \in E, x \leq M$.
m est un minorant de E signifie que : $\forall x \in E, x \geq m$.

Exemple

$\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{R}$ ne sont ni majorés, ni minorés.
$\mathbb{N}$ est minoré par 0, -1, -2, $-\sqrt{2}$, mais $\mathbb{N}$ n'est pas majoré.
$]-3, +\infty[$ est minoré par -3 mais n'est pas majoré.

- Si M est un majorant (respectivement minorant), tout nombre supérieur à M (respectivement inférieur à m) est aussi un majorant (respectivement un minorant).

2- Maximum, Minimum d'un ensemble non vide

DÉFINITION

Soit E un sous ensemble non vide de $\mathbb{R}$.

- Lorsqu'il existe, le plus grand élément de E est appelé le maximum de E.
- Lorsqu'il existe, le plus petit élément de E appelé le minimum de E.

Exemple

Toute partie finie de $\mathbb{R}$ admet un maximum et un minimum.
Soit $E = \{-3 ; -2 ; 0 ; 1 ; 2 ; 4\}$; le maximum de E est 4 et son minimum est -3.
Le maximum et le minimum de $[-2 ; 3]$ sont respectivement -2 et 3.
L'ensemble $]-\infty, 2[$ n'admet pas de maximum.
Soit a un nombre réel, l'intervalle $]-\infty; a[$ (respectivement $]a ; +\infty[$) n'admet pas de maximum (respectivement minimum).

- Lorsqu'il existe, le maximum (respectivement le minimum) d'un sous ensemble de $\mathbb{R}$ est unique.
- Soit E un sous ensemble non vide de $\mathbb{R}$ et M un nombre réel.
  M est le maximum (respectivement minimum) de E si et seulement si M est un majorant (respectivement un minorant) appartenant à E.
- Un sous ensemble majoré (respectivement minoré) de $\mathbb{R}$ n'admet pas nécessairement de maximum (respectivement minimum) ; par exemple l'intervalle $]7 ; +\infty[$ est minoré mais n'admet pas de minimum.

IV- VALEUR ABSOLUE D'UN NOMBRE RÉEL

DÉFINITION

On appelle valeur absolue d'un nombre réel, la distance à zéro de ce nombre.

Exemple

$|-4| = 4$; $|\sqrt{10} - 3| = \sqrt{10} - 3$; $\left|\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3}$; $|2 - \sqrt{11}| = \sqrt{11} - 3$.

REMARQUES • Pour tout nombre a, $|a| = a$ si $a \geq 0$ et $|a| = -a$ si $a \leq 0$.

PROPRIÉTÉ 1

Soit a un nombre réel.
La valeur absolue de a est le plus grand des deux nombres $-a$ et a.

PROPRIÉTÉ 2

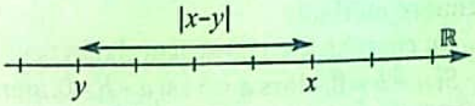
Pour tous nombres réels a, b, et tout nombre réel r strictement positif, on a :

- $|a| \geq 0$;
- $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$;
- $|a| = |-a|$;
- $|a| = \begin{cases} a \text{ si } a \geq 0 \\ -a \text{ si } a \leq 0 \end{cases}$
- $|a| = |b| \Leftrightarrow a = b$ ou $a = -b$;
- $\sqrt{a^2} = |a|$;
- $|ab| = |a||b|$;
- $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$; $(b \neq 0)$
- $|a+b| \leq |a| + |b|$;
- $|a| \leq r \Leftrightarrow -r \leq a \leq r$.

Distance de deux nombres réels

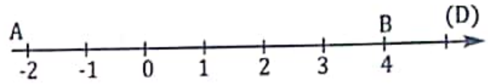
DÉFINITION

Soit x et y deux nombres réels.
Le nombre réel $|x - y|$ est appelé distance de x et y.
On note : $d(x ; y) = |x - y|$.



Exemples

- La droite (D) ci-contre est graduée régulièrement.
  On a : $AB = |-2 - 4| = 6$.
- (D) est munie d'un repère (O, I).
  Pour tous points M et N de (D), d'abscisses respectives x et y,
  on a : $MN = |x - y|$.

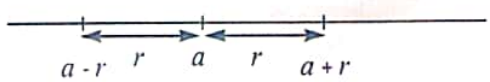


III- MÉTHODE

1- Résoudre une équation de la forme $|x - a| = r$

Pour résoudre une équation de la forme $|x - a| = r$, on peut utiliser l'une des méthodes suivantes :

- Résolution algébrique
  - Si $r < 0$, il n'y a pas de solution ;
  - Si $r = 0$, il y a une seule solution : $x = a$;
  - Si $r > 0$, il y a deux solutions : $x = a + r$ et $x = a - r$.



- Résolution graphique ($r > 0$)
  - On cherche l'ensemble des réels x tels que : $d(x ; a) = r$;
  - On trace une droite graduée et on place le point d'abscisse a ;
  - On retranche r au nombre a et on ajoute r au nombre a (avec le compas) ;
  - Donc $a + r$ et $a - r$ sont les solutions de l'équation $|x - a| = r$.

Pour résoudre une inéquation de la forme $|x - a| \leq r$, on peut utiliser l'une des méthodes suivantes :

- Résolution algébrique
  - Si $r < 0$, il n'y a pas de solution ;

- Si $r = 0$, il y a une solution : $x = a$;
- Si $r > 0$, l'ensemble des solutions est l'intervalle $[a - r ; a + r]$.

• Résolution graphique ($r > 0$)
- On cherche l'ensemble des réels x tels que : $d(x ; a) < r$;
- On trace une droite graduée et on place le point d'abscisse a sur cette droite ;
- On retranche r au nombre a et on ajoute r au nombre a ; (avec le compas)
- On place les points trouvés sur la droite graduée ;
- L'ensemble des solutions de l'inéquation $|x - a| \leq r$ est l'intervalle $[a - r ; a + r]$.
  (Mettre les bornes de l'intervalle sur la figure : intervalle fermé).

2- Traduire à l'aide d'une distance l'appartenance à un intervalle $[a ; b]$

Pour traduire à l'aide d'une distance l'appartenance à un intervalle$[a ; b]$, on peut procéder de la façon suivante :

- On détermine le centre c de l'intervalle : $c = \dfrac{a+b}{2}$;
- On calcule le rayon r de l'intervalle : $r = \dfrac{b-a}{2}$;
- On exprime que $d(x ; c) \leq r$: $|x - c| \leq r$.

Exemple :

Traduis à l'aide d'une distance l'appartenance à l'intervalle [-3 ; 5].

- L'intervalle [-3 ; 5] a pour centre $c = \dfrac{-3+5}{2} = 1$;
- Le rayon de l'intervalle [-3 ; 5] est : $r = \dfrac{1}{2}(5 + 3) = 4$;
- Donc : $x \in [-3 ; 5] \Leftrightarrow |x - 1| \leq 4$.

3- Comparer deux nombres réels

Pour comparer deux nombres réels a et b, on peut utiliser l'une des méthodes suivantes :

• Première méthode
- On cherche le signe de leur différence ;
- Si $a - b < 0$, alors $a < b$; si $a - b = 0$, alors $a = b$; si $a - b > 0$, alors $a > b$.

• Deuxième méthode
- Si les deux nombres a et b à comparer sont positifs, on peut comparer leurs carrés (qui sont dans le même ordre).
- Si les nombres a et b à comparer sont négatifs, on compare leurs opposés.

• Troisième méthode
- Si les deux nombres a et b sont strictement positifs, on peut :
  Calculer le quotient $\dfrac{a}{b}$, puis comparer ce quotient à 1 ;
  Si $\dfrac{a}{b} < 1$, alors $a < b$; Si $\dfrac{a}{b} = 1$, alors $a = b$; si $\dfrac{a}{b} > 1$, alors $a > b$.

IV- SAVOIR-FAIRE

Savoir-faire 1- Déterminer un majorant, un minorant d'un sous ensemble non vide

ÉNONCÉ

1- a) Soit $A = \left\{-8 ; -4 ; -243 ; 4 ; 18 ; \dfrac{25}{3} ; \dfrac{58}{4}\right\}$.

Complète la troisième ligne du tableau suivant :

Eléments de A	-243	-8	-4	4	$\sqrt{18}$	$\frac{25}{3}$	$\frac{58}{4}$
Proposition	$-243 < \frac{98}{3}$	$-8 < \frac{98}{3}$	$-4 < \frac{98}{3}$	$4 < \frac{98}{3}$	$\sqrt{18} < \frac{98}{3}$	$\frac{25}{3} < \frac{98}{3}$	$\frac{58}{4} < \frac{98}{3}$
Valeur de vérité							

b) Justifie que $\frac{98}{3}$ est un majorant de A.

2- Détermine un minorant de A.

3- Justifie si oui ou non, 12 est un majorant de A.

SOLUTION COMMENTÉE

1- a) Je complète la troisième ligne du tableau suivant :

Eléments de A	-243	-8	-4	4	$\sqrt{18}$	$\frac{25}{3}$	$\frac{58}{4}$
Proposition	$-243 < \frac{98}{3}$	$-8 < \frac{98}{3}$	$-4 < \frac{98}{3}$	$4 < \frac{98}{3}$	$\sqrt{18} < \frac{98}{3}$	$\frac{25}{3} < \frac{98}{3}$	$\frac{58}{4} < \frac{98}{3}$
Valeur de vérité	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai

b) Je justifie que $\frac{98}{3}$ est un majorant de A.

D'après la consigne précédente, on a : $\forall x \in A,\ x \leq \frac{98}{3}$, donc $\frac{98}{3}$ est un majorant de A.

2- Je détermine un minorant de A.

On sait que : $\forall x \in A, x \geq -243$, donc -243 est un minorant de A.

3- Justifie si oui ou non, 12 est un majorant de A.

On sait que $12 < \frac{58}{4}$, donc 12 n'est pas un majorant de A.

Savoir-faire 2- *Résoudre graphiquement une équation du type $|x - a| = d$*

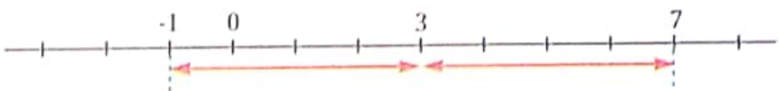
ÉNONCÉ

Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :

a) $|x - 3| = 4$; b) $|x - 9| = 0$; c) $|x - 7| = -2$

SOLUTION COMMENTÉE

Je résous les équations suivantes :



a) $|x - 3| = 4$

$|x - 3| = 4$ signifie que : $d(3 ; x) = 4$

On a donc : $x = 3 + 4$ ou $x = 3 - 4$, c'est-à-dire $x = 7$ ou $x = -1$. Donc : $S_{\mathbb{R}} = \{-1 ; 7\}$.

b) $|x - 9| = 0$ équivaut à $d(9 ; x) = 0$. Ce qui veut dire que : $x = 9$, d'où $S_{\mathbb{R}} = \{9\}$.

c) $|x - 7| = -2$ équivaut à $d(7 ; x) = -2$. Or une distance est toujours positive. Il n'y a donc pas de solution.

Donc : $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$.

Savoir-faire 3 *Résoudre graphiquement une inéquation du type $|x - a| \leq r$*

ÉNONCÉ

Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations suivantes :

a) $|x - 3| \leq 2$; b) $|x - 5| \leq 0$; c) $|x - 6| \leq -3$.

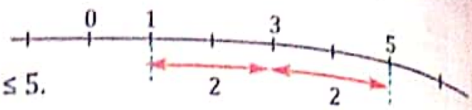
Solution commentée

Je résous les inéquations suivantes :

a) $|x - 3| \leq 2$

$|x - 3| \leq 2$ équivaut à $d(3\,;x) \leq 2$

$|x - 3| \leq 2$ équivaut à $-2 + 3 \leq x \leq 2 + 3$, c'est à dire : $1 \leq x \leq 5$.



Donc l'ensemble des solutions est l'intervalle $[1\,;5]$.

b) $|x - 5| \leq 0$ équivaut à $|x - 5| = 0$. La seule solution possible est $x = 5$.

c) -3 est négatif. Par suite il n'y a pas de solution.

V- JE M'EXERCE

1- Exercices de fixation/ Application

Nombres irrationnels

1 Reponds par vrai ou par faux.

1- 0,1 est un nombre rationnel.

2- $\dfrac{22}{7}$ est un nombre irrationnel.

3- Tout nombre réel compris entre deux nombres rationnels, est un nombre rationnel.

4- Tout nombre réel compris entre deux nombres rationnels, est un nombre irrationnel.

2 Démontre par l'absurde que $1 + \sqrt{2}$ n'est pas un nombre irrationnel.

3 Démontre par l'absurde que $\sqrt{5}$ n'est pas un nombre rationnel.

Ordre et opérations dans $\mathbb{R}$

4 a et b sont des nombres réels.

1- Justifie que si $0 \leq a \leq b$ alors $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$.

1- Justifie que si $0 \leq a \leq 1$ alors $a^2 \leq a$.

Connaître la définition d'un majorant d'un ensemble non vide, la définition d'un minorant d'un ensemble non vide

5 L'énoncé d'une définition a été désorganisé. Dans chaque cas, réordonne l'énoncé.

E est un ensemble non vide.

1- On dit qu'un nombre réel M/tous les éléments de E/est un majorant de E/si M est supérieur ou égal à.

2- On dit qu'un nombre réel m/ tous les éléments de E/est un minorant de E /si m est inférieur ou égal à.

6 Réponds par vrai (V) ou par faux (F) au affirmations suivantes :

1- L'ensemble $\mathbb{Z}$ est minoré.

2- L'ensemble $\mathbb{N}$ est majoré

3- L'intervalle $[-2\,;1[$ est majoré par 1

4- Le nombre réel -2 est le plus grand des minorants de $[-2\,;1[$

5- L'intervalle $[-2\,;1[$ a un plus petit majorant

7

1- Traduis en langage courant.

a) $M \in \mathbb{R}, \forall x \in F, x < M$

b) $m \in \mathbb{R}, \forall x \in F, x > m$

2- Traduis en langage mathématique.

a) 5 est un majorant de A.

b) -2 est un minorant de A.

Connaître la définition d'un maximum d'un ensemb non vide, la définition d'un minimum d'un ensemb non vide

8 Réponds par vrai (V) ou par faux (F) à chacu des affirmations suivantes :

N°	Affirmations	Réponse
1	$\mathbb{Q}$ admet un minimum.	
2	Le minimum de A est toujours un élément de A	
3	Le maximum de C est le plus grand des majorants de C	
4	Le minimum de B est le plus petit des minorants de B	
5	L'ensemble $\mathbb{Z}$ est borné	
6	0 est le minimum de $\mathbb{N}$	

9 Réponds par vrai (V) ou par faux (F) aux affirmations suivantes :

N°	Affirmations	Réponses
1	0 est le minimum de $\mathbb{R}$.	
2	4 est le maximum de $]-2\,;4[$.	
3	-2 est le minimum de $]-2\,;4[$.	
4	Tout ensemble minoré admet un minimum.	

10 Traduis en langage mathématique :

a) 4 est le maximum de F.

b) $-\sqrt{3}$ est le minimum de F.

Déterminer le maximum d'un ensemble non vide de $\mathbb{R}$ le minimum d'un ensemble non vide de $\mathbb{R}$

Détermine, s'ils existent, les majorants et les minorants des ensembles suivants :

$[0\,;1]\cap\mathbb{Q}$; $]0\,;1[\cap\mathbb{Q}$

11 Détermine l'ensemble des majorants et l'ensemble des minorants, s'ils existent, de chaque ensemble suivant :

$A =]-3\,;2[$; $B = [-4\,;+\infty[$;

$C = [-2\,;4]$; $D = [-\infty\,;3]$.

Déterminer le maximum d'un ensemble non vide de $\mathbb{R}$, le minimum d'un ensemble non vide de $\mathbb{R}$

12

1- Détermine l'ensemble des minorants de $\mathbb{N}$.

2- Détermine le minimum de $\mathbb{N}$.

13 Soit les ensembles A et B tels que :

$A = \{-2\,;1\,;0\,;4\}$ et $B =]-1\,;2[$.

Détermine le maximum et le minimum, s'ils existent, de A et B.

Connaître la définition de la valeur absolue d'un nombre réel les propriétés relatives à la valeur absolue

14 Calcule la valeur absolue de chacun des nombres suivants :

a) $\sqrt{3}-4$; b) $\sqrt{2}-4$;

c) $\sqrt{3}-4$; d) $3-\pi$.

15 Soit a et b deux nombres réels. Complète les phrases suivantes :

Si $a > b$ alors $|a-b|$ = ...

Si $a < b$ alors $|a-b|$ = ...

16

1- a) Détermine les valeurs de x pour lesquelles $\sqrt{(x-4)^2}$ a un sens.

b) Donne alors une écriture plus simple de ce nombre réel.

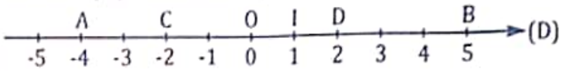
2- Détermine les valeurs de x pour lesquelles on a :

a) $\sqrt{(x-4)^2} = x-4$; b) $\sqrt{(x-4)^2} = 4-x$.

Déterminer la distance de deux nombres réels

17 Soit (D) une droite graduée.

On donne les points A, B, C, D représentés sur la droite (D) muni du repère (O, I).



Résoudre algébriquement une équation du type $|x-a| = r$ $(r > 0)$, algébriquement une inéquation du type $|x-a| < r$ $(r > 0)$

18 Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :

a) $|x+3| = 1$; b) $|x-2| = -3$;

c) $|x-4| = 0$; d) $|x+5| = 2$.

19 Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations suivantes :

a) $|x-3| \leq 2$; b) $|1+x| < -2$;

c) $|7+x| < 4$; d) $|x+3| < 3$.

Résoudre graphiquement une équation du type $|x-a| = r$ $(r > 0)$ graphiquement une inéquation du type $|x-a| < r$ $(r > 0)$

20 Résous graphiquement, dans chaque cas, les équations suivantes :

a) $|x+4| = 2$; b) $|x-3| = -1$;

c) $|x+5| = -1$; d) $|1-3| = 3$.

21 Résous graphiquement, dans chaque cas, les inéquations suivantes :

a) $|x+2| < 1$; b) $|x-3| < 2$;

c) $|3-x| \leq 3$; d) $|2-x| \leq 5$.

Démontrer une propriété en utilisant le raisonnement par l'absurde

22 Démontre par l'absurde que l'intervalle $]-\infty\,;b[$ où $b \in \mathbb{R}$ n'admet pas de maximum.

23 Démontre par l'absurde que si a et b sont deux entiers relatifs tels que $a + b\sqrt{2} = 0$, alors $a = b = 0$. (On rappelle que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel).

Démontrer une propriété en utilisant le raisonnement inductif ou déductif

24 Soit m et n deux réels strictement positifs. Démontre que $\sqrt{(m+n)} < \sqrt{m} + \sqrt{n}$.

25 On pose : $A(x) = \frac{x^2}{x+2}$ pour $x \neq -2$.
Démontre que : si $|x| < 1$, alors $|A(x)| < |x|$.

2- Exercices de renforcement / approfondissement

26 a et b sont des nombres réels.
1- Démontre que : $2ab \leq a^2 + b^2$.
2- Déduis-en que : $2|ab| \leq a^2 + b^2$.

27 a et b sont des nombres réels.
1- En écrivant $a = (a - b) + b$, justifie que : $|a| - |b| \leq |a - b|$.
2- Déduis-en que : $\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$.

28 Soit (D) une droite graduée.
On considère les points A, B et C d'abscisses respectives -2, -1, 3.
1- Place sur une droite graduée les points A, B et C.
2- Détermine AB, AC et BC.
3- Compare AB + BC et AC.

29 Sur une droite graduée (D), M est le point d'abscisse x ; A celui d'abscisse -3 et B celui d'abscisse 8.
1- Détermine la distance entre :
a) M et A ; b) M et B.
2- Détermine les valeurs de x pour lesquelles la distance entre M et A est inférieure ou égale à 5.
3- Soit E l'ensemble des valeurs de x trouvées à la question précédente.
a) Détermine, s'ils existent, l'ensemble des majorants de E et l'ensemble des minorants de E.
b) Détermine, s'ils existent, le maximum et le minimum de E.

30 Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes :
a) $|x| = 1$; b) $|x - 3| = 0$;
c) $|x| + 1 = 3$; d) $|x + 2| + 2 = 0$;
e) $|2 - x| > 5$; f) $|2x - 4| = 6$;
g) $|x + 3| = x + 3$.

31
1- Recopie et complète le tableau ci-dessous dans chaque case, il faut écrire le réel indiq en début de ligne sans la notation « vale absolue ».

x	$-\infty$	-3	2
$\lvert x-2\rvert$			
$\lvert x+3\rvert$			
$\lvert x-2\rvert+\lvert x+3\rvert$			

2- Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation (E): $|x - 2| + |x + 3| =$
Traduis avec la notation valeur absolue.
a) $x \in]-4 ; 8[$; b) $x \in]-\infty ; 2[\cup [4 ; +\infty[$.

32 Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations inéquations suivantes :
a) $|2x + 3| = 12$; b) $|5x - 4| = 10$;
c) $|1 - 3x| < 3$; d) $|3x - 2| < 4$.

33 Résous algébriquement puis graphiqueme chacune des inéquations suivantes :
a) $|1 - 3x| = 6$; b) $|2x - 6| = 4$;
c) $|x + 4| \leq 2$; d) $|1 - 5x| < 4$.

34
1- Soit n un entier strictement positif. Démontre p l'absurde que si n est le carré d'un entier, alors 2 n'est pas le carré d'un entier.
2- Démontre par l'absurde que 89 est un nomb irrationnel.

35 On donne les ensembles A et B tels que :
$A = \{-3 ; -2 ; -1 ; 0 ; x ; 3\}$ où $x \in \mathbb{R}^*$.
1- Détermine, suivant les valeurs de x, un majora de A.
2- Détermine, suivant les valeurs de x, un minora de A.

36 Traduis chacun des intervalles ci-dessous à l'aide de la notation valeur absolue.

a) $x \in [-3 ; 5]$; b) $x \in]-1 ; 3[$;

c) $x \in [3 ; 6]$; d) $x \in [-1 ; 5]$;

e) $2x + 1 \in]-4 ; 1[$.

37 Traduis chacune des inéquations ci-dessous à l'aide d'intervalles.

a) $|x| \leq 2$; b) $|x| < 3$;

c) $|x + 1| \leq 5$; d) $|x + 3| < 5$;

e) $|2x + 1| > 5$; f) $1 \leq |x| \leq 2$.

3-Situations d'évaluation

38 A la suite de la première leçon d'analyse dont le titre est « Ensemble des nombres réels », un débat s'engage entre tes camarades de la classe de seconde C et toi autour de la manière de déterminer le minimum et le maximum de l'ensemble
$K = \{x \in \mathbb{R}, |x + 2| \leq 1\}$.
Frappés par la pertinence de cette problématique, vous décidez d'apporter une réponse à celle-ci.
Répartis en groupes de travail, vous menez des recherches pour connaître les outils à utiliser et apprécier la démarche.

1- Ecris l'ensemble K sous la forme d'un intervalle.

2- a) Dis si l'ensemble K est majoré.
Si oui, détermine les majorants de K.

b) Dis si l'ensemble K est minoré. Si oui, détermine les minorants de K.

3- Justifie que l'ensemble K admet un minimum et un maximum. Détermine-les.

RENDEZ-VOUS DES CURIEUX !

Histoire des nombres irrationnels

En latin, « ratio » signifie compter. Etymologiquement, un nombre irrationnel est un nombre que l'on ne peut pas compter. On dirait plutôt aujourd'hui, que l'on ne peut pas écrire car le nombre de décimales qui le constitue est infini mais de surcroît ces décimales se suivent sans suite logique.
On l'oppose par définition au nombre rationnel quotient de deux entiers dont l'écriture décimale peut être infinie mais dans ce cas nécessairement périodique.
Par exemple, $\frac{2}{7} = 0{,}285714285714285714...$ est un nombre rationnel.

Les nombres irrationnels les plus célèbres sont π et e. Les premières décimales de π sont : 3,14159265358979323846264338327950288419716939937510582... Mais dans la pratique, on utilise le plus souvent 3,14.

Les nombres irrationnels les plus célèbres sont π et e. Les premières décimales de π sont : 3,14159265358979323846264338327950288419716939937510582... Mais dans la pratique, on utilise le plus souvent 3,14. Les décimales de π ont été la proie des savants depuis près de 4000 ans. Une des plus anciennes approximations de π se trouve sur le célèbre papyrus Rhind.

Le nombre e ne fait son apparition qu'au XVII^{e} siècle avec le développement des logarithmes. Ses premières décimales sont :
2,71828182845904523536028747135266249775724709369995957...

Pour trouver les premières traces de nombres irrationnels, il faut remonter 4000 ans en arrière jusqu'aux civilisations babyloniennes.
L'université de Yale possède une petite tablette de 7 scm de diamètre datant de la première dynastie babylonienne (environ 1700 avant J.C) qui représente un carré et ses diagonales. Les trois séries de nombres écrits en langage cunéiforme donne une excellente approximation de 2 avec une erreur relative de 4×10^{-7}.

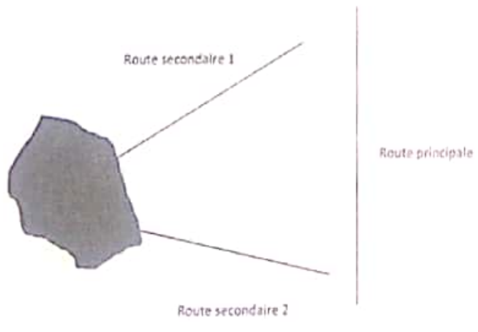
3 Utilisation des symétries et translation

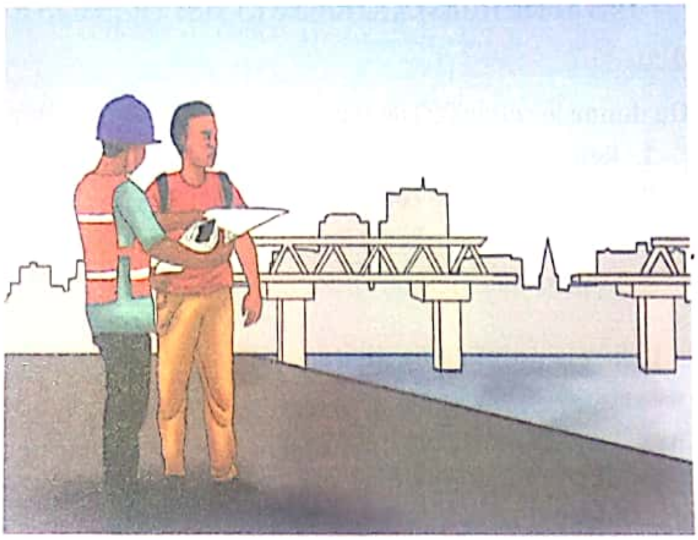
Notions essentielles :

- Caractérisation d'une translation
- Construction d'une figure en utilisant une translation, une symétrie centrale ou une symétrie othogonale
- Démonstration d'une propriété en utilisant une translation, une symétrie centrale ou une symétrie othogonale

SITUATION D'APPRENTISSAGE

Un agent des travaux publics est sollicité par le maire d'une commune pour mener une étude sur la réalisation d'un deuxième pont de la ville.
La figure ci-dessous est une partie de son travail. Elle représente un secteur angulaire formé par deux routes secondaires rectilignes et la route principale rectiligne. Contre toute attente, une partie de la figure est tachée par de l'encre noire.





Cet agent se souvient alors que son fils ainé est en classe de 2^nde^ C. Il le sollicite pour l'aider à reconstruire entièrement cet angle.
Son fils pose le problème à toute la classe. Un élève affirme que ce problème peut être résolu en utilisant les symétries et les translations.
Voulant contribuer au développement de cette commune, les élèves de la classe s'organisent pour apprendre à construire, à démontrer et à rechercher un ensemble de points à l'aide des symétries et des translations.

I- ACTIVITÉS DE DÉCOUVERTE

1- PROPRIÉTÉ CARATÉRISTIQUE DES TRANSLATIONS

Activité 1

$\vec{u}$ est un vecteur du plan, ABC est un triangle.

1.a) Construis les images respectives E, F et G des points A, B et C par la translation du vecteur $\vec{u}$.

b) Démontre que: $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}$.

2. Soit f l'application du plan P dans lui-même telle que pour tous points M et N d'images respectives M' et N' par f.

On a : $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$.

Démontre que f est une translation.

Je fais le point de l'activité

Etant donnés des points M et N du plan d'images respectives M' et N' par une translation, on a : $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$.

Réciproquement toute application f du plan dans le plan telle que pour tous points M et N d'images respectives M' et N' par f, $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$ est une translation.

J'évalue mes acquis

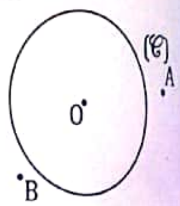
A et B sont deux points distincts du plan.
On considère l'application f du plan dans lui-même qui à tout point M associe le point M' tel que ABM'M est un parallélogramme (on admettra les parallélogrammes aplatis).
Démontre que f est une translation dont on donnera le vecteur.

2- CONSTRUIRE UNE FIGURE EN UTILISANT LES PROPRIÉTÉS DES SYMÉTRIES ORTHOGONALES, DES SYMÉTRIES CENTRALES ET DES TRANSLATIONS

Activité 2

On donne le cercle ($\mathscr{C}$) de centre O et deux points A et B comme l'indique la figure.

1. Reproduis cette figure.
2. Contruis avec le compas seul les points d'interection de la droite (AB) et du cercle ($\mathscr{C}$).
3. Dégage une méthode pour réaliser une telle construction.

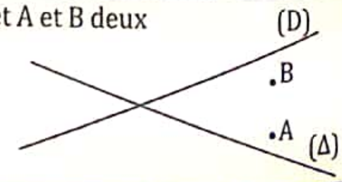


Je fais le point de l'activité

- Faire une esquisse de la figure recherchée.
- Faire l'analyse de l'esquisse.
- Etablir un programme de construction.
- Justifier ce programme de construction

J'évalue mes acquis

On donne deux droites sécantes (D) et (Δ) et A et B deux points comme l'indique la figure.
Reproduis la figure et construis les points P et Q tels que :
$P \in (\Delta)$, $Q \in (D)$ et $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PQ}$



3- DÉMONTRER UNE PROPRIÉTÉ EN UTILISANT UNE SYMÉTRIE OU UNE TRANSLATION

ACTIVITÉ 3

RST est un triangle rectangle en S. On désigne par L le milieu de [ST], par K le milieu de [RS] et par P le projeté orthogonal de S sur (RT).

1. Démontre que (LK) est la médiatrice de [SP].
2. En utilisant une symétrie orthogonale, démontre que $(PL) \perp (PK)$.

Je fais le point de l'activité

L'utilisation d'une symétrie ou d'une translation permet de démontrer une propriété relative à une figure géométrique.

J'évalue mes acquis

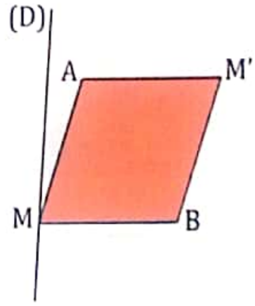
1. ABCD est un carré et (Δ) est la parallèle à la droite (BD) passant par A.
   a) Construis l'image A'B'C'D' de ce carré par la symétrie orthogonale d'axe (Δ).
   b) Détermine la nature du quadrilatère A'B'C'D'. Justifie la réponse.

Soit ABC un triangle et $\vec{u}$ un vecteur non nul. Place le centre de gravité G du triangle ABC et son orthocentre H.

2. a) Construis l'image A'B'C' du triangle ABC par la translation de vecteur $\vec{u}$, ainsi que l'image G' de G et l'image H' de H.
   b) Justifie que A'B'C' est un triangle dont les supports des côtés sont respectivement parallèles à ceux du triangle ABC.
   c) Justifie que G' est le centre de gravité du triangle A'B'C' et que H' en est l'orthocentre.

4- TROUVER UN ENSEMBLE DE POINTS EN UTILISANT UNE SYMÉTRIE OU UNE TRANSLATION

ACTIVITÉ 4



Soit la droite (D) et les points A et B donnés.
Pour tout point M de (D), on construit le parallélogramme AMBM'.
Soit I le milieu de [AB].

1. Justifie que S_I (M) = M' (S_I étant la symétrie centrale de centre I).
2. Soit (D') la droite telle que (D') = S_I (D). Justifie que M' ∈ (D').
3. Déduis-en le lieu géométrique de M' lorsque M décrit (D).
4. Dégage une méthode pour rechercher des lieux géometriques.

Je fais le point de l'activité

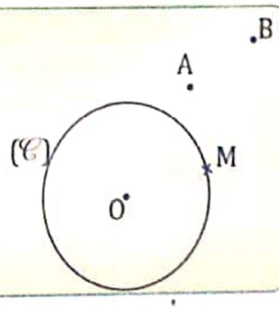
Pour rechercher le lieu géométrique ci-dessus, on peut suivre les étapes suivantes :

1- Lire l'énoncé.
2- Rechercher une démarche.
   - Rechercher une application du plan qui applique M sur M'.
3- Rediger la solution trouvée.

J'évalue mes acquis

$(\mathscr{C})$ est un cercle de centre O et de rayon 4 cm.
A et B sont deux points du plan tel que AB = 3 cm.

1- Reproduis la figure.
2- Soit M un point de $(\mathscr{C})$.
   a) Contruis le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$.
   b) Détermine et construis le lieu des points M' lorsque M parcours $(\mathscr{C})$.



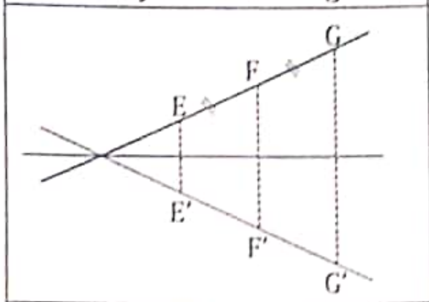
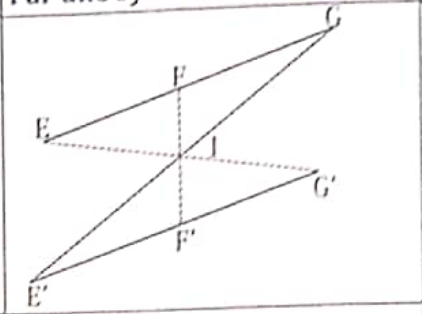
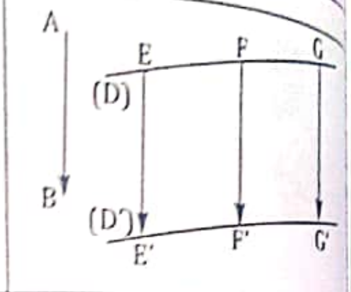
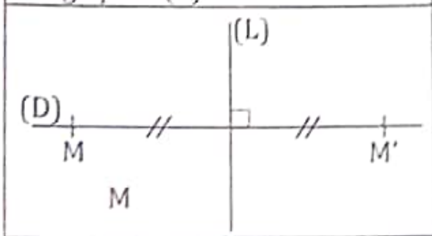
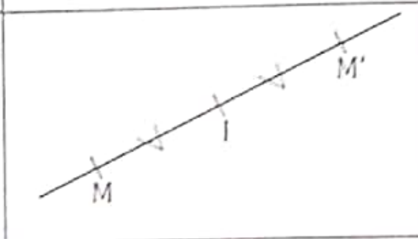
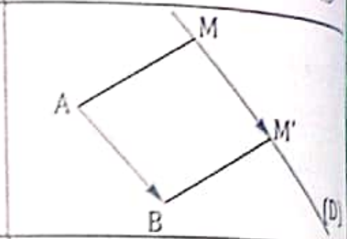
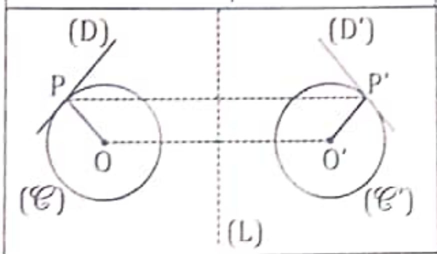
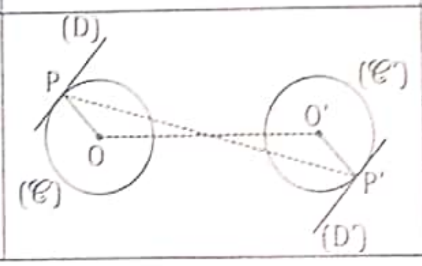
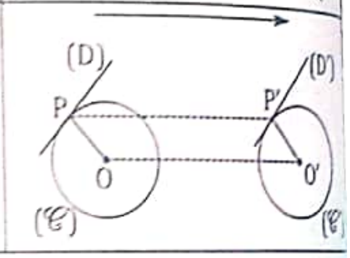
II- RÉSUMÉ DE COURS

I- PROPRIÉTÉ CARACTÉRISTIQUES DES TRANSLATIONS

Etant donnés des points M et N du plan d'images respectives M' et N' par une translation, on a : $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$.

Réciproquement toute application f du plan dans le plan telle que pour tous points M et N d'images respectives M' et N' par f, $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$ est une translation.

II- DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS

Par une symétrie orthogonale	Par une symétrie centrale	Par une translation
		
Une droite (D) perpendiculaire à une droite (L) est sa propre image par S(L).	Une droite passant par un point I est sa propre image par S_I.	Une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$ est sa propre image par $t_{\overrightarrow{AB}}$
		
		

Par une symétrie orthogonale, une symétrie centrale, une translation :

- Un segment a pour image un segment de même longueur.
- Le milieu d'un segment a pour image le milieu de l'image de ce segment.
- Une droite a pour image une droite.
- Des points alignés ont pour images des points alignés.
- Deux droites parallèles ont pour images deux droites parallèles.
- Un cercle a pour image un cercle de même rayon.
- Un angle géométrique a pour image un angle géométrique de même mesure.
- Deux droites perpendiculaires ont pour images deux droites perpendiculaires.
- Si un point appartient à deux lignes, alors son image appartient aux images de ces deux lignes.
- Une figure a pour image une figure qui lui est superposable.

REMARQUES

- Par une translation ou par une symétrie centrale, un angle orienté a pour image un angle orienté de même mesure.
- Par une symétrie orthogonale, un angle orienté a pour image l'angle orienté opposé.
- (D) est un axe de symétrie d'une figure F signifie que, pour tout point M de F, le symétrique orthogonal de M par rapport à (D) est aussi dans (D). On dit que F est globalement invariante par $S_{(D)}$.

III- MÉTHODE

1- Pour démontrer une propriété, on peut utiliser :

a- une symétrie orthogonale ;
b- une symétrie centrale ;
c- une translation.

2- Pour résoudre un problème de construction, on peut procéder de la manière suivante :

a- Faire une esquisse de la figure recherchée.
b- Faire l'analyse de l'esquisse.
c- Etablir un programme de construction.
d- Justifier ce programme de construction.

3- Pour résoudre un problème de lieu géométrique, on peut suivre les étapes suivantes :

a- Lire attentivement l'énoncé afin de relever les données importantes.
b- Rechercher une démarche :
- en faisant une esquisse ;
- en analysant cette esquisse pour trouver une transformation du plan qui applique un point qui varie sur un autre point qui varie. Les éléments caractéristiques de cette application sont fixes.

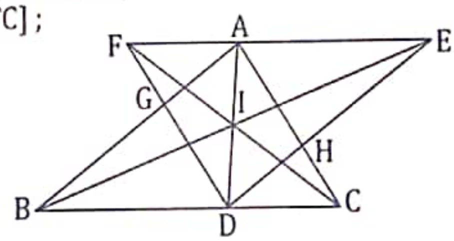
c- Rédiger une démonstration :
- rédiger une démonstration qui respecte les contraintes de l'énoncé ;
- examiner le nombre de solutions possibles.

IV- SAVOIR-FAIRE

Savoir-faire 1- ***Utiliser des symétries centrales pour démontrer***

ENONCÉ

Sur la figure ci-contre :
- ABC est un triangle ;
- D est un point du segment [BC] et on note I le milieu du segment [AD] ;
- E et F sont les points tels que I soit le milieu de [EB] et de [FC] ;
- G est le point d'intersection des droites (AB) et (DF) ;
- H est le point d'intersection des droites (AC) et (DE).



1- Démontre que les points A, E et F sont alignés.

2- Démontre que : HI = IG.

SOLUTION COMMENTÉE

Données

- ABC est un triangle ;
- D ∈ [BC] ;
- I milieu de [AD] ;
- I milieu de [EB] et I milieu de [FC].

1. Démontrons que les points A, E et F sont alignés.

Considérons la symétrie centrale de centre I.

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{S_{(I)}} \\ A & D \\ B & E \\ C & F \end{array}$$

car I est le milieu de chacun des segments [AD] ; [EB] et [FC].

D étant un point de [BC], les points D, B et C sont alignés. Donc les points A, E et F sont aussi alignés car la symétrie centrale conserve l'alignement des points.

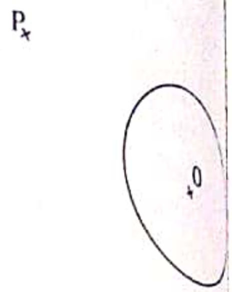
2. Démontrons que : HI = IG

Soit H' l'image de H par S_I. On a : (AC) ∩ (DE) = {H}. L'image de (AC) par S_I est (DF) et l'image de (DE) par SI est (AB) d'où H'∈(DF) ∩ (AB). Puisque (DF) ∩ (AB) = {G} donc H' = G. Ainsi G = S_I(H) et par suite, I est le milieu de [GH]. On conclut finalement que GI = IH.

Savoir-faire 2- Utiliser des symétrie centrales pour construire

Enoncé

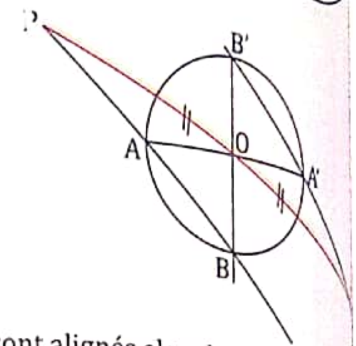
On donne un cercle (𝒞) de centre O et un point P n'appartenant pas à (𝒞).
A l'aide uniquement de la règle non graduée, construis le point P' image du point P par la symétrie centrale de centre O.
Donne un programme de construction.



Solution commentée

Programme de construction

- Trace la droite (OP).
- Trace une droite passant par le point P et qui coupe le cercle (𝒞) en deux points A et B.
- Trace les droites (AO) et (OB) ; ces deux droites coupent respectivement le cercle (𝒞) en deux points A' et B'.
- Trace la droite (A'B') ; cette droite coupe la droite (OP) en P', image de P par la symétrie centrale de centre O.



Justification

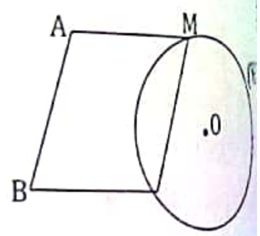
Comme un point, son image et le centre de la symétrie centrale sont alignés alors le point P' ∈ (OP).
D'autre part la droite (AB) a pour image la droite (A'B') par la symétrie centrale de centre O.
Or le point P ∈ (AB) donc l'image P' ∈ (A'B').
Par conséquent le point P' est le point d'intersection des droites (OP) et (A'B').

Savoir-faire 3- Utiliser des translations pour construire

Enoncé

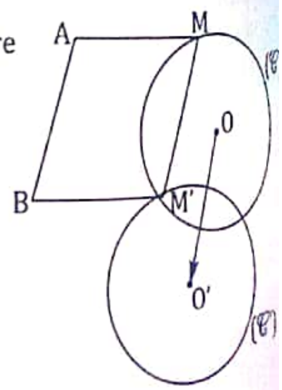
Soit (𝒞) un cercle de centre O.
A et B deux points tels que la droite (AB) ne rencontre pas le cercle (𝒞).
A tout point M de (𝒞), on associe le point M' tel que le quadrilatère MABM' soit un parallélogramme.
1. Détermine l'ensemble (E) des points M' lorsque le point M décrit le cercle (𝒞).
2. Construis l'ensemble (E).

Solution commentée



1. Déterminons l'ensemble (E) des points M' lorsque le point M décrit le cercle (𝒞).

MABM' est un parallélogramme donc : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MM'}$.
Par la suite $t_{\overrightarrow{AB}}(M) = M'$.
Lorsque M décrit le cercle (𝒞), M' décrit l'image du cercle (𝒞) par $t_{\overrightarrow{AB}}$.
Cette image est un cercle de même rayon que le cercle (𝒞). Son centre est un point O', image du point O par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
L'ensemble (E) cherché est donc le cercle (𝒞') de centre O', image du cercle (𝒞) par $t_{\overrightarrow{AB}}$.



2. Construction de l'ensemble (E)

V- JE M'EXERCE

1- Exercices de fixation/ Application

Connaître la caractérisation d'une symétrie, d'une translation.

1 Pour chaque ligne du tableau suivant une seule affirmation est juste. Écris sur ta copie le numéro de la ligne et la lettre correspondant à l'affirmation juste

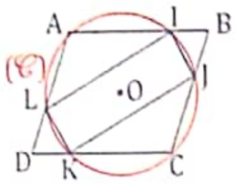
N°	Affirmations	A	B	C
1	D est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ signifie que	$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$
2	M est l'image de N par la symétrie orthogonale signifie que	(Δ) est parallèle à (MN)	(Δ) est perpendiculaire à (MN) en M	(Δ) est la médiatrice de [MN]
3	M est l'image de N par la symétrie centrale de centre Ω signifie que	$\overrightarrow{\Omega M} = \overrightarrow{MN}$	$\overrightarrow{\Omega M} = \overrightarrow{N\Omega}$	$2\overrightarrow{\Omega M} = \overrightarrow{\Omega N}$

2 1. A et B sont deux points du plan.
Trouve un vecteur $\vec{u}$ tel $t_{\vec{u}}(A) = B$.
Détermine le nombre de vecteurs $\vec{u}$ qui répondent au problème posé.
2. A et B sont deux points distincts du plan.
Trouve une droite (D) telle que $S_{(D)}(A) = B$.
Détermine le nombre de droites (D) qui répondent au problème posé.
3. A et B sont deux points distincts du plan.
Trouve un point O tel que $S_O(A) = B$.
Détermine le nombre de points O qui répondent au problème posé.

3 Détermine les axes et les centres de symétries éventuels de chaque figure décrite ci-dessous :
(On pourra être amené à faire une discussion).
a) Un point et un cercle ;
b) Un cercle privé de deux points ;
c) Un segment et un point ;
d) Deux droites parallèles et un point ;
e) Un cercle et une droite ;
f) Un cercle et deux de ses cordes.

4 Le triangle ABC est rectangle en A. M est un point de [BC]. P et Q sont les symétriques respectifs de M par rapport à (AB) et (AC).
1- Evalue $\widehat{PMQ}$ et déduis que M appartient au cercle de diamètre [PQ].
2- Compare les distances AP, AM et AQ.
3- Conclus des résultats précédents que A est le milieu de [PQ].

5 Sur la figure ci-dessous :



- ABCD est un parallélogramme de centre O ;
- (𝒞) est un cercle aussi de centre O.

1. a) Précise l'image par S_O du cercle (𝒞), puis l'image par S_O du segment [AB].
b) Déduis-en que $S_O(I) = K$.
2. Démontre que le quadrilatère IJKL est un rectangle.

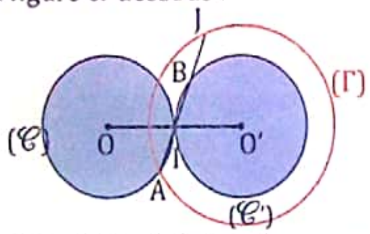
Utiliser des symétries et des translations pour démontrer

6 Soit ABCD un parallélogramme de centre O. I et J sont les milieux respectifs des segments [OB] et [OD].
Démontre que : IC = JA.

7 On considère un triangle ABC et M un point du plan distinct des points A, B et C.
On désigne par I le symétrique de M par rapport au côté [BC] ; J le symétrique de M par rapport au côté [AC] ; K le symétrique de M par rapport au côté [AB].
On note :
(D_1) la perpendiculaire en A à (JK) ;
(D_2) la perpendiculaire en B à (KI) ;
(D_3) la perpendiculaire en C à (IJ).
Démontre que les droites (D_1), (D_2) et (D_3) sont concourantes.

8 ABC est un triangle.
On désigne respectivement par P et Q les projetés orthogonaux de B et C sur la médiane issue de A dans le triangle ABC.
On note I le milieu de [BC]. Utilise la symétrie de centre I pour justifier que : BP = CQ.

9 Sur la figure ci-dessous :



- Les cercles (𝒞) et (𝒞') ont le même rayon et sont tangents en I ;
- A ∈ (𝒞) et la droite (AI) recoupe (𝒞') en B et le cercle (Γ) de centre O' et de rayon O'A, en J.

1. Détermine l'image de (𝒞) par la symétrie de centre I.

Déduis-en que : IA = IB.

2. Soit (Δ) la perpendiculaire à (AJ) passant par O'.
   a) Détermine les images de chacun des points A et I par la symétrie orthogonale d'axe (Δ).
   b) Déduis-en que : IA = BJ.
3. Compare les longueurs des segments [IA], [IB] et [BJ].

10 On considère deux cercles (𝒞) et (𝒞') de centres O et O', de même rayon, sécants en A et B.
Une droite (Δ) passant par A recoupe (𝒞) en P et (𝒞') en P'.
Une droite (Δ') passant par B et parallèle à (Δ) recoupe (𝒞) en Q et (𝒞') en Q'.
Soit I le milieu de [OO'].

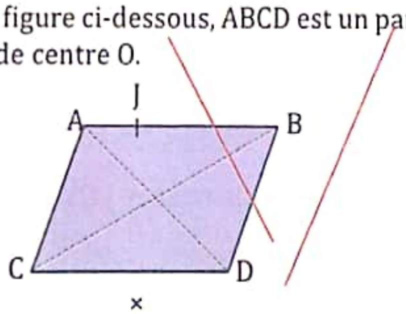
1. Détermine les images par la symétrie de centre I de :

a) (C) ; b) A ; c) (Δ) ; d) P ; e) Q

2. Démontre que PQQ'P' est un parallélogramme.

Utiliser des symétries et des translations pour construire

11 Sur la figure ci-dessous, ABCD est un parallélogramme de centre O.

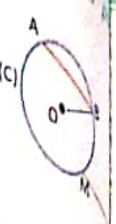


Reproduis la figure.
Construis dans l'ordre, à l'aide uniquement de la règle non graduée, les images par la symétrie de centre O :

- du point E ;
- de la droite (Δ) ;
- de la droite (D) ;
- du point F.

Utilisation des symétries et translations pour déterminer un ensemble de points

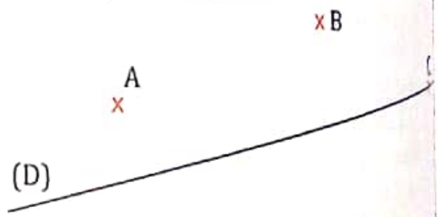
12 Sur la figure ci-contre qui n'est pas en dimensions réelles, (𝒞) est un cercle de centre O et de rayon 4 cm.
A et B sont deux points fixes de (𝒞).
M est un point du cercle (𝒞).
On définit le point P par l'égalité $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{AB}$.
On se propose de trouver l'ensemble (𝒞') des points P lorsque M décrit (𝒞).



1. Détermine la position de P lorsque M est en A puis la position de P lorsque M est en B.
2- Détermine la transformation du plan, définie par des éléments fixes de la figure, telle que M ait pour image P.
3- Détermine l'ensemble (𝒞') des positions de P. Construis (𝒞').

13 Étant donnés 3 points A, B, C, on construit le point D tel que ABCD soit un parallélogramme.
a) Détermine l'ensemble des points D lorsque C décrit une droite (d_1).
b) Détermine l'ensemble des points D lorsque C décrit un cercle ($\mathscr{C}_1$).
c) Détermine l'ensemble des points D lorsque C décrit une droite (d_2).
d) Détermine l'ensemble des points D lorsque C décrit un cercle ($\mathscr{C}_2$).

14 La figure ci-deous et compoée d'une droite (D) et de trois points A; B et C.



On construit le point D tel que ABCD soit un parallelogramme.
Détermine le lieu géométrique du point D lorsque C décrit (D).

15 Construis dans chacun des cas suivants le point K sur la droite (D) de telle sorte que la distance IK + KJ soit la plus petite possible.
Justifie la construction.

a)

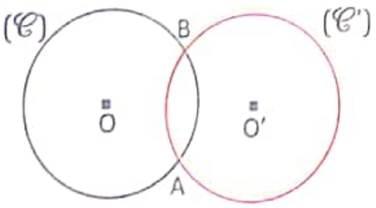
16 Soit un cercle ($\mathscr{C}$) de centre O ; [OA] un rayon de ce cercle et [BC] la corde perpendiculaire à [OA] en son milieu I.
Soit M un point quelconque du cercle distinct des points A, B et C.
On désigne par H l'orthocentre du triangle BMC et par P et Q les points d'intersections du cercle de centre H et de rayon HM avec le cercle de centre M et de rayon MH.
1- a) Justifie que : $MH = OA$.
b) Déduis-en le lieu des points H.
2- a) Justifie que $MP = OB$ et $MQ = OC$.
b) Déduis-en le lieu des points P et celui des points Q.

17 Soit (D) une droite, A et B deux points du même côté que la droite (D).
Trouve le point M de la droite (D) pour lequel le trajet « AMB » : AM + MB est le plus court possible.

2- Exercices de renforcement / approfondissement

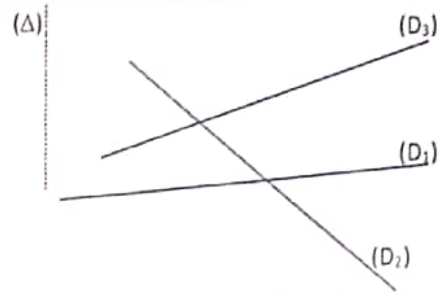
18 Le triangle ABC est rectangle en A. Le point A' est le milieu de [BC], H est le projeté orthogonal de A sur (BC). I et J sont les projetés orthogonaux respectifs de H sur (AB) et (AC).
On note S la symétrie orthogonale d'axe (AB) et l'on pose C'= S(C) et H' = S(H).
1- Fais une figure comportant toutes les données.
2- En examinant le triangle CC'B, démontre que (AA') est parallèle à (BC').
3- a) Justifie que : JA = IH'.
b) Déduis que (JI) est parallèle à (AH').
4- Démontre, en utilisant S, que (AH') est orthogonale à (BC'). Déduis que (IJ) et (AA') sont orthogonales.

19 Deux cercles ($\mathscr{C}$) et ($\mathscr{C}'$) de centre O et O' et de même rayon se coupent en A et B.



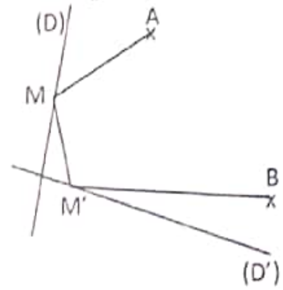
On désigne par t la translation de vecteur $\overrightarrow{OO'}$.
1- Détermine l'image de ($\mathscr{C}$) par t.
2- Soit A' l'image de A par t.
a) Justifie que : (AA') $\perp$ (AB)
b) Déduis que [BA'] est un diamètre de ($\mathscr{C}'$).
c) Déduis-en que (IJ) est parallèle à (AH').
3- Soit M un point de ($\mathscr{C}$) distinct de A et de l'antécédent de B par t et M' l'image de M par t.
a) Détermine la nature du triangle BM'A'.
b) Déduis-en que (MA) et (BM') sont perpendiculaires.

20 On donne la figure ci-dessous où :
(D) est une droite de direction distincte de celles de (D_1), (D_2) et (D_3).



Construis une droite (Δ) de direction (D) coupant respectivement (D_2) et (D_3) en deux points M_2 et M_3 dont le milieu appartient à (D_1).

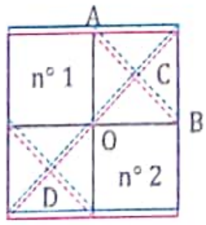
21 On donne la figure ci-dessous où :



- (D) et (D') sont deux droites sécantes ;
- M est un point (D), M'est un point de (D') ;
- A et B sont deux points qui n'appartiennent ni à (D), ni à (D').

Détermine un point M sur (D), un point M' sur (D') tels que le trajet « AMM'B » (AM + MM' + M'B) soit le plus petit possible.

22 Soit le carré ci-dessous subdivisé en quatre autres petits carrés.
Cite une symétrie centrale, une symétrie axiale et une translation qui font passer du carré n°1 au carré n°2.



16 Soit un cercle $(\mathscr{C})$ de centre O ; [OA] un rayon de ce cercle et [BC] la corde perpendiculaire à [OA] en son milieu I.

Soit M un point quelconque du cercle distinct des points A, B et C.

On désigne par H l'orthocentre du triangle BMC et par P et Q les points d'intersections du cercle de centre H et de rayon HM avec le cercle de centre M et de rayon MH.

1- a) Justifie que : $MH = OA$.

b) Déduis-en le lieu des points H.

2- a) Justifie que $MP = OB$ et $MQ = OC$.

b) Déduis-en le lieu des points P et celui des points Q.

17 Soit (D) une droite, A et B deux points du même côté que la droite (D).

Trouve le point M de la droite (D) pour lequel le trajet « AMB » : AM + MB est le plus court possible.

2- Exercices de renforcement / approfondissement

18 Le triangle ABC est rectangle en A. Le point A' est le milieu de [BC], H est le projeté orthogonal de A sur (BC). I et J sont les projetés orthogonaux respectifs de H sur (AB) et (AC).

On note S la symétrie orthogonale d'axe (AB) et l'on pose C'= S(C) et H' = S(H).

1- Fais une figure comportant toutes les données.

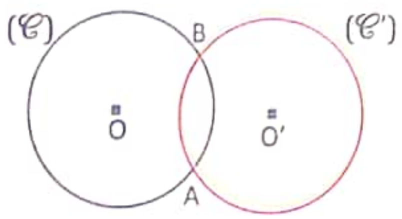
2- En examinant le triangle CC'B, démontre que (AA') est parallèle à (BC').

3- a) Justifie que : JA = IH'.

b) Déduis que (JI) est parallèle à (AH').

4- Démontre, en utilisant S, que (AH') est orthogonale à (BC'). Déduis que (IJ) et (AA') sont orthogonales.

19 Deux cercles $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ de centre O et O' et de même rayon se coupent en A et B.



On désigne par t la translation de vecteur $\overrightarrow{OO'}$.

1- Détermine l'image de $(\mathscr{C})$ par t.

2- Soit A' l'image de A par t.

a) Justifie que : (AA') ⊥ (AB)

b) Déduis que [BA'] est un diamètre de $(\mathscr{C}')$.

c) Déduis-en que (IJ) est parallèle à (AH').

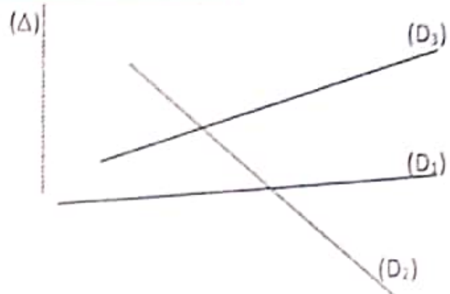
3- Soit M un point de $(\mathscr{C})$ distinct de A et de l'antécédent de B par t et M' l'image de M par t.

a) Détermine la nature du triangle BM'A'.

b) Déduis-en que (MA) et (BM') sont perpendiculaires.

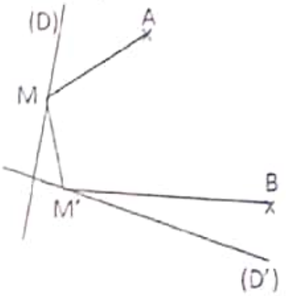
20 On donne la figure ci-dessous où :

(D) est une droite de direction distincte de celles de (D_1), (D_2) et (D_3).



Construis une droite (Δ) de direction (D) coupant respectivement (D_2) et (D_3) en deux points M_2 et M_3 dont le milieu appartient à (D_1).

21 On donne la figure ci-dessous où :

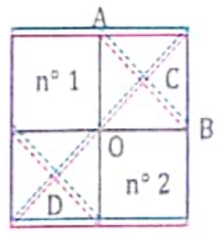


- (D) et (D') sont deux droites sécantes ;
- M est un point (D), M'est un point de (D') ;
- A et B sont deux points qui n'appartiennent ni à (D), ni à (D').

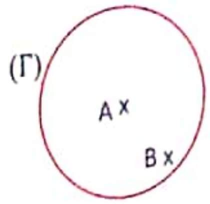
Détermine un point M sur (D), un point M' sur (D') tels que le trajet « AMM'B » (AM + MM' + M'B) soit le plus petit possible.

22 Soit le carré ci-dessous subdivisé en quatre autres petits carrés.

Cite une symétrie centrale, une symétrie axiale et une translation qui font passer du carré n°1 au carré n°2.

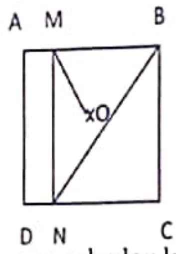


23 Soit (Γ) un cercle de centre A et B un point, distinct de A, intérieur au cercle (Γ).



Construis deux points C et D tels que ABCD soit un parallélogramme.
Explique ta méthode.

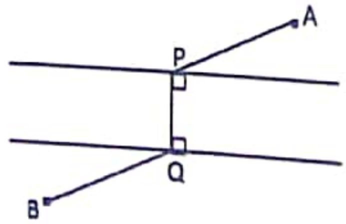
24 Après avoir écouté son médecin sur la pratique du sport, Zadi décide de faire du footing tous les matins.
Il part en ligne droite du centre O d'une place carrée ABCD et atteint d'abord en M le côté [AB], puis en N le côté [CD] et s'arrête enfin en B.
La figure ci-dessous qui n'est pas en grandeur réelle représente la place ABCD où (MN) est parallèle à (BC) et AB = 100 mètres.



Il te sollicite pour calculer la longueur minimale du trajet qu'il parcourt tous les matins. Voulant tester tes connaissances sur les symétries et translations, tu décides de l'aider.

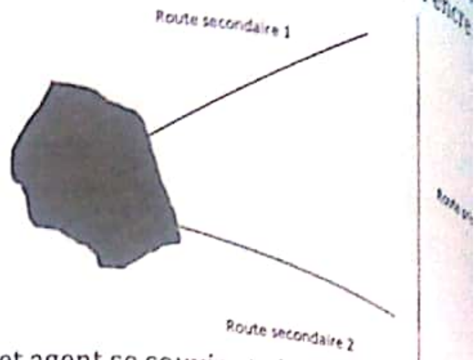
1- Construis les points M et N pour que le trajet OMNB ait une longueur minimale (On pourra d'abord construire l'image de O par la translation du vecteur $\overrightarrow{BC}$.
2- Calcule alors la longueur de ce trajet.

25 Une rivière a des berges parallèles.
A et B sont des points séparés par la rivière.
Pour convenances personnelles, on veut rejoindre A à B en traversant la rivière perpendiculairement aux berges.



Indique où placer le pont [PQ] pour que le trajet de A à B soit le plus court possible.
Justifie la réponse.

27 Un agent des travaux publics est sollic[...]
maire d'une commune pour mener une é[...]
la réalisation d'un deuxième pont de la vill[...]
La figure ci-dessous est une partie de son [...]
Elle représente un secteur angulaire for[...]
deux routes secondaires rectilignes et la
principale rectiligne. Contre toute atten[...]
partie de la figure est tachée par de l'encre.

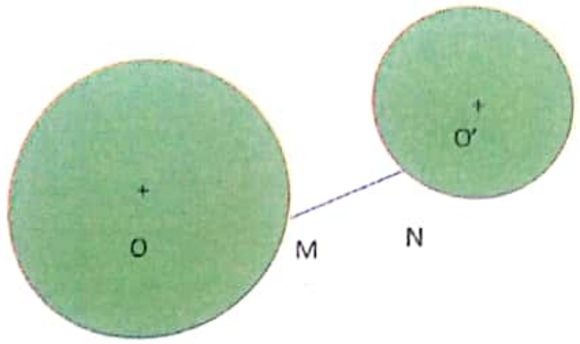


Cet agent se souvient alors que son fils aîné [...] classe de 2de C. Il le sollicite pour l'a[...] reconstruire cet angle avec cette fois-ci son s[...] visible.
Son fils pose le problème à toute la classe. U[...] affirme que ce problème peut être résolu en u[...] les symétries et les translations.
Voulant contribuer au développement [...] commune, les élèves de la classe s'orga[...] pour aider leur camarade.

1- Construis les symétriques des deux [...] secondaires par rapport à la route princ[...]
2- Déduis-en la mesure de l'angle formé [...] deux routes secondaires.
3- Propose une démarche à ton camar[...] justifie-la.

3- Situations d'évaluation

28 Le jardin public d'un établissement secondaire comporte deux espaces verts de formes circulaires représentés par les disques ($\mathscr{C}$) et ($\mathscr{C}'$) comme l'indique la figure ci-dessous.



Le club environnement de l'établissement veut tracer un parallélogramme sur cet espace afin d'y placer des ampoules lumineuses. Il souhaite donc, en plus du chemin[MN], créer un deuxième chemin [PQ] reliant ($\mathscr{C}$) et ($\mathscr{C}'$) de sorte que les extrémités de [PQ] étant respectivement sur ($\mathscr{C}$) et ($\mathscr{C}'$) forment un parallélogramme MNPQ avec M et N.
En t'aidant de la translation de vecteur $\overrightarrow{MN}$, construis le deuxième chemin[PQ].
Donne, au président du club environnement, ton programme de construction de ce parallélogramme.

VI- RENDEZ-VOUS DES CURIEUX !

L'art de paver le plan (le sol, les murs, le plafond ...) avec un motif relève à la fois de l'artisanat des mathématiques.

On pave avec des carreaux.

Avec une infinité de carreaux tous identiques et avec des règles d'assemblage adaptées, on peut remplir tout le plan, sans trou ni recouvrement.

Pour réaliser les mosaïques les carreleurs utilisent des transformations géométriques simples translations, rotations, réflexions et réflexions suivies de translations.

Les Musulmans décorent les édifices avec des motifs géométriques.

Ils les ont perfectionnés et élevés à un niveau de complexité et de développement jamais conn auparavant.

Dans les motifs décoratifs qui ornent les faïences au sein de l'Alhambra, se cachent des régularit basées sur des figures répétitives, des couleurs qui suivent un modèle de dessin et des transfo mations géométriques comme les symétries, les rotations et les translations.

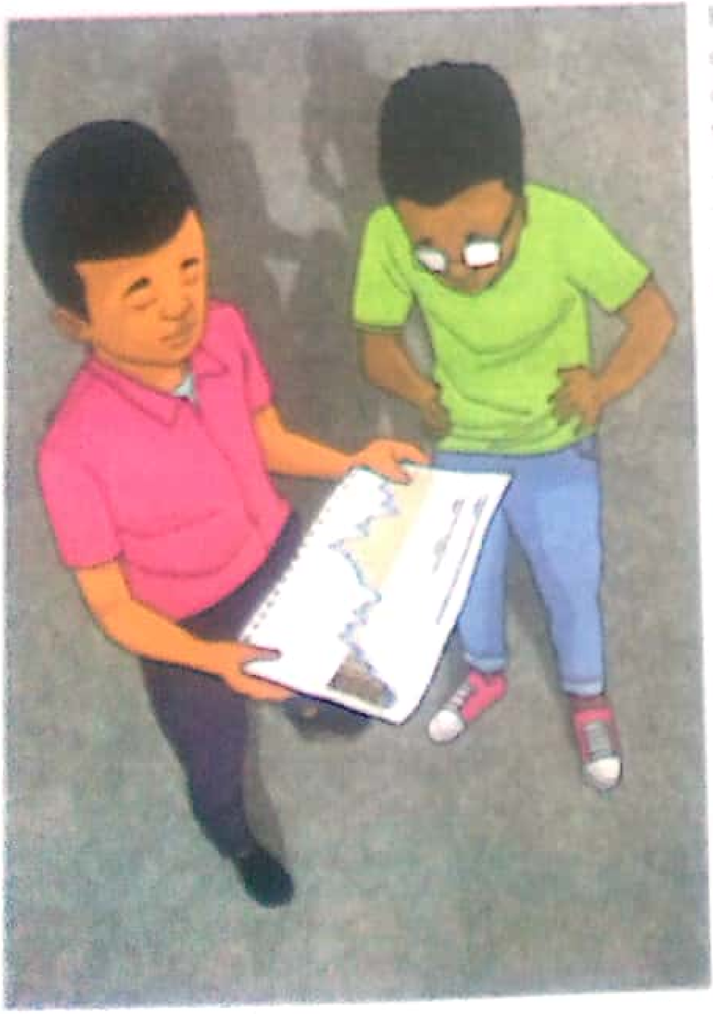
Il y aurait exactement 17 pavages différents représentés sur les plafonds du palais de Grenade.

4 Généralités sur les fonctions

Notions essentielles :

- Généralités sur les fonctions
- Variation d'une fonction
- Etude graphique d'une fonction

SITUATION D'APPRENTISSAGE



Pour préparer un exposé sur le réchauffement climatique, des élèves de seconde découvrent dans un magazine le graphique ci-dessus, représentant l'évolution de la température mondiale. Ils apprennent aussi que ce graphique représente une fonction. Pour mieux analyser ce document, ils décident de s'informer sur les généralités sur les fonctions.

I- ACTIVITÉS DE DÉCOUVERTE

1- CONNAÎTRE LA DÉFINITION D'UNE FONCTION

ACTIVITÉ 1

« choisis un nombre x entre -3 et 2, prends son inverse, calcule son carré, ajoute -1, affiche le rés
»

1- Parmi les nombres -3 ; -2,5 ; -2 ; -1,5 ; -1 ; 0 ; 1 ; 1,5 ; 2 ; indique ceux pour les quels ce prog peut être exécuté.

2- Dis si à chaque nombre de l'intervalle $[-3 ; 2]$, on peut faire correspondre un nombre réel.

Je fais le point de l'activité

- La correspondance qui, à chaque nombre de l'intervalle $[-3 ; 2]$, associe un nombre réel ou aucun nombre réel est appelée fonction de l'intervalle $[-3 ; 2]$ vers $\mathbb{R}$.
- Si on désigne par f cette fonction, alors on dit que f est la fonction de $[-3 ; 2]$ vers $\mathbb{R}$ qui à x, associe $f(x)$.
- $[-3 ; 2]$ est l'ensemble de départ, $\mathbb{R}$ est l'ensemble d'arrivée de la fonction f.
- x est la variable, $y = f(x)$ est l'image de x par f et x est un antécédent de y par f.
- On note :

$$f : [-3 ; 2] \mapsto \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x)$$

J'évalue mes acquis

Réponds par vrai (V) ou par faux (F) à chacune des affirmations suivantes :

a) La donnée d'un ensemble de départ et d'un ensemble d'arrivée permet de d… une fonction.

b) La donnée d'un ensemble de départ, d'un ensemble d'arrivée et d'un procédé p… de définir une fonction.

c) La donnée d'un procédé permet de définir une fonction.

2- CONNAÎTRE LES DIVERSES DÉTERMINATIONS D'UNE FONCTION

a) *Fonction déterminée par un tableau de valeurs*

ACTIVITÉ 2

On considère les tableaux de valeurs suivants :

Tableau 1

Nombre	-1	0	2	1,5	8
Image	-5	3	2	0	4

Tableau 2

Nombre	-1	2,5	3	0	3
Image	0	4	2		6

Utilise la définition d'une fonction pour indiquer lequel des deux tableaux détermine une fon…

Scanné avec CamScanner

Je fais le point de l'activité

- Une fonction peut être déterminée par un tableau de valeurs.
- Un tableau de valeurs comporte deux lignes : il associe à chaque nombre de la première ligne son image sur la même colonne de la deuxième ligne.

J'évalue mes acquis

Soit la fonction f définie sur l'ensemble $\{1 ; 0 ; 2 ; 7\}$ par :

x	-1	0	2	7
$f(x)$	-5	3	1	-5

a) Indique les images par f de 0 et 2

b) Donne les antécédents éventuels de -5 par f.

b) Fonction déterminée par une formule explicite

Activité 3

Soit la fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = \dfrac{2}{x-2}$.

1- Explique pourquoi g est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

2- Calcule :

a) Les images par g de -2 et $\dfrac{1}{3}$.

b) L'antécédent par g de $-\dfrac{3}{4}$.

Je fais le point de l'activité

- Une fonction peut être définie par une formule explicite.
- Une formule explicite est un programme de calcul qui fait intervenir un nombre et aboutit à l'image de ce nombre par une fonction.

J'évalue mes acquis

Parmi les relations suivantes, indique celles qui sont des fonctions :

a) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^2$

b) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{2}{x}$.

c) Fonction déterminée par une représentation graphique

Activité 4

On considère la représentation graphique ci-contre :

1-

a) Reproduis le graphique ci-contre.

b) En traçant des droites parallèles à l'axe (OJ), dis en combien de points chacune d'elles coupe cette représentation graphique.

2- Déduis-en que cette représentation graphique détermine une fonction.

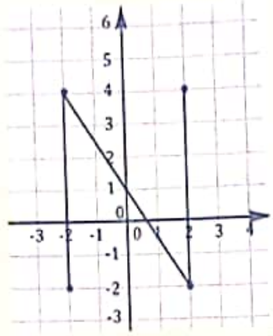
Je fais le point de l'activité

- Une fonction peut être déterminée par une représentation graphique lorsque toute droite parallèle à l'axe des ordonnées coupe le graphique en 1 ou 0 point.
- Une courbe tracée dans un repère du plan (par exemple la trajectoire d'un mobile) peut représenter une fonction.

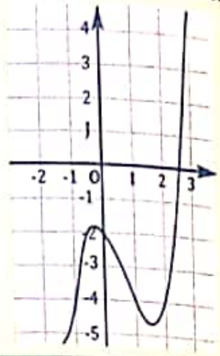
J'évalue mes acquis

Parmi les courbes suivantes, indique celle qui détermine une fonction.

a)



b)



3- CONNAÎTRE L'ENSEMBLE DE DÉFINITION D'UNE FONCTION

Activité 5

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{(x-1)(x+3)}$

1- Calcule, lorsque cela est possible, l'image de chacun des nombres de -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 par f.
2- Indique les nombres réels qui n'ont pas d'images par f.
3- Déduis-en les nombres réels qui ont une image par f.

Je fais le point de l'activité

- L'ensemble des nombres réels qui ont une image par f est appelé **ensemble de définition** de la fonction f, noté D_f.

J'évalue mes acquis

Réponds par vrai (V) ou par faux (F) à chacune des affirmations suivantes :

a) L'ensemble de définition d'une fonction est une partie de l'ensemble d'arrivée de cette fonction.

b) Tout nombre réel a une image par la fonction : $x \mapsto \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 + x - 1$.

c) Tout nombre réel a une image par la fonction : $x \mapsto \dfrac{\sqrt{2+x}}{x^2+1}$.

d) La fonction de $[-2 ; 2]$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $h(x) = \dfrac{x(x+2)}{x^2 - 4}$, a pour ensemble de défini de $\mathbb{R}\backslash\{2\}$.

4- CONNAÎTRE L'IMAGE DIRECTE D'UN ENSEMBLE.

Activité 6

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x^2 - 1$.
On donne les ensembles $A = \{-3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2\}$ et $I = [-3 ; 2]$.

1- Détermine l'image de chaque élément de l'ensemble A par f.

2-
a) Soit x un élément de l'intervalle $[0 ; 2]$. Donne un encadrement de $f(x)$.
b) Soit x un élément de l'intervalle $[-3 ; 0]$. Donne un encadrement de $f(x)$.
c) Déduis-en un encadrement de $f(x)$ lorsque x est un élément de l'intervalle I.

3-

a) Soit y un élément de [−1 ; 8]. Démontre qu'il existe un nombre réel x apprtenant à l'intervalle [−3 ; 0] tel que $f(x) = y$.

b) Soit y un élément de [−1 ; 3]. Démontre qu'il existe un nombre réel x apprtenant à l'intervalle [0 ; 2] tel que $f(x) = y$.

4- Conclus 2) et 3)

Je fais le point de l'activité

L'ensemble des images de tous les éléments de A (ou de I) est appelé image directe de A (ou de I) par f.

J'évalue mes acquis

Réponds par vrai (V) ou par faux (F) à chacune des affirmations suivantes :

a) L'image directe d'un ensemble de nombres par une fonction est toujours un ensemble de nombres.

b) L'image directe de [−2 ; 6] par la fonction $x \mapsto \frac{1}{2}x - 3$ est [0 ; 1].

c) L'image directe de [−1 ; 0] par la fonction : $x \mapsto x^2$ est [0 ; 1].

d) L'image directe de [−2 ; 5] par la fonction : $x \mapsto x^2$ est [4 ; 25].

5- CONNAÎTRE L'IMAGE RÉCIPROQUE D'UN ENSEMBLE

Activité 7

Soit la fonction f de ℝ vers ℝ définie par : $f(x) = x - 2$.

On donne les ensembles : B = {−6 ; −3 ; 0 ; 10} et J = [−2 ; 3].

Détermine :

1- Le réel x tel que : $f(x) = -6$; $f(x) = -3$

2- L'ensemble A de sorte que f(A) = B.

3- L'ensemble I de sorte que f(I) = J.

Je fais le point de l'activité

On a déterminé les ensembles A et I tels que f(A) = B et f(I) = J.
On dit que A et I sont les images réciproques des ensembles B et J par f.

J'évalue mes acquis

Réponds par vrai (V) ou par faux (F) selon que l'affirmation est vraie ou fausse.

a) L'image réciproque d'un segment par une symétrie orthogonale est un segment.

b) L'image réciproque de l'intervalle [2 ; 4] par la fonction $x \mapsto -\frac{1}{2}x$ est [−2 ; −1].

c) L'image réciproque de l'intervalle [4 ; 9] par la fonction $x \mapsto x^2$ est [2 ; 3].

6- CONNAÎTRE LE MAXIMUM, LE MINIMUM D'UNE FONCTION

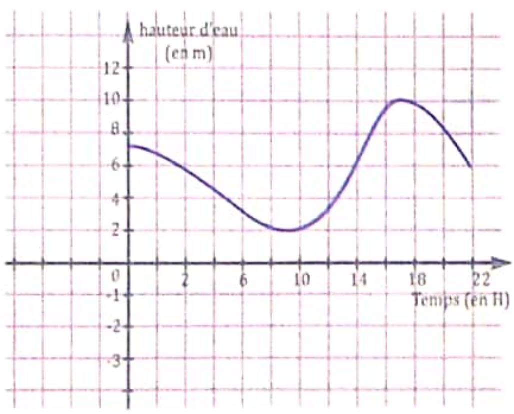
Activité 8

Le graphique ci-contre représente la hauteur d'eau en mètres alimentée par des turbines dans un port pendant 24 h.

1- Justifie que le graphique ci-contre est celle d'une fonction h.

2- Détermine la plus grande hauteur de cette eau, puis indique l'instant correspondant.

3- Détermine la plus petite hauteur de cette eau, puis indique l'instant correspondant.



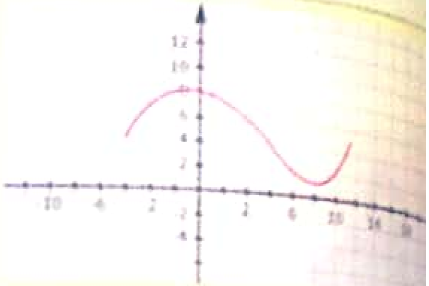
Je fais le point de l'activité

- La plus grande hauteur de cette eau atteinte pour un temps donné est appelée le maximum de la fonction h.
- La plus petite hauteur de cette eau atteinte pour un temps donné est appelé le minimum de la fonction h.
- Le maximum et le minimum sont appelés les extremums (ou extrema).

J'évalue mes acquis

Sur la figure ci-contre, $(\mathscr{C})$ est la représentation graphique de la fonction f.

Précise les extremums de f en indiquant en quels nombres ils sont atteints.



7- CONNAÎTRE LA DÉFINITION DU SENS DE VARIATION D'UNE FONCTION

Activité 9

Avec l'énoncé de l'activité précédente, réponds aux questions suivantes :

1- Propose un intervalle correspondant à une plage horaire sur laquelle la hauteur d'eau a toujours augmenté.

2- Propose un intervalle correspondant à une plage horaire sur laquelle la hauteur d'eau a toujours diminué.

3- a) Recopie et complète le tableau ci-dessous qui décrit le comportement de la fonction h sur l'intervalle $[0 ; 24]$.

x	0	8	24
$h(x)$	8 ↘	1	

b) A l'aide du tableau ci-dessus, compare les hauteurs d'eau à : 1h et 4h ; 19h et 23 h.

4- Dis s'il existe une plage horaire sur laquelle la hauteur d'eau reste constante.

Je fais le point de l'activité

- Une fonction f est dite **strictement croissante** sur l'intervalle I lorsque, quelques soient les nombres réels a et b de I : **Si $a < b$ alors $f(a) < f(b)$**.
- Une fonction f est dite **strictement décroissante** sur l'intervalle I lorsque, quelques soient les nombres réels a et b de I : **Si $a < b$ alors $f(a) > f(b)$**.
- Une fonction f est dite **constante** sur l'intervalle I lorsque, quelques soient les nombres réels a et b de I, $f(a) = f(b)$.

J'évalue mes acquis

Indique l'unique bonne réponse.

Une fonction f est définie sur l'intervalle $[3 ; 10]$ et on sait que : $f(3) < f(10)$.

a) la fonction f est croissante sur l'intervalle $[3 ; 10]$.

b) la fonction f est décroissante sur l'intervalle $[3 ; 10]$.

c) la fonction f est constante sur l'intervalle $[3 ; 10]$.

d) On ne peut pas savoir si f est croissante ou décroissante sur $[3 ; 10]$.

8- CONNAÎTRE LA DÉFINITION DE DEUX FONCTIONS ÉGALES SUR UN INTERVALLE

Activité 10

On considère les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par :

$f(x) = \frac{x-2}{x+6}$ et $g(x) = \frac{(x-1)^2 - 1}{x(x+6)}$

1- Détermine les ensembles de définition des fonctions f et g.

2- a) Démontre que, pour tout nombre réel x différent de -6 et 0, on a : $g(x) = \frac{x-2}{x+6}$.

b) Déduis-en que pour tout x de l'intervalle $]-6 ; 0[$, on a : $f(x) = g(x)$.

Je fais le point de l'activité

On constate que : $x \in \mathbb{R}\backslash\{0 ; -6\}$, $f(x) = g(x) = \frac{x-2}{x+6}$

On dit que f et g sont égales (ou coïncident) sur $]-6 ; 0[$ et on écrit :

$\forall x \in]-6 ; 0[$, $f(x) = g(x) = \frac{x-2}{x+6}$.

J'évalue mes acquis

Dans chacun des cas suivants, dis si les fonctions f et g sont égales (ou coïncident) sur E.

a) $f(x) = \frac{x^2}{x} - 1$, $g(x) = x - 1$ et $E = [-2 ; 2]$.

b) $f(x) = x(x+2) + 1 - x^2$, $g(x) = 2x + 1$ et $E = \mathbb{R}$.

c) $f(x) = \frac{4 - x^2}{x+2}$, $g(x) = (\sqrt{2} - \sqrt{x})(\sqrt{2} + \sqrt{x})$ et $E =]-\infty ; -2[$.

d) $f(x) = |x - 3| + 2x + 5$, $g(x) = x + 8$ et $E = [0 ; 3]$.

9- CONNAÎTRE LA DÉFINITION DE LA REPRÉSENTATION GRAPHIQUE D'UNE FONCTION SUR UN INTERVALLE

Activité 11

On considère la fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par : $g(x) = 4 - x^2$.

1- Recopie et complète le tableau de valeurs :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$g(x)$							

2- a) Place les points du tableau ci-dessus de coordonnées $(x, g(x))$ dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

b) Trace les points de coordonnées $(x, g(x))$. On obtient ainsi la représentation graphique $(\mathscr{C})$ de g sur l'intervalle $[-3 ; 3]$ en trait continue.

3- Détermine les nombres réels a et b de sorte que les points $M(a ; 2)$ et $N(\frac{3}{5} ; b)$ appartiennent à $(\mathscr{C})$.

Je fais le point de l'activité

- Dans le plan muni d'un repère, la représentation graphique de g est l'ensemble des points $M(x ; g(x))$ où x est un élément de Dg.
- $M(x ; y) \in (\mathscr{C})$ équivaut à $x \in Dg$ et $y = g(x)$

J'évalue mes acquis

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

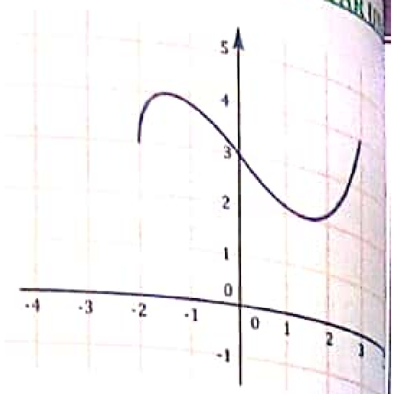
On désigne par $(\mathscr{C})$ la représentation graphique de f dans un repère.

Parmi les points suivants, indique ceux qui appartiennent à $(\mathscr{C})$:

A(0 ; 2), B(1 ; -1), C(-3 ; -20) et D(1 ; 0).

10- DÉTERMINER GRAPHIQUEMENT L'IMAGE PUIS UN ANTÉCÉDENT D'UN NOMBRE RÉEL PAR UNE FONCTION

Activité 12



On considère la courbe représentative de la fonction f, définie sur $[-3 ; 4]$.

1- a) Trace la droite (Δ) d'équation $x = 1$.

b) Détermine l'ordonnée du point d'intersection de (Δ) et de courbe $(\mathscr{C})$ de f.

2- a) Trace la droite (Δ') d'équation $y = 4$.

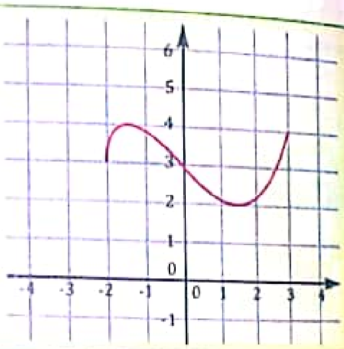
b) Détermine les abscisses des points éventuels d'intersection de (Δ') et $(\mathscr{C})$.

Je fais le point de l'activité

- Déterminer **l'image** directe d'un élément a de l'ensemble de définition revient à déterminer **l'ordonnée de l'unique point de la courbe** dont l'abscisse est a ; c'est le point d'intersection de la courbe et de la droite d'équation $x = a$, parallèle à l'axe des ordonnées.
- Déterminer les **antécédents** de b revient à déterminer les **abscisses des points éventuels de la courbe** qui ont pour ordonnée b ; ce sont les points éventuels d'intersection de la courbe et de la droite d'équation $y = b$, parallèle à l'axe des abscisses.

J'évalue mes acquis

On considère la courbe représentative de la fonction f, définie sur $[-3 ; 4]$.

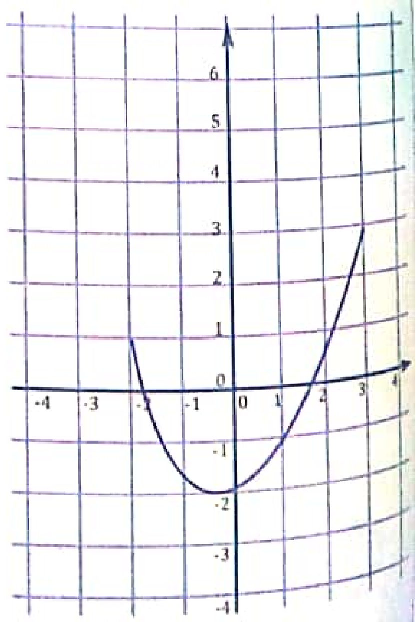


1- Détermine l'image de 3 par f.

2- Détermine les éventuels antécédents de 3 par f.

11- DÉTERMINER GRAPHIQUEMENT L'IMAGE DIRECTE PUIS L'IMAGE RÉCIPROQUE D'UN INTERVALLE PAR UNE FONCTION

Activité 13



Le plan est muni du repère (O, I, J). f est la fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et représenté par le graphique ci-contre.

1- Reproduis cette figure.

2- a) Trace les droites d'équations $(D_1) : x = -2$ et $(D_2) : x = 1$.

b) Colorie en rouge la partie du plan comprise entre les droites (D_1) et (D_2).

c) L'intersection de cette portion coloriée du plan avec $(\mathscr{C})$ est la représentation graphique de f sur l'intervalle $[-2 ; 1]$.

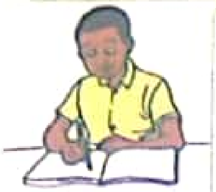
d) Colorie en bleu l'ensemble de toutes les images directes de $[-2 ; 1]$ par f sur l'axe des ordonnées.

3- En faisant une étude similaire, détermine graphiquement sur l'axe des abscisses, la correspondance de $[-1 ; 1]$ par f sur l'axe des ordonnées.

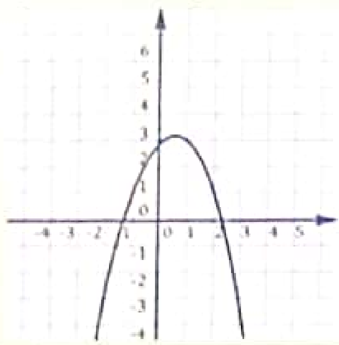
Je fais le point de l'activité

- On appelle **image directe** de E par la fonction f, **l'ensemble des images** par f de tous les éléments de E.
- On appelle **image réciproque** d'un ensemble F, **l'ensemble de tous les antécédents** par f de tous les éléments de F.

J'évalue mes acquis



A partir de la représentation graphique de la fonction f



ci-contre, détermine :

- L'image directe de [1 ; 3] par f;
- L'image réciproque de [-3 ; 3] par f après avoir reproduis la figure.

II- RÉSUMÉ DE COURS

A- GENERALITES SUR LES FONCTIONS

1- Définition et vocabulaire

- Soit A et B deux ensembles non vides. On appelle fonction f de A vers B toute correspondance qui à tout élément de A associe un ou zéro élément de B.
- Si f est une fonction de A vers B, le correspondant d'un élément y de A dans B s'il existe est appelé l'image de x par f et est noté $f(x)$.
  Soit y un élément de B, on appelle antécédent de x par f tout élément x de A tel que $y = f(x)$.
- Si f est une fonction de A vers B ; A est l'ensemble de départ et B l'ensemble d'arrivée de f. L'ensemble de définition de f est l'ensemble des éléments de A qui ont une image par f. on le note en général D_f.

Notation

$f : A \to B$

$x \mapsto f(x)$

Cette notation désigne une fonction f, son ensemble de départ est A et son ensemble d'arrivée B, la variable est x et son image par f est $f(x)$.

Exemple :

1- Soit f la fonction de [-3 ; 5] vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x^2 - 2x$. On écrit aussi :

$f : [-3 ; 5] \to \mathbb{R}$

$x \mapsto x^2 - 2x$

- L'ensemble de définition de f est [-3 ; 5] et l'ensemble d'arrivée de f est $\mathbb{R}$.
- L'ensemble de définition de f est [-3 ; 5].
- Le nombre 4 a pour image par f le nombre $f(4)$ tel que : $f(4) = 4^2 - 2 \times 4 = 8$.
- Tout antécédent de 0 vérifie $f(x) = 0$. C'est-à-dire $x^2 - 2x = 0$.

Cette équation a deux solutions, 0 et 2 qui sont bien des éléments de l'ensemble de définition [-3 ; 5]. Le nombre 0 a donc deux antécédents par f : 0 et 2.

2- Soit la fonction g, de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = \frac{1}{x - 3}$.

Le nombre 3 n'a pas d'image par g (on ne peut pas diviser par 0) en conséquence, 3 ne peut pas appartenir à D_g.

2- Détermination d'une fonction

Définir une fonction, c'est pouvoir déterminer l'image de tout élément de l'ensemble de définition. Ainsi, une fonction peut être définie par :

- Une formule explicite

Exemple : f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = 2x^2 - 1$

- Un tableau de valeurs

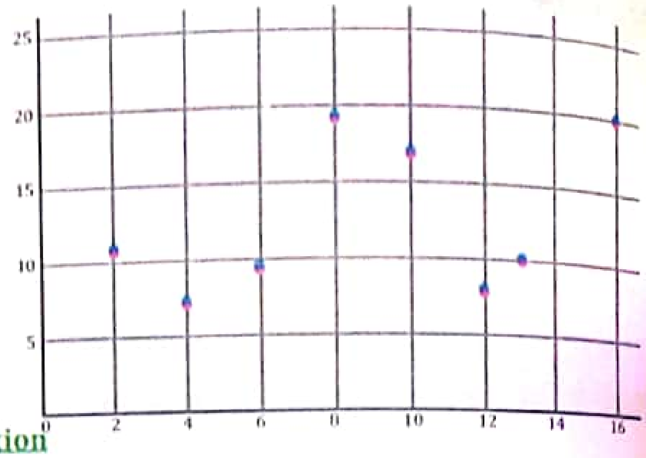
Exemple :

x	- 4	- 3	- 2	- 1	0	+ 1	+ 2	+ 3
$f(x)$	+ 4	+ 3	+ 2	+ 1	0	+ 1	+ 2	+ 3

- Un programme de calcul

Exemple :
- prendre un nombre
- prendre son carré
- multiplier son carrée par −4
- ajouter 1 au carrée obtenu.

- Une représentation graphique

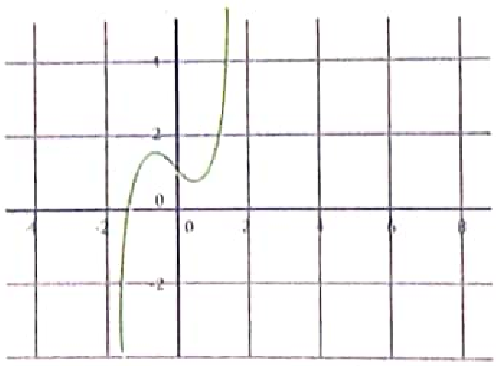


3- Représentation graphique d'une fonction

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ d'ensemble de définition D_f. On appelle représentation graphique de f ou courbe représentative de f, l'ensemble des points M de coordonnées $(x ; f(x))$ où x est un élément de D_f.

Exemple :



4- Fonctions égales sur un intervalle

DÉFINITION

Soit f et g deux fonctions d'ensemble de définition respectifs D_f et D_g. Soit E un intervalle inclus dans $D_f \cap D_g$.

f et g sont égales ou coïncident sur E si pour tout x élément de E, $f(x) = g(x)$

Exemple :

Soient f et g deux fonctions numériques définies par : $f(x) = x + 2$ et $g(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

$D_f = \mathbb{R}$ et $D_g = \mathbb{R}\setminus\{2\}$ et pour tout nombre réel x appartenant à D_g on a :

$g(x) = \dfrac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = x + 2$, donc : $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{2\}, f(x) = g(x) = x + 2$.

f et g sont égales sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

5- Image directe, image réciproque d'un ensemble

DÉFINITION

Soit f une fonction numérique d'ensemble de définition D_f. Soit E un intervalle inclus dans D_f.

- On appelle image directe de E par f, l'ensemble des images de tous les éléments de E par f. On la note f(E).
- Soit H, un ensemble inclus dans $f(D_f)$, on appelle image réciproque de H par f, l'ensemble de tous les antécédents des éléments de H par f.

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x + 1$

1- Déterminons l'image directe de $[1 ; 3]$ par f.

RESOLUTION

Soit x un nombre réel tel que :

$1 \leq x \leq 3$ équivaut à $2 \leq 2x \leq 6$. ce qui équivaut à $3 \leq 2x + 1 \leq 7$, c'est à dire : $3 \leq f(x) \leq 7$.

L'image directe de $[1 ; 3]$ par f est donc $[3 ; 7]$.

2- Déterminons l'image réciproque de $[-3 ; 5]$ par f.

RESOLUTION

Déterminer l'image réciproque de $[-3 ; 5]$ par f revient à trouver l'ensemble des nombres réels x tel que :

$-3 \leq f(x) \leq 5$

$-3 \leq f(x) \leq 5$ équivaut à : $-3 \leq 2x + 1 \leq 5$.

C'est-à-dire : $-2 \leq x \leq 2$.

Donc l'image réciproque de $[-3 ; 5]$ par f est $[-2 ; 2]$.

B- VARIATION D'UNE FONCTION

1- Sens de variation d'une fonction sur un intervalle

DÉFINITION

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle définie sur un intervalle I.

f **est croissante sur I** signifie que pour tous éléments x et x' de I, si $x < x'$, alors $f(x) \leq f(x')$.

f **est strictement croissante** sur I signifie que pour tous éléments x et x' de I, si $x < x'$, alors $f(x) < f(x')$

f **est décroissante** sur I signifie que pour tous éléments x et x' de I si $x < x'$, alors $f(x) \geq f(x')$.

f **est strictement décroissante** sur I signifie que pour tous éléments x et x' de I, si $x < x'$, alors $f(x) > f(x')$.

f **est constante** sur I signifie que pour tous éléments x et x' de I, $f(x) = f(x')$.

Lorsque f est soit croissante, soit décroissante sur I, on dit que f **est monotone sur I.**

Exemple :

Soit la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = |x|$.

Pour tous x et x' éléments de $[0 ; +\infty[$, tels que $x < x'$, on a $|x| < |x'|$, donc f est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

Pour tous x et x' éléments de $]-\infty ; 0]$, tels que $x < x'$, on a $|x| > |x'|$, donc f est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0]$.

2- Tableau de variation d'une fonction

Soit $[a ; b]$ un intervalle et f une fonction définie sur $[a ; b]$.

f est croissante sur $[a ; b]$ se traduit par le tableau de variation ci-contre :

x	a	b
$f(x)$	$f(a)$	$f(b)$

Savoir-faire 2- Dresser le tableau de variation d'une fonction définie par une formule expli...

ENONCÉ

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^2 - x + 1$.

1- Soient x et x' deux nombres réels. Factorise $f(x') - f(x)$.

2- Justifie que, si $x' > x \geq \frac{1}{4}$, alors $f(x') > f(x)$.

3- Justifie que, si $x' < x \leq \frac{1}{4}$, alors $f(x') < f(x)$.

4- Déduis-en le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

SOLUTION COMMENTÉE

1- Je factorise $f(x') - f(x)$.

$$\begin{aligned} f(x') - f(x) &= (2x'^2 - x' + 1) - (2x^2 - x + 1) \\ &= 2(x'^2 - x^2) - (x' - x) \\ &= (x' - x)[2(x' + x) - 1], \text{ donc } f(x') - f(x) = 2(x' - x)\left(x' + x - \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

2- Je justifie que, si $x' > x \geq \frac{1}{4}$, alors $f(x') > f(x)$.

On suppose que $x' > x \geq \frac{1}{4}$

On a $x + x' > \frac{1}{2}$. D'où : $x' + x - \frac{1}{2} > 0$.

On déduit que : $f(x') > f(x)$

Ceci montre que la fonction f est strictement croissante sur $[\frac{1}{4} ; +\infty[$.

3- Je justifie que, si $x' < x \leq \frac{1}{4}$, alors $f(x') < f(x)$.

On a $x + x' < \frac{1}{2}$. D'où : $x + x' - \frac{1}{2} < 0$.

On déduit que : $f(x') < f(x)$

Nous venons de prouver que, sur l'intervalle, si $x' < x$, alors $f(x') > f(x)$; la fonction f est donc strictement décroissante sur $]-\infty ; \frac{1}{4}]$.

4- Tableau de variation de f.

x	$-\infty$		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$\frac{7}{8}$	$\nearrow$	

Savoir-faire 3- Lire sur courbe le minimum et le maximum d'une fonction sur un intervalle

Enoncé

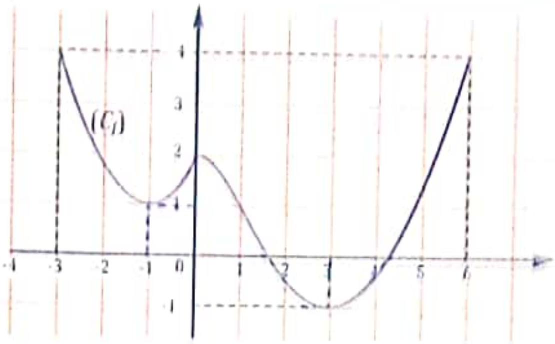
La courbe ci-contre représente une fonction f définie sur $[-3 ; 6]$.
Lis sur la courbe et note le résultat :

1- Le maximum de f sur :

a) $[-3 ; -1]$; b) $[-1 ; 3]$; c) $[-1 ; 6]$.

2- Le minimum de f sur :

a) $[-3 ; -1]$; b) $[-3 ; 0]$; c) $[-1 ; 6]$.



Solution commentée

1- Lecture du maximum de f sur :

a) $[-3 ; -1]$
4 est le maximum de f sur $[-3 ; -1]$.

b) $[-1 ; 3]$
2 est le maximum de f sur $[-1 ; 3]$.

c) $[-1 ; 6]$
4 est le maximum de f sur $[-1 ; 6]$.

2- Lecture du minimum de f sur :

a) $[-3 ; -1]$
1 est le minimum de f sur $[-3 ; -1]$.

b) $[-3 ; 0]$
1 est le minimum de f sur $[-3 ; 0]$.

c) $[-1 ; 6]$
1 est le minimum de f sur $[-1 ; 6]$.

V- JE M'EXERCE

1- Exercices de fixation/ Application

A- Généralités sur les fonctions

Connaître la définition d'une fonction

1 L'énoncé d'une définition a été désorganisé. Réordonne l'énoncé.
Définition
« toute correspondance qui à tout élément de A »
« On appelle fonction f de A vers B »
« Soit A et B deux ensembles non vides. »
« associe un ou zéro élément de B.»

2 Réponds par vrai (V) ou par faux (F) à chacune des affirmations suivantes :
Si $f(u) = u$, alors :
a) u est l'image de v par f,
b) v est l'antécédent de u par f,
c) u est un antécédent de v par f.

Connaître la définition de l'ensemble de définition d'une fonction

3 Recopie le tableau et complète les reponds par, vrai (V) ou par faux (F).

Affirmations	Réponse
L'ensemble de définition d'une fonction est l'ensemble des éléments de l'ensemble d'arrivée qui ont un antécédent par la fonction	
L'ensemble de définition d'une fonction est l'ensemble des éléments de l'ensemble de départ qui ont une image par la fonction	
L'ensemble de définition d'une fonction est l'ensemble des éléments de l'ensemble d'arrivée qui ont un antécédent par la fonction	

Déterminer l'ensemble de définition d'une fonction

4 Les fonctions f, g, h et k sont définies de $\mathbb{R}$ par $\mathbb{R}$:

$f(x) = 3x - 2$; $g(x) = \frac{2}{x-1}$; $h(x) = \sqrt{x}$;

$k(x) = (x + 3)$.
Détermine l'ensemble de définition chacune des fonctions ci-dessus définies.

5 Dans chacun des cas détermine l'ensemble de définition de g :

g est définie de $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{2}{x} + 3$;

g est définie de $\mathbb{R}$ par $g(x) = \sqrt{x} + 1$;

g est définie de $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{2}{x+3}$;

g est définie de $\mathbb{R}$ par $g(x) = |x + 8|$;

g est définie de $\mathbb{R}$ par $g(x) = \sqrt{x+1}$.

6 Dans chacun des cas suivants, détermine l'ensemble de définition de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

a) $f(x) = 2x^2 + x - 2$;

b) $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 3}$;

c) $f(x) = 1 - 3x^3$;

d) $f(x) = \frac{2x + 1}{x(x^2 - 1)}$;

e) $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

Calculer algébriquement l'image puis les antécédents d'un nombre réel par une fonction

7 Indique la (ou les) bonne(s) réponse(s) :
Si la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x^2 - 2x + 1$ alors :

a) l'image de -1 par f est 4 ;

b) $f(-1) = 2$;

c) un antécédent de 1 par f est 0.

8 On considère la fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = 2x^2 + 1$

1- Calcule les images par g des réels suivants :

2- Détermine les antécédents éventuels de 1 ; 3 ; et de 0 par g.

9 On considère la fonction h de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $h(x) = \sqrt{x} + 2$

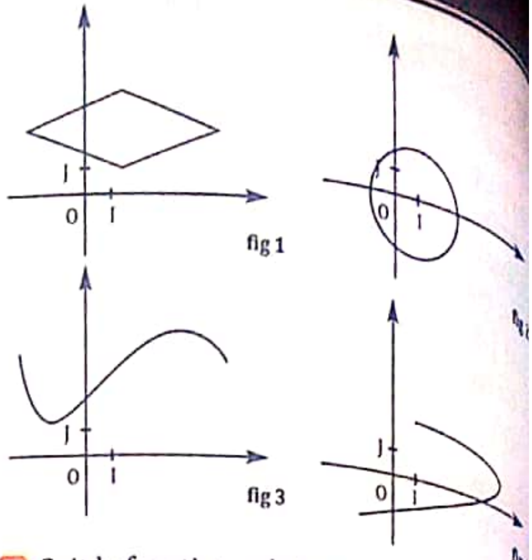
1- Dis s'il est possible de calculer les images des nombres réels -4 ; -3 et -1 par h. Justifie ta réponse.

2- Calcule les images par h des réels suivants : 0 ; 4 ; 9 et 12.

10 On considère la fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = 2x + 1$
Détermine les antécédents des réels suivants : -5 ; 0 ; 3 ; 7.

Connaître la définition de la représentation graphique d'une fonction

11 Parmi les représentations graphiques suivantes nomme celle qui est la repreentation graphique d'une fonction.



12 Soit la fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = -2x^2$ et de représentation graphique
dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

1- Détermine les coordonnées de cinq poi
appartenant à (C).

2- Parmi les points suivants détermine ceux
appartiennent à (C) : A(2 ; 4) ; B(1 ; -2
C(3 ; 18) ; D(2 ; -8) ; E(4 ; -6) ; F(-6 ; -6) ; G(0

13 On désigne par (C), la courbe représentative
la fonction h sur $\mathbb{R}$ définie par : $h(x) = 49 - x^2$.
Détermine les valeurs du nombre réel a de so
que le point M(a ; 0) appartienne à (C).

*Connaître la définition de deux fonctions égales
un intervalle*

14 Recopie le numéro des affirmations correc
contenues dans le tableau ci-dessous :

N°	Affirmations
1	Deux fonctions f et g sont égales sur un intervalle I si et seulement si elles ont même ensemble de définition
2	Deux fonctions f et g sont égales sur un intervalle I si et seulement si f et g sont définies sur I et pour tout élément x de I, $f(x) = g(x)$
3	Deux fonctions f et g sont égales sur un intervalle I si et seulement si f et g ont même ensemble de départ et le même ensemble d'arrivée

15 On considère les fonctions h et g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par : $h(x) = |x + 2|$ et $g(x) = x + 2$.
Justifier que h et g sont égales sur $[-2 ; +\infty[$.

16 On considère les fonctions h et g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par : $h(x) = \frac{|x|}{x^2}$ et $g(x) = \frac{1}{x}$.

Justifie que h et g sont égales sur $]0 ; +\infty[$.

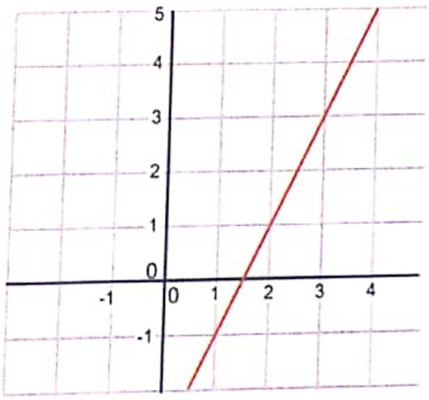
17 On considère les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par : $f(x) = |x - 1|$ et $g(x) = x - 1$.
Détermine le plus grand intervalle sur lequel f et g sont egales.

B- ETUDE GRAPHIQUE

Connaître la définition de l'image directe et de l'image réciproque d'un ensemble par une fonction dont la représentation graphique est donnée.

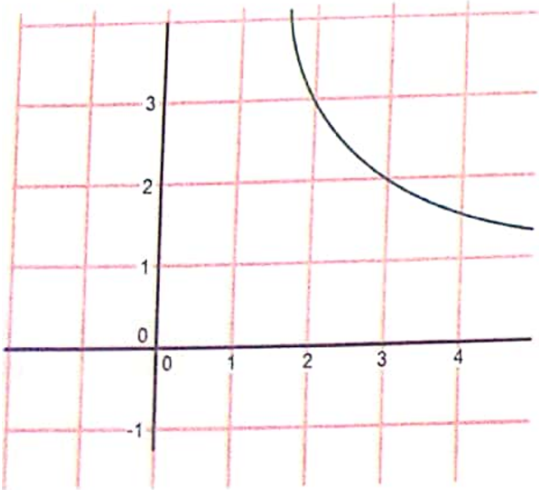
18 La représentation graphique ci-dessous est celle de la fonction f.

1- Détermine graphiquement l'image directe de l'intervalle $[1 ; 2]$ par f.
2- Détermine graphiquement l'image réciproque de l'intervalle $[1 ; 3]$ par f.



19 La représentation graphique ci-dessous est celle de la fonction f.

- Détermine graphiquement l'image de 2 par f.
- Détermine graphiquement l'antécédent de 2 par f.



C- VARIATION D'UNE FONCTION

Connaître la définition du maximum et du minimum d'une fonction

20 Pour chacune des affirmations contenues dans le tableau ci-dessous, relève les numéros de celles qui sont vraie :

1	le maximum d'une fonction sur un intervalle est	La seule valeur prise par la fonction sur cet intervalle
2		La plus petite valeur prise par la fonction sur cet intervalle
3		La plus grande valeur prise par la fonction sur cet intervalle
4		L'image directe de cet intervalle par f
5		L'image réciproque de cet intervalle par f
6		L'ensemble de définition de f

21 Pour chacune des affirmations contenues dans le tableau ci-dessous, relève les numéros de celles qui sont vraie :

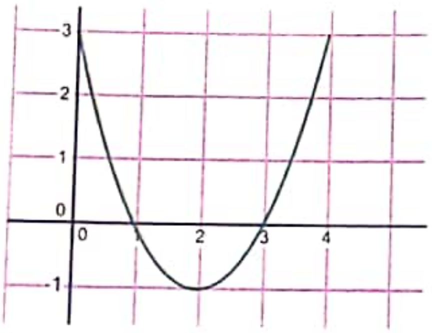
N°	Affirmations	
1	Le minimum d'une fonction sur un intervalle est	La seule valeur prise par la fonction sur cet intervalle
2		La plus petite valeur prise par la fonction sur cet intervalle
3		La plus grande valeur prise par la fonction sur cet intervalle
4		L'image directe de cet intervalle par f
5		L'image réciproque de cet intervalle par f
6		L'ensemble de définition de f

Connaître la définition du sens de variation d'une fonction

22 Récopie les numéros des affirmations vraie contenues dans le tableau ci-dessous :

N°	Affirmations
1	Une fonction est croissante sur un intervalle I si les éléments de I et leurs images sont rangés dans le même sens
2	Une fonction est constante sur un intervalle I si tous les éléments de I ont leurs images nulles
3	Une fonction est décroissante sur un intervalle I si les éléments de I et leurs images sont rangés dans le sens contraire
4	Une fonction est constante sur un intervalle I si tous les éléments de I ont la même image

24 La représentation graphique ci-dessous est celle de la fonction f.
Détermine le maximum et le minimum de f sur $[1 ; 4]$ en précisant en quelle valeur ils atteint.



25 Le tableau de variation ci-après est celui d'une fonction f.

x	2		8		15		35
$f(x)$	-4	↗	6	↘	5	↗	2

1- Détermine l'ensemble de définition de f.
2- Compare $f(4)$ et $f(7)$, justifie ta réponse.
3- Compare $f(12)$ et $f(13)$, justifie ta réponse.
4- Compare $f(16)$ et $f(17)$, justifie ta réponse.

26 On considère la fonction f sur $[2 ; 7]$ par : $f(x) = -5x + 3$.
Justifie que f admet un minimum en 7 et u maximum en 2.

27 On considère la fonction f définie sur [-10 ; 7 par : $f(x) = 2x^2$.
Justifie que f admet un minimum en 0.

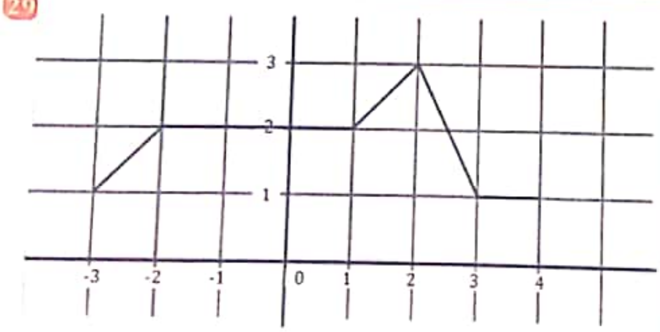
28 Le tableau de variation ci-dessous est cel d'une fonction f.

x	2		8		15		35
$f(x)$	-4	↗	6	↘	5	↗	2

1- Détermine le minimum de f sur $[2 ; 35]$.
2- Détermine le maximum de f sur $[2 ; 35]$.

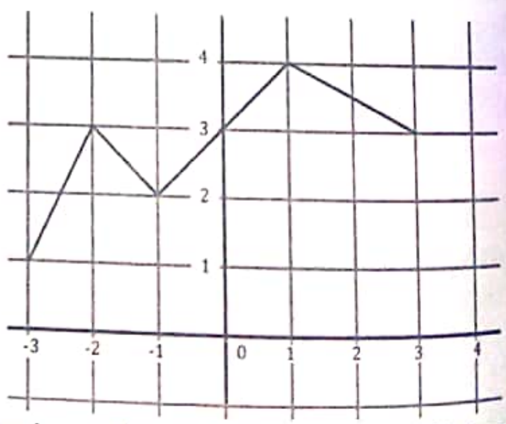
2- Exercices de renforcement / approfondissement

29



La représentation ci-dessus est celle de la fonction h.
1- Détermine graphiquement l'ensemble de définition de h.
2- Détermine les graphiquement les variations de h.
3) Dresse le tableau de variation de h.
4) Détermine le maximum et le minimum de h sur son ensemble de définition en précisant en quelle valeur ils sont atteints.

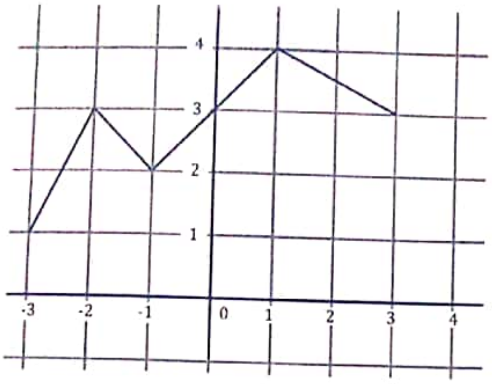
30



La représentation ci-dessus est celle de la fonctio
1- Détermine graphiquement l'image directe
[-2 ; 1].
2- Détermine graphiquement l'image directe
[-1 ; 1].

31 La représentation ci-contre est celle de la fonction h.

1) Détermine graphiquement l'image réciproque de $[2 ; 4]$.
2) Détermine graphiquement l'image réciproque de $[1 ; 4]$.



32 On considère la fonction g définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ definie par : $h(x) = x^2 - 8x + 18$.

1- Justifie que : $h(x) = (x - 4)^2 + 2$.

2-
 a) Justifie que f est croissante sur $[4 ; +\infty[$ et décroissante sur $]-\infty ; 4]$.
 b) Justifie que f admet un minimun sur $\mathbb{R}$ en 2 et donne la valeur de ce minimun.

33 On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = -x^2 + 6x + 4$.

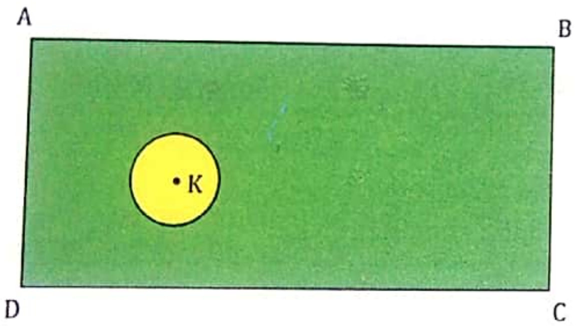
1- Justifie que $f(x) = -(x - 3)^2 + 5$.

2- Justifie que f admet un maximun sur $\mathbb{R}$.

3-
 a) Justifie que : f est croissante sur $]-\infty ; 3]$ et décroissante sur $[3 ; +\infty[$.
 b) Retrouve le resultat du 2.

3- Situation d'évaluation

34



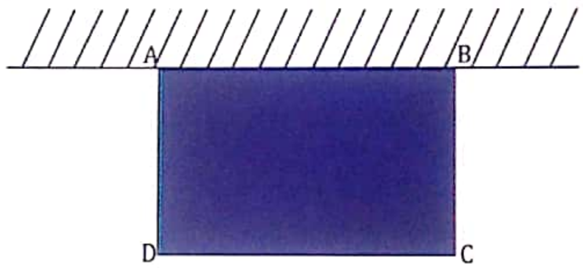
Un ferronnier dispose d'une plaque métallique rectangulaire ABCD de longueur AB = 200 cm et de largeur BC =100 cm. Il marque sur la plaque un point K situé à 40 cm du bord [CD] et à 50 cm du bord [AD] et désire découper un disque de rayon x et de centre K. Il te sollicite pour savoir quelle sera l'aire maximale du disque qu'il peut découper et l'aire minimale de la plaque métallique qu'il peut avoir.

1- Détermine l'aire $d(x)$ du disque pour x donné et déduis l'aire $p(x)$ de la plaque restant

2- Justifie que $x \in [0 ; 40]$.

3- Détermine l'aire minimum de plaque métallique qu'il peut avoir.

35



Un éleveur désire clôturer un terrain rectangulaire ABCD de 450 m² dont le côté [AB] s'appuie sur une grande clôture déjà réalisée. Il veut déterminer les dimensions de la clôture à réaliser pour que sa longueur totale soit minimale.

On pose : $x = CD$ et $y = AD$.

1- Justifie que $xy = 450$ et que la longueur totale cherchée est $x + 2y$.

2- Justifie que la longueur totale $x + \dfrac{900}{x}$.

On considère la fonction h de $[0 ; +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $h(x) = x + \dfrac{900}{x}$.

3- a) Démontre que pour tous nombres réels x_1 et x_2 positifs ; $h(x_1) - h(x_2) = (x_1 - x_2)\dfrac{(x_1 x_2 - 900)}{x_1 x_2}$.
 b) Déduis que h est décroissante sur $]0 ; 30]$ et croissante sur $[30 ; +\infty[$.
 c) Dresse le tableau de variation de h.

4- Détermine x et y pour que la longueur soit minimale.

VI- RENDEZ-VOUS DES CURIEUX !

Le terme de fonction a été introduit par le mathématicien allemand LEIBNIZ Gottfried Wilhelm (1646-1716) en 1673 dans un manuscrit inédit "La Méthode inverse des tangentes ou à propos des fonctions".

"J'appelle fonctions toutes les portions des lignes droites qu'on fait en menant des droites indéfinies qui répondent au point fixe et aux points de la courbe; comme sont les abscisse, ordonnée, corde, tangente, perpendiculaire, sous-tangente ...et une infinité d'autres d'une construction plus

Le terme de fonction a été introduit par le mathématicien allemand LEIBNIZ Gottfried Wilhelm (1646-1716) en 1673 dans un manuscrit inédit "La Méthode inverse des tangentes ou à propos des fonctions".
"J'appelle fonctions toutes les portions des lignes droites qu'on fait en menant des droites indéfinies qui répondent au point fixe et aux points de la courbe; comme sont les abscisse, ordonnée, corde, tangente, perpendiculaire, sous-tangente ...et une infinité d'autres d'une construction plus composée, qu'on ne peut figurer."
LEIBNIZ Gottfried Wilhelm (1646-1716), in La Méthode inverse des tangentes ou à propos des fonctions, 1673.
Cette définition se retrouve dans des articles de 1692 et 1694 et est reprise par le mathématicien suisse BERNOULLI Johann francisé Jean (1667-1748) en 1697.

Source : Math93

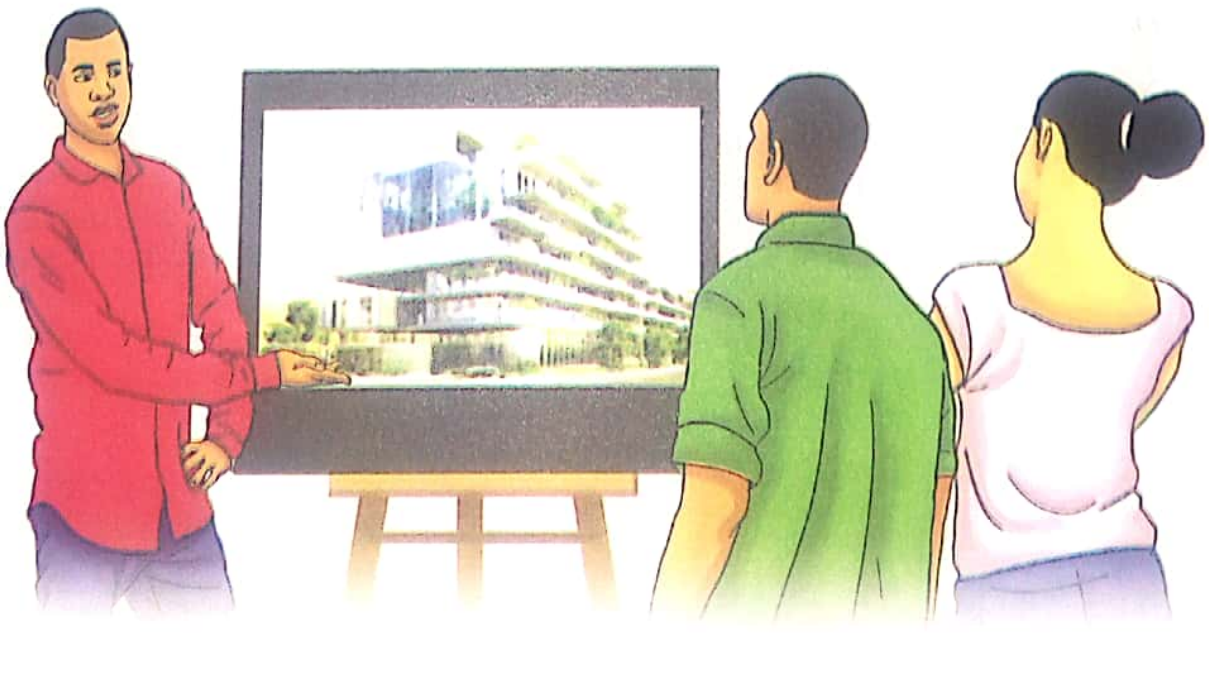
5 Droites et plan de l'espace

Notions essentielles :

- Positions relatives de deux droites dans l'espace
- Positions relatives de deux plans dans l'espace
- Positions relatives d'une droite et d'un plan dans l'espace
- Section d'un solide de l'espace par un plan

SITUATION D'APPRENTISSAGE

Un élève d'une classe de seconde présente à ses amis de classe la photo ci-dessous qu'il a vu dans un document. Ce dernier affirme que sur cette image, on peut identifier non seulement des droites parallèles mais aussi des plans parallèles de l'espace, il affirme aussi qu'il suffit d'appliquer certaines propriétés pour s'en convaincre.
Curieux, ses amis de classe décident de s'informer sur les positions relatives des droites et des plans de l'espace afin de confirmer les affirmations de leur camarade.

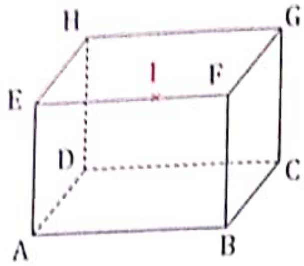


I- ACTIVITÉS DE DÉCOUVERTE

1- NOTION DE DROITE - NOTION DE PLAN

a) Connaître la notion de droite de l'espace

Activité 1



ABCDEFGH est un cube.

a) Trace une ligne droite qui passe par les points A et C.

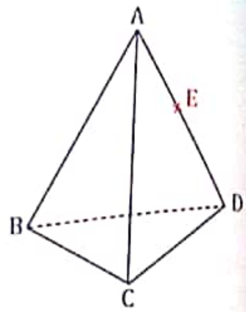
b) Trace une ligne droite qui passe par les points B et I

Je fais le point de l'activité

Une droite de l'espace est une ligne droite illimitée de part et d'autre qui passe par deux points distincts.

b) Déterminer une droite de l'espace

Activité 2



ABCD est un tétraèdre.

a) Trace autant de droites que tu peux passant par le point E.

b) Détermine le nombre de droites passant par les points A et C.

Je fais le point de l'activité

- Par un point de l'espace, il passe une infinité de droites.
- Par deux points distincts il passe une et une seule droite.

J'évalue mes acquis

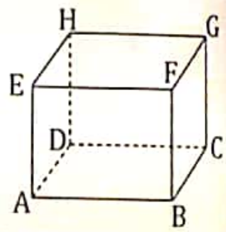
ABCDEFGH est un cube.

1- Reproduis cette figure.

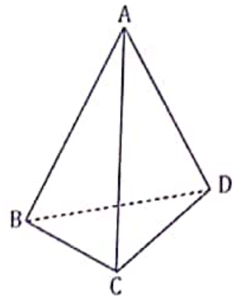
2- a) Trace la droite passant par les points E et C.

b) Trace la droite (AF).

c) Détermine les droites passant par le point A dont une arrête du cube est le support.



c) Connaître la notion de plan de l'espace



Activité 3

ABCD est un tétraèdre.

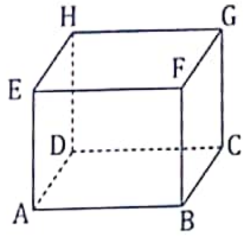
a) Dessine une surface plane contenant les points A, C et D.

b) Dessine une autre surface plane contenant les droites (BC) et (AC).

Je fais le point de l'activité

Un plan est une surface plane illimitée de tous les côtés.

d) Déterminer un plan de l'espace



Activité 4

On considère la figure en perspective cavalières du pavé droit ABCDEFGH ci-contre.

1- Identifie les plans de l'espace qui contienent la droite (BC).

2- Identifie les plans qui passent par les points B, C et G.

Je fais le point de l'activité

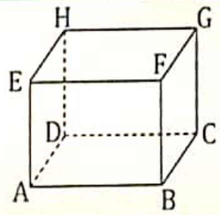
- Il existe une infinité de plans contenant une droite.
- Il existe un seul plan contenant trois points non alignés.

J'évalue mes acquis

ABCDEFGH est un cube.

a) Reproduis ce cube.

b) Représente en couleur verte le plan déterminé par les points A, B et C.



e) Droite contenue dans un plan

Activité 5

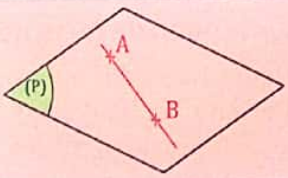
Soient A et B deux points distincts appartenant à un plan (P).

1- Trace la droite (AB).

2- Identifie un plan contenant la droite (AB).

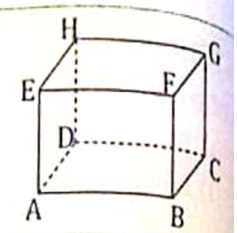
Je fais le point de l'activité

(P) est un plan. Si $A \in (P)$ et $B \in (P)$, alors la droite (AB) est contenue dans le plan (P) et on note $(AB) \subset (P)$.



J'évalue mes acquis

On considère le cube ABCD EFGH ci-contre :
Justifie que la droite (EG) est contenue dans le plan (EFG).



2- POSITIONS RELATIVES

2-1 Position relative de deux plans de l'espace

ACTIVITÉ 6

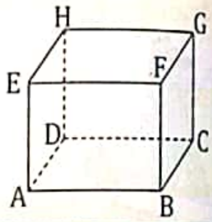
(P) et (Q) sont deux plans de l'espace.
1- Détermine l'intersection de (P) et (Q) en considérant les cas suivants :
   a) On peut trouver trois points non alignés A, B, C appartenant à (P) et (Q).
   b) On peut trouver deux points distincts A et B dans (P) et (Q) mais jamais trois points non alignés
   c) Examine les autres cas.
2- Détermine la position relative de (P) et (Q).

Je fais le point de l'activité

Deux plans de l'espace sont soit confondus, soit sécants, soit disjoints.

J'évalue mes acquis

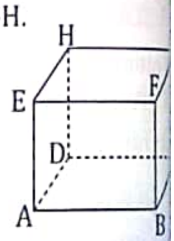
Dans le parallélépipède rectangle représenté ci-contre, détermine l'intersection des plans suivants :
   a) (ABC) et (CDA).
   b) (AEH) et (DHG).
   c) (AEG) et (CGH).



2-2 Position relative de deux droites de l'espace

ACTIVITÉ 7

On considère la représentation en perspective cavalière ci-contre du cube ABCDEFGH.
   a) Identifie un plan contenant les droites (BF) et (CG).
   b) Détermine la position relative des droites (BF) et (CG).
   c) Dis si il est possible de trouver un plan contenant (BD) et (CG).
   d) Détermine les positions relatives de deux droites dans l'espace.

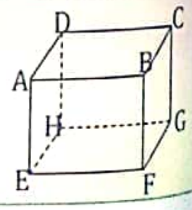


Je fais le point de l'activité

- Deux droites de l'espace peuvent être non coplanaires.
- Deux droites de l'espace peuvent être coplanaires. On distingue alors deux cas :
    - Elles sont parallèles ;
    - Elles sont sécantes.

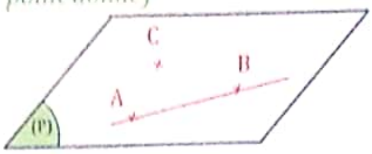
J'évalue mes acquis

On considère le cube ci-contre.
Détermine la position relative des droites (BF) et (AC).



Activité 8 *(Droite parallèle à une droite et passant par un point donné)*

On considère la figure ci-contre :
Démontre qu'il existe une droite et une seule passant par C et parallèle à (AB).



Je fais le point de l'activité

Par un point donné de l'espace, il passe une droite et une seule parallèle à une droite donnée.

J'évalue mes acquis

Soit le plan (EFG).
Indique le nombre de droites de l'espace qui sont parallèles à la droite (EF) et qui passent par le point G.

2-3 Position relative d'une droite et d'un plan

Activité 9

Soit (D) une droite et (P) un plan de l'espace.
Détermine les intersections possibles de (D) et de (P) en examinant les cas suivants :
1- Deux points distincts A et B de (D) appartienent à (P).
2- Un seul point A de (D) appartient à (P).
3- Aucun point de (D) n'appartient à (P).

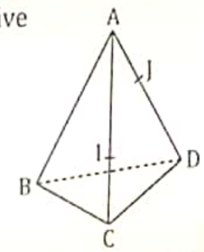
Je fais le point de l'activité

L'intersection d'une droite (D) et d'un plan (P) est soit :
- La droite (D) ; • Un singleton ; • L'ensemble vide

Lorsque l'intersection d'une droite (D) et d'un plan (P) est la droite (D) ou l'ensemble vide, on dit que la droite (D) est parallèle au plan (P). On écrit (D)//(P). Dans le cas contraire, (D) est sécante au plan (P).

J'évalue mes acquis

Dans le tétraèdre ABCD ci-contre, donne la position relative de la droite et du plan dans les cas suivants :
a) Droite (AC) et plan (ABD).
b) Droite (IJ) et plan (BCD).
c) Droite (IJ) et plan (ADC).



Activité 10 *(Caractérisation d'une droite et d'un plan de l'espace)*

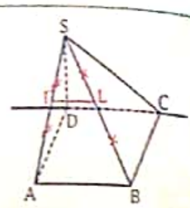
Soit (D) une droite et (P) un plan de l'espace.
1- On suppose que (D) est inclu dans (P). démontre que (D) est parallèle à (P) si et seulement elle est parallèle à une droite (Δ) de (P). On suppose dans toute la suite que (D) n'est pas inclus dans (P).
2- On suppose que (D) est parallèle à (P).
Soit A un point de (P).
a) Démontre que A et (D) déterminent un plan (Q).
b) Démontre que les plans de (P) et (Q) sont sécants suivant une droite.
a) Démontre que (D) est parallèle à (Δ).
3- On suppose que (P) contient une droite (Δ) parallèle à (D).
a) Justifie que (D) et (Δ) déterminent un plan (R).
b) Justifie que (Δ) est l'intersection de (P) et (R).
c) Justifie que (D) est parallèle à (P).

Je fais le point de l'activité

Une droite est parallèle à un plan si et seulement si elle est parallèle à une droite de ce plan.

J'évalue mes acquis

SABCD est une pyramide à base carrée.
I et J les milieux respectifs des côtés [AS] et [BS].
Démontre que la droite (IJ) est parallèle au plan (ABC).



Activité 11 *(Diverses déterminations d'un plan)*

1- Soit (D) une droite et A un point n'appartenant pas à (D). On se propose de démontrer qu'il exis
un plan et un seul contenant A et (D).
Soit B et C deux points distincts de (D).
a) Démontre qu'il existe un plan (P) et un seul contenant A, B et C.
b) Conclus.

2- Soit (D) et (Δ) deux droites sécantes.
On se propose de démontrer qu'il existe un plan (Q) et un seul contenant (D) et (Δ). Soit un point
(Δ) n'appartenant pas (D).
a) Démontre qu'il existe un plan (Q) et un seul contenant A et (D).
b)Justifie que (Δ) est contenue dans (Q).
c) Conclus.

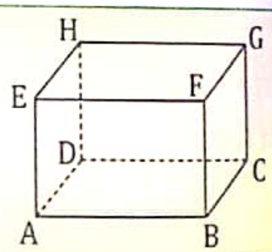
3- Soit (D) et (Δ) deux droites parallèles disjointes.
On se propose de démontrer qu'il existe un plan (R) et un seul contenant (D) et (Δ).
Soit A un point de (Δ).
a) Démontre qu'il existe un plan (R) et un seul contenant A et (D).
b) Démontre que (Δ) est inclus dans (R).
c) Conclus.

Je fais le point de l'activité

Un plan est déterminé par :
- trois points non alignés ;
- Une droite et un point n'appartenant pas à cette droite ;
- deux droites sécantes ;
- deux droites parallèles disjointes.

J'évalue mes acquis

On considère le cube ci-contre.
1- Justifie que H et (AB) détermine un plan.
2- Justifie que les droites (DH) et (AD)détermine un plan.
3- Justifie que les droites (AB) et (HG) détermine un plan.



2-4 Parallélisme dans l'espace

Activité 12 *(Théorème du toit)*

Soit (P) et (Q) deux plans sécants et (D) leur droite d'intersection.
On se propose de démontrer que si une droite (Δ) est parallèle à (P) et (Q) alors elle est parallèle à (
Soit A un point de (D).
1- Démontre que toute parallèle (D') à (Δ) passant par A est incluse dans (P) et dans (Q).
2- Déduis-en que (Δ) est parallèle à (D).

Je fais le point de l'activité

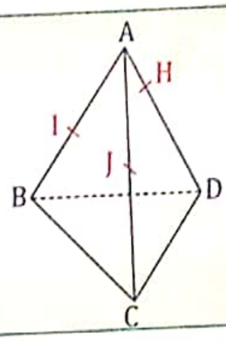
Si une droite est parallèle à deux plans sécants, alors elle est parallèle à leur droite d'intersection.

J'évalue mes acquis

On considère le tétraèdre ABCD ci-contre.
Soit I le milieu de [AB], J le milieu de [AC] et
H un point du segment [AD] distinct de son milieu.

- les droites (HI) et (DB) se coupent en M.
- les droites (HJ) et (DC) se coupent en N.

Démontre que les droites (IJ) et (MN) sont parallèles.



Activité 13

(P_1) et (P_2) sont deux plans parallèles et (P) un plan de l'espace.
On se propose de démontrer que si (P) est sécant à (P_1) suivant une droite (D_1) alors (P) est sécant à (P_2) suivant une droite (D_2) et que (D_1) et (D_2) sont parallèles.

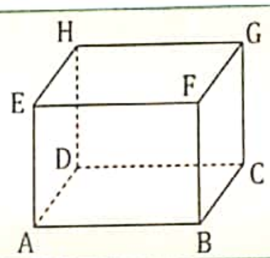
1- Examine le cas où (P_1) et (P_2) sont confondus. On suppose dans la suite que (P_1) et (P_2) sont parallèles disjoints.
2- Par le raisonnement par absurde, démontre que si (P) est sécant à (P_1) alors (P) est aussi sécant à (P_2).
3-
   a) Soit (D_1) (respectivement (D_2)) la droite d'intersection (P) avec (P_1) (respectivement (P_2)).
   b) Démontre que (D_1) et (D_2) sont coplanaires.
   c) Par le raisonnement par absurde, démontre que si (D_1) et (D_2) sont sécantes en un point A alors A appartient à (P_1) et (P_2).
   d) Conclus.

Je fais le point de l'activité

Si deux plans sont parallèles, tout plan sécant à l'un est sécant à l'autre et les droites d'intersection sont parallèles.

J'évalue mes acquis

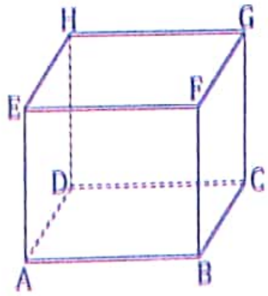
On considère le cube ci-contre.
Démontre que les droites (AC) et (EG) sont parallèles.



3- Section d'un solide par un plan

Activité 14

Dans le pavé ci-contre, le point I est un point de l'arête [EF] et le point J un point de l'arête [FG].



a) Justifie que la droite (IJ) est la droite d'intersection des plans (AIJ) et (EFG).
b) Justifie que la droite d'intersection des plans (AIJ) et (ABC) est la parallèle à (IJ) passant par A.
c) Détermine alors l'intersection de chaque face du pavé avec le plan (AIJ).

Je fais le point de l'activité

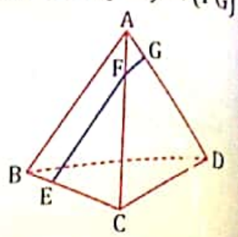
Lorsqu'on trace les droites d'intersection du plan (AIJ) avec chaque face du pavé, on conserve les segments inclus dans ces faces. On obtient ainsi la section plane du pavé par le plan (AIJ).

J'évalue mes acquis

On considère le tétraèdre ABCD ci-contre dans lequel (EF) est parallèle à (AD) et (FG) est parallèle à (BC).

a) Démontre que la parallèle à la droite (AD) passant par G est contenue dans le plan (EFG).

b) Construis la section du tétraèdre par le plan (EFG).



II- RESUME DE COURS

1- Droite et plan de l'espace

DÉFINITION 1

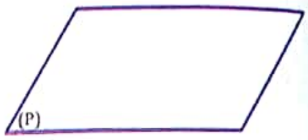
Une droite de l'espace est une ligne droite illimitée.

Exemple

DÉFINITION 2

Un plan de l'espace est une surface plane illimitée.

Exemple

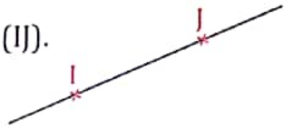


PROPRIÉTÉ

Par deux points distincts de l'espace, il passe une droite et une seule.

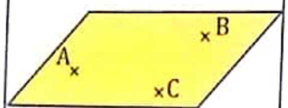
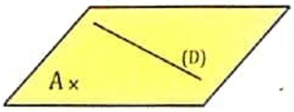
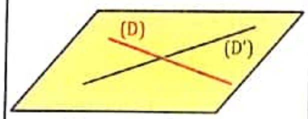
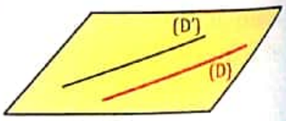
Exemple

Deux points distincts I et J déterminent une unique droite notée (IJ).



PROPRIÉTÉ

Par trois points non alignés de l'espace, il passe un plan et un seul.
Un plan peut donc être défini :

• Soit par trois points non alignés :	• Soit par une droite et un point n'appartenant pas à cette droite :	• Soit par deux droites sécantes :	• Soit par deux droites strictement parallèles :
			

NOTATION

L'unique plan déterminé par trois points non alignés A, B et C est noté (ABC).

REMARQUES Toutes les propriétés de la géométrie plane sont vraies dans tout plan de l'espace.

Définition

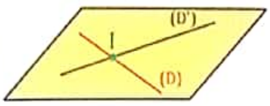
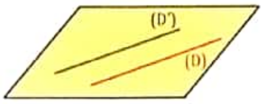
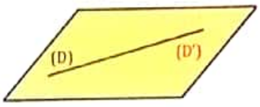
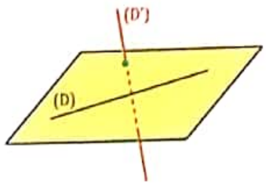
Deux droites de l'espace sont coplanaires si elles sont incluses (ou contenues) dans un même plan.

2- Positions relatives dans l'espace

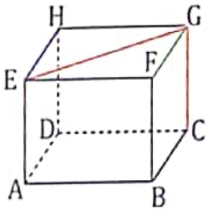
a) Positions relatives de deux droites de l'espace

Propriété

Les positions relatives de deux droites (D) et (D') sont les suivantes :

(D) et (D') sont coplanaires			(D) et (D') sont non coplanaires.
(D) et (D') sont sécantes.	(D) et (D') sont parallèles.		
 (D) et (D') sont **sécantes** en un point I.	 (D) et (D') sont **strictement parallèles.**	 (D) et (D') sont **confondues.**	

__Exemple__



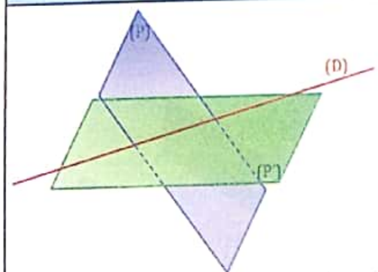
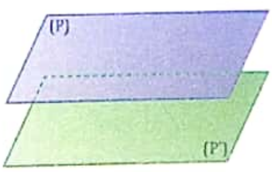
La figure ABCDEFGH ci-contre est un cube.

- Les droites (EG) et (GC) sont sécantes en G.
- Les droites (AD) et (BC) sont parallèles.
- Les droites (EH) et (GC) sont non coplanaires.

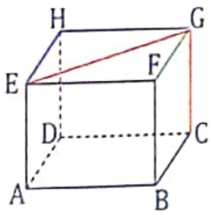
b) Positions relatives de deux plans de l'espace

Propriété

Deux plans (P) et (P') de l'espace sont soit sécants, soit parallèles.

(P) et (P') sont sécants	(P) et (P') sont parallèles	
 (P) et (P') sont sécantes suivant une droite (D).	 (P) et (P') sont strictement parallèles.	 (P) et (P') sont confondus.

__Exemple__

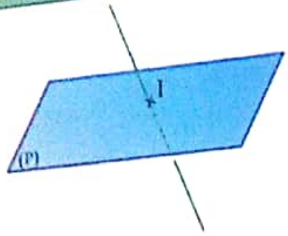
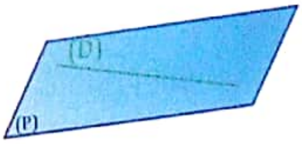
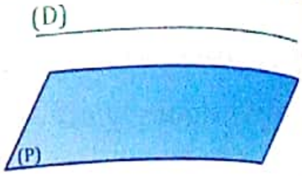


La figure ci-contre ABCDEFGH est un cube.

- Les plans (EFG) et (FBC) sont sécants suivant la droite (FG).
- Les plans (EFG) et (ABH) sont sécants suivant la droite (GH).
- Les plans (EFG) et (ADC) sont parallèles.
- Les plans (EFC) et (CDE) sont confondus.

PROPRIÉTÉ

Une droite est soit sécante à un plan soit parallèle à ce plan.

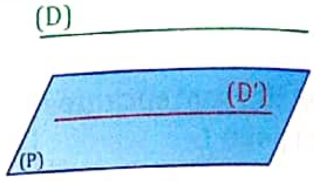
(D) est sécante à (P)	(D) est parallèle à (P)	
		
(D) est sécante à (P) en I.	(D) est incluse dans le plan (P).	(D) est strictement parallèles à (P).

3- Parallélisme dans l'espace

a) Caractérisation d'une droite parallèle à un plan

PROPRIÉTÉ

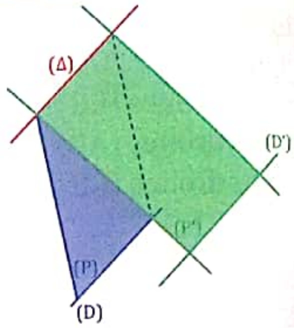
Une droite est parallèle à un plan si et seulement si elle est parallèle à une droite de ce plan.



b) Droites parallèles à un plan

PROPRIÉTÉ

Si une droite (D) est parallèle à une droite (D') contenue dans un plan (P), alors (D) est parallèle au plan (P).



Théorème du « toit »

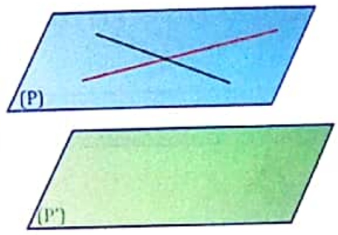
PROPRIÉTÉ

Si une droite est parallèle à deux plans sécants, alors elle est parallèle à leur droite d'intersection.

c) Plans parallèles(caractérisation)

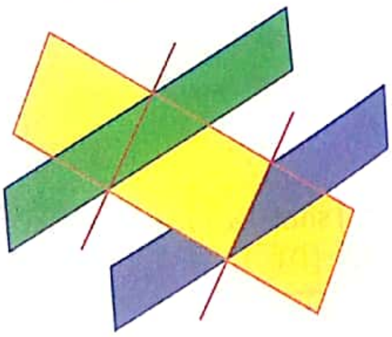
PROPRIÉTÉ 1

Deux plans sont sécants si et seulement si l'un contient deux droites parallèles à l'autre et sécantes entre elles.



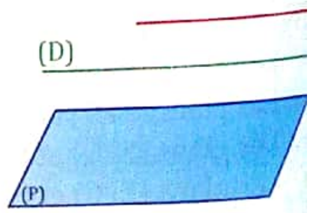
PROPRIÉTÉ 2

Si deux plans sont parallèles, tout plan sécant à l'un est sécant à l'autre, et leurs intersections sont deux droites parallèles.



PROPRIÉTÉ

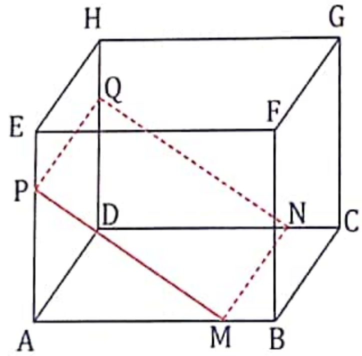
Si une droite (D) est parallèle à un plan alors toute droite parallèle à cette droite est parallèle à ce plan.



III- MÉTHODE

- Pour justifier :
  - que deux droites sont coplanaires, il suffit de trouver le plan qui les contient.
  - que deux droites ne sont pas coplanaires ; dans un plan (P) déterminé par la droite (D) et un point de (D'), on cite un point de (D') qui n'appartient pas à (P).
- Pour construire l'intersection de deux droites de l'espace ; une fois qu'on sait qu'elles sont coplanaires et non parallèles, on détermine le point d'intersection par "le prolongement" des deux droites.
- Pour justifier :
  - qu'une droite (D) est parallèle à un plan (P), il suffit de trouver une droite (D') incluse dans(P) qui soit parallèle à (D) ;
  - qu'une droite (D) est sécante à un plan (P) , il suffit de trouver un point A appartenant à la fois à (D) et à (P), puis un point B appartenant à (D) et n'appartenant pas à (P).
- Pour construire l'intersection d'une droite (D) et d'un plan (P), il suffit de trouver un plan (Q) contenant (D) et sécant à (P) suivant une droite (Δ) et de construire le point d'intersection de la droite (Δ) et de la droite (D) .
- Pour construire l'intersection de deux plans sécants il suffit de déterminer deux points de la droite d'intersection. Pour cela, on choisit deux droites de (P) et on détermine leurs points d'intersection avec (Q).
- Pour construire l'intersection d'un plan (P) et d'un solide (S), il suffit de construire l'intersection éventuelle de (P) avec les différentes faces du solide.
- Pour démontrer qu'une droite (D) est parallèle à un plan (P), il faut démontrer que la droite (D) est parallèle à une droite de (P).

Exemple



On veut construire la section du cube ABCDEFGH avec le plan (MNP) où M, N et P appartiennent respectivement aux segments [AB], [DC], [AE].

Démarche : pour construire cette section, on trace la parallèle à la droite (PM) passant par N, cette parallèle est incluse dans le plan (DHG) mais aussi au plan (PMN), donc c'est bien l'intersection des plans (PMN) et (DHG), le point d'intersection de cette parallèle avec la droite (HD) est un point Q qui appartient au plan (AEH), en joignant le point avec le point P on obtient l'intersection de la face (AEH) du cube avec le plan (PMN).

Justification : les propriétés utilisées :

Deux droites parallèles sont dans un même plan.

Si deux points distincts appartiennent tous deux à deux plans sécants alors la droite qui passe ces deux points est l'intersection de ces deux plans.

IV- SAVOIR-FAIRE

Savoir-faire 1- Déterminer les positions relatives de deux droites, d'une droite et d'un plan, de deux plans

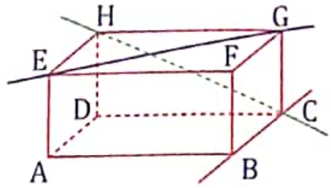
ENONCÉ

Dans le pavé droit ABCDEFGH ci-contre, donne la position relative :

a) Des droites (EG) et (BC) ;

b) Des plans (ABF) et (BCG) ;

c) De la droite (CH) et du plan (ABD).



SOLUTION COMMENTÉE

a) Position des droites (EG) et (BC)

Les droites (EG) et (BC) sont respectivement incluses dans deux plans strictement parallèles (EFG) (ABC). Donc elles n'ont pas de point commun. De plus, elles ne sont pas parallèles, donc elles sont n coplanaires.

b) Position des plans (ABF) et (BCG)

Les plans (ABF) et (BCG) ne sont pas disjoints car ils ont le point B en commun ni confondus puisque point G n'appartient pas au plan (ABF). Ils sont donc sécants. Le point B et le point F appartiennent a deux plans donc (ABF) et (BCG) sont sécants et leur droite d'intersection est (BF).

c) Position relative de la droite (CH) et du plan (ABD)

La droite (CH) nest pas disjointe du plan (ABD) car C appartient à (CH) et à (ABD). Elle n'est pas conten dans le plan (ABD) car H appartient à (CH) mais pas au plan (ABD). (CH) est sécante à (ABD) en C.

Savoir-faire 2- Déterminer les positions relatives de droites et de plans.

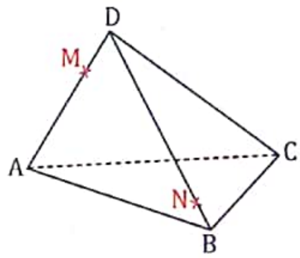
ENONCÉ

Dans le tétraèdre ABCD ci-contre, les points M et N appartiennent respectivement aux arêtes [AD] et [BD].
Précise la position relative:

a) Des droites (MN) et (AB) ;

b) Des droites (AC) et (BD) ;

c) De la droite (BD) et du plan (ANC).



SOLUTION COMMENTÉE

a) Je précise la position relative de (MN) et (AB)

On sait que : M ∈ [AD] et N ∈ [BD]. M et N appartiennent donc au plan (ABD). Ainsi les droites (MN) (AB) sont dans ce plan : elles sont coplanaires.
De plus, elles ne sont pas parallèles car elles ne le sont pas en perspective cavalière : (MN) et (AB) s donc sécantes.

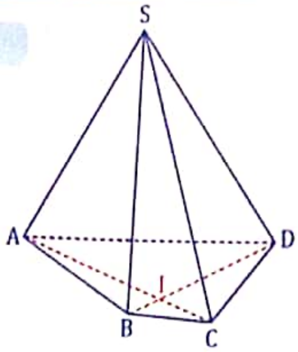
b) Je précise la position relative de (AC) et (BD)

Les droites (AC) et (BD) ne sont pas sécantes sinon A, B, C et D seraient dans un même plan et le tétraè serait « aplati ».
Ni parallèles, ni sécantes, les droites (AC) et (BD) ne sont pas coplanaires.

c) Je précise la position relative de la droite (BD) et du plan (ANC).

Le point N appartient à la droite et au plan (ANC). De plus, le point D n'appartient pas au plan (ANC). droite (BD) coupe donc le plan (ANC) au point N.

Savoir-faire 4- Déterminer les positions relatives de droites et de plans



Énoncé

Sur la figure ci-contre, SABCD est une pyramide de sommet S

et de base ABCD. Les droites (AC) et (BD) se coupent en I.

Détermine l'intersection des plans (SAC) et (SBD).

Solution commentée

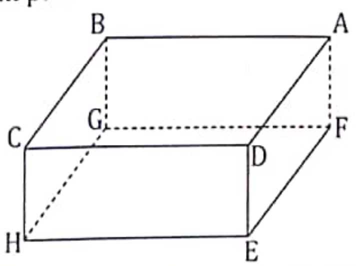
- Les plans (SAC) et (SBD) ont le point S en commun et ne sont ni confondus ni parallèles.
- La droite (AC) est dans le plan (SAC) et I est un point de (AC), donc I appartient au plan (SAC).
- De même, puisque I est un point de (BD) et que (BD) est dans le plan (SBD), I est aussi dans ce plan. Ainsi I est commun à (SAC) et (SBD).
- On conclut ainsi que l'intersection des plans (SAC) et (SBD) est donc la droite (SI).

V- JE M'EXERCE

1-Exercices de fixation / application

Connaitre la position relative d'une droite et d'un plan

1 On considère la figure ci-dessous où ABCDEFGH est la représentation en perspective cavalière d'un pavé droit.



Répondre par vrai ou par faux à chacune des affirmations dans le tableau ci-après.

Affirmations	Reponse
La droite (HF) est parallèle au plan (ABC).	
La droite (AD) est sécante au plan (BCH).	
La droite (AH) est parallèle au plan (FGH).	
La droite (BC) est parallèle au plan (ABC).	
La droite (EF) est parallèle au plan (BCH).	
La droite (AF) est parallèle au plan (ADE).	
La droite (GF) est sécante au plan (ADH).	

Connaitre la propriété sur les positions relatives d'une droite et d'un plan

2 Dis si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifie ta réponse avec un cube.

a) Deux droites de l'espace sont sécantes ou parallèles.

b) Dans l'espace, une droite (D) et un point n'appartenant pas à (D) définissent un plan.

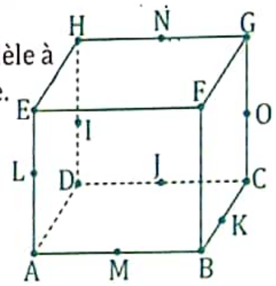
c) Par un point de l'espace, il ne « passe » qu'un plan parallèle à un plan donné.

d) Dans l'espace, trois droites concourantes sont coplanaires.

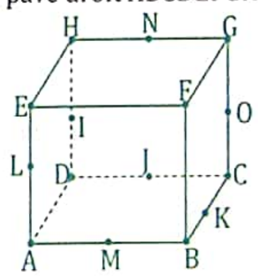
Connaitre la position relative de deux plans dans l'espace

3 Le plan (JKO) est parallèle à un seul des plans ci-contre. Identifie ce plan :

1. (EMJ)
2. (BCE)
3. (BGE)



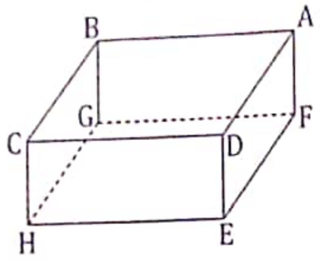
4 On considère la représentation en perspective cavalière du pavé droit ABCDEFGH.



Les points I, J, K, L, M, N, O, I, J, K, L, M, N et O sont les milieux des arêtes. Parmi les propositions de position relative ci-dessous, une seule correspond à la position relative des plans (LIH)et (KGC). Choisis cette position.

a. Parallèles b. Sécants c. Confondus

5 On considère la figure ci-dessous où ABCDEFGH est la représentation en perspective cavalière d'un pavé droit.



Répondre par vrai ou par faux à chacune des affirmations dans le tableau ci-dessous :

N°	Affirmations	Réponses
1	Les plans (CDE) et (ADF) sont sécants.	
2	Les plans (GHE) et (ADH) sont sécants.	
3	Les plans (ADE) et (BCH) sont parallèles.	
4	Les plans (BCD) et (EFG) sont parallèles.	
5	Les plans (BDE) et (GHE) sont sécants.	
6	Les plans (BDE) et (GHE) sont parallèles.	

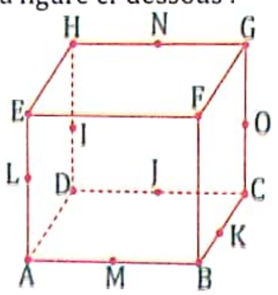
Connaître la position relative de deux plans dans l'espace

6 Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations contenues dans le tableau ci-dessous.

N°	Affirmations	Réponses
1	Dans l'espace, deux plans parallèles sont toujours disjoints.	
2	Dans l'espace, deux plans se coupent en un point.	
3	Dans l'espace, deux plans parallèles sont confondus.	
4	Dans l'espace, deux plans confondus sont parallèles.	
5	Dans l'espace, si deux plans sont sécants toute droite dans l'un est sécante à toute droite dans l'autre.	
6	Dans l'espace, deux plans sont soit sécants soit parallèles.	

Connaître la propriété relative au parallélisme de deux droites

7 Observe la figure ci-dessous :

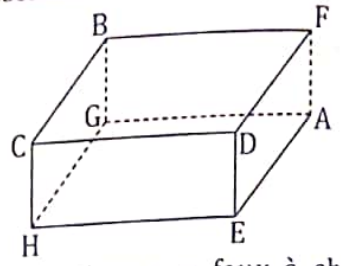


Recopie et complète la phrase ci-dessous avec mots ou expressions suivants :
« **Parallèles** » ; « **coplanaires** » et « **parallèles disjoints** » afin d'obtenir une affirmation vrai

« Les droites (HE)et (FG) sont : ....

« Les droites (LM) et (IJ) sont : ....

8 On considère la figure ci-dessous où ABCDE est la représentation en perspective cavalière d pavé droit.



Réponds par vrai ou par faux à chacune affirmations dans le tableau ci-dessous.

N°	Affirmations	Répon
1	Les droites (BC) et (EF) sont parallèles.	
2	Les droites (BC) et (AD) sont sécantes.	
3	Les droites (CD) et (AF) sont parallèles.	
4	Les droites (HF) et (AC) sont coplanaires.	
5	Les droites (EG) et (AC) sont sécantes.	
6	Les droites (EG) et (HF) sont sécantes.	
7	Les droites (CH) et (EF) ne sont ni parallèles ni sécantes.	
8	Les droites (BE) et (AH) sont sécantes.	

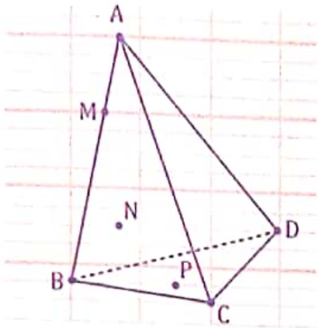
Connaître les propriétés relatives au parallélisme deux droites

9 Réponds par vrai ou par faux à chacune affirmations dans le tableau ci-dessous.

1	Dans l'espace, deux droites disjointes sont parallèles.	
2	Dans l'espace, deux droites non coplanaires sont sécantes.	
3	Dans l'espace, deux droites coplanaires sont toujours parallèles.	
4	Dans l'espace, deux droites coplanaires sont toujours sécantes.	
5	Dans l'espace, deux droites coplanaires sont soit sécantes soit parallèles.	
6	Dans l'espace, deux droites sont soit sécantes soit parallèles.	

Déterminer la section plane d'un solide par un plan

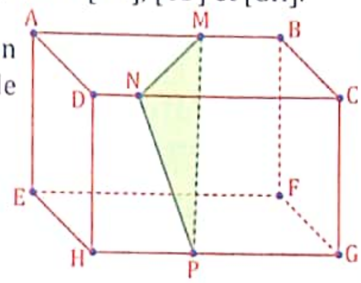
10 ABCD est un tétraèdre. M est un point du segment [AB] et P un point de la face BCD.
Soit N un point de la face ACB tel que (MN) soit parallèle à (AC).



Construis la section du tétraèdre ABCD par le plan (MNP).

11 ABCDEFGH est un pavé droit.
M, N et P sont des points qui appartiennent respectivement aux arêtes [AB], [CD] et [GH].

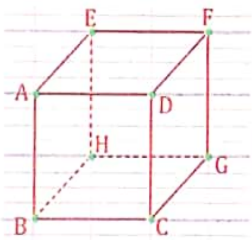
Détermine la section du pavé droit par le plan (MNP).



Justifier les que des droites sont coplanaires

12 On considère la figure ci-dessous .

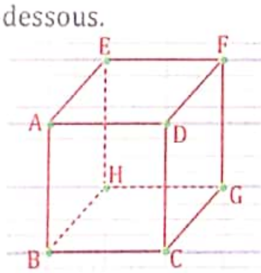
1- Justifie que les droites (AB) et (GF) sont coplanaires.
2- Démontre que les droites (AC) et (EG) sont coplanaires.



Justifier que les deux droites ne sont pas coplanaire

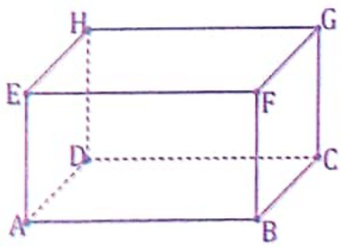
13 On considère la figure ci-dessous.

1- Justifie que les droites (DG) et (AE) sont coplanaires.
2- Démontre que les droites (HG) et (DC) sont coplanaires.



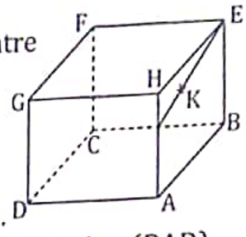
Justifier qu'une droite est sécante à un plan

14 On considère la figure ci-contre où ABDEFGH est la représentation en perspective cavalière d'un pavé droit.



Justifie que la droite (AG) est sécante au plan (HFB).

15 On considère la figure ci-contre où ABCDEFGH est la représentation en perspective cavalière d'un pavé et K un point situé sur la face ABEH et à l'intérieur du triangle AEH.

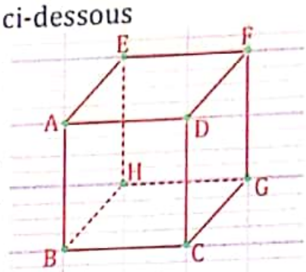


Justifie la droite (EK) est sécante au plan (BAD).

Justifier qu'une droite est parallèle à un plan

16 On considère la figure ci-dessous

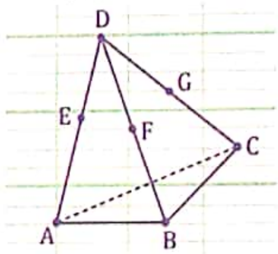
1- Justifie que la droite (DG) est parallèle au plan (AEH) .
2- Démontre que la droite (AF) et (BCG) ne sont pas coplanaires.



Justifier que deux plans sont parallèles

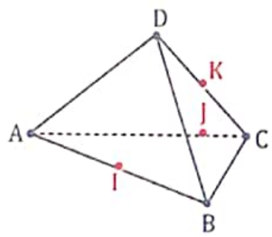
17 On considère le tétraèdre ABCDABCD ci-dessous où les points E, F et G appartiennent respectivement aux arêtes [DA] [DC] et [DB] tels que les droites (EF) et (AB) sont parallèles et les droites (FG) et (BC) sont parallèles.

Justifie que les plans (EFG) et (ABC) sont parallèles.



Justifier que deux plans sont sécants

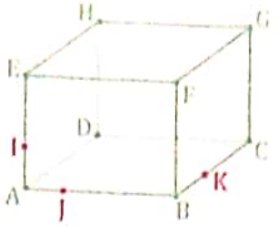
18 On considère la figure ci-dessous.



1- Justifie que les plans (ADB) et (IJK) sont sécants.
2- Construis la droite d'intersection des plans (ADB) et (IJK).

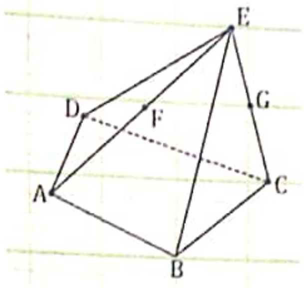
2-Exercices de renforcement / approfondissement

19 Détermine la section du cube ABCDEFGH ci-dessous par le plan (IJK).

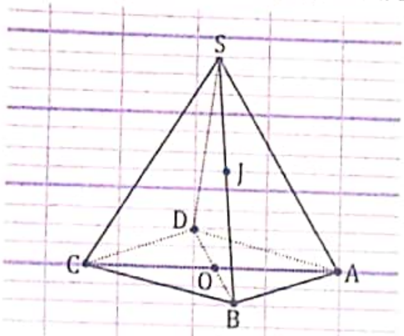


20 ABCDE est une pyramide. Le point F est le milieu du segment [EA] et G est le milieu du segment [EC].

Démontre que la droite (FG)et le plan (ABC) sont parallèles.



21 ABCDE est une pyramide telle que la base BCDA soit un parallélogramme de centre O. I est milieu du segment [AS]. J est le milieu du segment [SB].

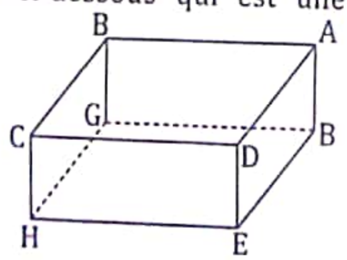


1. Précise les intersections dans chacun des cas ci-dessous :
   a) du plan (CBS) et du plan (SAB).
   b) du plan (SBD) et du plan (SAC).
   c) de la droite (SO) et du plan (BAD).
   d) de la droite (DJ) et de la droite (SO).

2- Démontre que la droite (IJ) et la droite (CD) sont parallèles.
Déduis-en l'intersection des plans (ABS) et (CID).

3- Démontre que la droite (IJ) et le plan (ABC) sont parallèles.

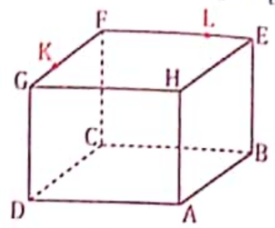
22 Observe la figure ci-dessous qui est une représentation en perspective cavalière d'un pavé droit.



1- Démontre que les droites (HE) et (AB) so
coplanaires.

2- Justifie que les droites (AH) et (BE) so
sécantes.

23 Observe la figure ci-dessous qui est une repr
sentation en perspective cavalière d'un cube.
ABCDEFGH est un cube. K et L appartienne
respectivement aux arêtes [FG] et [FE].



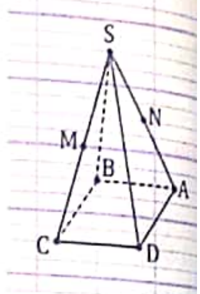
1- Justifie que le point B appartient à (Δ).

2- Détermine est l'intersection des plans (KLB)
(EFG).

3- Donne la position relative des plans (ABC)
(EFG) ; En déduire la position relative d
droites (Δ) et (KL).

4- Reproduis la figure et construis (Δ).

24 Sur la figure ci-contre, SABCD est une pyramide à base carré M est le milieu de [SC] et N est le milieu de [SA].



1) Démontre que les droites (MN) et (AC) sont parallèles.

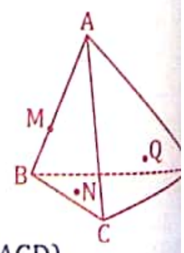
2) Déduis-en la position de la droite (MN) p
rapport au plan (ABC).

On considère un point K de l'arête [SA] tel que
$AK = \frac{1}{3} AS$.

3) Démontre que la droite (MK) est sécante
plan (ABC).

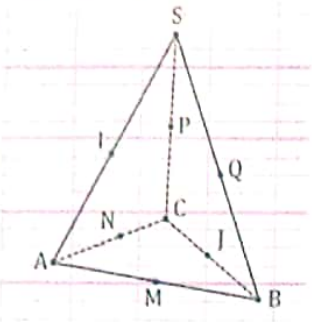
4) Reproduis la figure et construis le po
d'intersection de (MK) et (ABC).

25 Sur la figure ci-contre, ABCD est un tétraèdre. M est un point de l'arête [AB], N est un point du plan ABC tel que (MN) n'est ni parallèle à (AC) ni parallèle à (BC). Q est un point du plan (ACD).
Construis la section du tétraèdre ABCD par le pl
(MNQ).



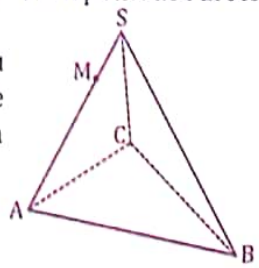
26 Sur la figure ci-contre, SABC est un tétraèdre et les points M, N, P, Q, I et J les milieux respectifs des arêtes [SA], [AC], [SC], [SB], [SA] et [BC].

1) Démontre que les droites (NQ) et (MP) sont sécantes.
2) Justifie que les droites (IJ) et (MP) sont sécantes.
3) Démontre que les droites (NQ) (MP) et (IJ) sont concourantes.



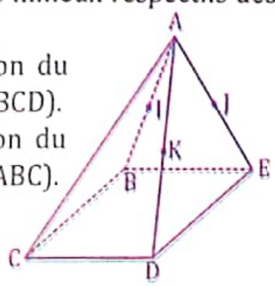
27 SABC est un tétraèdre. M est un point de l'arête [AS].

1- Construis la section du tétraèdre SABC par le plan (P) parallèle au plan (ABC) et contenant M.
2- Justifie ta construction.

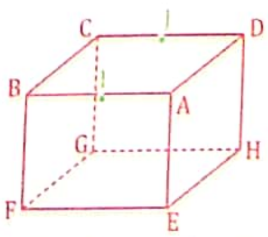


28 Sur la figure ci-dessous, ABCDE est une pyramide dont la base BCDE est un parallélogramme. Les points I, J et K sont les milieux respectifs des arêtes [AB], [AE] et [AD].

1- Détermine l'intersection du plan (DIJ) avec le plan (BCD).
2- Détermine l'intersection du plan (DIJ) avec le plan (ABC).
3- Démontre que le plan (IJK) coupe le segment [AC] en son milieu.



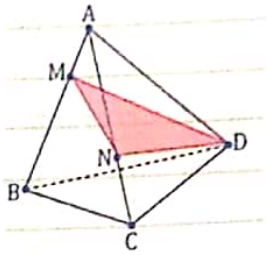
29 ABCDEFGH est un cube. I est le milieu de [AB] et J est le milieu de [CD].



Détermine dans chacun des cas suivants, l'intersection des deux plans.

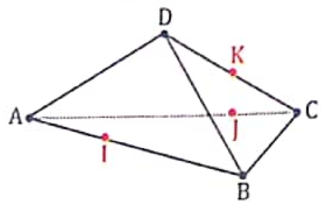
1- Le plan (AIE) et le plan (BIG).
2- Le plan (ADI) et le plan (BJC).
3- Le plan (HEF) et le plan (BJC).
4- Le plan (HEF) et le plan (ACG).

30 ABCD est un tétraèdre. M un point de l'arête [AB] autre que A ou B et N un point de l'arête [AC] autre que A et C. Les droites (MN) et (BC) ne sont parallèles.



1- Justifie les plans (DMN) et (DBC) sont sécants.
2- Construis l'intersection des plans (DMN) et (DBC).

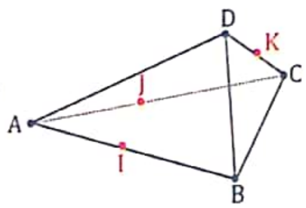
31 I et K sont les milieux respectifs des segments [AB] et [DC]. J est un point du segment [AC], distinct du milieu de [AC], et distinct de A et de C.



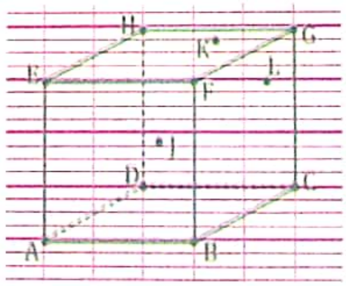
Détermine la section du tétraèdre ABCD par le plan (IJK).

32 I, J et K sont les milieux respectifs des segments [AB], [AC] et [DC].

En utilisant le théorème du toit, détermine la section du tétraèdre ABCD par le plan (IJK).



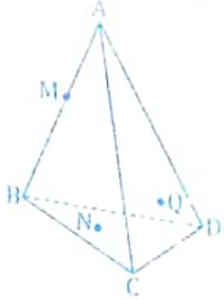
33 Dans la figure ci-dessous ABCDEFGH est un cube. J est un point de la face ABFE, K un point de la face EFGH et L un point de la face BCGF. Pour chaque question, on justifiera la construction.



1-a) Construis l'intersection des plans (BJL) et (EFGH).
b) Déduis l'intersection de la droite (JL) avec le plan (EFGH).
2- Construis la trace du plan (JKL) sur la face (EFGH).
3- Construis la section du cube ABCDEFGH par le plan (JKL).

3- Situation d'évaluation

Un tailleur de pierre précieuse a taillé une pierre de diamant sous la forme d'un tétraèdre selon la commande d'un client.
Il remarque des imperfections en des points.
Ce dernier explique la situation à son ami professeur de mathématique qui schématise la pièce de diamant avec les points de défaillance comme

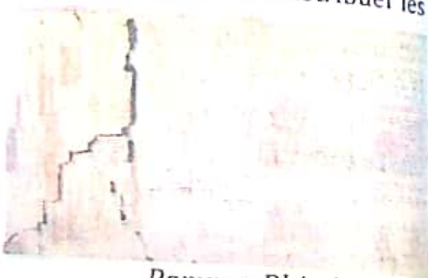


l'indique le schéma ci-contre où M est un point du l'arête [AB], N est un point de la face ABC et Q un point de la face ACD.
Pour ne pas perdre totalement le marché, le tailleur de pierre précieuse décide de sectionner suivant les trois points de défaillance.
1- Construis la section du tétraèdre par ce plan.
2- Justifie la construction.

V- RENDEZ-VOUS DES CURIEUX !

Le don du Nil

Les origines de la géométrie remontent aux babyloniens et aux égyptiens (2000 ans avant notre ère). Le théorème dit «de Pythagore» est déjà connu dans des cas particuliers. Sur des tablettes babyloniennes, on a retrouvé des problèmes à caractère géométrique (calculs d'aires) dont la résolution passe par l'algèbre (équations du second degré).
La géométrie naît des exigences de la vie pratique : architecture, fabrication et décoration d'objets, ... Mais c'est aux crues répétées du Nil qu'on attribue les origines de la géométrie. Elles contraignent les arpenteurs égyptiens à retracer régulièrement les limites des propriétés agricoles afin de redistribuer les terrains de façon équitable.
Ces arpenteurs déterminent des longueurs, des surfaces divisées en rectangles, carrés et autres triangles. Ils utilisent la corde à 13 noeuds pour marquer les angles droits et sont ainsi nommés les tendeurs de cordes.
Pour l'historien grec Hérodote (-484 ; -425), la géométrie est un don du Nil. Il faut dire également qu'à cette époque et durant tout le Ier millinaire de notre ère, la géométrie se confond avec les mathématiques puisque tout problème mathématique passe pour sa résolution par des concepts et des représentations géométriques.



Papyrus Rhind

À cette époque, on sait calculer l'aire de quadrilatères (trapèzes, rectangles) ou de triangles isocèles mais les formules de calculs ne mènent qu'à des valeurs approchées.
C'est le scribe égyptien Ahmès qui par son, aujourd'hui célèbre, Papyrus Rhind nous rapporte ces informations.

Les Ecoles grecques

Les premiers pas de la géométrie grecque se font avec <u>Thalès de Milet</u> (-624 ; -548), connu pour avoir calculé la hauteur de la <u>pyramide de Kheops</u>.
La géométrie devient déductive. Fini l'à-peu-près, les formules mènent à des valeurs exactes, les propriétés ne sont plus admises sur des exemples, mais sont démontrées dans le cas général.
Deux écoles marquent cette période :
- La Fraternité pythagoricienne de Crotone, proche d'une secte, donne une interprétation mystique des nombres. On lui attribue la découverte de l'existence d'une longueur incommensurable telle que 2 (voir <u>Pythagore</u>).
- L'Ecole d'Alexandrie, fondée en 331 avant J.C., centre intellectuel de l'époque, connaît trois des plus grands savants de l'Antiquité : <u>Euclide d'Alexandrie</u> (-320? ; -260?), <u>Archimède de Syracuse</u> (-287 ; -212) et <u>Apollonius de Perge</u> (-262 ; -190).

Euclide d'Alexandrie (-320 ? ; -260 ?) Source INTERNET

Les grandes découvertes du passé sont exposées et démontrées. Cette Ecole nous laisse une œuvre phénoménale, "Les éléments" (13 volumes), qui servira de base à la géométrie durant 2000 ans (voir <u>Euclide</u>).

6 Polynômes et fractions rationnelles

Notions essentielles :

- Généralités sur les polynômes ;
- Polynômes du second degré ;
- Factorisation par $x - a$;
- Fractions rationnelles.

SITUATION D'APPRENTISSAGE

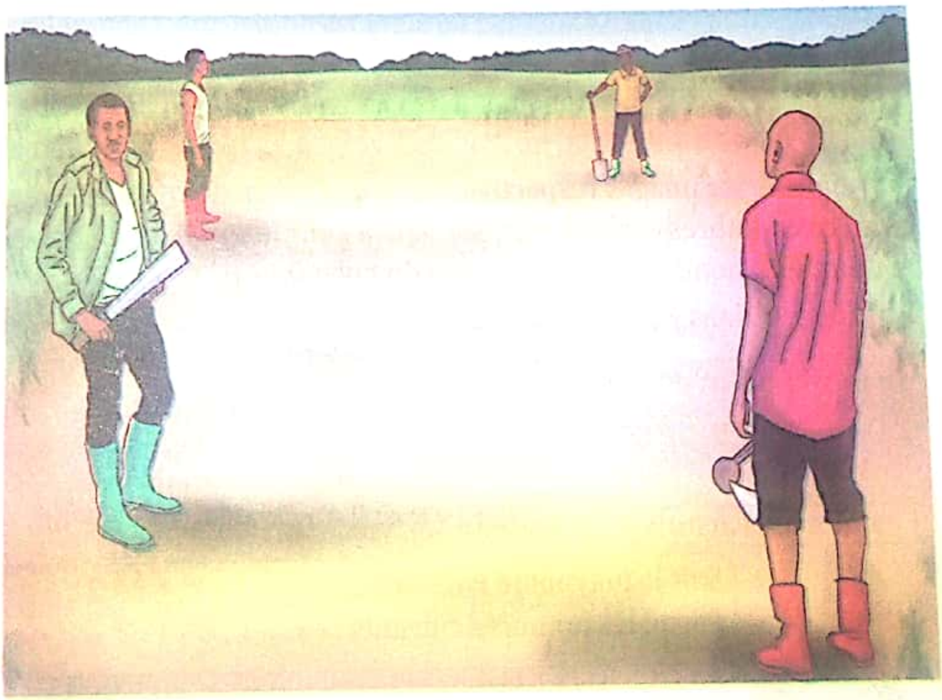
Un jeune fonctionnaire a hérité de son père un champ carré ABCD de 500 mètres de côté. Etant occupé à ses tâches administratives, il partage cette parcelle à ses quatre fils en quatre parties comme l'indique la figure ci-contre.

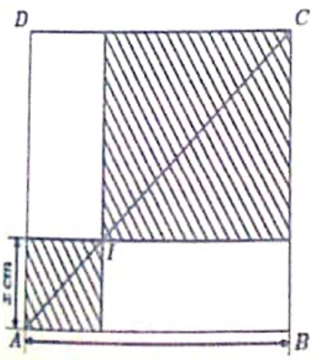
Le point I appartient à la diagonale [AC] et lesparties hachurées sont deux carrés de diagonale respectives [AI] et [IC].

Le père affirme qu'il existe une unique valeur de x pour laquelle la somme des aires de ces deux carrés vaut les trois quarts de l'aire du carré ABCD.

Curieux, ses enfants veulent savoir si cette affirmation est correcte. Ils sollicitent les élèves de ta classe.

Afin de leur donner une réponse correcte, vous décidez d'approfondir vos connaissances sur les polynômes et fractions rationnelles.





I ACTIVITÉS DE DÉCOUVERTE

A- GÉNÉRALITÉS SUR LES POLYNÔMES

1- CONNAÎTRE LA DÉFINITION D'UN POLYNÔME - CONNAÎTRE LA DÉFINITION DU DEGRÉ D'UN POLYNÔME

ACTIVITÉ 1

On considère la fonction numérique P de la variable réelle x définie par :
$P(x) = x(x^2 - 4) + (x - 2)$.

a) Développe, réduis et ordonne $P(x)$ suivant les puissances décroissantes de x.
b) Donne le terme constant.
c) Indique respectivement les termes de degré 1 et de degré 2.
d) Indique le coefficient du monôme de plus haut degré.
e) Donne le degré du polynôme P.

Je fais le point de l'activité

$x \mapsto 2x^3$ est un monôme de coefficient 2 et de degré 3 ;
$x \mapsto 2x^3 - 7x - 2$ est un polynôme réduit et ordonné suivant les puissances décroissantes de x.
c'est un polynôme de degré 3.
On appelle polynôme toute somme algébrique de monômes.

J'évalue mes acquis

Parmi les fonctions ci-dessous, indique celles qui sont des polynômes en préc[...] leur degré.

a) $x \mapsto 5x^2$; b) $x \mapsto \frac{3}{5}x^3 - 2x^2 - 5x^{-1} + 7$; c) $x \mapsto 2020$; d) $x \mapsto \sqrt{x}$.

2- CONNAÎTRE LA DÉFINITION DU ZÉRO D'UN POLYNÔME

ACTIVITÉ 2

1- Soient les polynômes $q(x) = 2x^3 - x^2 - 7x - 24$ et $t(x) = x^2 - \frac{4}{9}$.

a) Calcule les images respectives par q de chacun des nombres réels -1 ; 0 ; 2 et 3.
Parmi ces nombres réels, donne celui qui a pour image 0 par le polynôme q.
On dit que ce nombre réel est un zéro du polynôme q.

b) Résous dans $\mathbb{R}$, l'équation $t(x) = 0$.

Je fais le point de l'activité

On a $q(3) = 0$. On dit que 3 est un zéro du polynôme q.

J'évalue mes acquis

Soit le polynôme P définie par : $P(x) = x^2 + x - 2$.
Parmi les nombres suivants : -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2, indique ceux qui sont les zé[...]

3- CONNAÎTRE LA PROPRIÉTÉ RELATIVE AU PRODUIT DE POLYNÔMES

ACTIVITÉ 3

Soit P le polynôme de degré 2 défini par : $P(x) = -5x^2 + 3x - 4$.
Soit Q le polynôme de degré 1 défini par : $Q(x) = 2 - 3x$.

1- a) Calcule : $P(x)\times Q(x)$.
b) Justifie que $P(x)\times Q(x)$ est un polynôme et précise son degré.

2- Compare : $d°(PQ)$ et $d°(P) + d°(Q)$.

3- Enonce le résultat obtenu.

Je fais le point de l'activité

Le produit des deux polynômes P et Q est un polynôme noté PQ. Si ces deux polynômes sont non nuls alors $d°(PQ) = d°(P) + d°(Q)$.

J'évalue mes acquis

P et Q sont des polynômes de degrés respectifs 4 et 5.
Détermine le degré du polynôme PQ.

4- CONNAÎTRE LA PROPRIÉTÉ RELATIVE À LA SOMME DE POLYNÔMES

ACTIVITÉ 4

Soit P le polynôme de degré 3 défini par $P(x) = -2x^3 + 5x^2 + 3x - 4$.
Soit Q le polynôme de degré 2 défini par $Q(x) = x^2 + x - 1$.
Soit R le polynôme de degré 3 défini par $R(x) = x^3 + 2x - 2$.
Soit S le polynôme de degré 3 défini par $S(x) = 2x^3 - x^2 + 7$.

1- a) Calcule : P + Q ; P+ R et P + S.
b) Donne : d° (P + Q) ; d° (P + R) et d° (P + S).

2- Compare : d° (P + Q) à d°(P) et d°(Q) ; d° (P + R) à d°(P) et d°(R) ; d° (P + S) à d°(P) et d°(S).

3- Enonce ce que tu constates.

Je fais le point de l'activité

La somme de deux polynômes P et Q est un polynôme, noté P + Q.
$d°(P + Q) \leq \text{Max}(d°(P), d°(Q))$.

J'évalue mes acquis

Réponds par vrai lorsque l'affirmation est vraie ou par faux lorsque l'affirmation est fausse.
a) La somme de deux polynômes de degré 3 est un polynôme de degré 3.
b) La somme de deux polynômes de degrés 2 et 3 est un polynôme de degré 3.

5- CONNAÎTRE LA PROPRIÉTÉ RELATIVE À L'ÉGALITÉ DE DEUX POLYNÔMES

ACTIVITÉ 5

1- On suppose que, pour tout nombre réel x, $ax + b = 0$
a) Ecris les relations que l'on obtient en prenant : $x = 0$ et $x = 1$
b) Résous le système obtenu. Conclus.

2- On suppose que, pour tout nombre réel x , $ax^2 + bx + c = 0$
a) Ecris les relations que l'on obtient en prenant : $x = 0$; $x = -1$; et $x = 2$
b) Résous le système obtenu. Conclus.

3- Soit f et g deux polynômes définis par : $f(x) = ax^2 + bx + c$ et $g(x) = a'x^2 + b'x + c'$.
On suppose que, pour tout nombre réel x, $f(x) = g(x)$.
a) Détermine les coefficients du polynôme p défini par : $p(x) = f(x) - g(x)$.

b) Dis si p peut être le polynôme nul, puis déduis-en que les coefficients des termes de même degré de f et g sont identiques.

c) On suppose que les coefficients des termes de même degré des polynômes f et g sont identiques. Compare les polynômes f et g.

4- Dans chacun des cas ci-dessous, indique les valeurs des nombres a ; b et c de sorte que f et g soient deux polynômes égaux :

a) $f(x) = 5x^2 - 6x + 8$ et $g(x) = ax^2 + bx + c$

b) $f(x) = x^2 + (a - b)x - 1$ et $f(x) = ax^2 + 10x + b + c$

Je fais le point de l'activité

Deux polynômes sont égaux si et seulement si :
- Ils ont le même degré ;
- Les coefficients des termes de même degré sont égaux.

J'évalue mes acquis

Indique les valeurs des nombres a, b et c de sorte que P et Q soient deux polynômes égaux :
$P(x) = 5x^2 - 6x + 8$ et $Q(x) = ax^2 + bx + c$.

6- CONNAÎTRE LES PRODUITS REMARQUABLES

Activité 6

1- a) Développe et réduis les expressions suivantes : $(a + b)^2$; $(a - b)^2$; $(a + b)(a - b)$

b) Développe et réduis les expressions $(a + b)^3$ et $(a - b)^3$ en écrivant :
$(a + b)^3 = (a + b)(a + b)^2$ et $(a - b)^3 = (a - b)(a - b)^2$.

c) Développe et réduis les expressions suivantes : $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$; $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$.

2- Complète ces égalités ci-dessous en écrivant la forme développée et réduite :
$(x + y)^3 =$........ ; $(x - y)^3 =$........ ; $(x + y)(x^2 + xy + y^2) =$........ ; $(x - y)(x^2 - xy + y^2) =$........

Je fais le point de l'activité

Pour tous nombres réels a et b, on a :

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$; $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$; $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$

J'évalue mes acquis

Recopie et complète les égalités suivantes :

a) $(x + 2)^3 = \ldots^3 + 3 \times \ldots^2 \times \ldots + 3 \times \ldots \times \ldots^2 + \ldots^3 = \ldots + \ldots + \ldots$

b) $(x - 3t)^3 = \ldots^3 - 3 \times \ldots^2 \times (\ldots) + 3 \times \ldots (\ldots)^2 - (\ldots)^3 = \ldots + \ldots + \ldots$

c) $(x + 2)^3 = \ldots$

B- FACTORISATION PAR $x - \alpha$

7- RECONNAÎTRE LE THÉORÈME FONDAMENTAL RELATIF À LA FACTORISATION PAR $x - \alpha$

Activité 7

On donne le polynôme f défini par : $f(x) = x^3 + 5x^2 - 2x - 24$.

1- a) Calcule : $f(-4)$, $f(-3)$, $f(2)$ et $f(3)$.

b) Détermine les polynômes P, Q et R tels que : $f(x) = (x + 4)\,P(x)$, $f(x) = (x + 3)\,Q(x)$ et $f(x) = (x - 2)\,R(x)$.

c) Détermine les degrés des polynômes P, Q et R.

2- a) En t'inspirant de la division euclidienne des nombres entiers, propose la division euclidienne de $f(x)$ par $x - 3$ puis par $x - 2$.

b) Ecris $f(x)$ sous la forme $f(x) = (x - 3)\,g(x) + h(x)$ avec degré de $g(x)$ égale à 2 et degré de $h(x)$ est inférieur à degré de $g(x)$.

Je fais le point de l'activité

Le reste de la division de $f(x)$ par $x + 3$ est nul, donc il existe un polynôme Q tel que : $f(x) = (x + 3)Q(x)$.
Dans le point (2) de l'activité, on a effectué la division euclidienne du polynôme $f(x)$ par $x - 3$.

J'évalue mes acquis

P est un polynôme de degré 3, effectue dans chaque cas la division euclidienne de $P(x)$ par $x - a$.

a) $P(x) = x^2 - 5x - 6$ et $a = -1$; b) $P(x) = x^3 + 8$ et $a = -2$.

Pour chaque cas, conclus si oui ou non $P(x)$ est divisible par $x - a$.

8- FACTORISER UN POLYNÔME PAR $x - a$ (a ÉTANT UN ZÉRO) ET RECHERCHER LES ZÉROS EN UTILISANT LA MÉTHODE DE LA DIVISION EUCLIDIENNE OU DES COEFFICIENTS INDÉTERMINÉS

Activité 8

Soit P le polynôme défini par : $P(x) = 3x^3 + 11x^2 - 67x + 21$.

1- Justifie qu'il existe un polynôme Q de dégré 2 tel que : $P(x) = (x - 3)\,Q(x)$.

On se propose de déterminer $Q(x)$.

2- a) Posons : $Q(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des nombres réels tels que a est non nul.
Développe $(x - 3)\,Q(x)$ puis détermine $Q(x)$.

b) Par la division euclidienne de $P(x)$ par $(x - 3)$, détermine $Q(x)$.

3- Déduis une factorisation du polynôme $P(x)$.

Je fais le point de l'activité

Pour factoriser un polynôme dont on connaît un zéro, on peut utiliser la méthode des coefficients indéterminés ou la division euclidienne.

J'évalue mes acquis

Soit le polynôme $P(x) = x^3 + 3x^2 - 16x + 12$.
Vérifie que 2 est un zéro de $P(x)$ puis factorise $P(x)$ de deux façons différentes.

C- POLYNÔMES DU SECOND DEGRÉ

9- ECRIRE LA FORME CANONIQUE D'UN POLYNÔME DU SECOND DEGRÉ

Activité 9

Soit F le polynôme du second degré défini par : $F(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

1- Développe $(x + \frac{b}{2a})^2$, puis détermine le nombre réel β tel que $F(x) = a[(x + \frac{b}{2a})^2 + \beta]$.

2- Déduis que $F(x)$ peut s'écrire sous la forme $F(x) = a[(x - \alpha)^2 + \beta]$.
L'écriture $F(x) = a[(x - \alpha)^2 + \beta]$ est appelée forme canonique de F et cette écriture est unique.

Je fais le point de l'activité

Soit P le polynôme du second degré défini par $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

- Pour tout nombre réel x, $P(x) = \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$.

L'écriture $a\left[(x - \alpha)^2 + \beta\right]$ est la forme canonique du polynôme P, avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = \frac{4ac - b^2}{4a^2}$

- Pour tout polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$, il existe deux réels a et b tel que :
  $P(x) = a\left[(x - \alpha)^2 + \beta\right]$

Cette écriture est la forme canonique de $P(x)$.

J'évalue mes acquis

Associe à chaque polynôme du second degré sa forme canonique.

$2x^2 + 12x + 19$	(a)	;	(1)	$2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{2}$
$2x^2 + 6x + 8$	(b)	;	(2)	$-(x - 5)^2 + 20$
$-x^2 - 10x - 45$	(c)	;	(3)	$-(x + 5)^2 - 20$
$-x^2 + 10x - 5$	(d)	;	(4)	$1 + 2(x + 3)^2$

10- FACTORISER UN POLYNÔME DU SECOND EN UTILISANT LA FORME CANONIQUE

Activité 10

On considère le polynôme P du second degré défini sur $\mathbb{R}$ par :
$P(x) = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$) dont la forme canonique est $P(x) = a\left[(x - \alpha)^2 + \beta\right]$.

1- Réponds par oui ou non si P est factorisable dans les cas suivants puis, justifie tes réponses.

	$a > 0$	$a < 0$
$\beta = 0$		
$\beta > 0$		
$\beta < 0$		

2- Complète les propositions ci-dessous :
- Si $\beta = 0$, P a..........zéro(s).
- Si β est négatif, alors P a........zéro(s).
- Si β est positif, alors P a........zéro(s).

3- Déduis de 2- les cas où P se factorise.

Je fais le point de l'activité

Soit P le polynôme du second degré défini par : $P(x) = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$) dont sa forme est $a\left[(x - \alpha)^2 + \beta\right]$.

- Si β est négatif ou nul alors P s'écrit comme produit de deux polynômes de degré 1.
- Si β est strictement positif alors P ne se factorise pas.

J'évalue mes acquis

Parmi les polynômes suivants, indique ceux qui peuvent se mettre sous la forme de produit de facteurs du premier degré.

a) $x \mapsto (x + 6)^2$; b) $x \mapsto (x + 2)^2$; c) $4(x - \sqrt{2})^2 - 1$;
d) $x \mapsto -3(x - 1)^2$; e) $x \mapsto -(x - 7)^2 - 36$

11- ETUDIER LE SIGNE D'UN POLYNÔME DU SECOND DEGRÉ

Activité 11

Soit a et b deux nombres réels ($a \neq 0$) :

1- Détermine suivant les valeurs de x le signe du polynôme $ax + b$.

2- Dresse un tableau de signe de $ax + b$.

Je fais le point de l'activité

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	signe de $-a$	0	signe de a

J'évalue mes acquis

Etudie le signe de chacun des polynômes suivants :

a) $P(x) = -2x + 3$; b) $Q(x) = 3x - 4$; c) $R(x) = 5x$

e) $S(x) = 3(x - 1)^2$; f) $T(x) = 4(x - 2) - 25$; c) $R(x) = 5(x + 6)^2$

ACTIVITÉ 12

Soit P, Q et R les polynômes du second degré définis par :

$P(x) = -2x^2 + 4x - 12$; $Q(x) = 4x^2 - 6x + \frac{9}{4}$ et $R(x) = -3x + 9x + 12$.

1-a) Ecris P, Q et R sous forme canonique.

b) Factorise P, Q et R si possible.

2- Etudie le signe de chacun des polynômes P, Q et R à l'aide d'un tableau de signes si nécessaire.

Je fais le point de l'activité

Pour étudier le signe d'un polynôme du second degré $P(x)$, on peut suivre les étapes suivantes :
- on écrit $P(x)$ sous forme canonique ;
- si $P(x)$ n'est pas factorisable, le signe de $P(x)$ est celui du coefficient de x^2 ;
- si $P(x)$ est factorisable, on fait un tableau de signes et on déduit le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de x.

J'évalue mes acquis

Etudie le signe de chacun des polynômes ci-dessous suivant les valeurs de x.

a) $P(x) = x^2 + x + 1$; b) $P(x) = 2x^2 - 6x + 4$; c) $P(x) = -x + 8x - 16$.

D- FRACTIONS RATIONNELLES

12- CONNAÎTRE LA DÉFINITION D'UNE FRACTION RATIONNELLE

ACTIVITÉ 13

On donne les expressions suivantes : $P(x) = 2x^2 + x\ \ 1$; $Q(x) = x + 3$ et $R(x) = \sqrt{x+1} - 2$

1- Indique, parmi les expressions ci-dessus, celles qui sont des polynômes. Tu donneras leurs degrés le cas échéant.

2- On pose : $F = \frac{P}{Q}$; $L = \frac{Q}{2}$; $H = \frac{Q}{R}$ et $G = \frac{1}{P}$

Parmi les expressions ci-dessus, indique celles qui sont le quotient de deux polynômes.

Je fais le point de l'activité

- Le quotient de deux polynômes est appelé une fraction rationnelle.

J'évalue mes acquis

Soit les fonctions numériques f, g, h et k respectivement définie par :

$f(x) = x^2 - 2x + 5$; $g(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + x + 5}{x^2 - 1}$; $h(x) = 3x + 2 + \frac{x+1}{x-2}$; $k(x) = \frac{3}{x+2}$

Justifie que f, g, h et k sont des fractions rationnelles.

13- TRANSFORMER LES FRACTIONS RATIONNELLES PAR LA MÉTHODE D'IDENTIFICATION

ACTIVITÉ 14

On considère la fraction rationnelle $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 5}{x + 2}$.

Détermine les nombres réels a, b et c tel que : $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x + 2}$.

Je fais le point de l'activité

Toute fraction rationnelle $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ peut s'écrire sous la forme $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = h(x) + \dfrac{k(x)}{Q(x)}$

(avec $\deg(k(x)) < \deg(Q(x))$) en utilisant la méthode des coefficients indéterminés.

J'évalue mes acquis

On donne la fraction rationnelle suivante : $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 5}{x + 4}$

Détermine les réels a, b et c tel que : $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x + 4}$ avec $c \in \mathbb{R}$

II- RÉSUMÉ DE COURS

I- GENERALITES SUR LES POLYNOMES

DÉFINITION

- Soit $a \in \mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{N}$.
  Toute fonction numérique f de la variable réelle x, définie par : $f(x) = ax^n$, est appelée monôme de coefficient a et de degré n.
- Un **polynôme** est une somme algébrique de monômes.

Exemple

- $x \mapsto -4x^3$ est un monôme de coefficient -4 et de degré 3.
- $x \mapsto -3x^2 - \dfrac{2}{3}x + 1$ est un polynôme.
- $x \mapsto \dfrac{1}{x^2} + 4$ n'est pas un polynôme.

REMARQUES

- La fonction nulle est un polynôme.
- L'ensemble de définition d'un polynôme est $\mathbb{R}$.

NOTATION : un polynôme de la varible x est noté P ou P(x).

THÉORÈME FONDAMENTAL

Tout polynôme non nul P(x) peut s'écrire de façon unique sous la forme :
$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots a_1x + a_0$ où n est un entier naturel et $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1$ et a_0 sont de nombres réels tel que $a_n \neq 0$.

- Les nombres $a_0, a_1, ..., a_n$ sont appelés les coefficients de P.
- Si $a_n \neq 0$, n est appelé le degré de P et on le note d°P ou deg P.
- Un monôme est une fonction du type $x \mapsto a_n x^n$ où $n \in \mathbb{N}$, donc un polynôme.
- Sous la forme développée et réduite, le degré d'un polynôme, est celui de son monôme de plus haut degré.
- La fonction nulle n'a pas de degré.
- Par abus de langage, on parle souvent de fonction polynôme au lieu de polynôme.
- On ne définit pas dans ce cours de degré du polynôme nul.

1- Fonctions polynômes et opérations

Propriété

La somme, la différence et le produit de deux fonctions polynômes est une fonction polynôme.

- Le degré du produit de deux polynômes non nuls est la somme des degrés de ces deux polynômes. (Soit P et Q deux polynômes non nuls. On a : d°(PQ) = d°(P) + d°(Q)).
- Le degré de la somme de deux polynômes P et Q non nuls est inférieur ou égal au plus grand des degrés de P et de Q si P + Q est non nul.

d°(P + Q) = max (d° P, d° Q) lorsque d°(P) ≠ d°(Q).

2- Egalité de deux polynômes

Propriété

Deux polynômes non nuls sont égaux si et seulement si ils ont le même degré et les coefficients de leurs monômes de même degré sont égaux.

P est égale au polynôme nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.

Définition

Soit P un polynôme de degré n, ($n \geq 1$) et a un nombre réel.
On appelle zéro du polynôme P tout nombre réel a tel que : $P(a) = 0$.

Déterminer les zéros de P, c'est résoudre l'équation $P(x) = 0$.

Propriété

Soit P un polynôme de degré n, $n \geq 1$ et a un nombre réel.
a est un zéro de P si et seulement s'il existe un polynôme Q tel que pour tout réel x, $P(x) = (x - a)\, Q(x)$.

Soit $P(x) = (x - a)\, Q(x)$, d°(Q) = d°(P) − 1.

1- Quels que soient les réels x et a,

$$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + \dots + a^k x^{n-k-1} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1})$$

2- Produits remarquables

Pour tous nombres réels a et b, on a :

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$ $(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 + b^3$

3- Polynôme du Second degré

Définition

Un polynôme du second degré est un polynôme P de la forme :
$P(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b, c sont des nombres réels où a est non nul.

REMARQUES - Un polynôme du second degré est aussi appelé trinôme du second degré.

Forme canonique d'un polynôme du second degré

Propriété

Pour tout trinôme du second degré $P(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, il existe deux nombres réels α et β tels que, pour tout réel x, $ax^2 + bx + c = a\left[(x-\alpha)^2 + \beta\right]$.
Cette dernière écriture est appelée **forme canonique du trinôme $ax^2 + bx + c$.**

Exemple

On a : $f(x) = -2x^2 + 12x - 14 = -2(x^2 - 6x + 7)$
$= -2[(x-3)^2 - 9 + 7]$
$= -2[(x-3)^2 - 2]$
La forme canonique du polynôme f est $-2[(x-3)^2 - 2]$ avec $\alpha = 3$ et $\beta = 4$.

Factorisation d'un polynôme du second degré

Définition

Soit P un polynôme du econd degré dont la forme canonique est $a\left[(x-\alpha)^2 + \beta\right]$
Si $\beta > 0$ alors P ne peut pas s'écrire comme produit de deux polynômes de degré 1.
Si $\beta \leq 0$ alors P peut s'écrire comme produit de deux polynômes de degré 1.

Signe d'un polynôme du second degré

Propriété

Soit P un polynôme du second degré écrit sous la forme $P(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$.

- Si P n'est pas factorisable, alors il garde un signe constant, celui de a.
- Si P est factorisable et s'il admet deux zéro distincts, alors il s'annule en changeant de signe.

4- Factorisation par $x - a$

Propriété

Soit P un polynôme et a un réel donné.

- P est divisible par $x - a$ si et seulement si $P(a) = 0$.
- a est une racine de P si et seulement si il existe un polynôme Q tel que :
  $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = (x - a)\,Q(x)$.

II- FRACTIONS RATIONNELLES

Définition

On appelle fraction rationnelle toute fonction numérique de la forme $\frac{P}{Q}$, où P et Q sont deux polynômes.

REMARQUES

Soit $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ une fraction rationnelle.

L'ensemble de définition de h est $D_h = \{x \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) \neq 0\}$.

Tout polynôme est un fraction rationnelle.

Exemples

On considère les fonctions numériques r, s et t définies respectivement par :

$r(x) = \frac{2x+1}{x(x-1)}$, $s(x) = -3x^3 + x^2 - 6x + 1$ et $t(x) = -x + 2 + \frac{5}{x+3}$.

- Les fonctions r, s et t sont des fractions rationnelles.
- L'ensemble de définition de la fraction rationnelle r est : $D_r = \mathbb{R}\backslash\{0\,;1\}$.
- L'ensemble de définition de la fraction rationnelle s est : $D_s = \mathbb{R}$.
- L'ensemble de définition de la fraction rationnelle t est : $D_t = \mathbb{R}\backslash\{-3\}$.

III- MÉTHODE

- **Utiliser la forme canonique pour factoriser si possible un polynôme du second degré :**

Soit $P(x) = 2x^2 - x + 1$.

a) La forme canonique est : $P(x) = 2\left[\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{16}\right]$.

Pour tout réel x, $P(x) \geq \frac{7}{8}$; aucune valeur n'annule P et donc on ne peut pas factoriser P dans $\mathbb{R}$.

b) Soit $Q(x) = -x^2 + 6x - 9$. La forme canonique est : $Q(x) = -(x-3)^2$.

Pour tout réel x, $Q(x) = -(x-3)^2$.

c) Soit $R(x) = x^2 + 4x - 21$. La forme canonique est : $R(x) = (x+2)^2 - 25$.

$R(x) = (x + 2 - 5)(x + 2 + 5)$

$R(x) = (x - 3)(x + 7)$

REMARQUES

- Un polynôme du second degré peut avoir plusieurs formes :
- Forme développée : $ax^2 + bx + c$;
- Forme canonique : $a[(x - \alpha)^2 + \beta]$;
- Forme factorisée : $a(x - x_1)(x - x_2)$;
- Résoudre l'équation du second degré $P(x) = 0$, c'est chercher l'ensemble S des zéros de P.

- **Factoriser un polynôme par $x - a$ (a étant un zéro)**

  - **Méthode des coefficients indéterminés**

Exemple 1 :

Soit $P(x) = x^3 - 7x^2 + 16x - 12$.

On a : $P(2) = 0$.

Il existe donc un polynôme $Q(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x - 2)\,Q(x)$.

On a : $P(x) = (x - 2)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (b - 2a)x^2 + (c - 2b)x - 2c$.

Par identification, on obtient :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - 2a = -7 \\ c - 2b = 16 \\ -2c = -12 \end{cases} \; ; \text{d'où} \begin{cases} a = 1 \\ b = -5 \\ c = 6 \end{cases} \quad \text{Donc } Q(x) = x^2 - 5x + 6$$

On conclut que : $x^3 - 7x^2 + 16x - 12 = (x - 2)\,(x^2 - 5x + 6)$.

$Q(2) = 0$, donc il existe un polynôme $R(x) = ax + b$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $Q(x) = (x - 2)\,R(x)$.

On a : $Q(x) = x^2 - 5x + 6 = (x - 2)\,(ax + b) = ax^2 + (b - 2a)x - 2b$.

Par identification, on obtient :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - 2a = -5 \\ -2c = 6 \end{cases} \; ; \text{d'où} \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \end{cases}$$

On conclut que : $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)\,(x - 3)$.

En définitive, il vient $P(x) = (x - 3)(x - 2)^2$.

Les zéros de P sont 3 et 2. 2 est une racine double de P et 3 est une racine simple de P.

REMARQUES Un polynôme de degré n admet au plus n zéros distinctes.

  - **Méthode de la division euclidienne**

Exemple 2

Soit $P(x) = x^3 - 7x^2 + 16x - 12$.

On a : $P(2) = 0$.

Il existe donc un polynôme Q tel que : $Q(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x - 2)\,Q(x)$.

Effectuons la division euclidienne de $P(x) = x^3 - 7x^2 + 16x - 12$ par $x - 2$.

On a :
$$\begin{array}{r|l} x^3 - 7x^2 + 16x - 12 & x - 2 \\ \cline{2-2} \underline{-x^3 + 2x^2} \qquad\qquad\quad & x^2 - 5x + 6 \\ -5x^2 + 16x - 12 & \\ \underline{5x^2 - 10x} \qquad\; & \\ 6x - 12 & \\ \underline{-6x + 12} & \\ 0 \quad 0 & \end{array}$$

Donc $Q(x) = x^2 - 5x + 6$

D'où : $x^3 - 7x^2 + 16x - 12 = (x - 2)\,(x^2 - 5x + 6)$

REMARQUES On peut utiliser les méthodes ci-dessous pour factoriser un polynôme :
- trouver un facteur commun ;
- reconnaitre une égalité remarquable ;
- trouver une racine évidente et utiliser la méthode des coefficients indéterminée ;
- trouver une racine évidente et utiliser la méthode de la division euclidienne ;
- mettre le polynôme sous la forme canonique lorsqu'il est du second degré.

- **Pour transformer, simplifier, puis étudier le signe d'une fraction rationnelle**

- Transformation d'une fraction rationnelle

Exemple

- Soit $r(x) = \dfrac{2x+1}{x(x-1)}$. Déterminons les réels a et b tels que : $r(x) = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x-1}$.

Pour tout : $x \in D_r = \mathbb{R}\backslash\{0\,;1\}$, $r(x) = \dfrac{(a+b)x-a}{x(x-1)}$; par identification, on obtient : $\begin{cases} a+b=1 \\ -a=1 \end{cases}$

Soit $f(x) = \dfrac{3x^2-5x+2}{3+x}$. Déterminons les réels a, b et c tels que : $f(x) = x + b + \dfrac{c}{x+3}$.

Pour tout : $x \in D_f = \mathbb{R}\backslash\{-3\}$, on obtient : $f(x) = 3x - 14 + \dfrac{44}{x+3}$.

(On peut utiliser la division euclidienne ou la méthode des coefficients indéterminée)

- Simplification de fractions rationnelles

Exemple

$f : x \mapsto \dfrac{x^2-2x+1}{1-x}$ et $g : x \mapsto \dfrac{6-x-x^2}{4-x^2}$ sont deux fractions rationnelles.

$D_f = \mathbb{R}\backslash\{1\}$ et pour tout $x \in D_f$, $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{-(x-1)} = -x+1$.

$D_g = \mathbb{R}\backslash\{-2\,;2\}$ et pour tout $x \in D_g$, $g(x) = \dfrac{(2-x)(x+3)}{(x+2)(2-x)} = \dfrac{x+3}{x+2}$.

- Signe d'une fraction rationnelle

Exemple

Soit $g(x) = \dfrac{6-x-x^2}{4-x^2}$. Etudions le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

$D_g = \mathbb{R}\backslash\{-2\,;2\}$ et pour tout $x \in D_g$, $g(x) = \dfrac{x+3}{x+2}$. On obtient le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-3		-2		2		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x+2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	‖	$+$	

Donc : $\begin{cases} \forall\, x \in]-\infty\,;-3[\, \cup\,]-2\,;2[\, \cup\,]2\,;+\infty[,\ g(x) > 0 \\ \forall\, x \in]-3\,;-2[,\ g(x) < 0 \\ g(-3) = 0 \end{cases}$

IV- SAVOIR-FAIRE

Savoir-faire 1- *Etudier le signe d'une fraction rationnelle*

ENONCÉ

Soient P et Q deux fonctions polynômes définies par:

$P(x) = x^2 + 2x - 3$ et $Q(x) = x^2 + 7x + 12$

1- Calcule $P(-3)$ et $Q(-3)$ et interprète les résultats obtenus.

2- Déduis-en une factorisation de $P(x)$ et de $Q(x)$.

3- Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{x^2+2x-3}{x^2+7x+12}$

a) Détermine l'ensemble de définition D_f de f.

b) Simplifie l'écriture de $f(x)$ sur D_f.

c) Etudie le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

Solution commentée

1- Je calcule P(-3) et Q(-3).

$P(-3) = (-3)^2 + 2(-3) - 3$
$= 9 - 6 - 3$
$P(-3) = 0$

$Q(-3) = (-3)^2 + 7(-3) + 12$
$= 9 - 21 + 12$
$Q(-3) = 0$

$P(-3) = 0$ et $Q(-3) = 0$ donc -3 est un zéro de $P(x)$ et de $Q(x)$.

2- Factorisation de P(x) et de Q(x).

Puisque $P(-3) = 0$ alors il existe deux réels a et b tel que : $P(x) = (x + 3)(ax + b)$.

$P(x) = (x + 3)(ax + b)$
$= ax^2 + (b + 3a)x + 3b$ or $P(x) = x^2 + 2x - 3$ donc par identification on a:

$\begin{cases} a = 1 \\ b + 3a = 2 \\ 3b = 3 \end{cases}$ Donc : $\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$ ainsi : $P(x) = (x + 3)(x - 1)$

On montre de même que $Q(x) = (x + 3)(x + 4)$.

3- a) Je détermine l'ensemble de définition de f.

f existe si et seulement si $x^2 + 7x + 12 \neq 0$.

$x^2 + 7x + 12 = 0$ équivaut à $Q(x) = 0$.

Or : $Q(x) = (x + 3)(x + 4)$, donc : $(x + 3)(x + 4) = 0$.

C'est-à-dire : $x + 3 = 0$ ou $x + 4 = 0$.

$x = -3$ ou $x = -4$, donc : $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-3 ; -4\}$.

b) Je simplifie $f(x)$

On sait que : $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 + 7x + 12}$, or : $x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1)$ et $x^2 + 7x + 12 = (x + 3)(x + 4)$,

donc : $f(x) = \frac{(x + 3)(x - 1)}{(x + 3)(x + 4)}$.

$f(x) = \frac{x - 1}{x + 4}$.

c) J'étudie le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

x	$-\infty$		-4		-3		1		$+\infty$
$x - 1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x + 4$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f(x)$		$+$	||	$-$	||	$-$	0	$+$	

- Si $x \in]-\infty ; -4[\cup]1 ; +\infty[$, alors $f(x) > 0$.
- Si $x \in]-4 ; -3[\cup]-3 ; 1[$, alors $f(x) < 0$.
- Si $x = 1$, alors $f(x) = 0$.

VI- JE M'EXERCE

1- Exercices de fixation/ Application

Généralités sur les polynômes

Connaître la définition d'un polynôme, le degré, le coefficient, la définition du zéro d'un polynôme

1 1- Parmi les fonctions numériques suivantes, indique celles qui sont des polynômes et précise leurs degrés.

$f : \mapsto -2x^4 - 5x^3 + 3$; $g : \mapsto -2x + 3 + \dfrac{1}{x^2}$;

$h : \mapsto |-2x^2 + 1|$; $i : \mapsto x^3 - 2\sqrt{x} - 1$;

$j : \mapsto -2 + 2x^2 - x^5$; $k : \mapsto (1 + \sqrt{2x})\left(1 - \dfrac{1}{2}x^2\right)$;

$l : \mapsto (x^4 - 1)/(x^2 - 1)$; $m : \mapsto x^5 - 2|x| + 5$.

2-Indique le degré et le coefficient du terme de plus haut degré de chacun des polynômes suivants :

$A(x) = (1 - x^2)(1 + x^2) + \pi x^3 - 2$;

$B(x) = -2(x^3 - 1) + 3(1 + x^3) + x^2 + 1$.

2 On considère l'expression algébrique suivante : $E = (x + 1)(2x - 1)$.

a) Détermine le coefficient du terme en x^2.

b) Détermine le terme constant.

3 Reponds aux questions suivantes sans aucune justification :

1- On onsidère le polynôme :

$P(x) = 2(2x - 1)(3 - x)(x + 2)$.

a) Donne, sans justification, le coefficient du terme de degré du polynôme P et son terme constant.

b) Parmi les polynômes ci-dessous, indique celui qui est écrit sous la forme développée et réduite du polynôme P.

$P(x) = -4x^3 + 6x^2 + 22x + 12$;

$P(x) = -4x^3 + 6x^2 + 22x - 12$;

$P(x) = 4x^3 + 6x^2 + 22x + 12$;

$P(x) = 4x^3 + 6x^2 + 22x - 12$.

4 Sans réaliser les opérations suivantes, indique le degré et le terme constant du résultat :

a) $6x^2 - 2x^4 - 17 + x)(2x^2 - x + 2)$;

b) $(2x - 3) - (5x + 2)$;

c) $(7x^3 - 2x^4 - 3)^3$.

5 Soit p un polynôme tel que $p(0) = -2$; $p(2) = 0$; $p(-5) = 0$ et $p(\pi) = 0$.

Indique les zéros de p, parmi les images des réels calculés.

Connaitre la propriété relative au produit de polynômes

6 P et Q sont deux polynômes, recopie et complète le tableau ci-dessous :

d°(P)	d°(Q)	d°(Q)
8	20	…….
15	…….	37
…….	1970	2018

7 Dans chacun des cas, sans aucun calcul, indique le degré du produit des polynômes P et Q :

a) $P(x) = -5x^3 + 6x^2 + 2$ et $Q(x) = \dfrac{7}{3}x^2 - 2x + 3$;

b) $P(x) = (2x + 3)(x^2 - 1)$ et $Q(x) = 2x^2 - 7x + 12$;

c) $P(x) = x(x^2 - 3)^{2018}$ et $Q(x) = (2x + 1)^3 - 8x^3 + 3x - 1$.

Effectuer le produit le produit de deux polynômes

8 Dans chacun des cas, donne les expressions développées et réduites du polynôme FG :

a) $F(x) = (x + 1)(x + 2)$ et $G(x) = -x(x + 3)$;

b) $F(x) = x(x + 1)^3 - 3(x + 2)2$ et $G(x) = -(2 - x)^3 - x^3$;

Précise le degré de chacun des produits FG.

Connaître la propriété relative à la somme de polynômes

9 P et Q sont des polynômes de degrés donnés. Dans chacun des cas ci-dessous, indique les degrés possibles de la somme des polynômes P et Q :

a) d°(P) = 2 et d°(Q) = 3 ; b) d°(P) = 2 et d°(Q) = 2 ; c) d°(P) = 2 et d°(Q) = 1.

10 Dans chacun des cas ci-dessous, sans aucun calcul, indique le degré de la somme des polynômes P et Q :

a) $P(x) = 7x^2 + 5x + 1$ et $Q(x) = 2x - 5$;

b) $P(x) = x^3 + 5x - 9$ et $Q(x) = -x^3 + \dfrac{2}{3}x^2 + 1$;

c) $P(x) = x^2(2 - x) + 5$ et $Q(x) = (x - 1)(x - 2)(x + 1)$.

Effectuer la somme de deux polynômes

11 On considere les polynônes P et Q définis par : $P(x) = 2x^3 - 5x + 1$ et $Q(x) = 3x^4 - 2x^2 + 7x - 3$.
Donne les expressions des polynômes : P + Q ; P – Q.
Précise le degré de chacune de ces expressions.

Connaître la propriété relative à l'égalité de deux polynômes

12 Soit le polynôme F défini par : $F(x) = 5x^3 + x^2 + 3x - 4$.
Parmi les fonctions numériques ci-dessous, indique celles qui sont égales au polynôme F :

a) $G(x) = (x - 2)\left(\frac{x^2 + 2x}{x}\right) + 5x^3 + 3x$;

b) $H(x) = (x + 2)(x - 2) + 5x\left(x^2 + \frac{3}{5}\right)$.

13 Dans chacun des cas ci-dessous, détermine les valeurs de a et b de sorte que les polynômes P et Q soient égaux.

a) $P(x) = bx^3 + (a - b)x^2 + (a + b - 2)x - 1$ et
$Q(x) = x^3 + (a + 1)x^2 + 2a - 3b$;

b) $P(x) = 5x^2 - 17x + 6$ et $Q(x) = (x - 3)(ax + b)$.

14 Soient les polynômes P et Q définis par :
$P(x) = x^4 - 6x^3 + 19x^2 - 25x + 24$ et
$Q(x) = (ax^2 + bx + c)^2 + dx + e$.
Détermine les valeurs de a, b, c, d et e pour que P et Q soient égaux.

Reconnaître la forme factorisée d'un polynôme

15 Parmi les polynômes ci-dessous, indique ceux qui sont sous forme factorisée.

a) $(x-2)(3x+5)$; b) $(5x-2)(x+2)+(x+2)(3x+5)$
c) $(x^3 - 8)(x - 7)$; d) $8x^3 - 1$.

16 Associe chaque polynôme à sa forme factorisée :

$(x - 3)(2x + 7) + (x + 1)(x - 3)$ •	• $(3x + 2)(3x - 2)$
$x^2 - 6x + 9$ •	• $(3x - 2)^2$
$9x^2 - 12x + 4$ •	• $(x - 3)(3x - 2)$
$9x^2 - 4$ •	• $(x - 3)^2$

Connaître les produits remarquables

17 Associe chaque produit à son expression développée.

$(x + y)^3$ •	• $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$
$(x - y)^3$ •	• $x^3 + y^3$
$(x - y)(x^2 + xy + y^2)$ •	• $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
$(x + y)(x^2 - xy + y^2)$ •	• $x^3 - y^3$

Factoriser un polynôme en utilisant les produits remarquables

18 Factorise chacune des expressions suivantes à l'aide de produits remarquables :

a) $x^2 - 4x + 4$	h) $2x^2 + 12x + 9$
b) $x^2 + 2x + 1$	i) $25x^2 - 10x + 1$
c) $x^2 - 9$	j) $36x^2 - (2 - 5x)^2$
d) $4x^2 - 5$	k) $-2x^2 + 12x - 18$
e) $x^3 - 8$	l) $x^3 + 27$
f) $27x^3 + 1$	m) $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$
g) $\frac{8}{125}x^3 - \frac{1}{64}$	n) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

Vérifier qu'un nombre donné est zéro d'un polynôme

19 Dans chacun des cas suivants, vérifie si le nombre donné est un zéro de P.

a) $P(x) = x^3 + 5x^2 - 12x + 6$; $\alpha = 1$.
b) $P(x) = -3x^2 + 2x + 2$; $\alpha = -2$.
c) $P(x) = x^3 + 7x^2 + 12x + 10$; $\alpha = -5$.

20 Parmi les nombres suivants, -1 ; -2 ; 0 ; 1 ; $\sqrt{2}$; 4 ; 2 ; $-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ indique ceux qui sont des zéros du polynôme : $9x^4 - 12x^3 - 83x^2 - 50x - 8$.

POLYNÔMES DU SECOND DEGRÉ

Ecrire la forme canonique d'un polynôme du second degré

21 Associe chacun des polynômes du second degré de la liste B à sa forme canonique de la liste A.

Liste A		Liste B	
$(x + 2)^2 - 5$	a	1	$4x^2 + 8x + 7$
$(x - 4)^2 - 4$	b	2	$x^2 + 4x - 1$
$-4(x - 2)^2 + 4$	c	3	$x^2 - 8x + 20$
$-4(x + 2)^2 + 2$	d	4	$4x^2 - 16x + 6$
$(x - 4)^2 + 4$	e	5	$-4x^2 - 16x - 12$
$4(x + 1)^2 + 3$	f	6	$x^2 - 8x + 12$
$4(x - 2)^2 - 10$	g	7	$-4x^2 + 16x - 12$

22 Pour chacune des égalités suivantes, donne la valeur de α sans justification, puis vérifie l'égalité proposée.

a) $(x + 2)^2 - 5 = x^2 + \alpha x - 1$.
b) $(x - 3)^2 + 7 = x^2 - 6x + \alpha$.
c) $(x - 5)^2 + \alpha = x^2 - 10x + 10$.
d) $2(x + 1)^2 - 9 = \alpha x^2 + 4x - 7$.
e) $\alpha(x + 2)^2 - 5 = x^2 + \alpha x - 1$.

23 Détermine la forme canonique de chacun des polynômes du second degré suivants :

a) $x^2 + 2x - 3$; d) $x^2 + 12x + 5$;
b) $x^2 - 6x - 2$; e) $x^2 + 4x$;
c) $x^2 - 10x + 5$; f) $x^2 - 14x + 9$.

Factoriser un polynôme du second degré en utilisant la forme canonique

24 Factorise, si possible, les expressions suivantes :

$p(x) = 2x^2 + 8x - 2$; $s(x) = 4x^2 + 3x + 4$;

$q(x) = -x^2 + 2x + 5$; $t(x) = \frac{1}{3}x^2 + 3x + 1$;

$r(x) = 3x^2 + x - 4$; $u(x) = -\frac{2}{5}x^2 - \frac{8}{15}x - \frac{2}{5}$.

25 Factorise, si possible, les expressions suivantes :

$A(x) = 5x^2 - 4x - 1$; $D(x) = -4x^2 + 5x$;

$B(x) = 3x^2 + 4x + 1$; $E(x) = -x^2 + 4x + 1$.

$C(x) = 3x^2 + 3x + 4$;

Etudier le signe d'un polynôme du second degré (en utilisant une expression déjà factorisée)

26 On donne les polynômes du second degré suivants :

$a(x) = 5(x - 1)\left(x + \frac{1}{5}\right)$; $d(x) = x(-4x + 5)$;

$b(x) = (x + 1)(3x + 1)$; $e(x) = -3(x + 1)^2 - 9$.

$c(x) = 3\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 13$;

Etudie le signe des polynômes a, b, c, d et e.

27 Factorise, si possible puis étudie le signe des polynômes suivants :

$p(x) = 2x^2 + 8x - 2$; $s(x) = 4x^2 + 3x + 4$;

$q(x) = -x^2 + 2x + 5$;

$r(x) = 3x^2 + x - 4$; $t(x) = \frac{1}{3}x^2 + 3x + 1$.

Factorisation par $\alpha - a$

Factoriser un polynôme par $x - \alpha$ (α étant un zéro) en utilisant la méthode des coefficients indéterminés

28 On considère le polynôme P défini par $P(x) = x^3 + 5x^2 - 12x + 6$.

a) Justifie que 1 est un zéro de P.

b) En utilisant la méthode des coefficients indéterminés, détermine trois nombres réels a, b et c tels que pour tout nombre réel x, $P(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$.

29 Soit le polynôme $Q(x) = x^4 + x^2 - 2$.

a) Développe, réduis et ordonne l'expression suivante: $(1 - x^2)(ax^2 + bx + c)$.

b) Déduis-en trois réels a, b et c tels que pour tout réel x, $Q(x) = (1 - x^2)(ax^2 + bx + c)$.

Factoriser un polynôme par $x - \alpha$ (α étant un zéro) et rechercher les zéros en utilisant la méthode de la division euclidienne

30 On considère le polynôme P défini par :

$P(x) = x^3 + 5x^2 - 12x + 6$.

En utilisant la méthode de la division euclidienne, détermine trois nombres réels a, b et c tels que pour tout nombre réel x, $P(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$.

31 Soit $Q(x) = x^4 + x^2 - 2$.

En utilisant la méthode de la division euclidienne, détermine trois nombres réels a, b et c tels que pour tout nombres réel x,

$Q(x) = (1 - x^2)(ax^2 + bx + c)$.

Fraction rationnelle

Connaître la définition d'une fraction rationnelle

32 Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

a) Toute fraction rationnelle est le quotient de deux polynômes de degré 2.

b) Le dénominateur de toute fraction rationnelle n'est jamais nul.

c) Toute fraction rationnelle est simplifiable.

33 Parmi les fonctions numériques suivantes, indique celles qui sont des fractions rationnelles puis, détermine leur ensemble de définition.

$f : \mapsto -2x^4 - 5x^3 + 3$; $g : \mapsto -2x + 3 + \frac{1}{x^2}$;

$h : \mapsto |-2x^2 + 1|$; $i : \mapsto \frac{x^3 - 2\sqrt{x} - 1}{x - 2}$;

$j : \mapsto |-2 + 2x^2 - x^5|$; $k : \mapsto (1 + \sqrt{2x})(1 - \frac{2}{5}x^2)$;

$l : \mapsto \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$; $m : \mapsto x^5 - 2|x| + 5$.

Transformer les fractions rationnelles par division

34 On considère la fraction rationnelle v définie sur $\mathbb{R}$-{-2} par : $v(x) = \frac{6x^2 - 5x + 1}{x + 2}$.

a) Effectue la division euclidienne de $6x^2 - 5x + 1$ par $x + 2$.

b) Déduis-en les réels a, b et c tels que :

$v(x) = ax + b + \frac{c}{x + 2}$, pour tout réel x différent de -2.

35

1- Détermine le quotient et le reste si on divise $P(x)$ par $Q(x)$ dans chacun des cas suivants :

a) $P(x) = 2x4 - x^3 - 3x^2 + 7x - 12$; $Q(x) = x^2 - 3$;

b) $P(x) = -4 + 2x + 3x^3$; $Q(x) = 2x^2 + 1$;

c) $P(x) = 9x + 4$; $Q(x) = 2x - 3$;

d) $P(x) = 7x + 2$; $Q(x) = 2x^2 - x - 4$.

2- Détermine le coefficient réel m tel que le f défini par $f(x) = mx^2 + 5x - 1$ soit factorisable par le polynôme g défini par $g(x) = 2x - 3$.

36 Soit $g(x) = \frac{3x^2 - x + 2}{-x + 3}$.

A l'aide d'une division euclidienne, détermine les nombres réels a, b et c tels que :
$g(x) = \frac{ax + b + c}{-x + 3}$, pour tout nombre réel x différent de 3.

Transformer les fractions rationnelles par la méthode d'identification

37 On considère la fraction rationnelle v définie sur $\mathbb{R}$-{-2} par : $v(x) = \frac{6x^2 - 5x + 1}{x + 2}$.

a) Développe l'expression : $ax + b + \frac{c}{x+2}$ · (a, b et c étant des nombres réels)

b) Déduis-en les réels a, b et c tels que :
$v(x) = ax + b + \frac{c}{x+2}$ pour tout réel x différent de -2.

38 Soit $f(x) = \frac{2x + 1}{x(x - 1)}$

A l'aide de la méthode des coefficients indéterminés, détermine les réels a et b tels que : $f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1}$ pour tout réel x différent de 0 et de 1.

2- Exercices de renforcement et d'approfondissement

39 On considère le polynôme $L(x) = 3x^2 - ax + 2a - 12$ où a est un nombre réel.

1- Détermine a pour que –2 soit un zéro de $L(x)$.

2- Pour la valeur de a trouvée, factorise $L(x)$ et déduis-en son autre zéro.

40 Soit f la fonction polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x - 3)^2 - (3x - 2)^2$.

1-

a) Détermine la forme développée et réduite de $f(x)$.

b) Détermine une forme factorisée de $f(x)$.

c) Détermine la forme canonique de $f(x)$.

2- Choisis la forme la plus adaptée pour répondre aux questions suivantes :

a) Détermine respectivement les images des réels 0 ; $\frac{4}{3}$; $\frac{3}{8}$ et $1 + \sqrt{2}$ par f.

b) Etablis le tableau de variation de f.

c) Résous l'équation $f(x) = 0$.

d) Détermine les antécédents éventuels du nombre 5 par f.

e) Détermine le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

41 Soit le polynome defini par :
$Q(x) = x^2 - 9 - 2(x - 3)(x + 2)$.

1- Développe et réduis $Q(x)$.

2- Donne sa forme canonique.

3- Factorise $Q(x)$.

4- Résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $Q(x) \leq 0$.

5- Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $Q(x) = 4$.

6- Résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $Q(x) > 3$.

42 On considère le polynôme $g(x) = -2x^2 + 6x - 1$ défini sur $\mathbb{R}$.

a) Ecrire $g(x)$ sous forme canonique.

b) Déduis-en une factorisation de $g(x)$.

c) Etudie le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

43 Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $x^2 + 5x + 3 = 2x + 3 = 0$;

b) $t^2 - 4t - 6 = (2t + 1)(t - 4) = 0$;

c) $(y + 2)2 = 2y^2 + 5y - 2 = 0$;

d) $(x + 2)(x + 1) = (x + 4)(x + 3) + (x + 6)(x + 5) = 0$.

44 Résous dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $x^2 + 5x + 3 > 0$;	d) $-4x^2 - 3x - 2 \leq 0$;
b) $-3x^2 + 4x + 4 < 0$;	e) $x^2 + 5x + 3 > 0$;
c) $4x^2 - 3x + 2 \leq 0$;	f) $4x^2 + 4x + 1 \leq 0$.

45

1- a) Détermine la forme canonique du polynôme $A(x) = x^2 - 10x - 2$.

b) Justifie que le polynôme A admet pour valeur minimale –27 et que cette valeur est atteinte en 5.

2- On considère le polynôme
$B(x) = -2x^2 + 8x + 1$.

a) Justifie que : $B(x) = -2(x - 2)^2 + 9$.

b) Déduis-en que le polynôme B atteint son maximum en $x = 2$. Détermine sa valeur maximale.

46 On donne l'équation ci-dessous :
(E) : $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - (2 + \sqrt{2})x + \sqrt{8} = 0$.
Amine affirme avoir trouvé une solution entière à l'équation (E).
Dis s'il a raison. Justifie ta réponse.

47 Soit le polynôme du second degré suivant :
$P_m = (m+3)x^2 + 2(3m+1)x + m + 1$ où m est un nombre réel différent de -3.

a) Donne la forme canonique de P_m.

b) Détermine les valeurs de m pour lesquelles P_m a une zéro double.

c) Détermine alors ce zéro double.

48 On considère les fonctions polynômes g et h définies par : $g(x) = x^2 - 2x + 2$ et $h(x) = 2x^2 - 4x + 3$.
Le but de cet exercice est de déterminer une fonction polynôme f de degré 2 vérifiant les deux conditions suivantes :

- $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$; • $f(11) = 181$

1- Détermine la forme canonique de h.

2- a) Détermine la forme canonique de g.

b) Déduis de 2.a) et d'une des conditions vérifiée par f que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 1$.

3- Justifie que $f(1) = 1$.

4- En utilisant les questions précédentes, Démontre que : $f(x) = 1{,}8x^2 - 3{,}6x + 2{,}8$.

49 Soit $I(x) = x^2 + x - 2$.
On note m et p les deux zéros de I.

1- Calcule $m^2 + p^2$ et $m^3 + p^3$.

2- Soit m et p deux zéros d'un polynôme du second degré de la forme $ax^2 + bx + c$.

a) Démontre que : $m^2 + p^2 = \dfrac{b^2 - 2ac}{a^2}$.

b) Démontre que : $m^3 + p^3 = \dfrac{3ac - b^3}{a^3}$.

50 On pose : $h(x) = \dfrac{2}{x^2 - x - 6} + \dfrac{x}{3x^2 + 2x - 1}$.

a) Factorise les polynômes suivants :
$x^2 - x - 6$ et $2x^2 + 3x - 2$.

b) Détermine l'ensemble de définition de h.

c) Résous l'équation $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = 0$.

51 On donne la fraction rationnelle u définie par :
$u(x) = \dfrac{3x - 1}{3x^2 + 2x - 1}$

1- a) Justifie que : $3x^2 + 2x - 1 = 3\left(x + \dfrac{1}{3}\right)^2 - \dfrac{4}{3}$.

b) Factorise $3x^2 + 2x - 1$.

c) Détermine l'ensemble de définition de la fraction rationnelle u, puis simplifie u.

52 Soient f et g deux fonctions définis respectivement sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = x^3 - 4x^2 + 8x - 4$ et $g(x) = (x-1)^2$.

1- En effectuant la division euclidienne de f par g, démontre qu'il existe 4 réels a, b, c et d tels que, pour tout $x \neq 1$,
$$\frac{f(x)}{g(x)} = ax + b + \frac{cx + d}{(x-1)^2}.$$

2- En effectuant la méthode des coefficients indéterminés, trouve les nombres réels a, b, c tels que, pour tout $x \neq 1$,
$$\frac{f(x)}{g(x)} = x + a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}.$$

53

1- Démontre que $x^{2018} - 1$ est divisible par $x - 1$.

2- Détermine la valeur du nombre réel k pour que le polynôme $x^3 - x^2 - 7x + k$ soit divisible par $x + 3$.

3- Trouve un polynôme P de degré 3 dont les zéros sont -2, 1 et 3 et tel que $P(-1) = 16$.

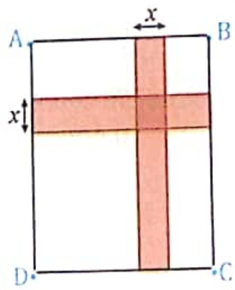
4- Trouve un polynôme $Q(x)$ dont la division euclidienne par $x^2 - 8x + 1$ donne comme quotient $2x^2 + 3$ et pour reste $2x - 1$.

54 Etudie le signe de la fraction rationnelle f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-2 ; 5\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 4}{2x + 5}$.

55 Sur la figure ci-contre,
ABCD est un carré tel que : CB = 10 cm.

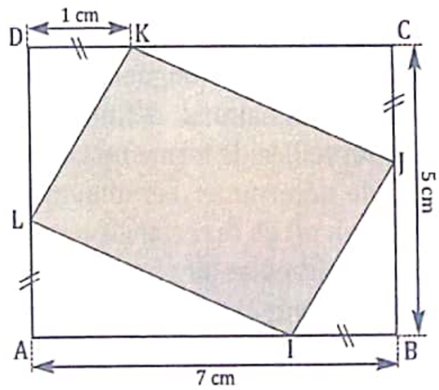
1- Démontre que l'aire de la partie coloriée est $A(x) = -x^2 + 20x$.

2- Détermine la mesure x en cm pour que les aires des parties non coloriées et celles coloriées soient égales.



56 Sur la figure codée ci-dessous :

- ABCD est un rectangle tel que DC = 7 cm et DA = 5 cm.
- Les points I, J, K et L appartiennent aux côtés du rectangle ABCD.



1- Justifie que le quadrilatère IJKL est un parallélogramme.

2- a) Détermine les valeurs possibles de x.

b) Justifie que l'aire du parallélogramme IJKL en fonction de x est : $A(x) = 2x^2 - 12x + 35$.

c) Détermine le tableau de variation de la fonction A.

d) Donne le minimum de la valeur de l'aire de IJKL et la valeur de x pour lequel il est atteint.

3- Détermine la valeur de x pour que la figure grisée ait une aire maximale.

3-Situations d'évaluation

57 Un grossiste dont son magasin est situé non loin d'un lycée veut acheter un certain nombre de couvertures de cahiers pour un montant total de 21600 FCFA. S'il en prend 30 de plus, le vendeur décide de lui accorder une réduction de 20 FCFA par couverture et cela lui coutera 2400 FCFA de plus.

Le grossiste veut savoir le nombre de couvertures de cahiers et le prix d'une couverture de cahier qu'il pourra acheter.

Perturbé par ces calculs, il sollicite le concours d'un groupe d'élèves dont fais partie. Ceux-ci décident de l'aider en répondant aux questions suivantes :

1- On pose $P(x) = -x^2 - 150x + 32400$.

a) Mets $P(x)$ sous forme canonique.

b) Factorise $P(x)$.

2- a) En notant x le nombre de couvertures et y le prix d'une couverture, démontre que le problème posé se traduit par le système d'équations (S) ci-dessous.

$$\begin{cases} y = \dfrac{21600}{x} \\ -x^2 - 150x + 32400 = 0 \end{cases}$$

b) Résous le système (S).

3- Réponds à la préoccupation du grossiste.

58 Lors d'une sortie détente d'un groupe d'élèves de 2^{nde} C, les maitres-nageurs d'une plage de Grand- Bassam veulent tisser des liens d'amitié avec ceux-ci. Dans leurs échanges, ils leur exposent la préoccupation suivante : « nous disposons d'un cordon flottant d'une longueur de 400 m avec lequel nous souhaitons définir une zone de baignade surveillée de forme rectangulaire. Nous décidons de déterminer les dimensions X et Y (exprimées en m) de ce rectangle pour que la zone de baignade surveillée ait une surface maximale » Informés, ce groupe d'élèves s'attèlent à donner une suite à ces derniers en répondant avec toi les questions suivantes :

1- a) Etudie à l'aide d'un tableau le signe de X (400 – 2X).

b) Déduis-en les solutions sur $\mathbb{R}$, de l'inéquation $-2X^2 + 400X \leq 0$

2- Calcule l'aire de la zone de baignade lorsque X = 50 m.

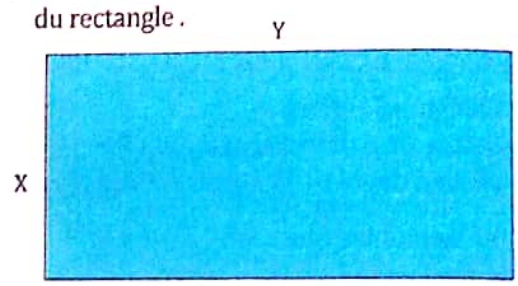
3- a) Sachant que la longueur du cordon est de 400 m, exprime Y en fonction de X.

b) Exprime en fonction de X, l'aire A(X) de la zone de baignade pour X ∈ [0 ;200] ;

c) Démontre que pour tout X ∈ [0 ;400], A(X) peut s'écrire sous la forme de : $A(X) = 20\,000 - 2(X - 100)^2$.

4- a) Dis si on peut obtenir une aire de 22 000 m². Justifie ta réponse.

b) Détermine l'aire maximale, puis les dimensions du rectangle .



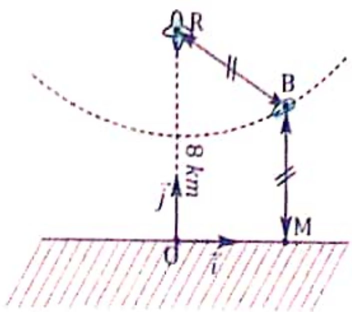
59 Lors d'une excursion d'élèves d'une classe sur une plage avec leur professeur de mathématiques, il leur demande d'écouter attentivement le capitaine d'un bateau.

Le capitaine affirme que son bateau doit naviguer entre le rivage et un rocher. Ce rocher se situe à 8 km du bord.

Par mesure de sécurité, il souhaite rester à égale distance du rocher et du rivage.

Pour modéliser ce problème, on utilisera le repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ où le point O est le projeté orthogonal du point R sur le rivage.

On note $(x ; y)$ les coordonnées du bateau dans ce repère.



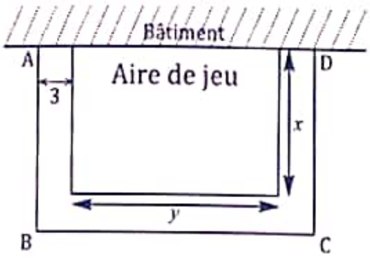
Certains élèves de la classe affirment que le bateau décrit une fonction affine par intervalles, d'autres ne partagent pas cet avis.

De retour en classe, le professeur de mathématiques vous propose le travail dirigé suivant pour vous départager.

1- Exprime en fonction de x et de y la distance séparant le bateau :
   a) du rocher
   b) du rivage

2- a) En utilisant l'égalité BR = BM, exprime la valeur de y en fonction de x.
   b) Détermine le nom de la trajectoire du bateau.

60 Un club de football constitué en majorité d'élèves veut construire le long d'un bâtiment une aire de jeu rectangulaire. De plus, il souhaite que les dimensions de ce rectangle soient supérieures ou égales à 10 m. Cet espace de jeu est entouré sur trois cotés d'une allée de 3 m de large comme l'indique le schéma ci-dessous.



Vu toutes ces contraintes, le président demande à ces élèves évoluant dans son club d'user de leurs connaissances en mathématiques pour répondre aux préoccupations posées. Ceux-ci, à leur tour demande ton concours.

L'ensemble étant clôturé sur les trois côtés [AB],[BC] et [CD],

On s'intéresse à la longueur ℓ de la clôture : ℓ = AB + BC + CD. On note x et y les dimensions en mètres de l'aire de jeu.

1- Exprime la longueur ℓ de la clôture en fonction des valeurs de x et de y.

2- On dispose de 100 mètres de clôture qu'on souhaite entièrement utilisé.
   a) Exprime, dans ces conditions, la valeur de y en fonction de x.
   b) Justifie que la valeur de x doit être inférieure à 44.
   c) Justifie que l'aire de jeu a pour aire : $A(x)=88x-2x^2$.

3-a) Justifie que: $\mathcal{A}(x)=968-2(x-22)^2$.
   b) Déduis la croissance de la fonction $\mathcal{A}$ sur l'intervalle $]0\,;22]$.
   c) Dresse, sans justification, le tableau de variation de la fonction $\mathcal{A}$ sur l'intervalle $]0\,;44[$.

4- Déduis les dimensions pour que les 100 mètres de clôture soient utilisés et que l'aire de jeu soit maximale.

RENDEZ-VOUS DES CURIEUX !

Mohammed AL KHWARIZMI [1]
783 - 850

L'histoire des polynômes se confond avec celle de l'algèbre et celle de la résolution d'équations. Ils sont les outils privilégiés utilisés pour résoudre les problèmes tels que la résolubilité des équations, la constructibilité et le dernier théorème de Fermat.

Les mathématiques grecques sont essentiellement arithmétiques et géométriques. Les résolutions d'équations se font pratiquement sans symbolisme et avec une référence fréquente à l'aspect géométrique.

On voit apparaître chez Diophante (250) un début d'écriture algébrique : l'inconnue y est nommé Le Nombre et une lettre ξ lui est attribuée.

Durant leur séjour chez les mathématiciens de langue arabe, les mathématiques se détachent progressivement de la contrainte géométrique.

C'est la naissance de l'algèbre que l'on attribue traditionnellement à al-Khawarizmi dans son ouvrage *Abrégé du calcul par la restauration et la comparaison*. Il y décrit et résout les 6 équations canoniques du second degré ainsi que les méthodes pour s'y ramener. Il y distingue : la racine (X), le carré (X^2) et le nombre seul. Avec les travaux d'Abu Kamil, les calculs ne se font plus à l'aide seulement de rationnels mais les nombres réels positifs y prennent toute leur place. On voit apparaître alors une généralisation des opérations qui ne vont plus s'appliquer seulement aux nombres mais aussi aux inconnues. L'étude des équations se poursuit avec celle des équations cubiques chez Omar Khayyam et Sharaf al-Dīn al-Tūsī (XIIIe siècle). Dans les ouvrages d'Ibn al-Banna (1321), les polynômes de degré n sont représentés par la suite de leurs coefficients. La contrainte d'une homogénéité géométrique (X est une longueur, X^2 est une aire) disparait. Les raisonnements se font presque entièrement dans le domaine de l'algèbre.

En Europe, la recherche d'une symbolique se développe. Michael Stifel (1487-1567) utilise une inconnue privilégiée qu'il répète autant de fois qu'il le faut pour indiquer le degré. Cohabitent à cette époque, plusieurs symboles pour le plus (p ou +) et le - (m ou -) et le = (=, [, S). En 1484, Nicolas Chuquet invente l'exposant : l'inconnue à la puissance 5 s'écrira I5. Cette notation sera reprise par Bombelli, Simon Stevin et Descartes. Viète (1540-1603) développe le calcul littéral, représente les inconnues par des voyelles et les paramètres par des consonnes et introduit les notations de la somme, du produit, du quotient, et de la puissance : B in A quadratum, plus D in A, aequari C se traduit ensuite par Descartes en $bx^2 + dx = c$. Tout est alors en place pour que se développe l'étude générale des polynômes.

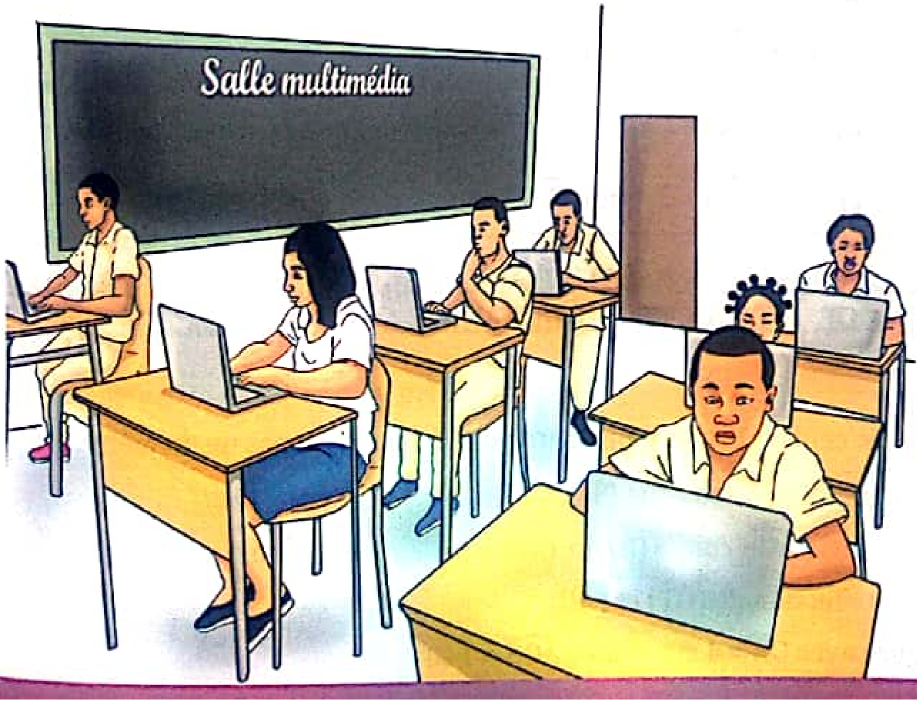
7 Angles inscrits

Notions essentielles :

- **Angles inscrits**
- **Lieux géométriques des points M tels que : *mes* $\widehat{AMB} = \theta°$**
- **Relations métriques dans un triangle**

SITUATION D'APPRENTISSAGE

La classe de 2^{nde} C_2 d'un lycée municipal fait des recherches dans une salle multimédia du foyer dudit établissement.
Elle découvre que l'on peut établir une relation entre les longueurs des côtés, l'aire, les angles et le rayon du cercle circonscrit à un triangle ABC à partir de la formule de l'aire d'un triangle «$\frac{1}{2}$ *base* × *hauteur*».
Elle présente ses recherches à leur professeur de mathématiques.
Curieuse, la classe voisine décide de s'organiser pour faire des recherches à son tour.

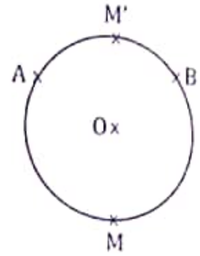


I- ACTIVITÉS DE DÉCOUVERTE

A- ANGLES INSCRITS DÉFINIS PAR UNE CORDE ET UN POINT

1- CONNAÎTRE LA RALATION ENTRE UN ANGLE INSCRIT ET UN ANGLE AU CENTRE ASSOCIÉ

Activité 1



($\mathscr{C}$) est un cercle de centre O, [AB] une corde de ($\mathscr{C}$).

qui n'est pas un diamètre et $\widehat{AMB}$ un angle inscrit dans le cercle ($\mathscr{C}$).

On désigne par M' le point diamètralement opposé à M.

1- Démontre que: *mes* $\widehat{AOM'} = 2$ *mes* $\widehat{AMO}$.

2- On suppose que M appartient à l'arc $\overset{\smile}{AB}$ ($\widehat{AMB}$ aigu).

Démontre que : *mes* $\widehat{AOB} = 2$ *mes* $\widehat{AMB}$ (on distinguera deux cas : $M' \in \overset{\smile}{AB}$ et $M' \notin \overset{\frown}{AB}$).

3- On suppose que M appartient à l'arc $\overset{\frown}{AB}$ ($\widehat{AMB}$ obtus).

a) Démontre que : *mes* $\widehat{AMB} = \frac{1}{2}$(*mes* $\widehat{AOM'}$ + *mes* $\widehat{BOM'}$)

b)Déduis-en que : *mes* $\widehat{AMB} = 180° - \frac{1}{2}$ *mes* $\widehat{AOB}$.

4- Examine le cas ou [AB] est un diamètre.

Je fais le point de l'activité

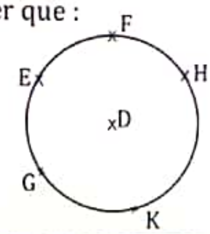
$\widehat{AMB}$ est un angle inscrit dans un cercle de centre O.

- Si $\widehat{AMB}$ intercepte l'arc $\overset{\frown}{AB}$, alors *mes* $\widehat{AMB} = \frac{1}{2}$ *mes* $\widehat{AOB}$.
- Si $\widehat{AMB}$ intercepte l'arc $\overset{\smile}{AB}$, alors *mes* $\widehat{AMB} = 180° - \frac{1}{2}$ *mes* $\widehat{AOB}$.

J'évalue mes acquis

Soit E,F,G,H et K cinq points d'un cercle de centre D.

Dans chaque cas, énonce la propriété qui permet d'affirmer que :



a) *mes* $\widehat{GEF} = \frac{1}{2}$ *mes* $\widehat{FDG}$.

b) *mes* $\widehat{EFH} = 180° - \frac{1}{2}$ *mes* $\widehat{EDH}$.

c) *mes* $\widehat{KDG} = 2 \times$ *mes* $\widehat{KEG}$.

2- CONNAÎTRE LA PROPRIÉTÉ RELATIVE AUX MESURES D'UN ANGLE INSCRIT DÉFINI PAR UNE CORDE ET UNE DEMI-TANGENTE ET DE L'ANGLE AU CENTRE ASSOCIÉ.

Activité 2

($\mathscr{C}$) est un cercle de centre O et [AB] une corde de ($\mathscr{C}$) qui n'est pas un diamètre.

(Δ) désigne la tangente en A au cercle ($\mathscr{C}$).

La bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$ coupe (Δ) en T dans le demi plan fermé de bord (AB) ne contenant pas O.

Soit I le point d'intersection de (OT) et (AB).

1-a) Fais une figure avec OA = 4 cm et mes $\widehat{AOB} = 140°$.

b) Démontre que : 2 $mes\ \widehat{AOT} = mes\ \widehat{AOB}$

c) En considérant le triangle AIT, justifie que : 2 $mes\ \widehat{TAB} = mes\ \widehat{AOB}$

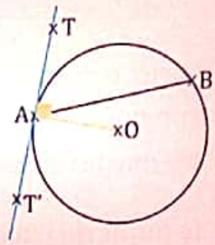
2- Soit T' un point de (Δ) n'appartenant pas à la demi-droite [AT).

a) Justifie que : les angles $\widehat{TAB}$ et $\widehat{T'AB}$ sont supplémentaires.

b) Déduis-en la mesure de $\widehat{T'AB}$ en fonction de celle de $\widehat{AOB}$

Je fais le point de l'activité

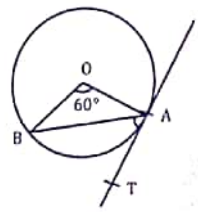
Soit [AB] une corde d'un cercle $(\mathscr{C})$ qui n'est pas un diamètre.
[AT) la demi-tangente en A à $(\mathscr{C})$ contenue dans le demi-plan de frontière (AB) ne contenant pas O. [AT'), l'autre demi-tangente en A.



On a : $mes\ \widehat{TAB} = \frac{1}{2}\ mes\ \widehat{AOB}$ et $mes\ \widehat{T'AB} = 180° - \frac{1}{2}\ mes\ \widehat{AOB}$.

J'évalue mes acquis

Détermine la mesure de $\widehat{TAB}$ de la figure ci-contre



3- CONNAÎTRE LA PROPRIÉTÉ RELATIVE AUX MESURES DE DEUX ANGLES INSCRITS INTERCEPTANT LE MÊME ARC OU DEUX ARCS DE MÊME LONGUEUR

Activité 3

$(\mathscr{C})$ est un cercle de centre O, [AB] une corde de $(\mathscr{C})$qui n'est pas un diamètre.

1- $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ deux angles inscrits dans le cercle $(\mathscr{C})$.

a) On suppose que M et N appartiennent à l'arc $\overset{\frown}{AB}$,

Justifies que $mes\ \widehat{AMB} = mes\ \widehat{ANB}$.

b) On suppose que : M et N appartiennent à l'arc $\overset{\smile}{AB}$,

Justifie que : $mes\ \widehat{AMB} = mes\ \widehat{ANB}$

c) Soit [AT) la demi-tangente en A contenue dans le demi-plan de frontière (AB) ne contenant pas O et M un point de l'arc $\overset{\smile}{AB}$.

Démontre que : $mes\ \widehat{TAB} = mes\ \widehat{AMB}$.

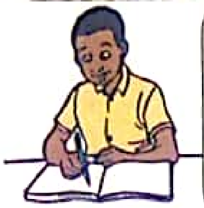
2- Soit C et D deux points du cercle $(\mathscr{C})$ tels que :les angles inscrits $\widehat{AOB}$ et $\widehat{COD}$ interceptent les arcs $\overset{\frown}{AB}$ et $\overset{\frown}{CD}$ de même longueur.

Démontre que les angle $\widehat{AOB}$ et $\widehat{COD}$ ont la même mesure

Je fais le point de l'activité

Des angles inscrits qui interceptent le même arc ou deux arcs de même longueur ont la même mesure.

J'évalue mes acquis



Les arcs $\overset{\frown}{MN}$ et $\overset{\frown}{PQ}$ ont la même longueur.

Identifie deux angles inscrits de même mesure.

4- CONNAÎTRE LA PROPRIÉTÉ RELATIVE AUX MESURES DE DEUX ANGLES INSCRITS INTERCEPTANT DEUX ARCS DE MÊMES EXTRÉMITÉS

ACTIVITÉ 4

Soit A et B deux points du cercle ($\mathscr{C}$) de centre O. (O $\notin$ [AB]).

1- Marque un point M de $\overset{\smile}{AB}$ puis un point N de $\overset{\frown}{AB}$.

2- Démontre que les angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ sont supplémentaires

Je fais le point de l'activité

Soit [AB] une corde d'un cercle.

Si M est un point de l'arc $\overset{\smile}{AB}$ et N un point de l'arc $\overset{\frown}{AB}$, alors *mes* $\widehat{AMB}$ + *mes* $\widehat{ANB}$ = 180°.

J'évalue mes acquis

Soit ($\mathscr{C}$) un cercle. E et F sont deux points de ce cercle non diamétralement opposés.

M est un point de l'arc $\overset{\smile}{EF}$ et N un point de l'arc $\overset{\frown}{EF}$.

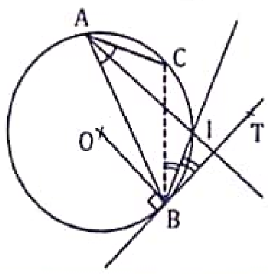
a) Fais la figure.

b) Cite une paire d'angles supplémentaires.

5- CONNAÎTRE LA PROPRIÉTÉ RELATIVE À LA BISSECTRICE D'UN ANGLE INSCRIT ET L'ARC QUE CET ANGLE INTERCEPTE

ACTIVITÉ 5

Sur la figure ci-contre, les bissectrices intérieures des angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{TBC}$ se coupent en I.
Compare les longueurs des arcs $\overset{\frown}{IC}$ et $\overset{\frown}{IB}$. Justifie le résultat.

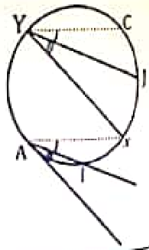


Je fais le point de l'activité

La bissectrice d'un angle inscrit partage l'arc intercepté en deux arcs de même longueur.

J'évalue mes acquis

On considère la figure ci-contre :
Identifie des arcs de même longueur.



B- RELATIONS MÉTRIQUES DANS UN TRIANGLE

6- CONNAÎTRE LA PROPRIÉTÉ RELATIVE AU CALCUL DES AIRES, DES LONGUEURS ET DES MESURES D'ANGLES EN UTILISANT LES FORMULES D'AIRES OU LE THÉORÈME DES SINUS

6-1 Connaître la propriété relative à l'aire, aux longueurs et aux mesures d'angles d'un triangle

ACTIVITÉ 6

ABC est un triangle et H le pied de la hauteur issue du point C. S l'aire de ABC.
On pose : a = BC ; b = CA et c = AB.

1- Fais des figures en envisageant les trois cas suivants :

- $\widehat{BAC}$ est un angle aigu ;
- $\widehat{BAC}$ est un angle droit ;
- $\widehat{BAC}$ est un angle obtus.

2- Dans chacun des cas, exprime CH en fonction de l'angle $\widehat{BAC}$.

3- Démontre que : $S = \frac{1}{2} bc \sin \widehat{BAC}$.

4- Donne La formule de cette aire en fonction de l'angle $\widehat{ABC}$, puis en fonction de l'angle $\widehat{ACB}$.

Je fais le point de l'activité

Soit ABC un triangle, S son aire. On a :

$S = \frac{1}{2} bc \sin \widehat{BAC}$

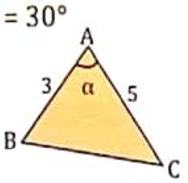
$S = \frac{1}{2} ac \sin \widehat{ABC}$

$S = \frac{1}{2} ab \sin \widehat{ACB}$

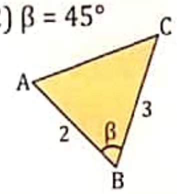
J'évalue mes acquis

Calcule l'aire du triangle ABC dans chacun des cas suivants.

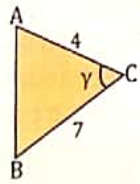
1) $\alpha = 30°$



2) $\beta = 45°$



3) $\gamma = 60°$



6-2 Connaître le théorème des sinus

ACTIVITÉ 7

ABC est un triangle, d'aire S.

1- En posant a = BC ; b = CA et c = AB, écris les formules donnant l'aire S du triangle.

2- Démontre que : $\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}} = \frac{abc}{2s}$.

3- Soit ($\mathscr{C}$) le cercle circonscrit au triangle ABC. Soit O le centre de (C) et R son rayon.

a) Justifie que le triangle OBC est isocèle en O.

b) Soit H le pied de la hauteur issue de O. Justifie que la droite (OH) est la bissectrice de l'angle. $\widehat{BOC}$ et que $mes\ \widehat{BAC} = mes\ \widehat{BOH}$.

c) On pose : a = BC. Démontre que : $\frac{a}{\sin \widehat{A}} = 2R$.

Je fais le point de l'activité

ABC est un triangle, S son aire, ($\mathscr{C}$) son cercle circonscrit, R le rayon de ($\mathscr{C}$).

On a : $\frac{BC}{\sin \widehat{BAC}} = \frac{AC}{\sin \widehat{ABC}} = \frac{AB}{\sin \widehat{ACB}} = \frac{BC \times AC \times AB}{2S} = 2R$.

J'évalue mes acquis

Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

a) L'aire d'un triangle équilatéral de côté a est $\frac{a^2}{2}$.

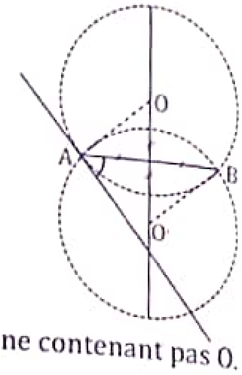
b) Un triangle ABC d'aire S est inscrit dans le cercle de diamètre $d = \frac{AB \times BC \times AC}{2S}$.

C- LIEUX GÉOMÉTRIQUES DES POINTS M TELS QUE $mes\ \widehat{AMB} = \theta°$ $(0< \theta <180)$

7- CONSTRUIRE UN ARC CAPABLE D'UN ANGLE DE MESURE DONNÉE

ACTIVITÉ 8

Soit θ un élément de $]0\ ;\ 180[$, A et B deux points distincts donnés du plan.
On se propose de chercher l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que :
$mes\ \widehat{AMB} = \theta°$.



1- Trace :

a) la médiatrice (Δ) de $[AB]$.

b) la droite (AT) tel que mes $\widehat{TAB} = \theta°$(prendre $\theta = 30°$).

c) la perpendiculaire en A à (AT). Elle rencontre (Δ) en O.

d) le cercle de centre O passant par A

Soit M un point de l'arc du cercle $(\mathscr{C})$ situé dans le demi-plan de frontière (AB) ne contenant pas O.

2- Démontre que : $mes\ \widehat{AMB} = \theta°$.

3- Soit N un point du plan distinct de A et B tel que $mes\ \widehat{ANB} = \theta°$ et $(\mathscr{C}')$ le cercle circonscrit au triangle ABN. O' désigne le centre de $(\mathscr{C}')$.

a)Démontre que O et O' sont confondus.

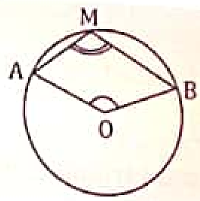
b) Déduis-en que N est situé sur le même arc que M(et pas ailleurs).

4- a) Détermine (Γ)

b) Donne un programme de construction de (Γ).

Je fais le point de l'activité

Les deux arcs de cercle tracés en rouge sont appelés arcs capables de $\theta°$, d'extrémités A et B.



J'évalue mes acquis

Réponds par vrai lorsque l'affirmation est vraie ou par faux lorsque l'affirmation est fausse :

a) Un arc capable est une partie d'un cercle.

b) Deux arcs capables d'un angle sont symétriques par les deux points communs aux arcs.

c) Un arc capable désigne une longueur.

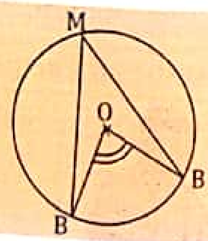
II- RÉSUMÉ DE COURS

A- ANGLE INSCRIT DÉFINI PAR UNE CORDE ET UN POINT

1- RELATION ENTRE ANGLE INSCRIT ET ANGLE AU CENTRE ASSOCIÉ

Soit $\widehat{AMB}$ un angle inscrit dans un cercle de centre O,

- Si $\widehat{AMB}$ intercepte l'arc $\overset{\frown}{AB}$, alors $mes\ \widehat{AMB} = \frac{1}{2} mes\ \widehat{AOB}$.
- Si $\widehat{AMB}$ intercepte l'arc $\overset{\smile}{AB}$, alors $mes\ \widehat{AMB} = 180° - \frac{1}{2} mes\ \widehat{AOB}$.

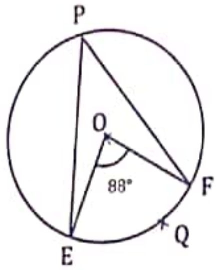


Exemples

On considère la figure ci-contre :

- L'angle inscrit $\widehat{EPF}$ du cercle $(\mathscr{C})$ intercepte le même arc $\overset{\frown}{EF}$ que l'angle au centre associé $\widehat{EOF}$, donc : $mes\ \widehat{EPF} = \frac{1}{2}\, mes\ \widehat{EOF}$.

  On a : $mes\ \widehat{EPF} = \frac{1}{2} \times 88° = 44°$.



- L'angle inscrit $\widehat{EQF}$ du cercle $(\mathscr{C})$ intercepte l'arc $\overset{\smile}{EF}$, donc :

  $mes\ \widehat{EQF} = 180° - \frac{1}{2}\, mes\ \widehat{EOF}$;

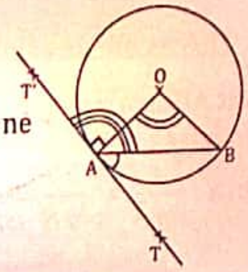
  On a : mes $\widehat{EQF} = 180° - \frac{1}{2}\, 88° = 136°$.

2- EXTENSION DE LA NOTION D'ANGLE INSCRIT

Propriété

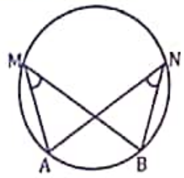
Soit [AB] une corde d'un cercle $(\mathscr{C})$, qui n'est pas un diamètre ; [AT) la demi-tangente en A à $(\mathscr{C})$ contenue dans le demi-plan de frontière (AB) ne contenant pas O, [AT') l'autre demi-tangente en A. On a :

$mes\ \widehat{TAB} = \frac{1}{2}\, mes\ \widehat{AOB}$ et $mes\ \widehat{T'AB} = 180° - \frac{1}{2} mes\ \widehat{AOB}$.



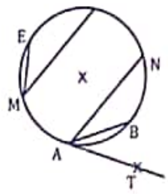
Propriétés - Conséquences

Des angles inscrits qui interceptent le même arc ont la même mesure.



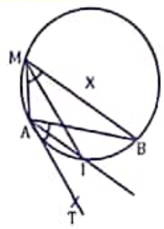
Propriété 2

Des angles inscrits qui interceptent deux arcs de même longueur ont même mesure.



Propriété 3

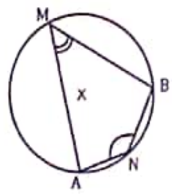
La bissectrice d'un angle inscrit partage l'arc intercepté en deux arcs de même longueur.



Propriété 4

$(\mathscr{C})$ est un cercle, $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ deux angles inscrits dans le cercle $(\mathscr{C})$.

Si M est un point de l'arc $\overset{\smile}{AB}$ et N un point de $\overset{\frown}{AB}$, alors les angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ sont supplémentaires.



B- LIEU GÉOMÉTRIQUE DES POINTS M TELS QUE : $mes\ \widehat{AMB} = \theta°$

Définition 1

Soit θ un élément de]0 ; 180[, A et B deux points distincts donnés du plan. Le lieu géométrique des points M du plan différent de A et B tels que : $mes\ \widehat{AMB} = \theta°$ s'appelle arc capable de θ°. C'est l'ensemble des points M d'ou l'on voit le segment [AB] sous l'angle θ°.

PROPRIÉTÉ

Soit θ un élément de]0 ; 180[, A et B deux points distincts donnésdu plan. Le lieu géométrique des points M différents de A et B tels que *mes* $\widehat{AMB} = \theta°$ est la réunion de deux arcs de cercle symétriques par rapport à la dorite (AB)

C- RELATION MÉTRIQUE DANS UN TRIANGLE

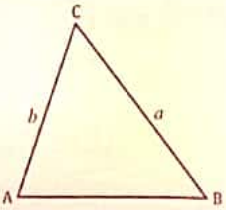
Aire d'un triangle

PROPRIÉTÉ

Soit ABC un triangle, $\mathcal{A}$ son aire.

On pose : $a = BC$; $b = AC$ et $c = AB$.

On a : $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\, bc \sin\widehat{A} = \frac{1}{2}\, ac \sin\widehat{B} = \frac{1}{2}\, ab \sin\widehat{C}$.



Théorême des sinus

Soit ABC un triangle, $\mathcal{A}$ son aire,($\mathcal{C}$) son cercle circonscrit et R le rayon de ($\mathcal{C}$).

On pose : $a = BC$; $b = AC$ et $c = AB$.

On a : $\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}} = \frac{abc}{2\mathcal{A}} = 2R$.

III- MÉTHODE

- Pour calculer des aires, des longueurs et des mesures d'angle, on peut utiliser les formules des aires ou le théorème des sinus ;
- Pour déterminer la mesure d'un angle, on peut utiliser les propriétés des angles inscrits ;
- Pour justifier que deux angles ont la même mesure, on peut utiliser les propriétés des angles inscrits.

IV- SAVOIR-FAIRE

Savoir-faire 1- ***Calculer des aires, des longueurs en utilisant les formules d'aire ou le théorème des sinus***

ÉNONCÉ

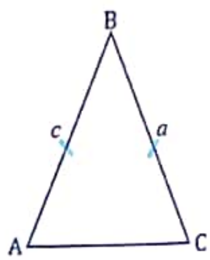
ABC est un triangle isocèle en B tel que *mes* $\widehat{B} = 40°$. Soit ($\mathcal{C}$) le cercle circonscrit à ABC tel que le rayon de $\mathcal{C}$ est égal à 2.

a) Calcule la longueur de chacun des côtés du triangle ABC.

b) Calcules l'aire $\mathcal{A}$ du triangle ABC.

SOLUTION COMMENTÉE

a) Je calcule la longueur de chaque côté du triangle ABC



D'après le théorème des sinus, on a :

$\frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}} = 2R = \frac{abc}{2\mathcal{A}}$.

Donc : $\frac{b}{\sin(40°)} = 2R$, d'où : $b = 2R \times \sin(40°)$. Ainsi : $b = 4 \times \sin(40°)$.

Par ailleurs ABC est un triangle isocèle en $\widehat{B}$ donc :

$a = c$ et $mes\ \widehat{CAB} = mes\ \widehat{BCA} = \dfrac{180° - 40°}{2} = 70°$.

On a, ainsi : $\dfrac{a}{sin\ (70°)} = 2R$, donc : $a = 2R\ sin\ (70°) = 4sin\ 70°$. D'où : $a = 4sin\ (70°)$.

b) Je Calcule l'aire A du triangle ABC

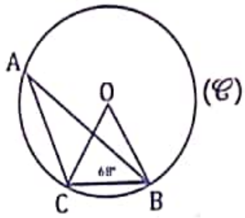
D'après le théorème des sinus, on a :

$2R = \dfrac{abc}{2\mathcal{A}}$ ainsi $\mathcal{A} = \dfrac{abc}{4R}$. Or $c = a$, donc :

$\mathcal{A} = \dfrac{a^2 b}{4R} = \dfrac{64\ (sin\ (70°)^2\ sin\ (40°)}{2}$. D'où $\mathcal{A} = 8(sin\ (70°))^2\ sin\ (40°)$.

Savoir-faire 2- *Utiliser les angles inscrits pour calculer la mesure d'un angle*

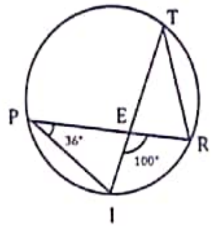
ENONCÉ



1- Sur la figure ci-contre, O est le centre du cercle (𝒞).
Détermine la mesure de l'angle $\widehat{CAB}$.

2- Sur la figure ci-contre, les points T, R I et P sont sur un cercle et le point E est à l'intérieur de ce cercle tel que :
- T, E et I sont alignés.
- P, E et R sont alignés.

Calcule la mesure de l'angle $\widehat{ERT}$.



SOLUTION COMMENTÉE

1- Je détermine la mesure de l'angle $\widehat{CAB}$

Dans le triangle OCB, isocèle en O, on a :

$mes\ \widehat{COB} = 180° - 2 \times mes\ \widehat{OCB}$

$= 180° - 2 \times 68 = 440°$.

L'angle inscrit $\widehat{CAB}$ intercepte le même arc que l'angle au centre $\widehat{COB}$.

donc : $mes\ \widehat{CAB} = \dfrac{1}{2} mes\ \widehat{COB} = \dfrac{44}{2} = 22$. D'où $mes\ \widehat{CAB} = 22°$.

2- Je calcule la mesure de l'angle $\widehat{ERT}$

$mes\ \widehat{PEI} = 180° - mes\ \widehat{IER}$

$= 180° - 100° = 80°$.

$mes\ \widehat{PIE} = 180° - (mes\ \widehat{IPE} + mes\ \widehat{IEP})$

$= 180° - 116° = 64°$.

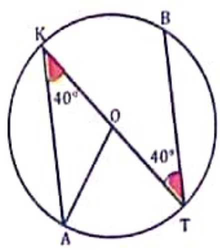
Les angles inscrits $\widehat{PIT}$ et $\widehat{PRT}$ interceptent le même arc $\overset{\frown}{PT}$, donc $mes\ \widehat{PIT} = mes\ \widehat{PRT}$. Or $mes\ \widehat{PIE} = mes\ \widehat{PIT}$ et $mes\ \widehat{ERT} = mes\ \widehat{PRT}$, donc $mes\ \widehat{ERT} = mes\ \widehat{PIT} = 64°$.

Savoir-faire 3- *Utiliser les angles inscrits pour démontrer que trois points sont alignés*

ENONCÉ

Sur la figure ci-contre, les points A, T, B et K appartiennent au cercle de centre O. On donne $mes\ \widehat{AKT} = 40°$.

Justifie que les points A, O et B sont alignés.



SOLUTION COMMENTÉE

$\widehat{AKT}$ est un angle inscrit dans le cercle. Il intercepte le même arc que l'angle au centre $\widehat{AOT}$.

On a donc : $mes\ \widehat{AOT} = 2 \times mes\ \widehat{AKT}$, soit $mes\ \widehat{AOT} = 2 \times 40 = 80°$.

Le triangle $\widehat{OTB}$ est isocèle en O, donc : $mes\ \widehat{TOB} = 180 - 2 \times mes\ \widehat{OTB} = 180 - 2 \times 40$, soit $mes\ \widehat{TOB} = 100°$. Or : $mes\ \widehat{AOB} = mes\ \widehat{AOT} + mes\ \widehat{TOB} = 80° + 100° = 180°$, donc :

$mes\ \widehat{AOB} = 180°$. Par suite les points A, O et B sont alignés.

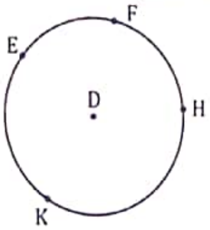
V- JE M'EXERCE

1- Exercices de fixation/ Application

Angles inscrits

Connaître la relation entre un angle inscrit et un angle au centre associé

1 Soit E, F, G, H et K cinq points du cercle de centre D.



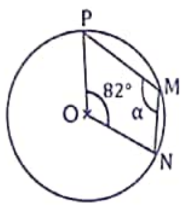
Dans chaque cas, énonce la propriété qui permet d'affirmer que :

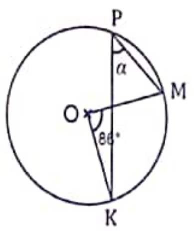
$mes\ \widehat{GEF} = \frac{1}{2}\ mes\ \widehat{FDG}$.

$mes\ \widehat{EFH} = 180° - \frac{1}{2}\ mes\ \widehat{EDH}$.

$mes\ \widehat{KDG} = 2 \times mes\ \widehat{KEG}$.

2 Dans chacun des cas suivants, indique la mesure α de l'angle.





3 Dans un cercle (𝒞), un angle inscrit et un angle au centre interceptent le même arc.

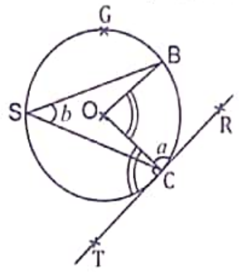
1- Indique la mesure de l'angle au centre lorsque l'angle inscrit mesure :

a) 36° ; b) 51° ; c) θ°.

2- Indique la mesure de l'angle inscrit lorsque l'angle au centre mesure :

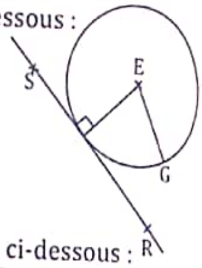
a) 128° ; b) 48° ; c) θ°.

4 Indique les valeurs a, b et c des mesures d'angles.



5 On considère la figure ci-dessous :

- [FG] est une corde qui n'est pas un diamètre du cercle (𝒞) de centre E,
- la droite (SR) est tangente au cercle (𝒞) en F.

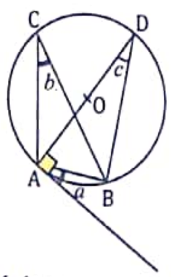


Recopie et complète le tableau ci-dessous :

$mes\ \widehat{FEG}$	$mes\ \widehat{GFR}$	$mes\ \widehat{SFG}$
40°	....	....
....	72°	
....	....	136°

Connaître la propriété relative aux mesures de deux angles inscrits interceptant le même arc ou deux arcs de même longueur

6 Sur la figure ci-contre, a, b et c sont les mesures des angles respectifs $\widehat{GAB}$, $\widehat{ACB}$ et $\widehat{ADB}$.

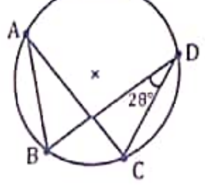


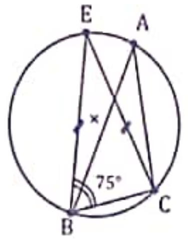
Enonce la propriété qui permet d'affirmer que $a = b = c$.

7 Sur la figure ci-dessous, les arcs $\overset{\frown}{MN}$ et $\overset{\frown}{PQ}$ ont la même longueur.

Indique deux angles inscrits de même mesure.

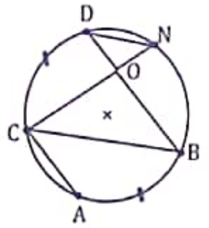
8 Dans chacun des cas suivants, indique la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.





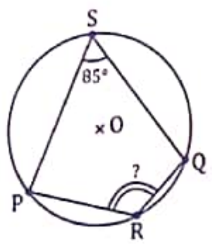
9 Soit la figure ci-contre :

Indique des angles de même mesure.



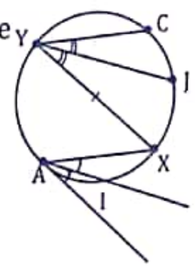
Connaître la propriété relative aux mesures des angles inscrits interceptant deux arcs de mêmes extrémités

10 Sur la figure ci-dessous, indique la mesure de l'angle $\widehat{PRQ}$.

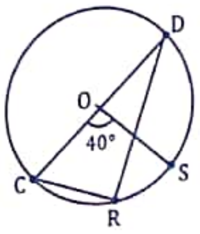


Connaître la propriété relative à la bissectrice d'un angle inscrit et l'arc que cet arc intercepte

11 On considère la figure ci-contre
Indique des arcs de même longueur.

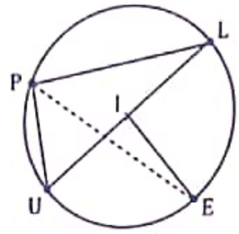


12 Dans la figure ci-contre, R et S sont deux points du cercle ($\mathscr{C}$) de centre O et de diamètre [CD] .
On donne *mes* $\widehat{COS}$ = 100°.
Détermine la mesure des angles $\widehat{CDS}$; $\widehat{CRS}$ et $\widehat{CDR}$



Justifier une égalité angulaire en utilisant en utilisant les propriétés des angles inscrits

13 Le cercle ($\mathscr{C}$) a pour diamètre [LU] et pour centre I.



Justifie que : *mes* $\widehat{UPE}$ =*mes* $\widehat{ULE}$

14 Le cercle ($\mathscr{C}$) est circonscrit au trapèze ANGL de bases [AN] et [GL]. Les supports de ses diagonales se coupent en E. Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations ci-dessous :

a) *mes* $\widehat{ANL}$ = *mes* $\widehat{AGL}$;

b) *mes* $\widehat{NAG}$ = *mes* $\widehat{NLG}$;

c) *mes* $\widehat{ANL}$ = *mes* $\widehat{NLG}$.

D- Lieux géométriques des points M tels que mes $\widehat{AMB}$ = θ°.

Identifier des arcs capables d'angle donné

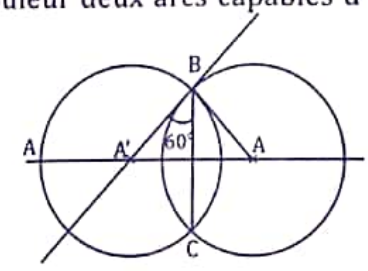
15 Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations ci-dessous :

a) Un arc capable est une partie d'un cercle.

b) Deux arcs capables d'un angle θ° sont symétriques par rapport à la droite qui passe par les deux points communs aux arcs.

c) Un arc capable désigne une longueur.

16 Dans chacun des cas suivants, indique d'une même couleur deux arcs capables d'un angle θ° donné.



a) $\theta = 30°$; b) $\theta = 120°$.

E- Relations métriques dans un triangle

Connaître la propriété relative à l'aire d'un triangle

17 Dans chacun des cas suivants, indiquer la bonne réponse.

ABC est un triangle d'aire S : On donne :

1- AB = 6 cm ; AC = 4 cm et $mes\ \widehat{BAC} = 30°$. On a :

a) $S = 12\ cm^2$; b) $S = 360\ cm^2$; c) $S = 6\ cm^2$.

2- Sachant que AB = 4 cm ; BC = 6 cm et

$sin\ \widehat{ABC} =$. On a :

a) $S = 8\ cm^2$; b) $S = 16\ cm^2$; c) $S = 4\ cm^2$.

Connaître : - le théorème des sinus

18 ABC est un triangle. Calcule son aire dans chacun des suivants :

a) $AB = 2\sqrt{6}$; $AC = 3\sqrt{2}$ et $mes\ \widehat{BAC} = 60°$;

b) $BC = 8$; $AC = 4$ et $mes\ \widehat{ACB} = 130°$;

c) $BC = 5\sqrt{3}$; $AC = 6$ et $mes\ \widehat{ABC} = 85°$.

19 Soit ABC un triangle d'aire 150 cm². On donne $AB = 5\sqrt{2}$ cm et $BC = 4\sqrt{2}$ cm.

Calcules la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$.

20 ABC est un triangle, d'aire S, inscrit dans un cercle de rayon R. On donne :

AC = 12 ; $mes\ \widehat{ACB} = 60°$ et $mes\ \widehat{ABC} = 45°$.

Calcule une valeur arrondie au dixième de : AB ; BC ; R et S.

Construire un arc capable de mesure donnée

21

1- a) Trace un segment [AB] ;

b) Place un point T tel que $mes\ \widehat{BAT} = 50°$;

c) Trace la perpendiculaire (L) à la droite (AT) au point A ;

d) Construis la médiatrice (D) du segment [AB] ;

e) Place O, le point d'intersection des droites (L) et (D) ;

2- Dis auquel des arcs $\overset{\frown}{AB}$ et $\overset{\frown}{AT}$ le point M appartient. Justifie ta réponse.

3- a) Construis le symétrique (F) de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ par rapport à la droite (AB).

b) Marque un point N sur (F) et détermine la mesure de l'angle $\widehat{ANB}$.

4- Colorie en rouge l'ensemble des points M tels que $mes\ \widehat{AMB} = 50°$.

5- Construis l'ensemble des points M tels que :

a) $mes\ \widehat{AMB} = 65°$; b) $mes\ \widehat{AMB} = 140°$.

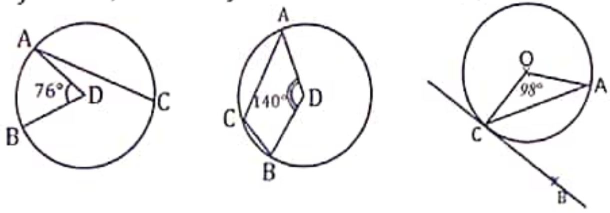
Dans chacun des cas ci-dessus, on rédigera le programme de construction.

22 [AB] est un segment de longueur 4 cm. Construis l'ensemble des points M du plan tels que : $mes\ \widehat{AMB} = 130°$.

2- Exercices de renforcement / approfondissement

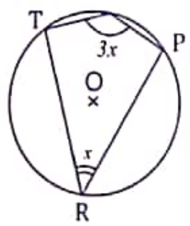
23 Calcule dans chacun des cas de figures la mesure de l'angle $\widehat{ACB}$.

a) ; b) ;c)



24 Dans la figure ci-contre, les points R; P; T et S sont quatre points du cercle ($\mathscr{C}$) de centre O.

Détermine la mesure de l'angle $\widehat{PRT}$.

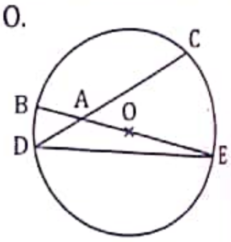


25 ABC est un triangle équilatéral de côté a cm, d'aire S, inscrit dans un cercle ($\mathscr{C}$) de rayon R. Exprime en fonction de a, l'aire S puis le rayon R.

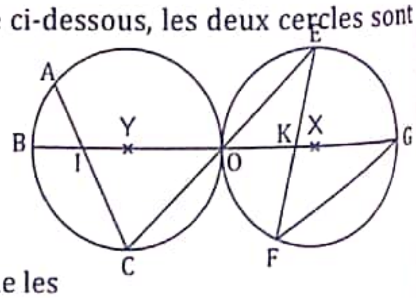
26 Sur la figure ci-dessous, B, C, D et E sont quatre points sur un cercle de centre O.

On donne : $mes\ \widehat{BAC} = 110°$ et $mes\ \widehat{ADE} = 40°$.

Calcule les mesures des angles des triangles ADE et ABC.



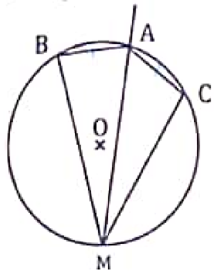
27 Sur la figure ci-dessous, les deux cercles sont tangents en O.



a) Démontre que les angles des triangles ABI et CID sont des angles de même mesure.

b) Démontre que : $mes\ \widehat{BAI} = mes\ \widehat{KFG}$.

28 Dans la figure ci-dessous, le triangle ABC est isocèle en A et inscrit dans un cercle. M est un point du grand arc $\overset{\frown}{AB}$ ne contenant pas le point A.



a) Démontre que les demi-droites [MA) et [OA) sont les bissectrices respectives des angles $\widehat{BMC}$ et $\widehat{BOC}$.

b) Démontre que les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BMC}$ sont supplémentaires, ainsi que les angles $\widehat{ABM}$ et $\widehat{ACM}$.

29 Soit RSTUV un pentagone régulier de centre O et $(\mathscr{C})$ son cercle circonscrit de rayon 4 cm.

1- Détermine la mesure de l'angle $\widehat{ROS}$.
2- Construis ce pentagone régulier.
3- Détermine la mesure de l'angle $\widehat{RVS}$.
4- Donne la nature du triangle $\widehat{RVS}$.
Justifie ta réponse.
5- Déduis-en la mesure de l'angle $\widehat{VRS}$.

30 Soit ABC un triangle. On appelle $(\mathscr{C})$ son cercle circonscrit, O son centre et R son rayon.

a) Fais une figure.

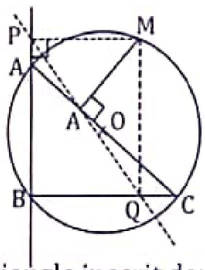
b) Soit B' le point diamétralement opposé au point B sur le cercle $(\mathscr{C})$. Démontrer que :
$\sin \widehat{BB'C} = \frac{a}{2R}$.

c) Démontre que : $\sin \widehat{BB'C} = \sin \widehat{BAC}$.

d) Déduis-en que l'aire du triangle ABC peut.
$\mathscr{A} = \frac{abc}{4R}$.

3-Situations d'évaluation

31 A une séance de travaux dirigés en classe de 2^{de} C_5 au lycée moderne d'Aboisso, le professeur de Mathématiques réalise la figure ci-dessous sur laquelle :



- ABC est un triangle inscrit dans un cercle $(\mathscr{C})$,
- M un point quelconque de $(\mathscr{C})$ et P, Q, R ses projetés orthogonaux respectivement sur les droites (AB) ; (BC) et (AC).

En observant la figure, le chef de classe affirme que les points P, Q et R sont alignés.
Curieux, les autres élèves cherchent à vérifier cette affirmation.

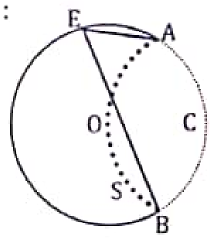
a) Démontre que les points C, Q, R et M sont cocycliques.
Déduis-en que *mes* $\widehat{MQR} = 180°$ - *mes* $\widehat{BCM}$.

b) Démontre que les points A, P, R et M sont cocycliques.
Déduis-en que *mes* $\widehat{PRM} = 180°$ - *mes* $\widehat{BAM}$.

c) En utilisant la cocyclicité des points A, B, C et M, démontre que *mes* $\widehat{BAM} = 180°$ - *mes* $\widehat{BCM}$.

d) Calcule *mes* $\widehat{PRQ}$ puis dis si l'affirmation du chef de classe est juste. Justifie ta réponse.

Un écran de télévision est accroché au mur de la salle circulaire du secrétariat d'un lycée pour la bonne gestion des visiteurs. Il est représenté sur la figure par l'arc $\overset{\frown}{AB}$:

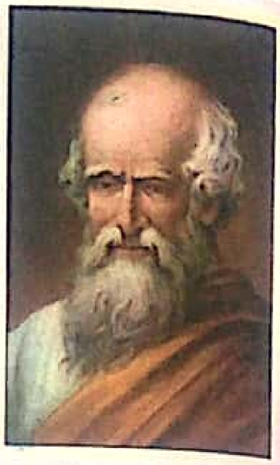


De l'entrée E, on peut voir l'écran sous un angle de 40°.
Le point O désigne le centre de la salle circulaire, le point C le centre de l'arc de cercle sur lequel sont disposés des sièges, et le point S désigne un siège quelconque sur cet arc.
Pendant les inscriptions en début d'année scolaire, des parents d'élèves se plaignent qu'ils sont mal installés pour percevoir leurs numéros d'ordre de réception sur l'écran.
Informés de ces plaintes, des élèves de 2^{de}C veulent connaître si ces plaintes sont justifiées.

1- Détermine la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$.
2- Détermine la mesure de l'angle sous lequel on voit l'écran lorsque l'on est assis sur l'un des sièges.
3- Dis si ces parents d'élèves ont raison de se plaindre. Justifie ta réponse.

V- RENDEZ-VOUS DES CURIEUX !

Archimède de Syracuse (287 av.J.C ; -212 av.J.C) est l'un des plus célèbres mathématiciens grecs. Il est connu pour sa
découverte de la poussée d'Archimède : « Tout corps plongé dans l'eau subit une force verticale (de bas en haut) opposé au point du volume déplacé. »



Il détermina également une valeur approchée de la longueur d'un arc de cercle. Pour cela, il s'approcha du cercle avec des polygones réguliers en augmentant le nombre de côtés.
Il considéra des polygones réguliers inscrits dans un cercle et un nombre de côtés plus en plus grand.

8 Angles orientés et trigonométrie

Notions essentielles :

- Angles orientés
- Cercle trigonométrique

SITUATION D'APPRENTISSAGE

La loterie nationale dans le cadre de ses activités de fin d'année, décide d'organiser un jeu télévisé. Les deux lauréats à ce jeu doivent tourner une grande roue circulaire subdivisée en vingt- quatre bandes identiques sur lesquelles sont indiquées des sommes d'argent allant d'un million à vingt millions de francs CFA. Un indicateur lumineux indique la somme à obtenir une fois que la roue s'immobilise.

Un élève d'une classe de 2nde C qui a suivi l'émission raconte à son voisin, que l'un des lauréats qui a tourné la roue dans le sens des aiguilles d'une montre a eu cinq millions. Par contre, l'autre qui l'a tournée dans le sens contraire des aiguilles d'une montre n'a eu que la somme de deux millions.

Son voisin s'étonne et affirme que la plus petite somme d'argent a été obtenue parce que la roue a été tournée d'une part dans le sens contraire des aiguilles d'une montre et que d'autre part le sinus de l'angle formé par l'axe horizontal et l'axe où la roue s'immobilise est négatif.

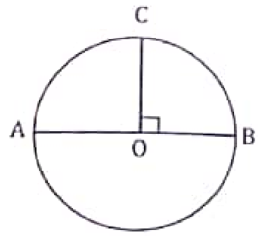
Curieux, les élèves de la classe décident de s'informer sur les angles orientés et d'approfondir leurs connaissances sur des lignes trigonométriques

I- ACTIVITÉS DE DÉCOUVERTE

A- ANGLES ORIENTES

1- CONNAÎTRE LA DÉFINITION DE LA MESURE D'UN ANGLE EN RADIAN

ACTIVITÉ 1



Sur la figure ci-contre :

- $(\mathscr{C})$ est le cercle de centre O et de rayon 1 ;
- [AB] est un diamètre et [OC] un rayon tel que *mes* $\widehat{BOC} = 90°$.

1- a) Calcule le périmètre du cercle $(\mathscr{C})$.

b) Déduis-en la longueur des arcs $\overset{\frown}{AB}$ et $\overset{\frown}{BC}$.

2-Reproduis la figure, puis place deux points M et N non diamétralement opposés.

a) Colorie en bleu l'arc intercepté par l'angle au centre $\widehat{MON}$.

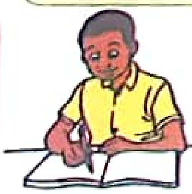
b) On pose : *mes* $\widehat{MON} = \alpha$ (α en degrés).

Calcule la longueur de l'arc $\overset{\frown}{MN}$.

Je fais le point de l'activité

La mesure en radian d'un angle $\widehat{MON}$ est égale à la longueur de l'arc intercepté par l'angle sur le cercle de centre O et de rayon 1. On la note *mes* $\widehat{MON}$.

J'évalue mes acquis



Indique les bonnes réponses :

a) Le radian est une unité de longueur ;

b) Le radian est une unité de mesure d'angle ;

c) Le radian est un arc de cercle de rayon 1 ;

2- CONVERTIR DES MESURES D'ANGLES DE DEGRÉS EN RADIAN ET INVERSEMENT

ACTIVITÉ 2

On admet que les mesures en radians et en degrés sont deux suites de nombres proportionnelles.

1-Complète le tableau suivant :

x mesure de l'angle en degrés	α mesure de l'angle en radians
180	....

D'où : $\boxed{\dfrac{x}{180} = \dfrac{\alpha}{...}}$

2-Déduis-en une expression de x en fonction de α, puis de α en fonction de x.

3-Donne la valeur arrondie à 0,01 de la mesure en degrés d'un angle de 1 rad.

4-Complète le tableau de mesures en degrés et en radians de quelques angles remarquables :

Mesures en degrés	30	....	60	....	135	....
Mesures en radian	....	$\frac{\pi}{2}$	....	$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{6}$

5-A l'aide du tableau, convertis $\frac{7\pi}{12}$ rad en degrés, puis 165° en radians.

Je fais le point de l'activité

- π rad = 180°.
- Les mesures en degrés et les mesures en radians sont deux grandeurs proportionnelles.
- On a donc : $\pi y = 180x$.

Mesure en radians	π	x
Mesure en dégrés	180	y

J'évalue mes acquis

Recopie et renseigne les cases vides tableau ci-dessous :

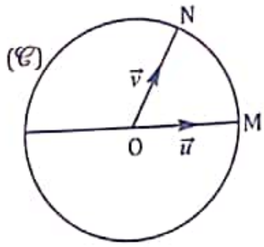
Mesure en dégré		20	270	
Mesure en radians	$\frac{\pi}{3}$			$\frac{5\pi}{8}$

3- CONNAÎTRE LA DÉFINITION D'UN ANGLE ORIENTÉ

Activité 3

Sur la figure ci-contre :

- $(\mathscr{C})$ est le cercle de centre O ;
- M et N sont les points d'intersection de $(\mathscr{C})$ avec les demi-droites d'origine O et dirigées par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.



1- Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

a) Les angles $\widehat{MON}$ et $\widehat{NOM}$ désignent le même angle.

b) L'arc $\overset{\frown}{MN}$ peut être parcouru d'une seule manière de M vers N.

c) Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

2- Construis un autre couple $(\overrightarrow{O'M'}; \overrightarrow{O'N'})$ tel que l'arc $\overset{\frown}{M'N'}$ est parcouru de M' vers N' dans le même sens que celui de M et N et tels que les arcs $\overset{\frown}{M'N'}$ ait la même longueur que $\overset{\frown}{MN}$ (M' et N' sont sur le cercle de centre O' et de rayon 1).

Je fais le point de l'activité

L'ensemble des couples $(\vec{u}\,;\vec{v})$ de vecteurs non colinéaires pour lesquels l'arc $\overset{\frown}{MN}$ garde la même longueur et est parcouru dans le sens de M vers N est l'angle orienté et est noté $(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}})$ où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires respectivement à $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ et de même sens, M et N étant sur le cercle de centre O et de rayon 1.

J'évalue mes acquis

Soit ABC un triangle.
Parmi les couples de vecteurs, indique ceux qui sont des représentants d'angles orientés de vecteurs :

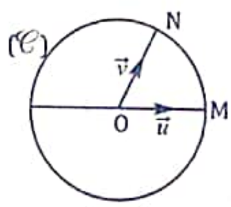
a) $(\vec{0}\,;\vec{0})$; b) $(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC})$; c) $(\overrightarrow{AB}\,;\vec{0})$; d) $(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC})$; e) $(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AB})$.

4- RECONNAÎTRE DEUX ANGLES ORIENTÉS OPPOSÉS

Activité 4

Sur la figure ci-contre :

- $(\mathscr{C})$ est un cercle de centre O ;
- M et N sont les points d'intersection de $(\mathscr{C})$ avec les demi-droites d'origine O et dirigées par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.



On considère les angles orientés $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ et $(\widehat{\vec{v};\vec{u}})$.

1- Identifie le sens de parcours sur le cercle $(\mathscr{C})$ qui correspond à $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ et à $(\widehat{\vec{v};\vec{u}})$.

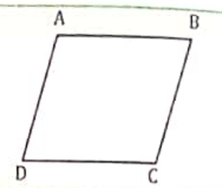
2- Compare les longueurs de $\overset{\frown}{MN}$ et $\overset{\frown}{NM}$.

Je fais le point de l'activité

- Le sens de parcours correspondant à $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ est celui de M vers N et celui correspondant à $(\widehat{\vec{v};\vec{u}})$ est le sens de N vers M sont opposés.
- Les arcs $\overset{\frown}{MN}$ et $\overset{\frown}{NM}$ ont la même longueur. Les angles orientés $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ et $(\widehat{\vec{v};\vec{u}})$ sont dits opposés

J'évalue mes acquis

On considère le quadrilatère ABCD ci-contre.
Donne deux paires d'angles orientés opposés.



5- CONNAÎTRE LA DÉFINITION DE LA MESURE PRINCIPALE D'UN ANGLE ORIENTÉ DANS UNE CONFIGURATION DONNÉE

ACTIVITÉ 5 (MESURE PRINCIPALE D'UN ANGLE ORIENTÉ)

$(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ est un angle orienté et O un point du plan.

On considère les points A et B du plan tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.

1- On suppose que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires

Soit $(\mathscr{C})$ un cercle de centre O ; M et N des points d'intersection respectifs des demi-droites [OA) et [OB) avec $(\mathscr{C})$.

a) Fais une figure.

b) Donne la mesure en dégré de $\widehat{AOB}$.

c) Propose la mesure de $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ qui tient compte de l'orientation.

2- Propose la mesure de $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéiares.

Je fais le point de l'activité

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires. on note $Mes(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ la mesure principale de $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$.

  $Mes(\widehat{\vec{u};\vec{v}}) = mes\ \widehat{AOB}$ si le sens de parcours sur le cercle $(\mathscr{C})$ de M vers N de l'arc $\overset{\frown}{MN}$ est le sens direct.

- $Mes(\widehat{\vec{u};\vec{v}}) = -mes\ \widehat{AOB}$ si le sens de parcours sur le cercle $(\mathscr{C})$ de M vers N de l'arc $\overset{\frown}{MN}$ est le sens indirect.

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

  $Mes(\widehat{\vec{u};\vec{v}}) = 0$ si $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ est l'angle orienté nul.

  $Mes(\widehat{\vec{u};\vec{v}}) = \pi$ si $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ est l'angle orienté plat.

J'évalue mes acquis

ABCD est un carré de centre O tel que le triangle OAB soit de sens direct.
Détermine la mesure principale des angles orientés suivants :

a) $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}})$; b) $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}})$; c) $(\widehat{\overrightarrow{OB};\overrightarrow{DC}})$; d) $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}})$.

B- TRIGONOMETRIE

7- CONNAÎTRE LA DÉFINITION DU CERCLE TRIGONOMÉTRIQUE

ACTIVITÉ 7

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, A, B).

1- Trace un cercle de centre O et de rayon OA et place un point M sur ce cercle.

2- Place sur ce cercle les points repérés par les nombres :

$-\pi$; $-\frac{5\pi}{6}$; $-\frac{\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{6}$; $\frac{\pi}{6}$; π.

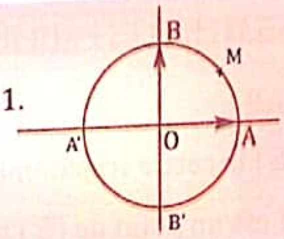
3- Marque sur ce cercle les points M, N et P tels que :

$Mes\left(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OM}}\right) = \frac{\pi}{4}$, $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{ON}}\right) = -\frac{\pi}{12}$ et $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{ON};\overrightarrow{OP}}\right) = \frac{3\pi}{8}$.

Je fais le point de l'activité

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O,A,B).

On appelle cercle trigonométrique le cercle de centre O et de rayon 1.



J'évalue mes acquis

Réponds par vrai lorsque l'affirmation est vraie ou par faux lorsque l'affirmation est fausse :

a) Tout cercle du plan est un cercle trigonométrique.

b) Le cercle trigonométrique possède deux sens de parcours.

c) Le sens indirect de parcours est celui des aiguilles d'une montre .

8- CONNAÎTRE LA DÉFINITION DU COSINUS , DU SINUS D'UN ANGLE ORIENTÉ

ACTIVITÉ 8

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J).

Sur le cercle trigonométrique ($\mathscr{C}$), on place le point M tel que $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM}}\right) = \alpha$.

- La perpendiculaire à la droite (OI) en M coupe (OI) en P ;
- La perpendiculaire à la droite (OJ) en N coupe (OJ) en Q ;

1- Exprime $\cos\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right)$, puis $\sin\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right)$ en fonction de $\overline{OP}$ et de $\overline{OQ}$.

2- Déduis-en les coordonnées du point M dans le repère (O, I, J).

Je fais le point de l'activité

- $(\mathscr{C})$ est le cercle trigonométrique.
- M est un point de $(\mathscr{C})$ tel que : $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OM}}\right) = \alpha$, où $\alpha \in]-\pi\,;\,\pi]$, $\alpha \neq -\frac{\pi}{2}$ et $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$.
- Pour tout angle orienté de mesure α $\left(\alpha \neq -\frac{\pi}{2} \text{ et } \alpha \neq \frac{\pi}{2}\right)$, on a : $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

J'évalue mes acquis

Détermine $\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

11- CONNAÎTRE LA PROPRIÉTÉ RELATIVE À LA TANGENTE D'UN ANGLE ORIENTÉ

Activité 11

Soit α un nombre réel de $]-\pi\,;\,\pi]$ tel que : $\alpha \neq -\frac{\pi}{2}$ et $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$.

Démontre que : $1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$.

Je fais le point de l'activité

Pour tout angle orienté de mesure α, un nombre réel de $]-\pi\,;\pi[$; tel que $\alpha \neq -\frac{\pi}{2}$ et $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$,

on a : $1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$.

J'évalue mes acquis

Parmi les égalités suivantes indique celles qui sont correctes :

a) $\cos^2\alpha = \frac{1}{1 + \tan^2\alpha}$; b) $\tan^2\alpha - \frac{1}{\cos^2\alpha} = 1$; c) $\sin^2\alpha = \frac{\tan^2\alpha}{1 + \tan^2\alpha}$, $\left(\alpha \neq -\frac{\pi}{2} \text{et } \alpha \neq \frac{\pi}{2}\right)$

12- PLACER SUR LE CERCLE TRIGONOMÉTRIQUE LE POINT IMAGE D'UN ANGLE ORIENTÉ DONT ON CONNAIT LA MESURE PRINCIPALE

Activité 12

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct (O, A, B). Soit $(\mathscr{C})$ le cercle trigonométrique.

1- La première bissectrice du repère rencontre $(\mathscr{C})$en deux points M et N.

La deuxième bissectrice du repère rencontre $(\mathscr{C})$ en deux points P et Q.

a) Réalise une figure.

b) Détermine les nombres réels α, β, γ et θ appartenant à $]-\pi\,;\,\pi]$ tels que :

$Mes\left(\widehat{\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OM}}\right) = \alpha$; $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{ON}}\right) = \beta$; $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OP}}\right) = \gamma$; $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OQ}}\right) = \theta$.

2- On considère les nombres réels $\frac{\pi}{8}$; $\frac{\pi}{16}$; $\frac{-7\pi}{8}$; $\frac{-5\pi}{16}$.

a) Vérifie que ces nombres appartiennent à $]-\pi\,;\,\pi]$.

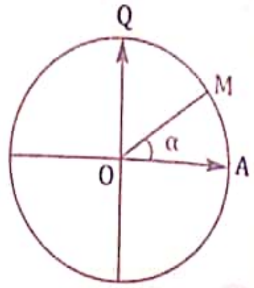
b) Construis sur le cercle trigonométrique $(\mathscr{C})$ les points R, S, T et U tels que :

$Mes\left(\widehat{\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OR}}\right) = \frac{\pi}{8}$; $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OS}}\right) = \frac{\pi}{16}$;

$Mes\left(\widehat{\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OT}}\right) = \frac{-7\pi}{8}$; $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OU}}\right) = \frac{-5\pi}{16}$.

Je fais le point de l'activité

- A tout point du cercle trigonométrique, on associe le nombre α, mesure principale de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OM}}\right)$.
- Réciproquement, à tout nombre réel α de l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi[$ est associé le point M du cercle trigonométrique tel que α soit la mesure principale de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OM}}\right)$.
- M est appelé image de α sur le cercle trigonométrique.



J'évalue mes acquis

Place sur le cercle trigonométrique le point M, image du nombre réel α dans chacun des cas suivants :

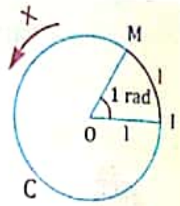
a) $\alpha = \frac{\pi}{4}$; b) $\alpha = -\frac{2\pi}{3}$; c) $\alpha = -\frac{3\pi}{4}$; d) $\alpha = -\frac{2\pi}{3}$.

II- RÉSUMÉ DE COURS

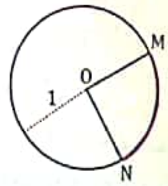
1- RADIAN

Définitions

- Un angle de **1 radian** est la mesure de l'angle au centre qui intercepte un arc de cercle dont la longueur est égale à une unité sur le cercle trigonométrique ($\mathscr{C}$).
  Le symbole du radian est **rad**.
  Un radian est peu différent de 57,3° ; soit environ : 57°17 ' 45".



- La mesure en radian d'un angle $\widehat{MON}$ est égale à la longueur de l'arc intercepté par cet angle sur le cercle de centre O et de rayon 1.



Propriété 1

La mesure d'un angle en degrés est proportionnelle à sa mesure en radian.

Comme π rad = 180°, on a $1° = \frac{\pi}{180}$rad, et donc $a° = \frac{\pi}{180}a$ rad .

Réciproquement, $1\text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}$ et donc : $x\text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}x\right)^{\circ}$.

Exemples

- La mesure α, en degrés, d'un angle de 2π rad est : $\alpha = \frac{180°}{\pi} \times 2\pi = 360°$.
- La mesure α, en radians, d'un angle de 135 degrés est : $\alpha = \frac{\pi\text{ rad}}{180} \times 135 = \frac{3\pi}{4}\text{rad}$.

Définition

- Il existe deux sens de parcours sur un cercle.
- Orienter le cercle c'est choisir l'un de ses sens de parcours. Le sens choisi est dit sens direct ou positif. L'autre sens est dit indirect ou négatif ou rétrogarde.
- Le cercle trigonométrique est le cercle orienté de rayon 1.
- Le plan est dit orienté quand tous les cercles du plan sont orientés positivement.

Définitions

- Un triangle ABC est dit de sens direct si le cercle circonscrit au triangle ABC est parcouru dans le sens direct de A vers B.
- Un repère (O, I, J) est dit direct ou de sens direct si le triangle OIJ est de sens direct.
- Un carré ABCD est dit direct si le cercle circonscrit au carré ABCD est parcouru dans le sens direct de A vers B, c'est à dire que le repère (A, B, C) est de sens direct.

2- ANGLES ORIENTES

2-1 Angle orienté de deux vecteurs non nuls

Définition

Le plan est orienté. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et O un point quelconque. A et B deux points du plan tels que : $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$. Soit M et N les points d'intersection respectifs des demi-droites [OA) et [OB) avec un cercle de centre O.

- L'ensemble de tous les couples $(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}})$ de vecteurs non colinéaires pour lesquels l'arc $\widehat{MN}$ garde la même longueur et est parcouru dans le même sens de M vers N est appelé angle orienté et noté $(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}})$.
- L'ensemble de tous les couples $(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}})$ par lesquels les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens est appelé angle orienté nul.
- L'ensemble de tous les couples $(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}})$ par lesquels les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de sens contraires est l' angle orienté plat.
- (O, I, J) est un repère orthonormé direct.

L'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OJ}})$ est dit droit positif ou droit direct.

L'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{OJ}\,;\overrightarrow{OI}})$ est dit droit négatif ou droit indirect.

2-2 Mesure principale d'un angle orienté

Définition

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ un angle orienté, O un point du plan.

On considère les points A et B tels que : $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$.

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires.

  M et N sont les points d'intersection respectifs des demi-droites [OA) et [OB) avec un cercle $(\mathscr{C})$ de centre O.

  La mesure principale de $(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}})$ notée $Mes(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}})$ et défini par :

  $Mes(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}) = mes\,\widehat{AOB}$ si le sens de parcours sur $(\mathscr{C})$ de M vers N de l'arc $\widehat{MN}$ est direct.

  $Mes(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}) = -\,mes\,\widehat{AOB}$ si le sens de parcours sur $(\mathscr{C})$ de M vers N de l'arc $\widehat{MN}$ est indirect.

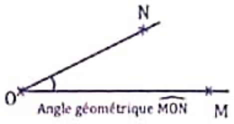
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

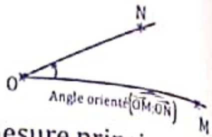
  $Mes(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}) = 0$ si $(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}})$ est l'angle orienté nul.

  $Mes(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}) = \pi$ si $(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}})$ est l'angle orienté plat.

- L'angle orienté nul a pour mesure principale 0 ;
- L'angle orienté plat a pour mesure principale π ;
- L'angle droit direct (respectivement indirect) a pour mesure principale est $\frac{\pi}{2}$ (respectivement $-\frac{\pi}{2}$).

- Si M, O et N sont trois points deux à deux distincts, la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{MON}$ est égale à la valeur absolue de la mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{OM} ; \overrightarrow{ON}})$.





- Deux **angles orientés** sont **égaux** si et seulement si ils ont la même mesure principale.
- Si l'angle orienté $(\widehat{\vec{u} ; \vec{v}})$ n'est pas plat alors $\text{Mes}(\widehat{\vec{v} ; \vec{u}}) = -\text{Mes}(\widehat{\vec{u} ; \vec{v}})$.
- On définit de façon analogue la mesure principale en degré d'un angle orienté. On la note : $\text{Mes}°(\widehat{\vec{u} ; \vec{v}})$.

PROPRIÉTÉ FONDAMENTALE

Soit α un nombre réel appartenant à l'intervalle $]-\pi ; \pi]$ et une demi-droite [OX). Il existe une seule demi-droite [OY) telle que :

$mes(\widehat{\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY}}) = \alpha$.

PROPRIÉTÉ

Soit $A, B, D, C, A', B', C', D'$ des points deux à deux distincts. On a :

$(\widehat{\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}}) = (\widehat{\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}})$ si et seulement si :

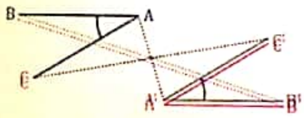
$(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}}) = (\widehat{\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{C'D'}})$.

2-3 Angle orienté et applications du plan

PROPRIÉTÉ

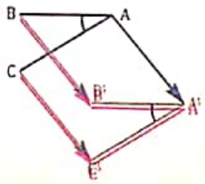
- La symétrie centrale et la translation conservent les angles orientés.
- La symétrie orthogonale transforme un angle orienté en son opposé.

f est une symétrie centrale



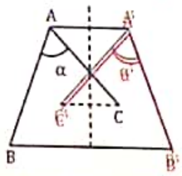
$(\widehat{\overrightarrow{A'B'} ; \overrightarrow{A'C'}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}})$ sont égaux

f est une translation

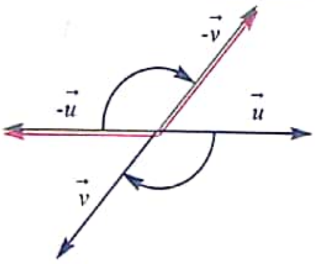


$(\widehat{\overrightarrow{A'B'} ; \overrightarrow{A'C'}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}})$ sont égaux

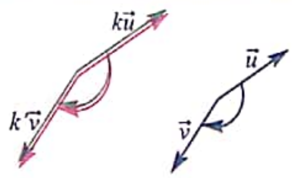
f est une symétrie orthogonale



$(\widehat{\overrightarrow{A'B'} ; \overrightarrow{A'C'}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}})$ sont opposés



$(\widehat{-\vec{u} ; -\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u} ; \vec{v}})$



$k > 0 ; k' > 0 : (\widehat{k\vec{u} ; k'\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u} ; \vec{v}})$

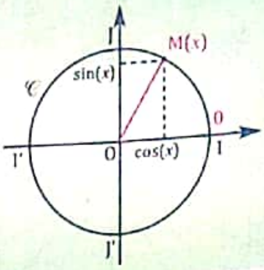
3- TRIGONOMETRIE

3-1 Cosinus, Sinus et Tangente d'un angle orienté

DÉFINITION

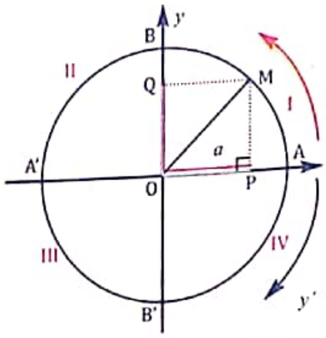
Le plan est muni du repère orthonormé direct (O, I, J).

- On appelle **cosinus** du nombre réel x, et on note $\cos(x)$ ou $\cos x$, l'abscisse du point M dans le repère orthonormé (O, I, J).
- On appelle **sinus** du nombre réel x, et on note $\sin(x)$ ou $\sin x$, l'ordonnée du point M dans le repère orthonormé (O, I, J).



REMARQUES

- Le sinus d'un angle situé dans le cadran (I) ou (II) est positif, et négatif dans le cadran (III) ou (IV).
- Le cosinus d'un angle situé dans le cadran (I) ou (IV) est positif, et négatif dans le cadran (II) ou (III).



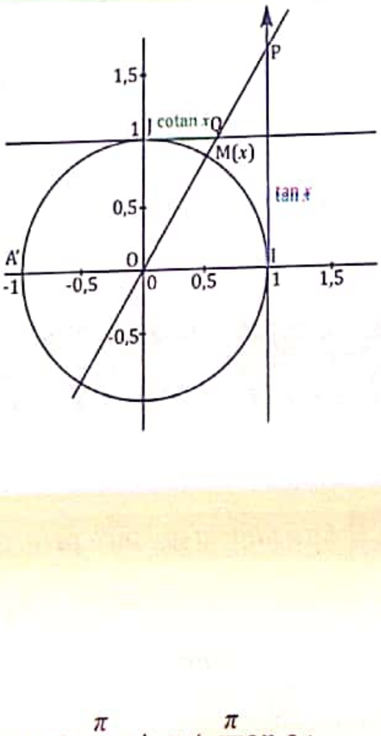
DÉFINITION

Soit un angle orienté $(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}})$ non droit de mesure principale α ($\alpha \neq -\frac{\pi}{2}$ et $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$).

La tangente de $(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}})$ ou la tangente de α est définie par : $\tan(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}) = \tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

Interprétation géométrique

Soit un angle orienté non droit de mesure principale x.
Soit M l'image de x sur le cercle trigonométrique.
La tangente de x est $\overline{IP}$.
La cotangente de x est $\overline{JQ}$.



PROPRIÉTÉ

- Pour tout nombre réel x, on a :

$-1 \leq \cos(x) \leq 1$; $\cos(-x) = \cos(x)$;

$-1 \leq \sin(x) \leq 1$; $\sin(-x) = -\sin(x)$;

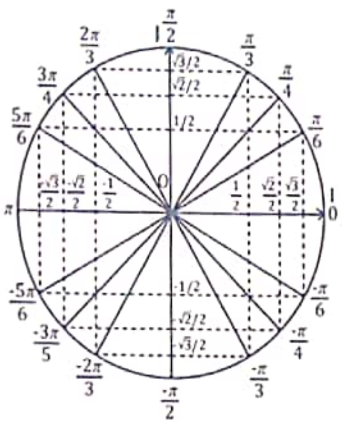
$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$;

- Pour tout nombre réel α de l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$ tel que $\alpha \neq -\frac{\pi}{2}$ et $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ on a :

$1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$.

Valeurs des sinus et cosinus d'angles remarquables

]-π ; π]



θ(°)	0	30	45	60	90
θ(rad)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sinθ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cosθ	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tanθ	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\sqrt{3}$	∞

REMARQUES
- Deux angles opposés ont **même cosinus** et des **sinus opposés**.
- Deux angles supplémentaires ont **même sinus** et des **cosinus opposés**.
- Si deux angles sont complémentaires, le **cosinus** de l'un est égal **au sinus** de l'autre.

III- MÉTHODE

- Pour convertir la mesure α (exprimée en degré) d'un angle en radian, on calcule $\alpha \times \frac{\pi}{180}$.
- Pour convertir la mesure x (exprimée en radian) d'un angle, on calcule $x \times \frac{180}{\pi}$;
- Pour déterminer la mesure principale d'un angle orienté, on ajoute un multiple de 2π à la mesure donnée afin d'obtenir une mesure dans l'intervalle $]-\pi ; \pi]$;
- Pour déterminer une mesure θ d'un angle orienté dans une configuration :
  - utiliser une transformation du plan ;
  - connaître $\cos\theta$ et $\sin\theta$, et les angles remarquables ;
  - calculer la mesure géométrique $\widehat{BAC}$, puis en déterminer si ABC est un triangle direct ou non.

IV- SAVOIR-FAIRE

Savoir-faire 1- *Calculer la mesure principale d'un angle orienté dans une configuration donnée*

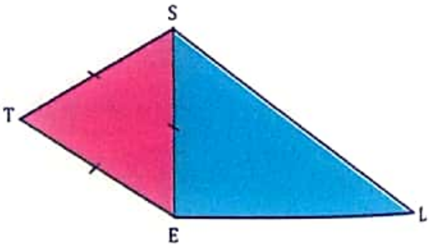
ÉNONCÉ

On considère la figure ci-contre.

On donne : $Mes(\overrightarrow{LE} ; \overrightarrow{LS}) = -\frac{\pi}{6}$.

Détermine la mesure principale de chacun des angles suivants :

$(\overrightarrow{ET} ; \overrightarrow{EL})$; $(\overrightarrow{SE} ; \overrightarrow{SL})$; $(\overrightarrow{TS} ; \overrightarrow{ES})$; $(\overrightarrow{TS} ; \overrightarrow{EL})$.



SOLUTION COMMENTÉE

Je détermine la mesure principale de chaque angle orienté :

• $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{ET}\,;\,\overrightarrow{EL}}\right)$

Les angles $\widehat{TES}$ et $\widehat{SEL}$ étant adjacents, on a :

$\text{mes}\widehat{TEL} = \text{mes}\widehat{TES} + \text{mes}\widehat{SEL}$

$= 60° + 90° = 150°$

Le triangle TEL étant des sens indirect, $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{ET}\,;\,\overrightarrow{EL}}\right) = -\frac{5\pi}{6}$.

• $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{SE}\,;\,\overrightarrow{SL}}\right)$

On a : $\text{mes}\widehat{ESL} + \text{mes}\widehat{SEL} + \text{mes}\widehat{SLE} = 180°$

or $\text{mes}\widehat{SEL} = 90°$ et $\text{mes}\widehat{SLE} = 30°$, donc $\text{mes}\widehat{ESL} = 60°$.

Le triangle SEL est de sens direct. On en déduit que $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{SE}\,;\,\overrightarrow{SL}}\right) = \frac{\pi}{3}$.

• $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{TS}\,;\,\overrightarrow{ES}}\right)$

On a : $\left(\widehat{\overrightarrow{TS}\,;\,\overrightarrow{ES}}\right) = \left(\widehat{-\overrightarrow{ST}\,;\,-\overrightarrow{SE}}\right)$

$= \left(\widehat{\overrightarrow{ST}\,;\,\overrightarrow{SE}}\right)$, car $\left(\widehat{-\vec{u}\,;\,-\vec{v}}\right) = \left(\widehat{\vec{u}\,,\,\vec{v}}\right)$

Par suite : $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{TS}\,;\,\overrightarrow{ES}}\right) = \text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{ST}\,;\,\overrightarrow{SE}}\right)$

$= \frac{\pi}{3}$, car le triangle STE est équilatéral direct.

• $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{TS}\,;\,\overrightarrow{EL}}\right)$

Soit I le milieu de [ES].

Le triangle STE étant équilatéral, les vecteurs $\overrightarrow{TI}$ et $\overrightarrow{EL}$ sont colinéaires et de même sens.

On a : $\left(\widehat{\overrightarrow{TS}\,;\,\overrightarrow{EL}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{TS}\,;\,\overrightarrow{TI}}\right)$

Or $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{TS}\,;\,\overrightarrow{TI}}\right) = \frac{\pi}{6}$, donc $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{TS}\,;\,\overrightarrow{EL}}\right) = \frac{\pi}{6}$.

Savoir-faire 2- *Lire la mesure principale d'un angle orienté - calculer la mesure principale d'un angle orienté*

Énoncé

ABCD est un carré direct. AID et DCJ sont deux triangles équilatéraux directs.

1- Fais une figure ;

2- a) Détermine la mesure principale de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AI}}\right)$.

b) Déduis-en les mesures principales de $\left(\widehat{\overrightarrow{BI}\,;\,\overrightarrow{BA}}\right)$ et de $\left(\widehat{\overrightarrow{BC}\,;\,\overrightarrow{BI}}\right)$.

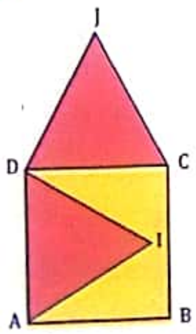
3- a) Détermine la mesure principale de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{CJ}\,;\,\overrightarrow{CB}}\right)$.

b) Déduis-en la mesure principale de $\left(\widehat{\overrightarrow{BC}\,;\,\overrightarrow{BJ}}\right)$.

4- Justifie que les points B, I et J sont alignés.

Solution commentée

1- Je fais la figure.



2-a) Je détermine la mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AI}})$.

Les angles $\widehat{DAI}$ et $\widehat{IAB}$ étant adjancant, on a :

$mes\widehat{DAB} = mes\widehat{DAI} + mes\widehat{IAB}$

D'où : mes $\widehat{IAB} = 30°$ car les triangles DAB et IAD sont respectivement rectangles et équilatéral.
Le triangle AIB étant de sens direct, on a :
$Mes(\widehat{\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AI}}) = \frac{\pi}{6}$.

b) Je déduis les mesures principales de $(\widehat{\overrightarrow{BI}\,;\overrightarrow{BA}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{BI}})$.

On a AI = AB, d'où le triangle ABI est isocèle en A.

Par suite : $2\,mes\widehat{ABI} + mes\widehat{IAB} = 180°$.

Or $mes\widehat{IAB} = 30°$, donc $mes\widehat{ABI} = 75°$.
Le triangle ABI étant de sens direct, on a :
$Mes°(\widehat{\overrightarrow{BI}\,;\overrightarrow{BA}}) = 75°$; c'est-à-dire $Mes(\widehat{\overrightarrow{BI}\,;\overrightarrow{BA}}) = \frac{5\pi}{12}$.
Les angles $\widehat{CBI}$ et $\widehat{ABI}$ étant adjancents, on a :

$mes\widehat{CBI} + mes\widehat{ABI} = mes\widehat{ABC}$

Or le triangle ABC est rectangle en B et $mes\widehat{ABI} = 75°$ donc $mes\widehat{CBI} = 15°$.
Le triangle BCI est de sens direct, par suite
$Mes°(\widehat{\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{BI}}) = 15°$. On en déduit que $Mes(\widehat{\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{BI}}) = \frac{5\pi}{12}$.

3-a) Je détermine la mesure principale de $(\widehat{\overrightarrow{CJ}\,;\overrightarrow{CB}})$.

Les angles $\widehat{DCJ}$ et $\widehat{DCB}$ étant adjacents, on a :

$mes\widehat{DCJ} + mes\widehat{DCB} = mes\widehat{JCB}$

Or l'angle $\widehat{DCB}$ est droit et le triangle DCJ est équilatéral donc $mes\widehat{JCB} = 150°$.

Le triangle CJB étant de sens direct, on déduit que $Mes°(\widehat{\overrightarrow{CJ}\,;\overrightarrow{CB}}) = 150°$. D'où $Mes(\widehat{\overrightarrow{CJ}\,;\overrightarrow{CB}}) = \frac{5\pi}{6}$.
b) Je déduis la mesure principale de $(\widehat{\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{BJ}})$.
On a CB = CJ, d'où le triangle CBJ est isocèle en C.
Par suite :

$mes\widehat{BCJ} + 2\,mes\widehat{CBJ} = 180°$

d'après ce qui précède, $mes\widehat{BCJ} = 150°$, d'où :

$mes\widehat{CBJ} = 15°$.
Le triangle BCJ étant de sens direct, on a :
$Mes°(\widehat{\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{BJ}}) = 15°$. On en déduit que $Mes(\widehat{\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{BJ}}) = \frac{\pi}{12}$.
4- Je justifie que les point B, I et J sont alignés.
D'après 2-b) et 3-b) on a :
$Mes(\widehat{\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{BI}}) = Mes(\widehat{\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{BJ}})$.

Par suite $(\widehat{\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{BI}}) = (\widehat{\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{BJ}})$, car deux angles orientés qui ont la même mesure principale sont égaux.

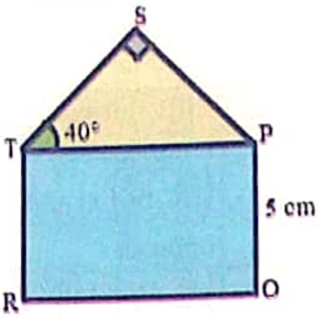
On en déduit que : $(\widehat{\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{BC}}) = (\widehat{\overrightarrow{BI}\,;\overrightarrow{BJ}})$.

Or $(\widehat{\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{BC}})$ l'angle orienté nul, donc $(\widehat{\overrightarrow{BI}\,;\overrightarrow{BJ}})$est l'angle orienté nul.
On conclut que les points B, I et J sont alignés.

Savoir-faire 3- Utiliser la trigonométrie pour calculer la longueur d'un segment

Énoncé

Calcule une valeur arrondie à 10^{-2} cm près de SP sachant que *mes* $\widehat{STP} = 40°$, PO = 5 cm et que l'aire du rectangle PORT est égale à 60 cm².



Solution commentée

L'aire du rectangle PORT est de 60 cm² donc TP × 5 = 60 c'est à dire TP = 12 cm.
Dans le triangle rectangle STP on a :

$\sin\widehat{STP} = \frac{SP}{PT}$, donc : SP = PT × $\sin\widehat{STP}$, d'où : SP = 12 × sin40° = 7,706.

La valeur arrondie à 10^{-2} près de SP est 7,71 cm.

V- JE M'EXERCE

1- Exercices de fixation/ Application

Angles orientés

Connaître la définition de la mesure d'un angle en radian

1 Choisis la bonne réponse parmi celles qui sont proposées :

1- Un radian vaut environ :
a) 60° ; b) 180° ;
c) 90° ; d) 57,3°.

2- Un tour du cercle trigonométrique dans le sens direct mesure en radian :
a) π ; b) 2π ;
c) 1 ; d) 3,14.

3- Un angle droit mesure en radian :
a) 0,25 ; b) π ;
c) $\frac{\pi}{2}$; d) $\frac{\pi}{4}$.

Convertir des mesures d'angles de degrés en radians et inversement

2

a) Convertis en radians chacun des angles suivants :
150° ; 23° ; 100° ; 160° ; 270°.

b) Convertis en degrés chacun des angles suivants :
$\frac{2\pi}{3}$ rd ; $\frac{7\pi}{6}$ rd ; $\frac{-25\pi}{4}$ rd ; $\frac{\pi}{8}$ rd ; $\frac{\pi}{12}$ rd
$\frac{5\pi}{10}$ rd ; $\frac{-25\pi}{12}$ rd.

3 Reproduis et complète les cases vides du tableau suivant :

Mesures en radians	$\frac{9\pi}{2}$			$\frac{-47\pi}{8}$	50
Mesures en radians		225	-144		

Connaître la définition d'un angle orienté

4 Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs directeurs de deux demi-droites de même origine.

a) Tout couple de vecteurs $(\vec{u}\,;\vec{v})$ définit un angle orienté.

b) Tout couple de vecteurs non colinéaires $(\vec{u}\,;\vec{v})$ définit un angle orienté.

c) Le couple de vecteurs $(10\vec{u}\,;3\vec{v})$ définit un angle orienté nul.

d) Le couple de vecteurs $(-2\vec{u}\,;5\vec{v})$ définit un angle orienté plat.

5 Parmi les figures ci-dessous, indique celles qui sont des angles orientés opposés.

Figure 1

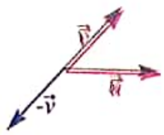


Figure 2

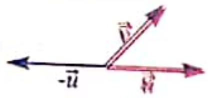


Figure 3

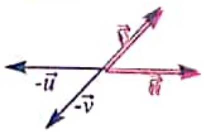


Figure 4

Reconnaître deux angles opposés

6 A, B et C sont trois points distincts. Réponds par vrai (V) ou par faux (F) à chacune des affirmations suivantes :

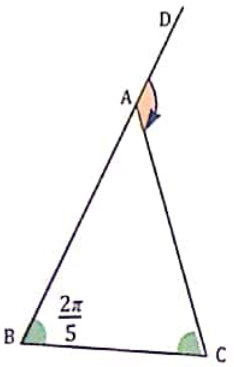
N°	Affirmations	Réponses
1	Les angles orientés $(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{BA}, -\overrightarrow{BC}})$ sont opposés	
2	Les angles orientés $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}})$ sont opposés	
3	Les angles orientés $(\widehat{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}})$ et $-(\widehat{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}})$ sont opposés	
4	Les angles orientés $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$ et $(\widehat{-\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$ sont opposés	

Mesurer un angle orienté – Exprimer la mesure d'un angle en radian

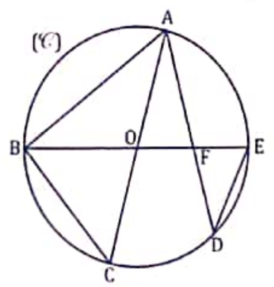
7 Parmi les nombres suivants, indique ceux qui sont la mesure principale en radians d'un angle orienté.

$\frac{5\pi}{8}$; -2π ; 100π ; $-\sqrt{10}$; $\sqrt{7}$; $\frac{-2\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{8}$.

8 Donne la mesure principale des angles orientés suivants : $(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}})$; $(\widehat{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}})$; $(\widehat{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}})$.



9 Observe attentivement la figure ci-dessous.



Donne la mesure principale de chacun des angles orientés suivants :

$(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}})$; $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}})$; $(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}})$;

$(\widehat{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}})$; $(\widehat{\overrightarrow{FE}, \overrightarrow{FD}})$; $(\widehat{\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OC}})$

Connaître la définition de la mesure principale d'un angle orienté

10 Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

1- Une mesure principale détermine un unique angle.

2- Une mesure principale est dans l'intervalle :

a) $]0 ; 2\pi]$; b) $[\pi ; 2\pi[$;

c) $]-\pi ; \pi]$; d) $]0 ; \pi]$.

3- Deux angles orientés différents mais de même mesure principale sont :

a) Opposés ; b) symétriques ;

c) supplémentaires ; d) différents de plusieurs.

4- Soit α un nombre réel. La mesure principale de $\alpha + \pi$ est α.

Construire un angle orienté connaissant la mesure principale

11 Dans chacun des cas suivants, construis un angle orienté de mesure principale α.

a) $\alpha = -\frac{\pi}{4}$; b) $\alpha = -\frac{2\pi}{3}$; c) $\alpha = \frac{5\pi}{6}$.

12 ABCD est un parallélogramme tel que :

$Mes(\widehat{\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD}}) = \frac{3\pi}{4}$.

a) Construis l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD}})$.

b) Construis le parallélogramme ABCD.

Calculer la mesure principale d'un angle dans une configuration

13 EFGH est un parallélogramme tel que :

$Mes(\widehat{\overrightarrow{EF} ; \overrightarrow{EG}}) = \frac{5\pi}{12}$.

a) Détermine la mesure principale de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{FG} ; \overrightarrow{HG}})$.

b) Calcule la mesure principale de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{FG} ; \overrightarrow{FE}})$.

Connaître la définition du cercle trigonométrique

14 Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

a) Le cercle trigonométrique admet deux sens de parcours.

b) Le cercle trigonométrique passe par les points I et J dans un repère orthonormé (O ; I ; J).

c) Le sens positif d'un cercle trigonométrique est celui des aiguilles d'une montre ;

d) Le sens direct est celui des aiguilles d'une montre.

e) Dans le plan muni du repère orthonormé (O ; A ; B), sur le cercle trigonométrique, le symétrique du point A par rapport au point O correspond à une mesure principale de $-\pi$.

Placer sur le cercle trigonométrique le point image d'un angle orienté dont on connaît la mesure principale

15 Place sur le cercle trigonométrique les points images des nombres suivants :

a) 0 ; $-\pi$; π ; 2π.

b) $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{6}$.

c) $-\frac{\pi}{3}$; $-\frac{\pi}{4}$; $-\frac{\pi}{6}$; $-\frac{2\pi}{3}$; $-\frac{3\pi}{4}$; $-\frac{5\pi}{6}$.

16 Construis le cercle trigonométrique et place les points images associés aux angles orientés dont les nombres réels ci-dessous sont les mesures principales en radians.

a) $\frac{\pi}{3}$; b) $-\frac{\pi}{8}$; c) $\frac{2\pi}{3}$.

Connaître la définition du cosinus, du sinus et de la tangente d'un angle orienté

17 Pour chacune des affirmations suivantes, quatre réponses sont proposées. Indique la (ou les) bonne(s) réponse(s) :

1- La valeur exacte de $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ est :

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $-\frac{1}{2}$; c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; d) $\frac{1}{2}$.

2- La valeur exacte de $\cos\left(\frac{-3\pi}{4}\right)$ est :

a) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; c) $\frac{-1}{\sqrt{2}}$; d) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3- La valeur exacte de $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ est :

a) 1 ; b) -1 ; c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; d) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

18 Réponds par vrai ou faux à chacune des affirmations suivantes :

a) Le cosinus d'un angle orienté de mesure principale α est l'ordonnée d'un point M sur le cercle trigonométrique repéré par α.

b) Le sinus d'un angle orienté de mesure principale α est l'abscisse d'un point M repéré sur le cercle trigonométrique par α.

c) Pour $\alpha \neq -\frac{\pi}{2}$ et $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$, la tangente d'un angle orienté de mesure principale α est le quotient $\cos\alpha$ par $\sin\alpha$.

Connaître les propriétés relatives au cosinus, au sinus et à la tangente d'un angle orienté

19 Réponds par vrai ou faux à chacune des affirmations suivantes :

α est un nombre de l'intervalle $]-\pi ; \pi]$.

a) $0 \leq \cos\alpha \leq 1$; b) $0 \leq \sin\alpha \leq 1$;

c) $\cos^2\alpha = (1 - \sin\alpha)(1 + \sin\alpha)$;

d) Pour $\alpha \neq -\frac{\pi}{2}$ et $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$, $1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$.

On donne : $\sin\frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

Indique la valeur exacte de $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ et $\cos\frac{\pi}{12}$.

Retrouver les valeurs du sinus, du cosinus et de la tangente d'un angle orienté en utilisant le cercle trigonométrique

20 A l'aide du cercle trigonométrique, détermine l'angle α en radians, dans chacun des cas suivants :

a) $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ et $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

b) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\alpha = \frac{1}{2}$;

c) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

d) $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$ et $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

e) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

f) $\cos\alpha = -1$ et $\sin\alpha = 0$;

g) $\cos\alpha = 0$ et $\sin\alpha = -1$;

h) $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$ et $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

i) $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ et $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

j) $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ et $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

21 Réponds par vrai (V) ou faux (F) à chacune des affirmations suivantes :

N°	Affirmations	Réponses
1	Le cosinus de x lorsque x appartient à $[\frac{\pi}{2} ; \pi]$ est strictement positif	
2	Le cosinus de x lorsque x appartient à $[-\frac{\pi}{2} ; 0]$ est positif	
3	Le sinus de x lorsque x appartient à $[-\pi ; -\frac{\pi}{2}]$ est positif	
4	Le sinus de x lorsque x appartient à $[\pi ; \frac{3\pi}{2}]$ est négatif	
5	Le sinus de x lorsque x appartient à $[\frac{3\pi}{2} ; 2\pi]$ est positif	

22 Réponds par vrai (V) ou par faux (F) à chacune des affirmations ci-dessous.

N°	Affirmations	Réponses
1	$\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$	
2	$\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$	
3	$\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$	
4	$\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$	
5	$\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$	

23

1- a) Sachant que $\cos\left(\frac{9\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$, calcule la valeur exacte de $\sin\left(\frac{9\pi}{5}\right)$.

b) Déduis en les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

2- a) Soit x un réel tel que $\sin x = \frac{2}{3}$ et $x \in [\frac{\pi}{2} ; \pi]$. Calcule $\cos x$ et $\tan x$.

b) Soit α un réel tel que $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$ et $\alpha \in [-\pi ; 0]$. Calcule $\sin\alpha$ et $\tan\alpha$.

2- Exercices de renforcement / approfondissement

24 ACE est un triangle isocèle direct de sommet principal A et tel que :

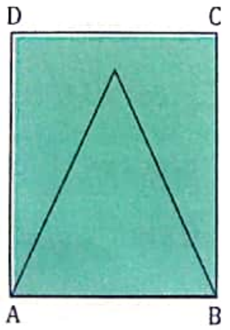
$AC = 5$ et $\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AC} ; \overrightarrow{AE}}\right) = \frac{2\pi}{5}$.

1- Construis le triangle équilatéral direct AEF et le triangle ABC rectangle isocèle direct en A.

2- Détermine la mesure principale de chacun des angles orientés suivants : $\left(\widehat{\overrightarrow{AE} ; \overrightarrow{AC}}\right)$; $\left(\widehat{\overrightarrow{AF} ; \overrightarrow{AC}}\right)$.

3- Justifie que la mesure principale de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{AF} ; \overrightarrow{AB}}\right)$ est égale à $\frac{23\pi}{30}$.

25 Sur la figure ci-contre, ABCD est un carré et ABO est un triangle équilatéral.



1- Justifie que :
$\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{BC} ; \overrightarrow{BO}}\right) = \frac{\pi}{6}$.

2- Déduis-en la mesure principale de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{BO} ; \overrightarrow{AD}}\right)$.

3- a) Justifie que :
$\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{AD}}\right) = -\frac{5\pi}{6}$.

b) Détermine la mesure principale de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{AD} ; \overrightarrow{DC}}\right)$.

4- Détermine la mesure principale de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{DC}}\right)$.

26 On considère un nombre réel x appartenant à $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$ tel que :

$\sin x = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

1- Détermine la valeur exacte de $\cos(x)$.

2- Sachant que $x \in \left\{\frac{\pi}{12} ; \frac{5\pi}{12} ; -\frac{\pi}{12} ; -\frac{5\pi}{12}\right\}$, détermine la valeur exacte de x.

27
1- Démontre que pour tout nombre réel x :
$(\cos x + 2\sin x)^2 + (2\cos x - \sin x)^2 = 5$.
2- Calcule les nombres suivants :
$A = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)$;
$B = \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \times \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \times \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \times \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

28
a) Convertis en radians les mesures d'angles suivantes, exprimées en degrés :
$18°$; $120°$; $200°$; $300°$; $29°$.
(On donnera les valeurs exactes puis les valeurs arrondies au centième près)
b) Convertis en degrés les mesures d'angles suivantes, exprimées en radians:
$\frac{\pi}{5}$; $\frac{5\pi}{12}$; $\frac{3\pi}{10}$; $\frac{\pi}{30}$; 1.

29 α désigne un réel tel que $\sin\alpha = 0{,}1$.
a) Place sur le cercle trigonométrique les deux points images possibles du nombre réel α.
b) Donne avec la calculatrice, en mode radian, la valeur approchée possible de α dans $[0 ; \frac{\pi}{2}]$ puis dans $[\frac{\pi}{2} ; \pi]$.

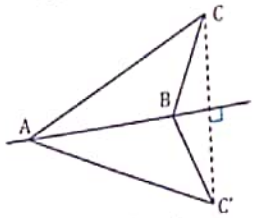
30 α désigne un réel tel que $\cos\alpha = -\frac{5}{6}$.
a) Place sur le cercle trigonométrique les deux points images possibles du réel α.
b) Donne avec la calculatrice, en mode radian, la valeur approchée possible de α dans $[0; \pi]$ puis dans $[-\pi ; 0]$.

31 Soit ABCD un carré direct de centre O.
Détermine les mesures principales des angles orientés suivants : $(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OB}})$; $(\widehat{\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OA}})$; $(\widehat{\overrightarrow{DA};\overrightarrow{CO}})$.

NMP est un triangle équilatéral direct. On désigne par I le milieu du segment [NM].
Détermine les mesures principales des angles orientés suivants : $(\widehat{\overrightarrow{NM};\overrightarrow{MP}})$; $(\widehat{\overrightarrow{PN};\overrightarrow{PI}})$; $(\widehat{\overrightarrow{NI};\overrightarrow{PM}})$.

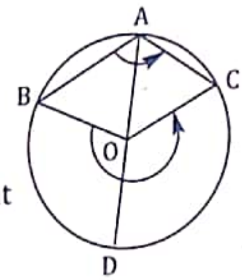
32 On considère une figure où :
- ABC et ACE sont des triangles rectangles isocèles directs respectivement en A et en E ;
- BCD est un triangle équilatéral direct.
a) Fais une figure correspondant à l'énoncé.
b) Détermine les mesures principales des angles orientés suivants :
$(\widehat{\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}})$; $(\widehat{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}})$;
$(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AE}})$; $(\widehat{\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CE}})$;
$(\widehat{\overrightarrow{CA};\overrightarrow{DC}})$; $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CE}})$.

33 Sur la figure ci-dessous, le point C'est le symétrique du point C par rapport à la droite (AB).



a) Exprime l'angle $(\widehat{\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}})$ à l'aide des angles $(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}})$.
b) Compare Mes$(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}})$ et Mes$(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC'}})$ d'une part et Mes$(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}})$ et Mes$(\widehat{\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC'}})$ d'autre part.
c) Déduis des questions précédentes que :
Mes$(\widehat{\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}})$ = - Mes$(\widehat{\overrightarrow{C'A};\overrightarrow{C'B}})$.

34 Sur la figure ci-contre :
- (Γ) est un cercle de centre O ;
- A, B et C sont trois points du cercle (Γ) ;
- Le point D est diamétralement opposé à A sur (Γ).



35
a) Construis un cercle ($\mathscr{C}$) de centre A et place un point B sur ce cercle.
b) Place les points C, D, E et F sur ($\mathscr{C}$) tels que :

- Mes$(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}) = \frac{\pi}{3}$;
- Mes$(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}}) = -\frac{\pi}{2}$;
- Mes$(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AE}}) = -\frac{5\pi}{6}$;
- Mes$(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AF}}) = \frac{-3\pi}{4}$.

c) Détermine la mesure principale de chacun des angles orientés suivants :
$(\widehat{\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AB}})$; $(\widehat{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AE}})$; $(\widehat{\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AF}})$.
d) Justifie que :
Mes$(\widehat{\overrightarrow{AF};\overrightarrow{AC}}) = -\frac{11\pi}{12}$ et Mes$(\widehat{\overrightarrow{AF};\overrightarrow{AE}}) = -\frac{11\pi}{12}$.

36 Dans le plan orienté, on considère un trapèze rectangle ABCD tel que :

- DC = 2 AB ;
- Mes$\left(\widehat{\overrightarrow{DC}\,;\overrightarrow{DA}}\right) = \frac{\pi}{2}$;
- AB = AD.

On appelle I le milieu du segment [DC].
Détermine la mesure principale de chacun des angles orientés suivants :

a) $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{CD}}\right)$; b) $\left(\widehat{\overrightarrow{AI}\,;\overrightarrow{AD}}\right)$;

c) $\left(\widehat{\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{AI}}\right)$; d) $\left(\widehat{\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{AD}}\right)$.

37 On donne les nombres réels suivants :

$E = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \sin \pi$;

$F = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$;

$G = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

a) Calcule E, F et G.
b) Justifie que : F = 0 et G = 1.

38 Soit x un nombre réel tel que : $\sin x = \frac{1}{3}$.

1) Déduis-en $\cos x$. Justifie ta réponse.

2-a) On sait de plus que $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$. Calcule $\cos x$.

b) Justifie que $\tan x = -\frac{\sqrt{2}}{4}$.

39 Soit x un nombre réel différent de $-\frac{\pi}{2}$ et de $\frac{\pi}{2}$.

a) Démontre que : $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$.

b) On suppose que $\cos x = \frac{1}{3}$.

Calcule $\tan x$ pour x élément de$\left]-\frac{\pi}{2}\,;0\right]$.

c) On suppose de plus que x est différent de 0 et π.

Démontre que : $1 + \frac{1}{\tan^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x}$.

40 Soit x un nombre réel.

1-a) Calcule$(\cos x - \sin x)^2$.

b) Déduis-en que $\cos x \,.\, \sin x \leq \frac{1}{2}$.

2-a) Calcule $(\cos x + \sin x)^2$ puis justifie que $-\cos x \,.\sin x \leq \frac{1}{2}$.

b) Justifie que : pour tout réel x, $\cos x \,.\, \sin x$ est borné.

On donne : $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

3-a) Justifie que : $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

b) Détermine : $\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)$.

c) Place sur le cercle trigonométrique les points A, B, C, D, E et F images respectives des nombres réels

$\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}$ et $-\frac{5\pi}{8}$.

d) Déduis des consignes précédentes les valeurs exactes de : $\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right)$; $\cos\left(-\frac{5\pi}{8}\right)$; $\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{8}\right)$.

41 Soit u et v deux nombres non nuls, tous les deux.

1- Démontre que : $-1 \leq \frac{u^2 - v^2}{u^2 + v^2} \leq 1$.

2- Soit x un nombre réel de l'intervalle $[-\pi\,;0]$ tel que : $\cos x = \frac{u^2 - v^2}{u^2 + v^2}$.

a) Détermine $\sin x$.

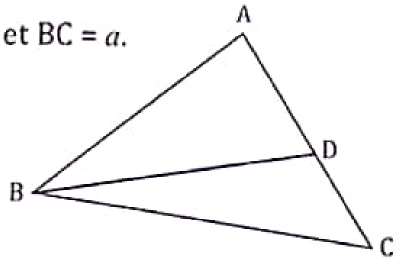
b) Dis si on peut être précis sur la valeur de $\sin x$ lorsqu'on sait que $uv < 0$. Justifie ta réponse.

42 Après avoir traité la leçon « angles orientés et trigonométrie », deux élèves d'une classe de seconde C sont fascinés par les deux angles $\frac{\pi}{5}$ et $\frac{2\pi}{5}$. Ils calculent $\cos\frac{\pi}{5}$ et $\cos\frac{2\pi}{5}$ à l'aide d'une calculatrice. Ils trouvent respectivement 0,809016994 et 0,309016994.

Ils décident alors de trouver leurs valeurs exactes. Après réflexions, ne sachant pas comment faire, ils demandent de l'aide à leur professeur de mathématiques.

Celui-ci leur propose la figure ci-contre où:

- ABC est un triangle isocèle en A ;
- (BD) est la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$;
- $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{BA}}\right) = \frac{2\pi}{5}$ et $BC = a$.



Le professeur leur demande de répondre aux questions ci-dessous.

Chaque élève de la classe décide d'aider leurs camarades.

1-a) Calcule les mesures en radians des angles orientés $\left(\widehat{\overrightarrow{BD}\,;\overrightarrow{BA}}\right)$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}}\right)$.

b) Justifie que : $BD = AD = a$

2-a) Démontre que : $AB = 2a\cos\frac{\pi}{5}$ et $CD = 2a\cos\frac{2\pi}{5}$.

b) Déduis-en que : $\cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}$ (1)

3-a) Démontre que : $BC = 4a\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}$.

b) Déduis-en que : $\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}$ (2)

4- On pose $x = \cos\frac{\pi}{5}$ et $y = \cos\frac{2\pi}{5}$.

En utilisant les relations (1) et (2) et l'égalité $(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy$, calcule $x + y$.

5- Réponds à la préoccupation des élèves de cette classe.

43 Au cours d'une balade dans la savane, un aventurier s'est égaré. Son GPS est en panne et il ne dispose que d'un instrument lui permettant de mesurer les angles suivant lesquels il voit deux points. Il reconnait autour de lui deux pics rocheux, notés P et R sur sa carte, et un arbre mythique noté M. Cet aventurier envoie par SMS ces informations à son fils qui est ton camarade. Vous décidez de le localiser sur la carte sachant qu'il a mesuré que :

$Mes\left(\widehat{\overrightarrow{AR}\,;\overrightarrow{AP}}\right) = \frac{\pi}{3}$ et $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{AM}\,;\overrightarrow{AR}}\right) = \frac{\pi}{4}$.

1- Détermine le point A où se trouve l'aventurier.

2- La figure ci-dessous représente la carte de l'aventurier. Construis ce point A.

RENDEZ-VOUS DES CURIEUX !

L'angle orienté remonte à la plus haute antiquité.
Lors du rallye du Péloponnèse en -452 l'équipage grec a fait une sortie de piste. Le copilote - qui s'appelait Isocèles - avait informé son pilote qu'il fallait tourner de quarante degrés. Le pilote a effectivement fait tourner son char de quarante degrés vers ce qui s'est avéré être la droite. Il s'est aussi avéré que dans cette direction les attendait un bon gros platane, qui, sous prétexte qu'il était là le premier, a refusé mordicus - il était bilingue - de bouger. Il s'en est ensuivi une situation inconfortable, les chevaux n'étant pas entraînés à grimper aux arbres.
Après avoir réfléchi et changé le timon, Isocèles décida de préciser sur le road-book s'il fallait tourner à droite ou à gauche à chaque changement de direction.
Le grand public retient surtout de lui l'invention du triangle qui porte son nom, mais c'est bien Isocèle qui a inventé l'orientation des angles.
Quand au pilote - qui inventa ce jour-là la double fracture tibia/péroné - Il s'appelait Scalène.

9 Statistique

Notions essentielles :

- Organisation des données
- Graphiques
- Caractéristiques de position
- Caractéristiques de dispersion

SITUATION D'APPRENTISSAGE

Dans le cadre de ses activités, le conseil d'enseignement de mathématiques du lycée moderne de Bouaflé organise un devoir de niveau pour les trois classes de 2nde C. Le tableau ci-dessous résume la répartition des notes par classe.

Notes \ Classes	2nde C1	2nde C2	2nde C3
4	5	1	14
5	3	2	1
7	5	3	4
9	5	7	2
10	4	11	2
11	5	8	2
12	6	6	1
14	5	5	1
15	5	4	10
18	7	3	13

Pour mieux comprendre et interpréter ces résultats, les élèves de la 2nde C1 décident de faire des calculs et construire des diagrammes.

I- ACTIVITÉS DE DÉCOUVERTE

A- ORGANISATION DES DONNEES

Identifier l'effectif cumulé – la fréquence cumulée

Activité 1

Une enquête faite auprès de 50 élèves d'une classe de 2nde C d'un lycée, portant sur le nombre de romans lus depuis leur entrée en classe de 6ème, a donné les résultats suivants :

4	0	2	10	3	2	4	7	8	6
3	3	6	5	6	6	3	0	5	7
6	3	4	6	0	5	4	3	8	7
5	6	6	2	0	5	4	7	10	5
6	2	4	6	5	6	7	5	7	2

1- Dresse le tableau des effectifs et des fréquences (en pourcentage) de cette série statistique.

2- Détermine le nombre d'élèves qui ont lu :

a) au plus 3 romans.
c) au moins 7 romans.
b) au plus 5 romans.
d) au moins 6 romans.

3- Détermine le pourcentage d'élèves qui ont lu :

a) au plus 3 romans.
c) au moins 7 romans.
b) au plus 5 romans.
d) au moins 6 romans.

Je fais le point de l'activité

- 15 élèves ont lu au plus 3 romans.

On dit que 15 est l'effectif cumulé croissant de la modalité 3.

- 10 élèves ont lu au moins 7 romans.

On dit que 10 est l'effectif cumulé décroissant de la modalité 7.

- 58 % d'élèves ont lu au plus 5 romans.

On dit que 58 % est la fréquence cumulée croissante (en pourcentage) de la modalité 5.

- 20 % d'élèves ont lu au moins 7 romans. On dit que 20 % est la fréquence cumulée décroissante (en pourcentage) de la modalité 7.

J'évalue mes acquis

En début d'année scolaire, l'éducateur de niveau 2nde C d'un lycée demande l'âge de chaque élève de ce niveau et obtient le résultat suivant :

- 10 élèves ont 14 ans,
- 15 élèves ont 15 ans ,
- 17 élèves ont 16 ans,
- 12 élèves ont 17 ans.

a) Détermine l'effectif cumulé croissant de la modalité 15, puis la fréquence cumulée croissante correspondante.

b) Détermine la fréquence cumulée décroissante de la modalité 16.

c) Dresse le tableau des effectifs cumulés croissants et des fréquences cumulées croissantes.

B- GRAPHIQUES

Construire le polygones des effectifs cumulés et des fréquences cumulées

Activité 2

Voici un tableau qui résume le temps passé devant le poste téléviseur par 28 enfants.

Temps (en heures)	[1 ; 3[	[3 ; 5[	[5 ; 7[	[7 ; 9[	[9 ; 11[	Total
Effectifs	2	6	4	7	9	28
Effectifs cumulés croissants						

1- Recopie et complète le tableau ci-dessus.

2- Construis le polygone des effectifs cumulés croissants en fonction du temps.

3- Dresse le tableau des fréquences et des fréquences cumulées croissantes.

4- Construis le polygone des fréquences cumulées croissantes en fonction du nombre d'heures.

Je fais le point de l'activité

Pour construire le polygone des effectifs cumulés croissants :
- On dresse le tableau des effectifs cumulés croissants ;
- Dans un repère (O, I, J), on place en abscisse les modalités et en ordonnées les effectifs ;
- On place ensuite les points $M(x, y)$ où x est la modalité et y est l'effectif correspondant à la modalité x ;
- La courbe obtenue où on joint par des segments les points est le polygone des effectifs cumulés croissants ;
- On construit de même le polygone des fréquences cumulées croissantes.

J'évalue mes acquis

Voici le tableau d'une série statistique.

Classes	[0 ; 10[	[10 ; 20[	[20 ;30[	[30 ; 40[	[40 ; 50[
Effectifs	5	6	7	3	1

1- Indique pour chaque représentation du polygone les coordonnées de ses sommets.

2- Construis les polygones des effectifs cumulés croissants et des fréquences cumulées croissantes.

Activité 3

Avec les données de l'activité 2, voici le tableau des effectifs cumulés décroissants.

Temps (en heures)	[1 ; 3[	[3 ; 5[	[5 ; 7[	[7 ; 9[	[9 ; 11[
Effectifs	2	6	4	7	9
Effectifs cumulés décroissants	28	26	20	16	9

Représente dans un repère orthogonal (O, I, J) la fonction f affine sur les intervalles [1 ; 3[, [3 ; 5[, [5 ; 7[, [7 ; 9[, [9 ; 11[telle que :
$f(1) = 28$; $f(3) = 26$; $f(5) = 20$; $f(7) = 16$; $f(9) = 9$ et $f(11) = 0$.

Je fais le point de l'activité

Le graphique obtenu est le polygone des effectifs cumulé décroissants.

J'évalue mes acquis

Une enquête portant sur l'âge des élèves à une colonie de vacance a donné le tableau suivant :

âge	[13 ; 14[	[14 ; 15[	[15 ; 16[	[16 ; 17[
Effectifs	8	12	16	14
Effectifs cumulés décroissants	50	42	30	14

Contruis le polygone des effectifs cumulés décroissants.

C- CARACTERISTIQUES DE POSITION

1- Identifier la médiane d'une série statistique

ACTIVITÉ 4

Dans chacune des séries statistiques ordonnées suivantes, identifie une valeur qui la partage en deux groupes de même effectif.

S_1 : 2 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 12 ; 13 ; 14 ; 15.

S_2 : 5 ; 8 ; 5 ; 7 ; 8 ; 9 ; 8 ; 7 ; 5.

S_3 : 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 10 ; 12.

S_4 : 35 ; 33 ; 34 ; 37 ; 39 ; 40; 37 ; 28.

Je fais le point de l'activité

Dans une série statistique ordonnée, on appelle médiane toute valeur qui partage cette série en deux groupes de même effectif.

J'évalue mes acquis

Parmi les affirmations suivantes, choisis la bonne réponse :

a) Une médiane est une modalité.

b) Une médiane vaut toujours plus que la moyenne.

c) 50 % de l'effectif de la série ont leur valeur en dessous de la médiane.

d) Une médiane est une valeur strictement positive.

2- Déterminer la médiane d'une série statistique par lecture graphique puis par calcul

ACTIVITÉ 5

On reprend les données de l'activité 2

1- Construis le polygone des effectifs cumulés croissants en fonction du temps.

2- Détermine par lecture graphique une valeur approchée du temps correspondant à l'effectif cumulé croissant 14.

3- Détermine cette valeur par les calculs.

Je fais le point de l'activité

- Le polygone étant construit, on cherche l'abscisse du point de cette représentation qui a pour ordonnée 14. Cette abscisse M_e est la médiane de la série.

- On repère la classe $]a\,;c[$ à laquelle M_e appartient.
L'effectif cumulé croissant de a est b.
L'effectif cumulé croissant de c est d.

$$M_e = a + (c - a)\,\frac{\frac{N}{2} - b}{d - b}$$

a	b
M_e	$\frac{N}{2}$
c	d

J'évalue mes acquis

Voici le tableau d'une série statistique.

Classes	[0 ; 10[	[10 ; 20[	[20 ;30[	[30 ; 40[	[40 ; 50[
Effectifs	5	6	7	3	1

Détermine algébriquement la médiane de cette série.

D- CARACTERISTIQUES DE DISPERSION

1- Connaître la formule de l'écart moyen et interpréter l'écart-moyen

ACTIVITÉ 6

On considère les notes obtenues en mathématiques au cours d'un trimestre par un élève :
8 ; 6 ; 12 ; 8 ; 10 et 16.

a) Calcule la moyenne. (chaque note est affectée du coefficient 1)

b) Recopie et complète le tableau ci-contre.

c) Calcule la moyenne des valeurs absolues des écarts à la moyenne : $e = \frac{D}{N}$.

d) Donne une interprétation du réultat précédent.

Note (x)	Effectif (n)	$\lvert x - \bar{x} \rvert$	$n.\lvert x - \bar{x} \rvert$
6			
8			
12			
13			
16			
	Total (N) :	Total :	Total (D) :

Je fais le point de l'activité

La moyenne des valeurs absolues des écarts à la moyenne est l'écart moyen.
En moyenne,les notes se situent à e de $\bar{x}$.

J'évalue mes acquis

On donne la série des notes suivante :

Note	6	11	12	13	16
Effectifs	4	6	5	3	1

Calcule l'écart moyen et interprète ce résultat.

2- Connaître la formule de la variance , de l'écart-type puis Interpréter la variance et l'écart type

ACTIVITÉ 7

On donne la série des notes en mathématiques de 10 élèves de seconde C :
8 ; 5 ; 10 ; 12 ; 6 ; 13 ; 12 ; 16 ; 13 ; 5.

a) Calcule la moyenne x des 10 notes.

b) Reproduis et complète le tableau ci-contre.

c) Calcule $\frac{D}{N}$ et $\sqrt{V}$.

Note (x)	Effectif (n)	$(x - \bar{x})^2$	$n.(x - \bar{x})^2$
5			
6			
8			
10			
12			
13			
16			
	Total N :		**Total D :**

Je fais le point de l'activité

Soit une série statistique $(x_i ; n_i)_{1 \leq i \leq p}$ de moyenne $\bar{x}$.

- La variance est le nombre réel V défini par :

$$V = \frac{n_1(x_1 - \bar{x})^2 + n_2(x_2 - \bar{x})^2 + \dots + n_p(x_p - \bar{x})^2}{n_1 + n_2 + \dots + n_p}.$$

- L'écart-type est le nombre réel positif σ défini par : $\sigma = \sqrt{V}$.
- La variance et l'écart type sont des paramètres de disperion autour de la moyenne

J'évalue mes acquis

On considère la série statistique constituée des nombres réels A, B et C.
Associe à chaque mot son expression mathématique.

1- Variance

2- Ecart-type

3- Moyenne

a) $D = \frac{1}{3}(A + B + C)$

b) $E = \frac{1}{3}[(A - D)^2 + (B - D)^2 + (C - D)^2]$

a) $\sqrt{E}$

II- RÉSUMÉ DE COURS

I- ORGANISATIONS DES DONNEES

I-1. Effectifs cumulés – Fréquences cumulées

DÉFINITION

Soit une série statistique à caractère quantitatif dont les modalités sont rangées par ordre croissant.

- On appelle **effectif cumulé croissant** (resp. **décroissant**) de la modalité x_k la somme des effectifs des modalités inférieures ou égales (resp. supérieures ou égales) à x_k.
- On appelle **fréquence cumulée croissante** (resp. **décroissante**) le quotient de son effectif cumulé croissant (resp. décroissant) par l'effectif total de la série.

I-2- Remarques

- Les effectifs cumulés croissants et décroissants de la 1ère modalité sont respectivement l'effectif de cette modalité et l'effectif total.
- Reprenons les résultats de l'activité de découverte 1 pour dire que :
  - 15 élèves ont lu au plus 3 romans. On dit que 15 est l'effectif cumulé croissant de la modalité 3.
  - 10 élèves ont lu au moins 7 romans. On dit que 10 est l'effectif cumulé décroissant de la modalité 7.

58 % d'élèves ont lu au plus 5 romans. On dit que 58 % est la fréquence cumulée croissante (en pourcentage) de la modalité 5.

- 20 % d'élèves ont lu au moins 7 romans. On dit que 20 % est la fréquence cumulée décroissante (en pourcentage) de la modalité.

II- GRAPHIQUES

Polygones des effectifs cumulés et des fréquences cumulées

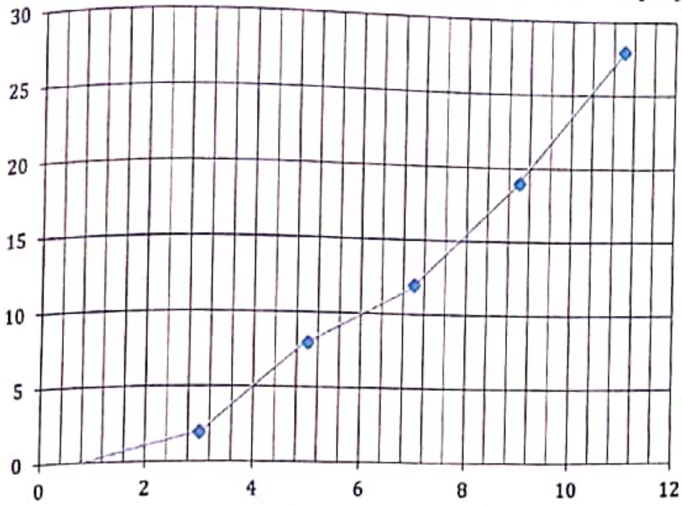
On veut construire le polygone des effectifs cumulés croissants en fonction du nombre d'heures.

Nombre d'heure	[1 ; 3[	[3 ; 5[	[5 ; 7[	[7 ; 9[	[9 ; 11[	Total
Effectifs	2	6	4	7	9	28
Effectifs cumulés croissant	2	8	12	19	28	

A partir du tableau on peut dire que :

0 enfants passent moins de 1 h devant le poste téléviseur ;
2 enfants passent moins de 3 h devant le poste téléviseur ;
8 enfants passent moins de 5 h devant le poste téléviseur ;
12 enfants passent moins de 7 h devant le poste téléviseur ;
19 enfants passent moins de 9 h devant le poste téléviseur ;
28 enfants passent moins de 11 h devant le poste téléviseur.

Si on place les points de coordonnées $(1 ; 0) ; (3 ; 2) ; (5 ; 8) ; (7 ; 12) ; (9 ; 19) ; (11 ; 28)$ dans un repère orthogonal et qu'on les relie par des segments, on obtient le polygone des effectifs cumulés croissants.



REMARQUES : Le polygone des fréquences cumulées croissantes sera le même que celui des effectifs cumulés croissants. Seule la graduation de l'axe des ordonnées change.

III. CARACTERISTIQUES DE POSITION

Les trois caractéristiques de position les plus utilisées sont le mode, la moyenne et la médiane.
En seconde C, nous mettrons l'accent sur la médiane.

Médiane

DÉFINITION

On appelle médiane d'une série statistique d'effectif total N tout nombre réel M tel que le nombre d'individus de modalités supérieures ou égale à M et le nombre d'individus de modalité inférieures ou égale à M soient tous deux au moins égaux à $\frac{N}{2}$.

REMARQUES :
- Il existe d'autres définitions, plus restrictives, de la médiane. Toutes mettent en évidence la notion intuitive de partage d'une population en deux groupes de même effectif.
- Une médiane n'est pas toujours une modalité de la série.
- Une médiane peut être un nombre réel unique ou tout nombre d'un intervalle fermé de $\mathbb{R}$.

V- CARACTERISTIQUES DE DISPERSION

IV-1. Ecart moyen

DÉFINITION

Soit une série statistique $(x_i ; n_i)_{1 \leq i \leq p}$ de moyenne $\overline{x}$. L'écart moyen ou l'écart absolu moyen est le nombre réel e_m défini par : $e_m = \frac{n_1|x_1 - \overline{x}| + n_2|x_2 - \overline{x}| + ... + n_p|x_p - \overline{x}|}{n_1 + n_2 + ... + n_p}$.

Interprétation : ce paramètre indique que les valeurs observées se situent, en moyenne, à e_m unités de la moyenne $\overline{x}$.

IV-2. Variance - Ecart type

DÉFINITION

Soit une série statistique $(x_i \,;\, n_i)_{1 \leq i \leq p}$ de moyenne $\overline{x}$.

- La variance est le nombre réel V défini par : $V = \dfrac{n_1(x_1-\overline{x})^2 + n_2(x_2-\overline{x})^2 + \dots + n_p(x_p-\overline{x})^2}{n_1 + n_2 + \dots + n_p}$.
- L'écart-type est le nombre réel positif σ défini par : $\sigma = \sqrt{V}$.

REMARQUES

L'écart moyen et l'écart-type s'expriment dans la même unité que la valeur observée.

La variance vaut également $\dfrac{1}{n_1 + \dots + n_p}\,(n_1 + x_1^2 + \dots + n_p + x_p^2) - \overline{x}^2$

III- MÉTHODE

- Pour calculer l'écart moyen, la variance, l'écart moyen et l'écart type, on se réfère aux formules contenues dans le tableau ci-dessous :

Si on note $x_1 \,;\, x_2 \,;\, \dots \,;\, x_p$ les valeurs du caractère et $n_1 \,;\, n_2 \,;\, \dots \,;\, n_p$ les effectifs associés.			
Moyenne x	Ecart moyen e_m	Variance v	Ecart type σ
$\overline{x} = \dfrac{n_1x_1 + n_2x_2 + \dots + n_px_p}{n_1 + n_2 + \dots + n_p}$	$e_m = \dfrac{n_1\lvert x_1-\overline{x}\rvert + \dots + n_p\lvert x_p-\overline{x}\rvert}{n_1 + n_2 + \dots + n_p}$	$v = \dfrac{n_1(x_1-\overline{x})^2 + \dots + n_p(x_p-\overline{x})^2}{n_1 + n_2 + \dots + n_p}$ Ou $v = \dfrac{n_1x_1^2 + \dots + n_px_p^2}{n_1 + n_2 + \dots + n_p} - (\overline{x})^2$	$\sigma = \sqrt{v}$

- **Pour déterminer la médiane d'une série statistique à caractère discret.**
  - On ordonne d'abord les valeurs de la série.
  - On prend la valeur centrale si le nombre d'observtion est impair.
  - On prend la demi-somme des deux valeurs centrales si le nombre d'observation est pair.

Exemple 1 :

Un élève a obtenu les notes : 3 - 12 - 16 - 8 - 12 - 7 - 18 - 13 - 14.
Un autre a obtenu les notes : 13 - 2 - 5 - 14 - 5 - 17 - 10 - 11.
Détermine la note médiane de chaque élève.

RÉSOLUTION :

On ordonne les valeurs dans l'ordre croissant :

- Pour le premier élève, on a : 3 -7 - 8 - 12 - **12** - 13 - 14 - 16 - 18, soit 9 valeurs (nombre impair) ; la note 12 partage la série ordonnée en deux groupes de même effectif, donc 12 est la médiane (ce qui correspond à la cinquième note).
- Pour le second élève, on a : 2 - 5 - 5 - **10 - 11** - 13 - 14 - 17, soit 8 valeurs (nombre pair) ; la médiane est $\dfrac{10+11}{2} = 10{,}5$.

Exemple 2 :

Dans une classe de 34 élèves, l'éducateur a relevé le nombre de frères et sœurs :

Nombre de frères et soeurs	0	1	2	3	4	5
Effectif	5	9	8	6	4	2

Détermine la médiane de cette série statistique.

RÉSOLUTION :

On complète le tableau par les effectifs cumulés croissants :

Nombre de frères et soeurs	0	1	2	3	4	5
Effectif	5	9	8	6	4	2
Effectifs cumulés croissants	5	14	22	28	32	34

L'effectif total est 34 et $\frac{34}{2} = 17$.

Lorsque le caractère prend la valeur 1, l'effectif cumulé croissant est 14, donc la valeur n'est pas atteinte. Tandis que lorsque le caractère prend la valeur 2, l'effectif cumulé croissant est 22, donc la 17ème valeur est 2.

- **Pour calculer la médiane dans une série statistique à caractère continu**
  - On utilise les effectifs cumulées suivi d'une interpolation linéaire.

Exemple :

Voici les résultats d'une enquête relative à l'âge des tuteurs des élèves de 2nde C :

Age (ans)	[30 ; 35[	[35 ; 40[	[40 ; 45[	[45 ; 50[	[50 ; 55[	[55 ; 60[	[60 ; 65]
Effectif	3	58	83	53	16	5	2

Calcule l'âge médian de cette série statistique. (On donnera l'arrondi d'ordre 2 du résultat)

RÉSOLUTION :

On complète le tableau par les effectifs cumulés croissants et on détermine la classe médiane.

Age (ans)	[30 ; 35[	[35 ; 40[	[40 ; 45[	[45 ; 50[	[50 ; 55[	[55 ; 60[	[60 ; 65]
Effectifs cumulés croissants	3	61	144	197	213	218	220

L'effectif total est 220. Or $\frac{220}{2} = 110$, donc la classe médiane est [40 ; 45].

La médiane est entre 40 ans et 45 ans.

Les points de coordonnées (40 ; 61), (M_e ; 110) et (45 ; 144) sont alignés donc :

$\frac{M_e - 40}{45 - 40} = \frac{110 - 61}{144 - 61}$, soit $M_e = 40 + 5 \times \frac{49}{83}$; soit $M_e = 42{,}95$.

IV- SAVOIR-FAIRE

Savoir-faire 1- *Calculer des effectifs et des fréquences cumulées*

ÉNONCÉ

25 élèves ont passé un test noté sur 10. Les résultats de ce test sont donnés dans le tableau ci-dessous.

Note	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Effectif	1	0	1	1	3	4	6	4	3	1	1

1- Recopie et complète le tableau avec les effectifs cumulés croissants, les fréquences et les fréquences cumulées croissantes.

2- Détermine le nombre d'élèves qui ont eu une note inférieure ou égale à 6.

Solution commentée

1- Je complète le tableau

Note	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Effectif	1	0	1	1	3	4	6	4	3	1	1
Effectif cumulé croissant	1	1	2	3	6	10	16	20	23	24	25
Fréquence	0,04	0	0,04	0,04	0,12	0,16	0,24	0,16	0,12	0,04	0,04
Fréquence cumulé croissant	0,04	0,04	0,08	0,12	0,24	0,4	0,64	0,8	0,92	0,96	1

2- Je détermine le nombre d'élèves qui ont eu une note inférieure ou égale à 6.
Sur le tableau on a 16 élèves qui ont une note inférieure ou égale à 6.

V- JE M'EXERCE

1- Exercices de fixation/ Application

1 On donne le tableau suivant :

Modalités	7	8	9	10	11
Effectifs	1	3	4	7	3
Effectifs cumulés croissants	1	4	8	15	18
Effectifs cumulés décroissants	18	17	14	10	3

Recopie et complète les phrases suivantes :
- L'effectif cumulé croissant de la modalité 10 est ....
- 18 est .... de la modalité 11.
- 18 est l'effectif cumulé décroissant de la modalité ....
- 15 est ....
- ..... est l'effectif cumulé décroissant de la modalité 9.

2 On donne le tableau suivant :

Classes	[0 ; 15[	[15 ; 30[	[30 ; 45[	[45 ; 60[
Modalités	7	5	9	10
Effectifs	0,23		4	7
Fréquences cumulées croissantes	0,23		8	15
Fréquences cumulées décroissants	1		14	10

Recopie et complète les phrases suivantes :
- La fréquence cumulée croissante de la classe [30 ; 45[est ....
- 0,67 est ....
- 1 est .... de la classe [45 ;60[.
- 1 est La fréquence cumulée décroissante de la classe ....
- .... est la fréquence cumulée croissante de la classe [15 ; 30[.

3 Recopie et complète les tableaux suivants :

Modalités	0	2	3	4	5	6	7	8	10
Effectifs	4	5	6	6	8	11	6	2	2
Fréquences en %	8	10	12	12	16	22	12	4	4
Effectif cumulés croissants			15						
Fréquences cumulées croissantes en %					58				

Modalités	0	2	3	4	5	6	7	8	10
Effectifs	4	5	6	6	8	11	6	2	2
Fréquences en %	8	10	12	12	16	22	12	4	4
Effectif cumulés décroissants							10		
Fréquences cumulées décroissantes en %							20		

4 On a relevé la taille (en centimètre) de 40 individus. Les résultats obtenus sont dans le tableau ci-dessous :

Modalité	[120 ; 140[	[120 ; 140[	[120 ; 140[	[120 ; 140[	[120 ; 140[
Effectif	6	4	10	8	12

Dresse le tableau des effectifs cumulés croissants et des fréquences cumulées décroissantes.

dentifier la médiane d'une série statistique

5 Identifie la médiane de chacune des séries statistiques suivantes :

a) 12 ; 6 ; 18 ; 14 ; 16 ; 9,5 ; 11 ; 8 ; 7,5.
b) 14 ; 6,5 ; 11,5 ; 9 ; 12 ; 11 ; 11 ; 9,5.
c) 51,2 ; 49,7 ; 54,4 ; 48,5 ; 50,1 ; 49,2 ; 53,8.
d) 5,1 ; 7 ; 9,6 ; 13,2 ; 16,6 ; 19,1 ; 4,5 ; 7 ; 5,1.

6 On considère la série statistique suivante :

Modalité	7	8	9	10	11	14	16
Effectif	2	1	1	2	1	1	2

Détermine la médiane de cette série statistique.

7 Dans une classe de seconde, on a relevé la taille des élèves. Les résultats sont les suivants :

Taille en cm	165	167	168	170	173	174	176	178	179
Effectif	3	2	6	1	2	1	5	2	1

Détermine la médiane de cette série statistique.

Dresser le tableau des effectifs cumulés et des fréquences cumulées

8 Une enquête faite auprès de 250 élèves d'un établissement porte sur la taille de la famille de chacun d'eux. Les résultats sont consignés dans le tableau ci-dessous.

Taille	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Effectif	10	80	95	18	21	15	5	2	0	4

Dresse le tableau des effectifs cumulés croissants de cette série.

9 Une enquête portant sur le temps (en heures) de travail personnel quotidien de 125 élèves de seconde d'un lycée a donné les résultats suivants :

Temps	[0 ; 1[	[1 ; 2[	[2 ; 3[	[3 ; 4[	[4 ; 5[	[5 ; 6[
Effectif	20	45	44	11	03	02

Dresser le tableau des effectifs cumulés décroissants de cette série.

10 Le tableau ci-dessous résume la répartition des notes des élèves de la 2nde C4 après le dernier contrôle de Mathématiques.

Note	5	7	8	9	10	12	13	14	16	18
Effectif	1	3	4	6	6	4	4	2	3	1
Fréquences	0,03	0,09	0,12	0,17	0,17	0,12	0,12	0,06	0,09	0,03

Dresse le tableau des fréquences cumulées croissantes de cette série.

11 Une enquête portant sur la durée du déplacement pour se rendre à l'école de chacun des 30 élèves d'une classe de seconde d'un lycée a donné les résultats suivants :

Temps (min)	[0 ; 10[	[10 ; 20[	[20 ; 30[	[30 ; 40[	[40 ; 50[
Effectif	10	7	6	4	3
Fréquences	0,34	0,23	0,20	0,13	0,10

Dresse le tableau des fréquences cumulées décroissantes de cette série.

Construire le polygone des effectifs cumulés croissants et les effectifs cumulés décroissants

12 On a demandé à 100 personnes d'indiquer combien de temps elles avaient regardé la télévision la veille. Les résultats sont consignés dans le tableau ci-dessous.

Temps (min)	[0 ; 15[	[15 ; 30[	[30 ; 45[	[45 ; 60[	[60 ; 75[
Effectif	19	10	24	27	20

Construis le polygone des effectifs cumulés croissants.

13 Voici le tableau des effectifs des notes de tous les élèves de seconde C d'un établissement à l'issue d'un devoir de niveau.

Notes	[0 ; 4[	[4 ; 8[	[8 ; 12[	[12 ; 16[	[16 ; 20[
Effectif	20	17	61	80	15

Construis le polygone des effectifs cumulés croissants et décroissants. On prendra 1 cm pour 2 points et 1cm pour 20 élèves.

Déterminer la médiane d'une série statistique par lecture graphique

14 Dans une classe de 20 élèves, les notes obtenues à un devoir de mathématiques se répartissent de la façon suivante :
2 élèves ont eu 17 ; 1 élève a eu 15 ; 2 élèves ont eu 13 ; 2 élèves ont eu 11 ; 2 élèves ont eu 10 ; 3 élèves ont eu 9 ; 1 élève a eu 8 ; 5 élèves ont eu 7 ; 2 élèves ont eu 5.
Détermine par lecture, en utilisant les diagrammes en bâtons des effectifs cumulés croissants et décroissants, la médiane de cette série statistique.

15 Utilise la représentation graphique de l'exercice 10 pour déterminer la médiane de cette série statistique.

Calculer la médiane d'une série statistique

16 Pour chacune des séries statistiques, calcule la valeur médiane :
S1 : 8 - 8 - 8 - 8 - 8 - 8 - 8 - 8 - 8 - 8
S2 : 1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 8 - 9 - 10
S3 : 1 - 1 - 2 - 2 - 3 - 4 - 4 - 4 - 4 - 4
S4 : 10 - 9 - 8 - 7 - 6 - 5 - 4 - 3 - 2 - 1

17 Voici la répartition des employés d'une PME suivant leur salaire mensuel, en milliers de francs CFA.

Salaire	[75 ; 95[	[95 ; 115[	[115 ; 135[	[135 ; 155[	[155 ; 175[
Effectifs	6	10	16	9	4

1- Calcule la valeur médiane de cette série statistique.
2- interprète le résultat.

Calculer l'écart moyen-Interpréter l'écart moyen

18 Pour chacune des séries statistiques, calcule l'écart moyen :
S1 : 1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 8 - 9 - 10
S2 : 100 - 90 - 80 - 70 - 60 - 50 - 40 - 30 - 20 - 10

19 Voici les notes sur 20 relevées par un professeur de mathématiques lors d'un devoir surveillé.
15 élèves ont obtenu la note 4 ; 12 ont obtenu 8 ; 13 ont obtenu 9 ; 20 ont obtenu 11 et 5 ont obtenu 16.
Calcule l'écart moyen de cette série de notes, puis donne une interprétation du résultat.

Calculer la variance et l'écart type-Interpréter la variance et l'écart type

20 On considère les notes obtenues par un élève de 2nde C au cours des devoirs de mathématiques au premier trimestre : 9 ; 2 ; 9 ; 8 ; 12 ; 13 ; 9 ; 8.
Calcule l'écart type pour les notes de cet élève.

21 Voici les notes obtenues par deux élèves A et B en mathématiques au cours d'un trimestre :

Élève A	3	12	8	17	10
Élève B	10	11	8	11	10

a) Calcule la moyenne de chaque élève.
b) Calcule l'écart type pour les notes de chaque élève.
c) Interprète les résultats des calculs.

2- Exercices de renforcement / approfondissement

22 Le chargé du matériel de l'équipe de handball d'un lycée a relevé la pointure des 12 nouveaux joueurs qui ont intégré l'équipe en vue de la renforcer. Les valeurs sont les suivantes : 38 ; 39 ; 40 ; 41 ; 37 ; 43 ; 41 ; 44 ; 43 ; 43 ; 43 ; 39.
1- Identifie la pointure médiane de cette série.
2- Calcule la pointure moyenne de cette série.
3- Calcule l'écart moyen de cette série.
4- Interprètre les resultats obtenus.

23 Dans un tournoi de scrabble, les nombres de points totalisés par les huit participants ont été : 298 ; 407 ; 336 ; 425 ; 512 ; 321 ; 543 ; 396.
Calcule :
1- Le score moyen.
2- La variance.
3- L'écart type de ces scores.

Le tableau ci-dessous indique la répartition des élèves d'un lycée suivant leur âge

Âge	14	15	16	17	18	19	20
Effectif	[illegible]	204	[illegible]	116	198	[illegible]	14

1- Dresse le tableau des effectifs cumulés croissants et décroissants.

2- Détermine la médiane de cette série.

Au cours d'une fabrication de fromages de chèvres, on a relevé les masses suivantes des fromages.

Masse en grammes	[80 ; 85[	[85 ; 90[	[90 ; 95[	[95 ; 100[	[100 ; 105[	[105 ; 110[	[110 ; 115[
Effectif	5	8	14	10	25	14	7

1- Dresse le tableau des effectifs cumulés croissants.

2- Construis le polygone des effectifs cumulés croissants.

3- Détermine la médiane de cette série par lecture graphique.

On a demandé à 1000 clients, sortant d'un magasin d'alimentation, de dire s'ils sont satisfaits de l'accueil qui leur a été réservé. On a obtenu les résultats suivants :

Satisfait : 250 ; Très satisfait : 418 ;

Pas satisfait : 56 ; Moyennement satisfait : 276

1- Représente cette série statistique par :

a) Un diagramme à bandes ;

b) Un diagramme circulaire.

2- Détermine, en essayant de classer ces catégories qualitatives en ordre, la médiane de cette série statistique.

On étudie la durée exprimée en minutes du déplacement pour se rendre à l'école de 27 élèves.

Temps (min)	[0 ; 10[	[10 ; 20[	[20 ; 30[	[30 ; 40[
Effectif	10	7	6	4
Fréquence	0,37	0,26	0,22	0,15
Fréquence cumulée croissante	0,37	0,63	0,85	1

1- Construis l'histogramme des fréquences.

2- Construis la courbe des fréquences cumulées croissantes.

Deux élèves, Bertrand et Julien ont eu pour notes en mathématiques l'an passé, successivement :

Bertrand	4	6	7	9	10	8	12	10	19	12	20	12	18
Julien	8	12	10	10	14	12	10	12	9	15	9	8	12

1- Calcule

a) la moyenne de chaque distribution. Chaque note est compté coefficient 1.

b) L'écart type de chaque distribution.

2- Interprète ces résultats.

Une urne contient un très nombre de boules blanches et de boules rouges.

On souhaite déterminer la proportion de boules blanches. On prélève 50 boules et on note 0 si on tire une boule rouge et 1 si on tire une boule blanche.

On note m_1 la moyenne de cette série statistique et s_1 sa variance.

1- Calcule m_1 et s_1

2- On recommence l'expérience (en remettant les boules dans l'urne au préalable) 15 fois.

3-Situations d'évaluation

Le club de mathématiques de ton établissement a organisé un concours à l'intention des 200 élèves des 4 classes de 2nde C. A l'issue de ce concours, la classe de 2nde C1 est déclarée vainqueur. Les notes des 50 élèves de cette classe sont réparties de la manière suivante :

Notes	[0 ; 5[	[5 ; 10[	[10 ; 15[	[15 ; 20[
Nombre d'élèves	12	8	20	10

Le proviseur décide de récompenser chacun des élèves de cette classe ayant obtenu au moins la note 10 si :

- la moyenne de cette classe à ce concours est supérieure à 10.
- la moitié de l'effectif de cette classe a obtenu une note supérieure à 12,
- 75% de l'effectif de cette classe a obtenu une note supérieure ou égale à 5.

Soucieux, les élèves ayant obtenu au moins la note 10 cherchent à savoir s'ils seront récompensés. Ils décident donc de faire des calculs.

1- Calcule

a) la moyenne de cette classe à ce concours.

b) La médiane de cette série statistique.

2- Détermine la fréquence cumulée décroissante (en pourcentage) correspondant à l'intervalle de notes [5 ; 10[.

3- Interprète ces résultats.

31 Dans le cadre de ses activités, le conseil d'enseignement de mathématiques du lycée moderne de Bouaflé organise un devoir de niveau pour les trois classes de 2nde C. Le tableau ci-dessous résume la répartition des notes par classe.

Notes \ Classes	2nde C_1	2nde C_2	2nde C_2
4	5	1	14
5	3	2	1
7	5	3	4
9	5	7	2
10	4	11	2
11	5	8	2
12	6	6	1
14	5	5	1
15	5	4	10
18	7	3	13

Pour mieux comprendre et interpréter ces résultats, les élèves de la 2nde C_1 décident de faire des calculs.

1- Calcule :

a) La moyenne de chaque classe.

b) L'écart moyen des notes de chaque classe.

c) La variance puis l'écart type pour les notes de chaque classe.

2- Interprète ces résultats.

VI- RENDEZ-VOUS DES CURIEUX !

L'écart type est une grandeur dont l'invention remonte à la période du XIX^e siècle qui vit la statistique se développer au Royaume-Uni.

C'est à Abraham de Moivre qu'est attribuée la découverte du concept de mesure de la dispersion qui apparaît dans son ouvrage The Doctrine of Chances en 1718. Mais le terme d'écart type (« standard deviation ») a été employé pour la première fois par Karl Pearson en 1893 devant la « London Royal Society »

En 1908, William Gosset, plus connu sous le pseudonyme de Student, définit l'écart type empirique d'un échantillon et montre qu'il est important de le distinguer de l'écart type d'une population.

La variance est une notion qui apparut plus tard, en 1918, dans un texte de Ronald Fisher intitulé The Correlation between Relatives on the Supposition of Mendelian Inheritance .

En statistique descriptive, où l'étude porte sur une population finie parfaitement connue, la moyenne et la médiane sont utilisées comme critères de position et l'écart type, l'écart moyen, l'étendue, etc. comme critères de dispersion. Tous ces critères aident ensemble à résumer l'échantillon statistique. L'écart type n'est pas un critère de mesure de la variation, il est utilisé pour mesurer la dispersion d'une variable aléatoire ou d'une base de données.

Dans la pratique, on préfère l'écart type (lettre grecque sigma) à la variance, car l'écart type peut être comparé à l'ordre de grandeur des valeurs, ce qui n'est pas le cas de la variance.

L'écart type sert à mesurer la dispersion d'un ensemble de données. Plus il est faible, plus les valeurs sont regroupées autour de la moyenne. Par exemple pour la répartition des notes d'une classe, plus l'écart type est faible, plus la classe est homogène. À l'inverse, s'il est plus important, les notes sont moins resserrées. Dans le cas d'une notation de 0 à 20, l'écart type minimal est 0 (notes toutes identiques), et peut valoir jusqu'à 10 si la moitié de la classe a 0/20 et l'autre moitié 20/20.

Dans l'industrie, l'écart type intervient dans le calcul de l'indice de qualité des produits manufacturés ou dans l'indice de fidélité d'un appareil de mesure.

10 Produit scalaire

Notions essentielles :

- Définitions et premières propriétés
- Propriétés du produit scalaire
- Relations métriques dans un triangle
- Formes analytiques du produit scalaire dans une base orthonormée

SITUATION D'APPRENTISSAGE

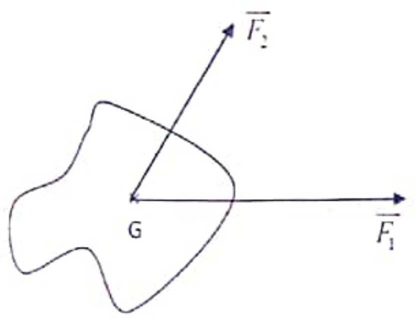
Pour réhabiliter des bâtiments d'un établissement scolaire, une opération "coup de balai" a été organisée par l'administration du dudit établissement.

Il a été demandé alors, aux élèves de 2^{nde} C_1 le travail suivant :

« Déplacer un solide qui est soumis à deux forces $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$ d'intensités respectives 200 et 300 Newtons. L'angle entre les deux vecteurs forces mesure 45° »

Ceux-ci se demandent s'ils ont la force nécessaire pour réaliser un tel travail. Pour cela, ils souhaitent déterminer l'intensité résultant de la force $\vec{F}$ défini par $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$.

Ils décident de s'organiser pour répondre à ces interrogations



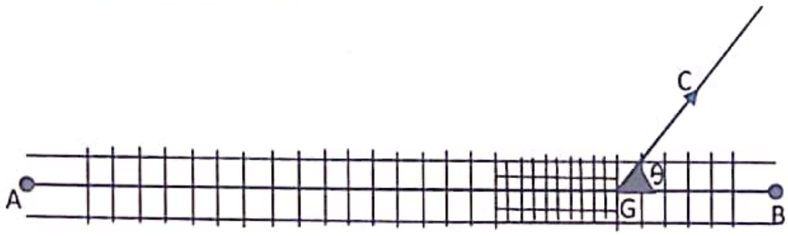
I- ACTIVITÉS DE DÉCOUVERTE

A- DÉFINITIONS ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

1- Connaître la définition du produit scalaire de deux vecteurs

ACTIVITÉ 1

Un wagonnet se déplace à une vitesse constante sur un rail rectiligne (AB) de A vers B. Une corde est attachée à ce wagonnet. On exerce sur cette corde une force de traction horizontale $\vec{F}$. Cette force est représentée par le vecteur $\overrightarrow{GC}$, comme il est indiqué ci-dessous. La longueur du segment $[GC]$ est proportionnelle à l'intensité de celle-ci.



a) Précise selon l'angle $\widehat{BGC}$, si cette force s'oppose au mouvement du wagonnet, si elle n'a aucun effet sur ce mouvement ou au contraire l'amplifie.

b) Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB).

Par définition, le travail de la force $\vec{F}$ sur le wagonnet est :

- $-AB \times GH$ si la force s'oppose au mouvement
- $AB \times GH$ dans le cas contraire.

Sachant que l'intensité de $\vec{F}$ est 500 N, que AB = 80m et on note θ, la mesure de l'angle $\widehat{BGC}$, détermine le travail de la force dans le cas où $\theta \in \{0° ; 30° ; 45° ; 90° ; 120° ; 150°\}$.

Je fais le point de l'activité

- Le travail de cette force (en physique) est : $\|\vec{F}\| \times \|\overrightarrow{AB}\| \times \cos\widehat{BGC}$.
- Cela illustre cette notion mathématique qui est le produit scalaire de $\vec{F}$ par $\overrightarrow{AB}$.
- On le note : $\vec{F}.\overrightarrow{AB}$.
- On a donc : $\vec{F}.\overrightarrow{AB} = \|\vec{F}\| \times \|\overrightarrow{AB}\| \times \cos\widehat{BGC}$.

J'évalue mes acquis

Indique les bonnes réponses parmi les affirmations suivantes :

a) Le produit scalaire de deux vecteurs est un vecteur.

b) Le produit scalaire de deux vecteurs est un nombre réel.

c) Le produit scalaire de deux vecteurs est nul si l'un des vecteurs est nul.

2- Connaître les propriétés relatives au produit scalaire de deux vecteurs

ACTIVITÉ 2

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs.

1-a) Compare $\vec{u}.\vec{v}$ et $\vec{v}.\vec{u}$

b) On suppose $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls. Donne l'encadrement de $\cos(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ puis de $\vec{u}.\vec{v}$

2- Démontre que pour tout vecteur u et v, on a : $|\vec{u}.\vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$

3- Donne l'expression de $\vec{u}.\vec{v}$ dans les deux cas suivants :

a) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens.

b) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraires.

Je fais le point de l'activité

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a :

- $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
- $|\vec{u}.\vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et colinéaires :

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont le même sens, alors $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de sens contraires, alors $\vec{u}.\vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.

J'évalue mes acquis

Réponds par vrai lorsque l'affirmation est vraie ou par faux lorsque l'affirmation est fausse.

a) Si deux vecteurs sont colinéaires alors leur produit scalaire est nul.
b) Si deux vecteurs ne sont pas colinéaires alors leur produit scalaire n'est pas nul.
c) Si $\|\vec{u}\| = 2$ et $\|\vec{v}\| = 1$ alors $-2 \leq \vec{u}.\vec{v} \leq 2$.

3- Connaître la définition du carré scalaire d'un vecteur

Activité 3

1- $\vec{u}$ est un vecteur non nul, donne l'expression de $\vec{u}.\vec{v}$ lorsque $\vec{u} = \vec{v}$.
2- Pour $\vec{u}$ nul, calcule $\vec{u}.\vec{u}$.

Je fais le point de l'activité

Soit $\vec{u}$ un vecteur.
Le carré scalaire de $\vec{u}$ noté $\vec{u}.\vec{u}$, est le nombre réel défini par : $\vec{u}^2 = \vec{u}.\vec{u}$.
On a : $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$.

J'évalue mes acquis

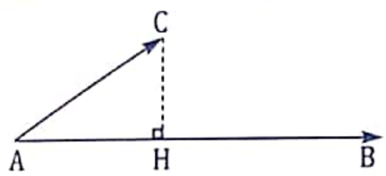
Coche les affirmations qui sont correctes :

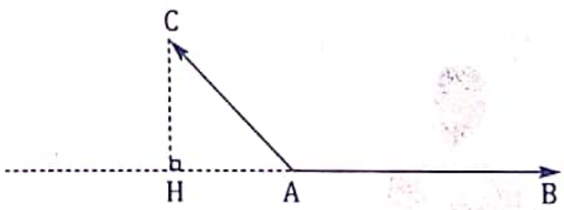
a) Le carré scalaire d'un vecteur est un nombre positif ;
b) Le carré scalaire d'un vecteur est un vecteur ;
c) Le carré scalaire d'un vecteur désigne une aire.

4- Connaître la propriété relative à l'interprétation géométrique du produit scalaire

Activité 4

On considère les deux figures ci-dessous :





Dans chacun des cas de figures, détermine une expression de $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ en fonction $\overline{AB}$ de $\overline{AH}$.

Je fais le point de l'activité

Soit trois points A, B et C (A et B distincts).
H le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB).

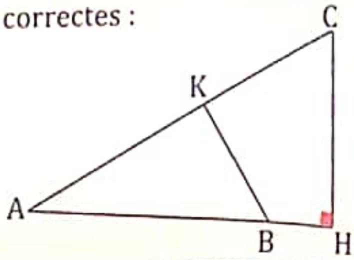
- Si $\widehat{BAC}$ est aigu, alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overline{AB} \times \overline{AH}$.
- Si $\widehat{BAC}$ est obtus, alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -\overline{AB} \times \overline{AH}$.

J'évalue mes acquis

Observe la figure ci-contre et indique les réponses correctes :

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overline{AB} \times \overline{AH}$; b) $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB} = \overline{CK} \times \overline{CA}$;

c) $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CH} = -\overline{CH}^2 \times \overline{CA}$; d) $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \overline{BA} \times \overline{BH}$.



B- PROPRIÉTÉS DU PRODUIT SCALAIRE

1- Connaître les propriétés relatives aux vecteurs orthogonaux –Traduire l'orthogonalité de deux droites à l'aide du produit scalaire

ACTIVITÉ 5

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.

A- On suppose que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls.

1- Calcule $\vec{u}.\vec{v}$ lorsque :

a) $Mes\ (\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \frac{\pi}{2}$.

b) $Mes\ (\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = -\frac{\pi}{2}$.

2- Détermine les mesures possibles de l'angle $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ pour lesquelles $(\vec{u}.\vec{v}) = 0$.

3- (D) et (D') sont deux droites de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

4- a) Démontre que si (D) ⊥ (D') alors $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

b) Démontre que si $\vec{u}.\vec{v} = 0$ alors (D) ⊥ (D').

c) Complète (D) ⊥ (D') ⇔ ...⊥...

⇔ ... = 0

B- Examine les cass où $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$

Je fais le point de l'activité

- Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$,on a : $\vec{u}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$.
- Soit (D) et (D') deux droites de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$: (D) ⊥ (D') $\Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$.

J'évalue mes acquis

Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

a) Si le produit scalaire de deux vecteurs est nul, alors ces deux vecteurs sont orthogonaux.

b) Si deux vecteurs sont orthogonaux, alors le produit scalaire de ces vecteurs est nul.

c) Le vecteur nul n'est orthogonal qu'au vecteur nul.

2- Connaître les propriétés relatives aux règles de calculs sur le produit scalaire.

ACTIVITÉ 6

1- Soit $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls et k un nombre réel.

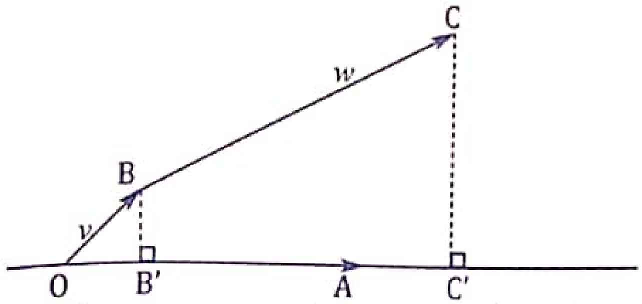
1-a) On suppose k non nul. Utilise la définition du produit scalaire de deux vecteurs pour donner l'expression de $(k\vec{u}).\vec{v}$ et $\vec{u}.(k\vec{v})$

b) Compare $(k\vec{u}).\vec{v}$ et $\vec{u}.(k\vec{v})$ au nombre $k(\vec{u}.\vec{v})$ en envisageant les deux cas : $k > 0$ et $k < 0$.

2- On suppose $k = 0$; dis si le résultat de la consigne 1-b) est toujours vérifié.

On pose : $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$; $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{BC}$.

Soit B' et C' les projetés orthogonaux de B et C sur la droite (OA).



Les points O, A, B 'et C' sont alignés, les vecteurs $\overrightarrow{B'C'}$ et $\overrightarrow{OB'}$sont colinéaires et donc, il existe un nombre réel k tel que $\overrightarrow{B'C'} = k\overrightarrow{OB'}$.

Exprime les produits scalaires $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w})$ et $\vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB'}$ puis conclus.

3- Développe les expressions suivantes en justifiant les différentes étapes.

a) $(\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u}\,' + \vec{v}\,')$

b) $(\vec{u} + \vec{v})^2$

c) $(\vec{u} - \vec{v})^2$

d) $(\vec{u} - \vec{v})(\vec{u} + \vec{v})$

Je fais le point de l'activité

– Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u}\,'$ et $\vec{v}\,'$ et pour tout nombre réel λ on a :

- $(\lambda\vec{u}).\vec{v} = \vec{u}.(\lambda\vec{v}) = \lambda(\vec{u}.\vec{v})$.
- $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{v}\,') = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{v}\,'$.
- $(\vec{u} + \vec{u}\,').\vec{v}\,' = \vec{u}.\vec{v}\,' + \vec{u}\,'.\vec{v}\,'$

– Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u}\,'$ et $\vec{v}\,'$, on a :

- $(\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u}\,' + \vec{v}\,') = \vec{u}.\vec{u}\,' + \vec{u}.\vec{v}\,' + \vec{v}.\vec{u}\,' + \vec{v}.\vec{v}\,'$
- $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$
- $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$
- $(\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

J'évalue mes acquis

Indique la valeur de vérité de chacune des affirmations suivantes :

a) Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a : $(2\vec{u}).(5\vec{v}) = 10(\vec{u}.\vec{v})$.

b) Pour tous points A, B et C, on a : $2\overrightarrow{AB}.(-5\overrightarrow{BC}) = 2\overrightarrow{AB}.5\overrightarrow{BC}$.

c) Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a : $(3\vec{u} + 5\vec{v}).(3\vec{u} - 5\vec{v}) = \|3\vec{u}\|^2 - \|5\vec{v}\|$

d) Pour tous points A, B et C, on a : $\overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 - 2\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$.

C- RELATIONS MÉTRIQUES DANS UN TRIANGLE

1- Connaître les relations métriques caractérisant un triangle rectangle

ACTIVITÉ 7

ABC est un triangle, H est le pied de la hauteur issue du sommet A.

1- Sachant que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, justifie que: $\overrightarrow{BC}^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

2- Sachant que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})$, justifie que: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}^2 - \overline{BC} \times \overline{BH}$.

3- Sachant que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}).(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC})$, justifie que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH}^2 + \overline{HB} \times \overline{HC}$.

4- ABC est triangle rectangle en A. Ecris les relations équivalentes obtenues à partir de ce qui précède.

Je fais le point de l'activité

Soit ABC un triangle, H le projeté orthogonal de A sur la droite (BC).

Les énoncés suivants sont équivalents :

1- ABC est rectangle en A.

2- $\overrightarrow{BC}^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2$.

3- $\overrightarrow{BA}^2 = \overline{BH} \times \overline{BC}$.

4- $\overrightarrow{AH}^2 = -\overline{HB} \times \overline{HC}$.

J'évalue mes acquis

ABC est un triangle, H est le projeté orthogonal de A sur (BC). Réponds par vrai ou faux à chacune des affirmations contenues dans le tableau suivant :

N°	Affirmations	Réponses
01	BC = 1 ; AB = 0,8 ; AC = 0,6. ABC est rectangle.	
02	AB = 3 ; BH = 1,8 ; BC = 5. ABC est rectangle en A.	
03	AH = 4,8 ; HB = 3,6 ; HC = 6,4. ABC est rectangle en A.	

2- Connaître le Théorème d'Al Kashi

ACTIVITÉ 8

ABC est un triangle. On pose : $a = BC$; $b = AC$; $c = AB$.

1- Sachant que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, démontre que $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos\widehat{BAC}$.

2- Exprime a^2 en fonction de b, c et $\cos\widehat{BAC}$.

3- Sans calcul; exprime :

a) b^2 en fonction de a, c et $\cos\widehat{B}$

b) c^2 en fonction de a, b et $\cos\widehat{C}$

Je fais le point de l'activité

Soit ABC un triangle quelconque.
On a : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\widehat{A}$.

J'évalue mes acquis

1- Soit EFG un triangle. A l'aide du théorème d'Al Kashi, écris EF^2, FG^2 et EG^2.

2- ABC est un triangle tel que AB = 8, BC = 9 et mes $\widehat{ABC} = 60°$. Calcule AC.

3- ABC est un triangle tel que AB = 3, BC = $\sqrt{13}$ et AC = 4. Détermine la mesure de $\widehat{BAC}$.

D- FORME ANALYTIQUE DU PRODUIT SCALAIRE

1- Connaître l'expression du produit scalaire dans un base orthonormée

ACTIVITÉ 9

Le plan vectoriel est muni d'une base orthonomée $(\vec{i}, \vec{j})$. Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{u}'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs.

1- Recopie et complète : $\|\vec{i}\|$ =...... ; $\|\vec{j}\|$ =...... et $\vec{i}.\vec{j}$ = ... Justifie ta réponse.

2- Démontre que : $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$, puis que : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Je fais le point de l'activité

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$.
On a : $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$ et $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

J'évalue mes acquis

Indique la (ou les) bonne(s) réponse(s).
Le plan vectoriel est muni d'une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$.
Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ deux vecteurs.

a) $\vec{u}.\vec{v} = 10$; b) $\|\vec{v}\| = 6$; c) $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 5\sqrt{2}$.

2- Ecrire une équation cartésienne d'un cercle dont on connaît un diamètre

ACTIVITÉ 10

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Soit les points A $(x_A ; y_A)$ et B $(x_B ; y_B)$.
On souhaite écrire une équation du cercle $(\mathscr{C})$ de diamètre [AB].

1- Soit $M(x ; y)$ un point du plan.

2- Détermine les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$.

3- Déduis-en une équation du cercle $(\mathscr{C})$.

Je fais le point de l'activité

Soit $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ deux points du plan muni d'un repère orthonormé $(O\,,I\,,J)$.
Le cercle $(\mathscr{C})$ de diamètre $[AB]$ est caractérisé par :
$M(x\,;y) \in (\mathscr{C}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$
$M \in (\mathscr{C}) \Leftrightarrow (x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0$

J'évalue mes acquis

Indique la (ou les) bonne(s) réponses.
Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Soit les points $A(2\,;\,5)$ et $B(8\,;\,1)$ dans le repère (O, I, J). Le cercle de diamètre $[AB]$:

a) admet pour équation cartésienne $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 21 = 0$.
b) a pour rayon 13.
c) a pour centre $\Omega(5\,;3)$.

3- Théorème de la médiane

ACTIVITÉ 11

ABC est un triangle et A' le milieu de [BC].

1- Démontre que : $AB^2 + AC^2 = 2AA'^2 + \frac{BC^2}{2}$.

2- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AA'^2 - \frac{BC^2}{4}$.

Je fais le point de l'activité

ABC est un triangle et A' le milieu de [BC].

On a : $AB^2 + AC^2 = 2AA'^2 + \frac{BC^2}{2}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AA'^2 - \frac{BC^2}{4}$

J'évalue mes acquis

ABC est un triangle, telque : AB = 3, AC = 4 . A' est le milieu de [BC] .

1- Sachant que $AA' = \sqrt{\frac{17}{2}}$, calcule BC.

2- Déduis $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

II- RÉSUMÉ DE COURS

A- DÉFINITIONS ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

1- Définition du produit scalaire de deux vecteurs

DÉFINITION

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.
On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ le nombre réel noté $\vec{u}.\vec{v}$ défini par :

- $\vec{u}.\vec{v} = 0$ si l'un des vecteurs $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul.
- $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}})$, sinon.

PROPRIÉTÉ

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $\vec{u}.\vec{v} = \vec{u}.\vec{v}$.
Pour tous vecteurs : $|\vec{u}.\vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.
Pour tous vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{u}$ non nuls :

* $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.
* $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraires si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.

3- Carré scalaire

DÉFINITION

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan.
$\vec{u}.\vec{u}$ est appelé carré scolaire de $\vec{u}$. On le note $\vec{u}^2$

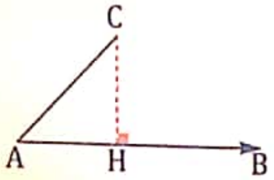
PROPRIÉTÉ

Pour tout vecteur $\vec{u}$, on a : $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$.

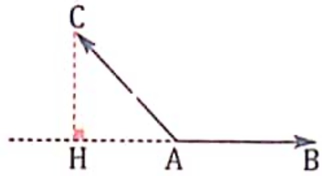
4- Interprétation géométrique

PROPRIÉTÉ

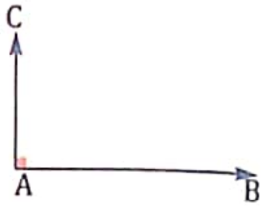
Pour tous points A, B et C tels que $A \neq B$, on a :
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overline{AB} \times \overline{AH}$ où H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).



*$\widehat{BAC}$ est un angle aigu
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AH$
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} > 0$



*$\widehat{BAC}$ est un angle obtus
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AB \times AH$
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} < 0$



*$\widehat{BAC}$ est un angle droit
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overline{AB} \times \overline{AA} = 0$
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$

B- PROPRIETES DU PRODUIT SCALAIRE

1- Vecteurs orthogonaux

1.1- propriété

PROPRIÉTÉ

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a : $\vec{u}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$.

1.2- Conséquences

•Soit (D) et (D') deux droites de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:
(D) ⊥ (D')$\Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$
•Soit les points A, B, C, et D avec $A \neq B$ et $C \neq D$:(AB) ⊥ (CD) $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$.
•Soit les points A, B, et M avec $A \neq B$, on a :
M appartient au cercle (C) de diamètre $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA} = 0$.

2- Règles de calculs

2.1-Propriétés

PROPRIÉTÉ

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u}'$ et $\vec{v}'$ tout nombre réel λ, on a :

- $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
- $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{v}') = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{v}$
- $(\lambda\vec{u}).\vec{v} = \vec{u}.(\lambda\vec{v}) = \lambda(\vec{u}.\vec{v})$
- $(\vec{u} + \vec{u}').\vec{v}' = \vec{u}.\vec{v}' + \vec{u}'.\vec{v}'$.

2.2-Propriétés

PROPRIÉTÉ

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u}'$ et $\vec{v}$, on a :

- $(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u}' + \vec{v}') = \vec{u}.\vec{u}' + \vec{u}.\vec{v}' + \vec{v}.\vec{u}' + \vec{v}.\vec{v}'$;
- $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v}' + \vec{v}^2$;
- $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v}' + \vec{v}^2$;
- $(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$.

2.3-Propriété

PROPRIÉTÉ

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a :
$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$.

$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$

C- RELATIONS METRIQUES DANS UN TRIANGLE

1- Relations métriques caractérisant un triangle rectangle

1.1- Propriétés

PROPRIÉTÉ

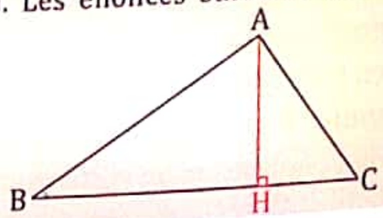
Soit ABC un triangle, H le projeté orthogonal de A sur (BC). Les énoncés suivants sont équivalents :

1- ABC est un triangle rectangle en A.

2- $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

3- $BA^2 = \overline{BH} \times \overline{BC}$; $CA^2 = \overline{CH} \times \overline{CB}$.

4- $AH^2 = -\overline{HB} \times \overline{HC}$.



1.2-Théorème d'AL Kashi

PROPRIÉTÉ

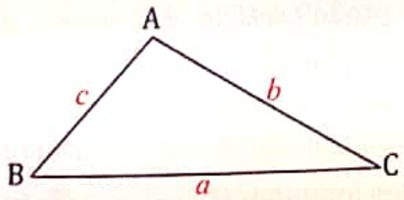
Soit ABC un triangle quelconque.

On pose : $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$.

On a : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$.

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\widehat{B}$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C}$

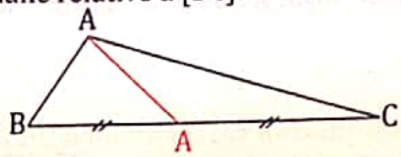


1.3-Théorème de la médiane

PROPRIÉTÉ

Soit ABC un triangle quelconque et [AA'] la médiane relative à [BC]. On a :

- $AB^2 + AC^2 = 2AA'^2 + \dfrac{BC^2}{2}$;
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AA'^2 - \dfrac{BC^2}{4}$



- Le triangle étant quelconque, les médianes [AA'], [BB'] et [CC'] jouent des rôles symétriques. On a aussi :

  $2BB'^2 + \dfrac{AC^2}{2} = BA^2 + BC^2$; $2CC'^2 + \dfrac{AB^2}{2} = CA^2 + CB^2$.

- Ces relations permettent de calculer les longueurs des médianes d'un triangle dont on connait les longueurs des côtés.

D- FORME ANALYTIQUE DU PRODUIT SCALAIRE

1- Expression dans une base orthonormée

a) Propriété

PROPRIÉTÉ

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{u}'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ d'eux vecteurs dans une base orthonormée $(\vec{\imath};\vec{\jmath})$. On a : $\vec{u}.\vec{u}' = xx' + yy'$.

Exemple :

Si $\vec{u}\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}'\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, alors $\vec{u}.\vec{u}' = 5 \times (-2) + 6 \times 3$.

D'où : $\vec{u}.\vec{u}' = 8$.

III- MÉTHODE

- **Pour calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$:**
  - en repère orthonormé, on utilise les coordonnées ;
  - en repère orthonormé, on utilise les coordonnées ;
  - en l'absence de repère, si on connaît :
  - toutes les normes, développe $\overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2$;
  - deux normes et un vecteur, utilise $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \cos(\widehat{BAC})$;
  - le projeté orthogonal H du point C sur la droite (AB), utilise $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overline{AB} \times \overline{AH}$.
- **Pour démontrer l'orthogonalité de deux droites ou de deux vecteurs,** on prouve que le produit scalaire des vecteurs directeurs des droites ou desdits vecteurs est nul ;
- **Pour calculer des longueurs :**
  - on calcule les normes en repère orthonormé ;
  - on calcule les longueurs en utilisant le théorème d'Al-Kashi.

- **Pour calculer des longueurs :**
  - on calcule les normes en repère orthonormé ;
  - on calcule les longueurs en utilisant le théorème d'Al-Kashi.

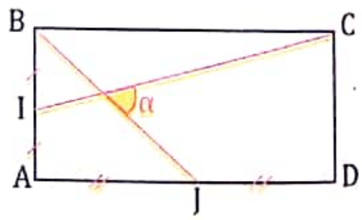
- **Pour calculer des mesures d'angles :**
  - si on connaît AB et AC, et si l'on peut calculer le produit scalaire par une autre méthode, on utilise la relation $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \cos(\widehat{BAC})$;
  - on utilise le théorème d'Al-Kashi.
- **Pour écrire une équation cartésienne d'un cercle:**
  - si on connaît un diamètre $[AB]$, utilise $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$;
  - si on connaît son centre Ω et son rayon R, utilise $\Omega M^2 = R^2$.

IV- SAVOIR-FAIRE

Savoir-faire 1- Déterminer la mesure d'un angle en utilisant le produit scalaire

ENONCÉ

Soit ABCD un rectangle tel que AB = 1 et AD = 2.
Soit I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [AD].
Calcule une valeur approchée à 10^{-2} près en degrés de l'angle α.



SOLUTION COMMENTÉE

Exprimons de deux façons différentes la valeur du réel $\overrightarrow{BJ}.\overrightarrow{IC}$.

- Dans le repère orthonormé $(A ; \overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{AB})$, on a :

B(0 ; 1) , J(1 ; 0), $I\left(0 ; \frac{1}{2}\right)$ et C(2 ; 1). Ainsi, $\overrightarrow{BJ}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IC}\begin{pmatrix}2\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

Donc : $\overrightarrow{BJ}.\overrightarrow{IC} = 1 \times 2 + (-1) \times \frac{1}{2} = 2 - \frac{1}{2} \times = \frac{1}{3}$.

- Avec la définition du produit scalaire, on a :

$\overrightarrow{BJ}.\overrightarrow{IC} = BJ \times IC \times \cos\alpha$.

On obtient :

$BJ = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ et $IC = \sqrt{2^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{17}{4}} = \sqrt{\frac{17}{2}}$.

D'où : $\overrightarrow{BJ}.\overrightarrow{IC} = \sqrt{2} \times \sqrt{\frac{17}{2}} \times \cos\alpha$.

En égalant les deux expressions de $\overrightarrow{BJ}.\overrightarrow{IC}$, on obtient :

$\frac{3}{2} = \sqrt{2} \times \sqrt{\frac{17}{2}} \times \cos\alpha$, d'où : $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{2} \times \sqrt{17}} = \frac{3}{\sqrt{34}}$, soit : $\alpha = 59{,}036243...$

Une valeur approchée à 10^{-2} près de α est donc $59{,}04°$.

Savoir-faire 2- ***Calculer :***
- la longueur d'un côté d'un triangle en utilisant le théorème d'Al Kashi
- la mesure d'un angle d'un triangle en utilisant le théorème d'Al Kashi

Enoncé

ABC est un triangle tel que AB = 3 ; AC = 5 et mes $\widehat{BAC} = 60°$.

a)Calcule la longueur BC.

b)Détermine la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$.

Solution commentée

a)Je calcule la longueur BC.

ABC est un triangle, d'après le théorème d'Al Kashi, on a :

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos\widehat{BAC}$.

Or AB = 3 ; AC= 5 et mes$\widehat{BAC} = 60°$.

Donc : $BC^2 = 9 + 25 - 2 \times 3 \times 5 \times \cos 60° = 34 - 30 \times \frac{1}{2} = 19$.

Ainsi : $BC = \sqrt{19}$.

b)Je détermine la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$.

On sait que ABC est un triangle tel que $AB = 3$; $AC = 5$ et $BC = \sqrt{19}$.

ABC est un triangle, d'après le théorème d'Al Kashi, on a :

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times BC \times \cos\widehat{ABC}$.

Il résulte que : $\cos\widehat{ABC} = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \times BC}$, d'où :

$\cos\widehat{ABC} = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \times BC} = \frac{9 + 25 - 19}{2 \times 3 \times 19} = \frac{5}{2\sqrt{19}} = 0{,}5735....$, ainsi à un degré près mes$\widehat{ABC} = 35°$.

Savoir-faire 3- ***Déterminer la mesure de l'angle de deux vecteurs connaissant leurs coordonnées dans une base orthonormée***

Enoncé

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on donne $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}8\\6\end{pmatrix}$.

Détermine la mesure de l'angle $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$.

Solution commentée

Je détermine la mesure de l'angle $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$.

D'après la définition du produit scalaire de deux vecteurs, on a :

$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u}.\vec{v}})$, il résulte que $\cos(\widehat{\vec{u};\vec{v}}) = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$.

Or : $\vec{u}.\vec{v} = 3 \times 8 + 4 \times 6 = 48$ et $\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} \times \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{25} \times \sqrt{100} = 50$,

donc : $\cos(\widehat{\vec{u};\vec{v}}) = \frac{48}{50} = 0.96$, ainsi à un degré près, Mes°$(\widehat{\vec{u};\vec{v}}) = 74°$.

Savoir-faire 4- **Ecrire une équation cartésienne d'un cercle dont on connait un diamètre.**

ENONCÉ

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). On donne les points A $(2\,;3)$ et B $(-1\,;4)$.
Ecris une équation cartésienne du cercle $(\mathscr{C})$ de diamètre $[AB]$.

SOLUTION COMMENTÉE

J'écris une équation cartésienne du cercle $(\mathscr{C})$ de diamètre $[AB]$.
Soit M $(x\,;y)$ un point du plan. On a : $M \in (\mathscr{C}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$.

Or $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-2 \\ y-3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x+1 \\ y-4 \end{pmatrix}$. Donc : $M \in (\mathscr{C}) \Leftrightarrow (x-2)(x+1) + (y-3)(y-4) = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - x - 7y + 10 = 0$$

Ainsi le cercle $(\mathscr{C})$ a pour équation cartésienne : $x^2 + y^2 - x - 7y + 10 = 0$.

V- JE M'EXERCE

1- Exercices de fixation/ Application

Connaître la définition du produit scalaire de deux vecteurs

1 Réponds par Vrai ou par Faux à chacune des affirmations suivantes :

a) Le produit scalaire de deux vecteurs est un vecteur.
b) Le produit scalaire de deux vecteurs un nombre réel.
c) Le produit scalaire de deux vecteurs est nul si l'un des vecteurs est nul.

2 ABCD est un carré de côté a et de centre O.
Parmi les égalités ci-dessous, indique celles qui sont justes :

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = a^2$; b) $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DO} = -\frac{1}{2}a^2$; c) $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 0$

d) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC} = a^2$; e) $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DO} = -a^2$; f) $\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{DC} = \frac{a^2}{2}$

3 Parmi les égalités ci-dessous, indique celles qui sont correctes :

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} ;= AB \times AC \times \cos\widehat{BAC}$;
b) $\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}.\vec{v}| \times \cos(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$;
c) $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$.

Connaître la définition du carré scalaire

4 Réponds par Vrai ou Faux aux affirmations :

a) Le carré scalaire d'un vecteur est un nombre positif ;
c) Le carré scalaire d'un vecteur est un vecteur ;
d) Le carré scalaire d'un vecteur désigne une aire.

5 Parmi les expressions suivantes, indique celles qui sont des carrés scalaires de vecteurs.
a) AB^2 ; b) $\vec{u}.\vec{v}$; c) $\vec{v}.\vec{v}$; d) $\vec{v}^2$; e) $\|\vec{u}\|^2$; f) $(\vec{u}+\vec{v})$;
g) $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2$.

Connaître les propriétés relatives au produit scalaire de deux vecteurs.

6 Sachant que $\|\vec{u}\| = 3$ et $\|\vec{v}\| = 4$, indique la valeur de $\vec{u}.\vec{v}$ lorsque :

a) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens.
b) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraires.

7 Réponds par vrai ou par faux aux affirmations en indiquant le numéro suivi de (V) ou (F).

N°	Affirmations	Réponses
1	Pour tous vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$, on $\vec{a}.\vec{b} = -\vec{b}.\vec{a}$:	
2	Pour tous vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$, on a : $\lvert\vec{a}.\vec{b}\rvert \leq -\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|$	
3	$\vec{a}$ et $\vec{b}$ colinéaires et de même sens, on a : $\lvert\vec{a}.\vec{b}\rvert = -\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|$	
4	$\vec{a}$ et $\vec{b}$ colinéaires et de sens contraires, on a : $\lvert\vec{a}.\vec{b}\rvert = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|$	

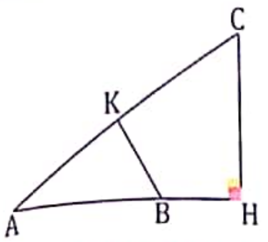
Connaître la propriété relative à l'interprétation géométrique du produit scalaire

8 ABCD est un carré de centre O et de côté 1 cm.
1- Le point I est le milieu de $[AB]$.
Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 1$; b) $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{DA} = \frac{1}{2}$; c) $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IC} = \frac{1}{4}$

2- $ABCD$ est un rectangle de centre O tel que $AB = 1$ et $AD = 3$.
Parmi les égalités suivantes, indique les bonnes réponses :
a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$; b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -12$; c) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 16$;
d) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -9$; e) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DO} = -8$; f) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DO} = 8$;
g) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DO} = -6$; h) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BO} = 12$.

9 En observant la figure ci-contre, réponds par vrai ou par faux à chacune des égalités suivantes :
a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AH$; b) $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = CK \times CA$;
c) $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CH} = -\overrightarrow{CH}^2$; d) $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = -BA \times BH$.



Connaître les propriétés relatives aux règles de calculs sur le produit scalaire

10 $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs du plan tels que $\vec{u}.\vec{v} = 1$ et $\vec{v}.\vec{w} = -3$. Indique la bonne réponse par le numéro suivi de la lettre.

N°	Produit scalaire	A	B	C	D
1	$\vec{u}.(-3\vec{v}) =$	-2	-3	-1	1
2	$-2\vec{v}.(-4\vec{u}) =$	8	-5	0	-8
3	$\vec{v}.(\vec{u} + \vec{w}) =$	2	-3	-4	-2
4	$(\vec{u} - 2\vec{w}).\vec{v} =$	-5	5	7	-7

11 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs du plan. Associe chaque expression à celle qui lui est égale.

$\vec{u}^2 - \vec{v}^2$ • • $(\vec{u} - \vec{v})^2$

$\vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$ • • $(\vec{u} - \vec{v})(\vec{u} + \vec{v})$

$u^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$ • • $(\vec{u} + \vec{v})^2$

12 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs du plan tels que : $\|\vec{u}\| = 5$ et $\|\vec{v}\| = 6$. et $\vec{u}.\vec{v} = -3$. On pose :
$A = (2\vec{u}).(-5\vec{u})$; $B = (\vec{u} + \vec{v})^2$; $C = (\vec{u} - \vec{v})^2$ et $D = (\vec{u} - \vec{v})(\vec{u} + \vec{v})$.
Recopie et relie chaque expression au résultat de calcul qui lui convient :

A • • -11
B • • 67
C • • 55
D • • 30

Connaître le théorème d'Al Kashi

13 ABC est un triangle. Complète les égalités suivantes résultant du théorème d'Al Kashi.
a) $AB^2 =$ ....
b) $AC^2 =$ ....
c) $AB^2 =$ ....

14 BC est un triangle tel que $BC = 2$; $AC = 5$ et mes$\widehat{ACB} = 60°$. Réponds par vrai ou faux à chacune des égalités suivantes :
a) $BC = \sqrt{39}$;
b) $BC = \sqrt{19}$;
c) $BC = 9,5$.

Connaître les propriétés relatives aux vecteurs orthogonaux -Traduire deux vecteurs orthogonaux

15 Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :
a) Le produit scalaire de deux vecteurs orthogonaux est le vecteur nul.
b) Si deux sont orthogonaux, alors le produit scalaire de ces deux vecteurs est nul.
c) Le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur non nul.

16 A partir de ces égalités suivantes, indique des vecteurs orthogonaux.
a) $\vec{u}.(\vec{u} + 2\vec{v}) = 0$; b) $(\vec{u} - \vec{v})(2\vec{u} + \vec{v}) = 0$; c) $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

Connaître les relations caractérisant un triangle rectangle.

17 ABC est un triangle, H est le projeté orthogonal de A sur (BC).
Réponds par vrai ou faux à chacune des affirmations contenues dans le tableau ci-dessous :

N°	Affirmations	Réponses
1	$BC = 1$; $AB = 0,8$; $AC = 0,6$ ABC est un rectangle	
2	$AB = 3$; $\overline{BH} = 1,8$; $\overline{BC} = 5$ ABC est un rectangle en A	
3	$\overline{AH} = 4,8$; $\overline{HB} = 3,6$; $\overline{HC} = 6,4$ ABC est un rectangle en A	

18 EFG est un triangle rectangle en E, P est le projeté orthogonal de E sur (FG). Complète les égalités suivantes :
a) $EF^2 + EG^2 =$ ....
b) $GP \times GF =$ ....

c) $EF^2 = \ldots\ldots\ldots \times \ldots\ldots\ldots$

d) $EP^2 = \ldots\ldots\ldots \times \ldots\ldots\ldots$

Connaître l'expression du produit scalaire dans une base orthonormée

19 Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée.

Indique l'égalité correcte :

a) $\vec{u}.\vec{v} = xt + yz$;
b) $\vec{u}.\vec{v} = xz + yt$;
c) $\vec{u}.\vec{v} = xt - zy$.

Calculer le produit scalaire de deux vecteurs connaissant leurs coordonnées dans une base orthonormée.

20 Le plan vectoriel est muni de la bse orthonormée $(\vec{i},\vec{j})$,

on donne : $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Réponds par vrai ou par faux à chacune des égalités suivantes :

a) $\vec{u}.\vec{v} = 1$; b) $\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \dfrac{-5}{\sqrt{26}}$.

21 Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on donne les points A (−1 ; 2) ; B(2 ; 5) et C(−7 ; −1). Calcule les produits scalaires $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$

Calculer la longueur d'un côté d'un triangle en utilisant le théorème d'Al Kashi.

22 ABC est un triangle tel que $AB = 2$; $AC = 5$ et $mes\widehat{BAC} = 20°$. Calcule la valeur de BC à 10^{-2}près.

23 ABC est un triangle isocèle en B. On donne AB = 4 et $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}}) = \dfrac{5\pi}{6}$.

Calcule la valeur exacte de AC.

Calculer la mesure d'un angle en utilisant le théorème d'Al Kashi.

24 Dans chacun des suivants, calcule les mesures des angles à l'entier naturel près.

a) AB = 3 ; BC = 4 et AC = 6.

b) AB = $\sqrt{6}$; BC= $\sqrt{2}$ et AC = $4\sqrt{3}$.

Démontrer une propriété en utilisant les règles de calculs du produit scalaire.

25 Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs quelconques du plan. Démontre que: $\|\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$.

26 Soit ABC un triangle et I le milieu de $[BC]$

Démontre que : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AI^2 - \dfrac{BC^2}{4}$.

27 ABCD est un carré de côté a , I est le milieu de $[AB]$ et J est le milieu de $[BC]$. Démontre que les droites (DI) et (AJ) sont orthogonales de deux façons :

a) En considérant le repère $(A ; \vec{u}, \vec{v})$ où $\vec{u} = \dfrac{1}{a}\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \dfrac{1}{a}\ \overrightarrow{AD}$.

b) Sans utiliser de repère.

28 Soit ABCD un rectangle. Démontre que, pour tout point M du plan, on a :
$MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$

29 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O , I , J), on donne les points A (3 ; -1) ; B (-2 ; 1) ; C (0 ; 5) et D (2 ; 10). Démontre que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Déterminer la mesure de l'angle de vecteurs connaissant leurs coordonnées

30 Le plan vectoriel est rapporté à une base orthonormée $(\vec{i},\vec{j})$. Dans chacun des cas suivants, détermine la mesure de l'angle $(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}})$ à un degré près :

a) $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$; b) $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}$; c) $\vec{u}\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -6 \\ -10 \end{pmatrix}$

31 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J), calcule la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ à un degré près :

a) A (2 ; -1), B (0 ; -5), C (7 ; -3) ;
b) A (3 ; -3), A (7 ; -5), A (4 ; -1).

Ecrire une équation cartésienne d'un cercle dont on connaît un diamètre.

32 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Dans chacun des suivants, écris une équation cartésienne du cercle (C) de diamètre $[AB]$.

a) A (2 ; 5), B (-3 ; 4) ;
b) A (-1 ; -2), A (6 ; -7).

2- Exercices de renforcement/ Approfondissement

33 ABC est un triangle tel que : $AB = 5$, $AC = 3$ et $mes\widehat{BAC} = 65°$.

a) Calcule $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

b) Exprime le vecteur $\overrightarrow{BC}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

c) Calcule BC à 0,1 près.

34 On donne deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan tels que $\|\vec{u}\| = 4$; $\|\vec{v}\| = 1$ $\vec{u}.\vec{v} = 2$.

a) Calcule les expressions suivantes :
$(2\vec{u}+\vec{v})^2.(2\vec{u}-\vec{v})^2$; $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2$; $(2\vec{u}+\vec{v})^2.(2\vec{u}-\vec{v})^2$.

b) Démontre que les vecteurs $(\vec{u}+\vec{v})$ et $(\vec{u}-6\vec{v})$ sont orthogonaux.

35 Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan tels que $\|\vec{u}\| = 2$; $\|\vec{v}\| = 3$ et Mes $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\pi}{3}$.

a) Détermine $\|\vec{u}+\vec{v}\|$.

b) Application à la physique : le point O est soumis à deux forces $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$ dont les intensités respectives sont 200 N (Newtons) et 300 N. L'angle formé par ces deux vecteurs forces mesure 60°. Calcule l'intensité de la résultante $\vec{F_1}+\vec{F_2}$.

36 Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs dans une base orthonormée.

a) Calcule $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2$ en fonction de x, y, x', y'.

b) Démontre que les vecteurs $(\vec{u}+\vec{v})$ et $(\vec{u}-\vec{v})$.
sont orthogonaux si et seulement si : $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$.

37 Soit ABC un triangle rectangle en A, H le projeté orthogonal de A sur (BC) ; I est le milieu de $[BH]$ et J le milieu de $[AH]$.

a) Démontre que : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AB}\right)$.

b) Sachant que $\overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AJ}$, démontre que les droites (AI) et (CJ) sont perpendiculaires.

38 Soit deux points A et B tels que AB = 5 cm. Dans chacun des cas suivants, détermine et construis l'ensemble des points M du plan tels que :

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = -5$.

b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MA} = 10$.

39 Calcule $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ dans les trois cas suivants :

1- A, B et C trois points tels que AB = 7 ; AC = 10 et $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}}\right) = \frac{\pi}{6}$.

2- ABCD est un losange de centre H dont la diagonale $[AC]$ a pour longueur 4 cm.

3- Les points $A(3 , -3)$; $B(7 ; -5)$ et $C(4 ; -1)$ sont donnés dans un repère orthonomé.

40

1- Démontre que pour tout quadrilatère ABCD, on a :
$2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DB} = AB^2 + CD^2 - BC^2 - AD^2$.

2- Déduis-en que les diagonales (AB) et (BD) sont perpendiculaires si et seulement si :
$\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{CD}^2 = BC^2 + AD^2$.

41 Dans un repère orthonormé (O, I, J), on considère les points A $(-1 ; 2)$ et B $(3 ; -1)$.

1- On veut démontrer l'ensemble (E) des points M tels que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = 1$ est une droite.

a) On pose M $(x ; y)$. Démontre que (E) est une droite dont on donnera une équation.

b) Construis (E).

c) Donne une autre méthode de construction de (E) sans utiliser les coordonnées de M.

2-a) On veut déterminer l'ensemble (F) des points M tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = -1$.

b) Démontre que M $(x ; y)$ appartient à (F) si et seulement si $x^2 + y^2 - 2x - y - 4 = 0$.

c) Déduis-en que (F) est un cercle dont on précisera le centre le centre et le rayon.

d) Trace (F).

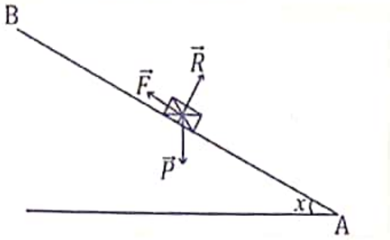
e) Retrouve la nature de l'ensemble (F), sans utiliser les coordonnées de M, en introduisant le milieu I du segment $[AB]$, et en démontrant que :

M appartient à (F) si et seulement si

$IM^2 - \frac{AB^2}{4} = -1$.

3- Situations d'évaluation

42 Le chariot, représenté sur la figure ci-contre, est initialement immobile en A. Grâce aux efforts constants de traction d'un élève de 2nde C d'un lycée municipal, le chariot effectue le déplacement de A vers B (A B) le long du plan incliné, avec AB = 5m Pour simplifier, on suppose que le chariot est soumis à seulement trois forces :



- La force $\vec{R}$ représentant l'action exercée des rails sur le chariot ;
- Le poids $\vec{P}$ du chariot tel que $\|\vec{P}\| = 800\ N$;
- La force $\vec{F}$ représentant la force de traction exercée par l'élève, telle que $\|\vec{F}\| = 430\ N$.

Cet élève décrit cette situation vécue pendant les vacances à ses camarades de classe dont tu fais partie. Il ajoute de même qu'à une valeur donnée de x, il était impossible pour lui, de déplacer ce chariot. Intéressés ; ceux-ci souhaitent connaître la valeur maximale X_{max} de l'angle x au-delà de laquelle leur camarade n'est plus en mesure de déplacer le chariot.

1- Exprime, en fonction de l'angle x, les énergies transférées au chariot respectivement par le biais de $\vec{R}$, $\vec{P}$ et $\vec{F}$: $W_{A\to B}(\vec{R})$; $W_{A\to B}(\vec{P})$ et $W_{A\to B}(\vec{F})$.
2- Exprime l'énergie totale $g(x)$ reçue par le chariot sur le trajet A $\to$B en fonction de x.
3- Le chariot étant immobile en A, le mouvement n'est possible que si l'énergie reçue par le chariot est positive.

Détermine cette valeur X_{max} de l'angle.

VI- RENDEZ-VOUS DES CURIEUX !

Les géomètres du XIXe siècle, conscients des limites de la géométrie des coordonnées, inventée deux siècles plus tôt par Descartes, se penchent sur des objets et des méthodes leur permettant d'aborder la géométrie d'une autre façon.

Parmi, les routes qu'ils ont empruntées se trouve celle du calcul vectoriel. Hamilton en Irlande, Grassmann en Allemagne, Gibles aux Etats-Unis ou Peano en Italie construisent lentement la notion d'espace vectoriel et plus particulièrement celle du produit scalaire de deux vecteurs, qui est donc une notion très récente dans l'histoire des mathématiques.

- **Augustin Louis Cauchy** (Paris 1789-1857) entre à 16 ans à la polytechnique. Son tempérament agressif l'oblige à s'exiler en Italie (Turin). Ses travaux portent de façon équilibrée entre l'analyse et la géométrie.
- **Hermann Schwarz** (Berlin 1843-1921) est un mathématicien allemand dont les travaux ont porté sur la théorie des fonctions et la géométrie différentielle.

Ces deux hommes démontrent de deux façons différentes l'inégalité qui porte leur nom **Cauchy-Schwarz** et qui s'énonce : $\|\vec{u}.\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.

11 Équations et inéquations dans $\mathbb{R}$

Notions essentielles :

- Notions d'équations
- Notions d'inéquations
- Résolution d'équations du 1^{er} ou 2^{nd} degré dans $\mathbb{R}$
- Résolution d'inéquations du 1^{er} ou 2^{nd} degré dans $\mathbb{R}$

SITUATION D'APPRENTISSAGE

Gagnoa et Soubré sont deux villes distantes de 110 km. Un groupe d'élèves part à bord d'un car de Gagnoa à 8 heures pour Soubré à la découverte du nouveau barrage hydroélectrique. Le car roule à une vitesse moyenne de 90 km/h. Au même moment, une voiture part de Soubré vers Gagnoa à la vitesse moyenne de 75 km/h. Le conducteur de ce deuxième véhicule doit remettre la carte du département de Soubré aux élèves pour les orienter pendant leur excursion.
Ceux-ci cherchent à quelle distance et l'heure à laquelle aura lieu le croisement des deux véhicules. Un débat houleux s'instaure dans le car. Le chef de groupe de cette excursion, présent dans le car, promet de voir à leur retour le professeur de mathématiques afin de leur donner les outils nécessaires pour résoudre ce problème.

I- ACTIVITÉS DE DÉCOUVERTE

A- EQUATIONS DANS ℝ

a) Identifier une équation dans ℝ

ACTIVITÉ 1

On considère l'équation (E) : $x \in \mathbb{R}$, $\frac{2x}{x-1} = \frac{x^2}{3x-2}$.

1- Identifie l'inconnue de cette équation.

2-a) Identifie les deux membres de l'équation (E).

b)Jutifie que 0 verifie l'équation (E).

3- Trouve deux fonctions f et g de ℝ vers ℝ telles que l'équation (E) s'écrive : $x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x)$.

Je fais le point de l'activité

- f et g étant deux fonctions numériques d'une variable réelle. L'énoncé (E) : $x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x)$ est appelé une équation à une inconnue dans ℝ. (E) est le nom de l'équation et ℝ le référentiel.
  0 est une solution de l'éqution (E).

J'évalue mes acquis

Parmi les égalités ci-dessous, indique celles qui sont des équations dans ℝ :

a) $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$; b) $\frac{2}{x} = x + 1$;

c) $(x+1)^2 = 4x^2$; d) $4x < 2x^2 - 1$.

b) Identifier deux équations équivalentes

ACTIVITÉ 2

1- On considère dans ℝ les équations (E) : $x^2 - 2018x = 9 - 2018x$ et (E_1) : $x^2 = 9$.

a) Indique la transformation qui permet de passer de l'équation (E) à l'équation (E_1) ;

b) Justifie que -3 et 3 sont les solutions de l'équation (E_1) ;

c) Justifie si -3 et 3 sont les solutions de l'équation (E).

2- On considère dans ℝ l'équation (E') : $\frac{x+2}{x^2+2} = \frac{2x+3}{x^2+2}$.

a) Indique la transformation qui permet de passer de l'équation (E') à l'équation (E'_1) : $x + 2 = 2x + 3$.

b) Justifie que -1 est la solution des équations (E') et (E'_1).

Je fais le point de l'activité

- Deux équations sont dites équivalentes lorsqu'elles ont le même ensemble de solutions. Résoudre l'une revient à résoudre l'autre.
- $x^2 - 2018x = 9 - 2018x$ et $x^2 = 9$ sont deux équations dans ℝ qui sont équivalentes.

J'évalue mes acquis

Transforme chacune des équations suivantes en une équation qui lui est équivalente.

a) $3x^4 + 2x - 4 = x + 3x^4$;

b) $\sqrt{x} + x^2 = x + \sqrt{x}$;

c) $\frac{2|x|}{2+|x|} = 1$;

d) $17(x^2 - 4x) = -68$.

c) Résoudre dans ℝ des équations dont les membres sont deux polynômes ou deux fractions rationnelles

ACTIVITÉ 3

On considère les fonctions f et g de ℝ vers ℝ définies par :

$f(x) = : \frac{2x}{x-1}$ et $g(x) = \frac{x^2}{3x-2}$.

1- Détermine l'ensemble de définition de chacune des fonctions f et g.

2- Détermine les contraintes sur x pour que l'équation (E) : $x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x)$ ait un sens.

3- Trouve toutes les valeurs de x vérifiant les contraintes et qui vérifient l'équation (E).

Je fais le point de l'activité

$D_f \cap D_g$ est l'ensemble des contraintes sur x. Trouver toutes les valeurs de x qui sont éléments de $D_f \cap D_g$ et qui vérifient (E), c'est résoudre l'équation (E).

J'évalue mes acquis

Résous dans ℝ, les équations suivantes :

$(E_1) : x^3 + 2x^2 - 3x = 2x^3 - 5x^2$;

$(E_2) : \dfrac{8}{x-1} = \dfrac{2}{(x-1)^2}$.

d) Résoudre des équations avec valeur absolue

Activité 4

En utilisant les propriétés relatives à la valeur absolue d'un nombre réel, résous les équations suivantes :

a) $|1 - 2x| = 3$; b) $|5x + 2| = |3x - 4|$; c) $|x| = 2x - 1$.

Je fais le point de l'activité

On utilise les propriétés suivantes pour résoudre les équations ci-dessous :

- Si $a \leq 0$ alors $|a| = -a$ et si $a \geq 0$ alors $|a| = a$.
- $|a| = |b| \Leftrightarrow a = -b$ ou $a = b$.

J'évalue mes acquis

Résous dans ℝ chacune des équations suivantes :

$(E_1) : |3x - 5| - x = 2$;

$(E_2) : |1 - 2x| = |x + 2|$.

B- INEQUATIONS DANS ℝ

a) Identifier une inéquation dans ℝ

Activité 5

1-Parmi les écritures suivantes, indique celles qui sont des inéquations :

a) $x \geq 2$; b) $8 < 121$; c) $x > x^2 + 1$; d) $x \neq x^2$; e) $\dfrac{x}{x-1} \leq \dfrac{x}{x+1}$.

2-a) Justifie que $-\dfrac{1}{2}$ vérifie l'inéquation (I) : $x \in \mathbb{R}, \dfrac{1}{x} \leq x$.

b) Détermine deux fonctions numériques f et g d'une variable réelle telles que l'inéquation (I) se mette sous forme : $x \in \mathbb{R}, f(x) \leq g(x)$.

Je fais le point de l'activité

f et g sont deux fonctions numériques d'une variable réelle. L'énoncé (I) : $x \in \mathbb{R}, f(x) \leq g(x)$ ou $x \in \mathbb{R}, f(x) < g(x)$ ou $x \in \mathbb{R}, f(x) \geq g(x)$ ou $x \in \mathbb{R}, f(x) > g(x)$ est appelé une inéquation à une inconnue dans ℝ.

(I) est le nom de l'inéquation et ℝ le référentiel.

$-\dfrac{1}{2}$ est une solution de l'inéquation $x \in \mathbb{R}, \dfrac{1}{x} \leq x$.

J'évalue mes acquis

Parmi les inégalités suivantes, indique celles qui sont des inéquations :

a) $x^2 + 1 \geq 0$; b) $\sqrt{x+4} \neq \sqrt{x} + 2$; ; c) $\dfrac{2x-1}{x} > \dfrac{x}{2x+1}$.

b) Identifier deux inéquations équivalentes

Activité 6

Soit l'inéquation (I) : $50x^2 + 2x \leq x + 50x^2 - 3$.

1-a) Indique la transformation qui permet de passer de l'inéquation (I) à l'inéquation (I_1) : $2x \leq x - 3$.

b) Reduis $d(x) = 50x^2 + 2x - (x + 50x^2 - 3)$, puis donne le signe de $d(x)$sur l'intervalle $]-\infty\,;-3]$.

c) Résous dans ℝ l'inéquation (I_1) : $2x \leq x - 3$.

d) Dis si les inéquations (I) et (I_1)ont les mêmes solutions.

2- On considère l'inéquation (I') : $\frac{x-1}{2} - 1 \geq \frac{x+2}{3}$.

Justifie que résoudre l'inéquation (I') revient à résoudre l'inéquation (I'_1) : $3(x - 1) - 6 \geq 2(x + 2)$.

Je fais le point de l'activité

- Les inéquations (I) et (I_1) ont le même ensemble de solutions.
- Deux inéquations sont équivalentes lorsqu'elles ont le même ensemble de solutions.

J'évalue mes acquis

Associe une inéquation équivalente à chacune des inéquations suivantes :

a) $3x^4 + 2x - 4 \leq x + 3x^4$; b) $-5\sqrt{x} + x^2 \geq x - 5\sqrt{x}$;

c) $\frac{2|x|}{|x| + 1} < 1$; d) $17(x^2 - 2x) > -17$.

Activité 7

On considère les fonctions f et g de ℝ vers ℝ définies par :

$f(x) = \frac{x}{x-1}$ et $g(x) = \frac{x}{x+1}$.

1- Détermine les ensembles de définition de f et g.

2- Détermine les contraintes sur x pour que l'inéquation (I) : $x \in \mathbb{R}, f(x) \leq g(x)$ ait un sens.

3- Résous (I).

4- Récapitule les étapes de la résolution de l'inéquation (I).

Je fais le point de l'activité

Pour chaque inéquation, on détermine les contraintes sur x, puis on la transforme afin d'obtenir les solutions après avoir dressé le tableau de signes lorsque cela s'avère nécessaire (en faisant attention aux contraintes).

J'évalue mes acquis

Résous dans ℝ les inéquations suivantes :

(I_1) : $x^2 - 4 \leq (5x + 6)(x - 2)$; (I_2) : $\frac{1}{x+2} \geq \frac{1}{x-1}$.

d) Résoudre des inéquations avec valeur absolue

Activité 8

En utilisant les propriétés relatives à la valeur absolue d'un nombre réel, résous chacune des inéquations suivantes :

a) $|7 + x| < 3$; b) $|x| \leq |3x - 4|$; c) $\frac{|x-1|}{|x|} \geq 2$.

Je fais le point de l'activité

Pour résoudre des inéquations du type : $|f(x)| \leq |g(x)|$, on utilise la propriété suivante : pour tous nombres réels a et b, $|a| \leq |b| \Leftrightarrow a^2 \leq b^2$.

J'évalue mes acquis

Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations suivantes :

a) $|2x + 3| \leq 5$; b) $|7 - 2x| \leq |3x + 4|$; c) $|2x + 3| \leq 5$;

d) $|2x + 3| \leq x - 1$; e) $|2x - 3| < x + 1$.

II- RÉSUMÉ DE COURS

A- EQUATION DANS $\mathbb{R}$

DÉFINITION

- f et g sont deux fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ d'ensemble de définition respectifs D_f et D_g.

L'énoncé (E) : $x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x)$ est appelé équation à une inconnue dans $\mathbb{R}$.

- (E) est le nom de l'équation et $\mathbb{R}$ le référentiel de cette équation.

REMARQUES

- Si le référentiel d'une équation n'est pas mentionné alors ce référentiel est $\mathbb{R}$.

Solution d'une équation - ensemble de validité d'une équation dans $\mathbb{R}$

DÉFINITION

On considère l'équation(E) : $x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x)$.

Soit D_f et D_g les ensembles de définiton respectifs de f et g.

- l'ensemble $D_f \cap D_g$ est appelé ensemble de validité de l'équation (E). Il est noté D_E.
- Tout élément a de D_E tel que $f(a) = g(a)$ est appelé solution de l'équation (E).

Exemple

Soit l'équation (E) : $\frac{x+1}{x+2} = 2$.

- D_E est l'ensemble des nombres réels x tels que : $x + 2 \neq 0$. $D_E = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
- -3 est une solution de (E). Car $-3 \in D_E$ et -3 vérifie l'équation (E).
- 4 n'est pas une solution de (E).

B- INEQUATION DANS $\mathbb{R}$

DÉFINITION

- f et g étant deux fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ d'ensemble de définition respectifs D_f et D_g.

L'énoncé (I) : $x \in \mathbb{R}, f(x) \leq g(x)$ est appelé inéquation à une inconnue dans $\mathbb{R}$.

- (I) est le nom de l'inéquation et $\mathbb{R}$ le référentiel de l'inéquation.

REMARQUES
- Le référentiel par défaut est $\mathbb{R}$.
- l'inégalité précédente dans (I) peut être $<, \geq$ ou $>$.

Solution d'une inéquation - ensemble de validité d'une inéquation dans $\mathbb{R}$

Définition

On considère l'inéquation(I) : $x \in \mathbb{R}, f(x) \leq g(x)$.

D_f et D_g sont les ensembles de définition respectifs de f et g.

- L'ensemble $D_f \cap D_g$ est appelé ensemble de validité de l'inéquation (I). Il est noté D_I.
- Tout élément a de D_I tel que $f(a) \leq g(a)$ est appelé solution de l'inéquation (I).

Exemple

- Soit l'inéquation (I) : $\frac{x+1}{x+2} < 2$.
- D_I est ensemble des nombres réels x tels que $x + 2 \neq 0$, $D_I = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$..
- -4 est une solution de (I) car : on a :

$\frac{-4+1}{-4+2} = \frac{-3}{-2}$; $\frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$; $\frac{3}{2} < 2$ et $-4 \in D_I$.

C- RESOLUTION D'EQUATIONS

Résoudre une équation (E) dans $\mathbb{R}$, c'est déterminer :

- l'ensemble de validité de (E) ;
- l'ensemble de solutions de (E).

Définition

Soit (E_1) et (E_2) deux équations à une inconnue d'ensemble de validité respectifs D_1 et D_2.
(E_1) et (E_2) sont équivalentes sur $D_1 \cap D_2$ si elles ont les mêmes solutions dans $D_1 \cap D_2$.

D- RÉSOLUTION D'UNE INÉQUATION DANS $\mathbb{R}$

Résoudre une inéquation (I) dans $\mathbb{R}$, c'est déterminer :

- l'ensemble de validité de (I) ;
- l'ensemble de solutions de (I).

Définition

Soit (I_1) et (I_2) deux inéquations à une inconnue d'ensemble de validité respectifs D_1 et D_2.
(I_1) et (I_2) sont équivalentes sur $D_1 \cap D_2$ si elles ont les mêmes solutions dans $D_1 \cap D_2$.

Exemple

Résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (I) : $x^2 - 2x - 3 \leq 2(x-3)(2x+1)$.

- L'ensemble de validité D_I de l'inéquation (E) est $\mathbb{R}$.
- $x^2 - 2x - 3 \leq 2(x-3)(2x+1) \Leftrightarrow (x-3)(3x+1) \geq 0$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		3		$+\infty$
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$3x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-3)(3x+1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On déduit du tableau précédent que l'ensemble de solutions de (E) est $S_{\mathbb{R}} = \left]-\infty ; \frac{1}{3}\right] \cup \left[3 ; +\infty\right[$.

E- EQUATION ET INEQUATION LIANT DEUX FRACTIONS RATIONNELLES

Exemple1

Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\frac{x}{x+2} = \frac{2x-3}{x}$.

- L'ensemble de validité D_E de l'équation (E) est $\mathbb{R} \setminus \{-2 ; 0\}$. Soit x un élément de D_E.
- $\frac{x}{x+2} = \frac{2x-3}{x} \Leftrightarrow x^2 = (x+2)(2x-3)$

$$\Leftrightarrow x^2 = 2x^2 + x - 6$$
$$\Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0$$
$$\Delta = 1 + 24 = 25$$
$$x_1 = \frac{-1-5}{2} = -3 \quad ; \quad x_1 = \frac{-1+5}{2} = 2$$

$-3 \in D_V$ et $2 \in D_E$, donc : $S_{\mathbb{R}} = \{-3 ; 2\}$.

Exemple 2

Résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (I) : $\frac{x}{x+2} \leq \frac{2x-3}{x}$.

- L'ensemble de validité D_I de I est $\mathbb{R} \setminus \{-2 ; 0\}$.
- Soit x un élément de D_I.
- $\frac{x}{x+2} \leq \frac{2x-3}{x} \Leftrightarrow \frac{x}{x+2} - \frac{2x-3}{x} \leq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - (x+2)(2x-3)}{x(x+2)} \leq 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{(x-2)(-x-3)}{x(x+2)} \leq 0$$

x	$-\infty$		-3		-2		0		2		$+\infty$
$(x-2)(x-3)$		−		+	0	+		+	0	−	
$x(x+2)$		+		+	0	−	0	+		+	
$\frac{(x-2)(-x-3)}{x(x+2)}$		−	0	+	‖	−	‖	+	0	−	

On déduit du tableau précédent que $S_{\mathbb{R}} =]-\infty ; -3] \cup]-2 ; 0[\cup [2 ; +\infty[$.

F- EQUATION ET INEQUATION AVEC VALEUR ABSOLUE

REMARQUES

- f et g sont deux fonctions numériques,
- $|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ ou $f(x) = -g(x)$.

Exemple 1

Résous l'équation (E) : $|2x + 3| = |x + 4|$

$D_E = \mathbb{R}$.

$|2x + 3| = |x + 4| \Leftrightarrow 2x + 3 = x + 4$ ou $2x + 3 = -(x + 4)$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -\frac{7}{3}$$

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{1 ; -\frac{7}{3}\right\}$$

Exemple 2

Résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (I) : $|2x + 3| \leq |x + 4|$.

- $D_I = \mathbb{R}$
- L'inéquation sans le symbole valeur absolue donne :

x	$-\infty$	-4	$-\frac{3}{2}$	$+\infty$
$\|2x+3\|$	$-2x-3$	$-2x-3$	0	$2x+3$
$\|x+4\|$	$-x-4$	0	$x+4$	$x+4$

Pour $x \in \left]-\infty\,;-4\right]$, $|2x + 3| \leq |x + 4| \Leftrightarrow -2x - 3 \leq -x - 4$ (I_1).

Pour $x \in \left[-4\,;-\frac{3}{2}\right]$, $|2x + 3| \leq |x + 4| \Leftrightarrow -2x - 3 \leq x + 4$ (I_2).

Pour $x \in \left[-\frac{3}{2}\,;+\infty\right[$, $|2x + 3| \leq |x + 4| \Leftrightarrow 2x + 3 \leq x + 4$ (I_3).

$(I_1) : x \in \left]-\infty\,;-4\right]$, $-2x - 3 \leq -x - 4$

$$(I_1) \Leftrightarrow -x \leq -1 \text{ et } x \leq -4$$

$$(I_1) \Leftrightarrow -x \geq 1 \text{ et } x \leq -4$$

$$S_1 = \emptyset$$

$(I_2) : -x \in \left[-4\,;-\frac{3}{2}\right]$, $-2x - 3 \leq x + 4$

$$(I_2) \Leftrightarrow -x \in \left[-4\,;-\frac{3}{2}\right], -3x \leq 7$$

$$(I_2) \Leftrightarrow -x \in \left[-4\,;-\frac{3}{2}\right], x \geq -\frac{7}{3}$$

$$S_2 = \left[-\frac{7}{3}\,;-\frac{3}{2}\right]$$

$(I_3) : x \in \left[-\frac{3}{2}\,;+\infty\right[$, $2x + 3 \leq x + 4$

$$(I_3) \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{3}{2}\,;+\infty\right[, \text{ et } x \leq 1$$

$$(I_3) \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{3}{2}\,;1\right]$$

$$S_3 = \left[-\frac{3}{2}\,;\,1\right]$$

Donc l'ensemble des solutions $S_{\mathbb{R}}$ de l'inéquation est : $S_1 \cup S_2 \cup S_3$.

$S_{\mathbb{R}} = \left[-\frac{7}{3}\,;1\right]$

On aurait pu utiliser la propiété suivante :
f et g sont deux fonctions numériques,
$|f(x)| \leq |g(x)| \Leftrightarrow (f(x))^2 \leq (g(x))^2$.

III- MÉTHODE

• Avant de faire des calculs pour résoudre des équations et des inéquations, il faut prendre le soin d'identifier le type d'équations ou d'inéquations afin d'appliquer la méthode adéquate.

1	**Equation se ramenant à une équation produit grâce à une factorisation**	- On transpose tous les termes dans un même membre de l'équation ; - On factorise (éventuellement, on développe si aucune factorisation n'est possible) ; - On résout et on conclut.
2	**Equation quotient**	$\frac{A(x)}{B(x)} = 0$ et $\Leftrightarrow A(x) = 0$ et $B(x) \neq 0$ - On cherche l'ensemble de validité (contraintes) en résolvant $B(x) = 0$; - On transpose tous les termes d'un même côté, on réduit au même dénominateur et on factorise si nécessaire ; - On conclut en tenant compte de l'ensemble de validité.
3	**Inéquation se ramenant à une inéquation produit grâce à une factorisation**	- On transpose tous les termes dans un même membre de l'équation ; - On factorise (éventuellement on développe s'il n'y a aucune factorisation possible) ; - On fait un tableau de signes ; - On conclut.
4	**Inéquation quotient**	- On cherche l'ensemble de validité (contraintes) ; - On transpose tous les termes dans un même membre, on réduit au même dénominateur et on factorise si nécessaire ; - On fait un tableau de signes et on conclut en en tenant compte de l'ensemble de validité.

IV- SAVOIR-FAIRE

Savoir-faire 1- ***Résoudre des équations et inéquations dans $\mathbb{R}$ dont les membres sont deux polynômes ou deux fractions rationnelles***

ENONCÉ

Résous chacune des inéquations suivantes :

a) $(I_1) : 4x^2 + 3x - 20 > -2(x^2 + x - 18)$; b) $(I_2) : \frac{1}{x-1} \leq \frac{1}{x} - \frac{1}{x-9}$.

SOLUTION COMMENTÉE

a) L'ensemble de validité de (I_1) est $\mathbb{R}$.

$(I_1) \Leftrightarrow 6x^2 + 5x - 56 > 0$

$\Leftrightarrow 6\left[\left(x + \frac{5}{12}\right)^2 - \frac{1369}{144}\right] > 0$ (en utilisant la forme canonique)

$$\Leftrightarrow 6\left(x+\frac{5}{12}-\frac{37}{12}\right)\left(x+\frac{5}{12}+\frac{37}{12}\right)>0$$

$$\Leftrightarrow 6\left(x-\frac{8}{3}\right)\left(x+\frac{7}{2}\right)>0$$

On dresse le tableau de signes de l'expression $\left(x-\frac{8}{3}\right)\left(x+\frac{7}{2}\right)$ et on conclut que l'ensemble des solutions de (I_1) est : $\left]-\infty\,;-\frac{7}{2}\right[\cup\left]\frac{8}{3}\,;+\infty\right[$.

b) L'ensemble de validité de (I_2) est $\mathbb{R}\setminus\{0\,;1\,;9\}$.

Soit x un élément de $\mathbb{R}\setminus\{0\,;1\,;9\}$.

$$(I_2) \Leftrightarrow \frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-9}-\frac{1}{x}\le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(x-9)+x(x-1)-(x-9)(x-1)}{x(x-1)(x-9)}\le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-9}{x(x-1)(x-9)}\le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-3)(x+3)}{x(x-1)(x-9)}\le 0$$

On dresse le tableau de signes de la fraction rationnelle $\frac{(x-3)(x+3)}{x(x-1)(x-9)}$ et on conclut que l'ensemble des solutions de (I_2) est : $]-\infty\,;-3]\cup]0\,;1[\cup[3\,;9[$.

Savoir-faire 2- Résoudre des équations et inéquations avec valeur absolue

Enoncé

Résous chacune des équations et inéquations suivantes :

a) (E) : $|2x-1|=x$; b) (I) : $|x|>\sqrt{(2x+1)^2}$.

Solution commentée

Je résous l'équation et (E) et l'inéquation (I).

a) L'ensemble de validité de (E) est $\mathbb{R}$.

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases}(2x-1)^2=x^2\\ x\ge 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(2x-1-x)(2x-1+x)=0\\ x\ge 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x-1)(3x-1)=0\\ x\ge 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=1 \text{ ou } x=\frac{1}{3}$$

L'ensemble des solutions de (E) est : $\{1\,;\frac{1}{3}\}$.

b) L'ensemble de validité de (I) est $\mathbb{R}$.

$$(I) \Leftrightarrow |x|>|2x-1|$$

$$\Leftrightarrow x^2>(2x+1)^2$$

$$\Leftrightarrow (x-2x-1)(x+2x+1)>0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(3x+1)<0$$

On dresse le tableau de signes du polynôme $(x+1)(3x+1)$ et on conclut que l'ensemble des solutions de (I) est : $\left]-1\,;-\frac{1}{3}\right[$.

V- JE M'EXERCE

1- Exercices de fixation/ Application

A- Equations dans ℝ

Identifier une équation dans ℝ

1 Réponds par Vrai (V) ou par Faux (F) à chacune des affirmations suivantes. Recopie et complète.

N°	Affirmations	Réponses
1	$x^2 - 2x + 5$ est une équation	
2	$x\sqrt{3} - 1 = 0$ est une équation	
3	$\frac{x-3}{x} = 1$ est une équation	

Identifier deux équations équivalentes

2 Réponds par Vrai (V) ou par Faux (F) à chacune des affirmations suivantes. Recopie et complète.

N°	Affirmations	Réponses
A	$\frac{x+3}{x-1} = \frac{2}{x} \Leftrightarrow 2(x-1) = x(x+3)$	
B	$\sqrt{(x+3)^2} = 2 \Leftrightarrow \|x+3\| = 2$	
C	$x \in]-1\,;+\infty[, \sqrt{x+1} = 5 \Leftrightarrow x+1 = 25$	
D	$(x-2)^2 = x(x-2) \Leftrightarrow x-2 = x$	

Résoudre des équations dans ℝ. dont les membres sont deux polynômes ou deux fractions rationnelles

3 Recopie puis relie chaque équation à son ensemble de solutions.

$(x+\sqrt{2}) = 0$ • • $S = \{2\}$;

$(3-x) = 1$ • • $S = \{\sqrt{2}\,;1\}$;

$x(3x+2) = 0$ • • $S = \{-\sqrt{2}\}$

$(x-\sqrt{2})(1-x) = 0$ • • $S = \left\{\frac{-2}{3}\,;0\right\}$.

4 On considère l'équation (E) : $5x^2 + x - 6 = 0$
Parmi les nombres ci-dessous, indique ceux qui sont solutions de (E) : 0 ; 1 ; 5 ; -1 ; $\frac{5}{6}$; $-\frac{6}{5}$.

5 Résous dans ℝ les équations suivantes :
a) $3x^2 - 7x = 0$; b) $(x+3)^2 = (x+3)(2x-7)$.

6 Résous dans ℝ les équations suivantes :
a) $\frac{1-2x}{3x+4} = \frac{x+1}{1+2x}$; b) $\frac{x+\sqrt{2}}{x+2} = \frac{x-1}{3x+1}$.

Résoudre des équations avec valeur absolue.

7 Résous dans ℝ les équations suivantes :

a) $|x+3| = 2$; c) $3 + |x+3| = 9$;

b) $|2x-3| = |x-4|$; d) $|x-10| = -2$.

8 Résous dans ℝ les équations suivantes :

a) $|3x-2| = x+6$; c) $|x-4| - |x+6| = 10$;

b) $\sqrt{(2x-3)^2} = 3-2x$; d) $|x(x-2)| + |x^2-4| = 0$.

B- Inéquations dans ℝ

Identifier une inéquation dans ℝ

9 Identifie les inéquations parmi les inégalités ci-dessous.

a) $4x + 5 < 2$; b) $2x + 3 = 1$;

c) $x - 1 > \frac{x+2}{x+4}$; d) $3x - 4 \geq x - 1$.

Identifier deux inéquations équivalentes.

10 Réponds par vrai (V) ou par faux (F) à chacune des affirmations suivantes. Récopie et complète

N°	Affirmations	Réponses
1	$\|x+3\| < 2 \Leftrightarrow -5 < x < -1$	
2	$\|x+3\| \leq \|2-x\| \Leftrightarrow (x+3)^2 \leq (2-x)^2$	
3	$\frac{2+x}{x} \geq \frac{x}{x+1} \Leftrightarrow \frac{(x+2)(x+1)-x^2}{x(x+1)} \geq 0$	

11 Parmi les inéquations ci-dessous, indique celles qui sont équivalentes entre elles :

a) $\sqrt{x-2} + 2x - 3 \leq x + \sqrt{x-2}$; b) $\frac{\sqrt{x-2}}{x+2} \geq \frac{x-2}{\sqrt{x-2}}$;

c) $x \geq 2x - 3$; d) $\frac{x+1}{x+2} \leq 0$.

Résoudre des inéquations dans ℝ dont les membres sont deux polynômes ou deux fractions rationnelles

12 Résous dans ℝ les inéquations suivantes :

a) $x^2 - 16 > x - 4$; b) $5(x^2 + 1)(x - 2) \geq 0$;

c) $(3x - 2)^2 - 5 < 3x(3x - 4)$;

d) $(3 - x)(x^2 - 4) > 0$; e) $x(2 - x)(x - 3) \geq 0$.

13 Résous dans ℝ les inéquations suivantes :

a) $\frac{x+3}{x-1} - \frac{x+1}{x} < 2$; b) $\frac{x^2-4}{x} < \frac{x-1}{x+3}$;

c) $\frac{x+1}{x-1} < \frac{2x}{x+1}$; d) $2 - \frac{3}{x} < \frac{2}{x+1}$.

14 Résous dans ℝ les inéquations suivantes :

a) $\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} \leq 0$; b) $(x + 3)(x - 1) \leq 0$;

c) $(2x + 5)(x + 3) \geq 0$.

Résoudre des inéquations avec valeur absolue.

15 Résous dans ℝ les inéquations suivantes et représente les solutions sur une droite graduée

a) $16\,|x - 4| \leq 2$; b) $|2x - 3| \leq 4$;

c) $4 \leq |2x + 6| \leq 6$; d) $1 < |2 - x| < 3$.

16 Résous dans ℝ les inéquations suivantes :

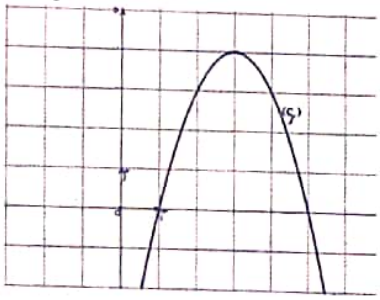
a) $|2x - 3| \geq x - 1$;

b) $|x^2 - 7x + 12| \leq x^2 - 3x - 10$

c) $\left|\frac{x-1}{3x+2}\right| \leq 2$.

2- Exercices de renforcement / approfondissement

17 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Soit f une fonction définie sur $[\frac{1}{2} ; \frac{11}{2}]$ ℝ par :
$f(x) = -x^2 + 6x - 5$.
On donne la courbe représentative de f ci-dessous.
1- Vérifie que :
$f(x) = 4 - (x - 3)^2$ puis factorise $f(x)$.
2- Déduis-en la résolution de l'inéquation $f(x) > 0$.
3- Résous graphiquement $f(x) > 0$, puis vérifie le résultat par le calcul.



18 Détermine trois nombres entiers consécutifs tels que la somme du carré du plus grand et du produit des deux autres soit égal à 301.

19 Soit l'expression : $A(x) = |x + 2| + |2x - 3| - x + 3$.
1- Ecris $A(x)$ sans les symboles de la valeur absolue.
2- Résous dans ℝ l'équation $A(x) = 0$.
3- Résous dans ℝ l'inéquation $A(x) < 0$.

20 Résous dans ℝ les équations suivantes :

a) $|x - 4| \leq x^2 - 4$; b) $\frac{2x+1}{x-1} = \frac{x+1}{x-2}$;

c) $|2x - 5| = -6$; d) $(x + 1)(x^2 - x + 2) - x^2 + 1 = x - 1$;

e) $|x^2 - 4| = |x - 4|$; f) $|x + 1| + 2\,|2 - x| + |x| - 2x + 1 = 0$.

21 Résous dans ℝ les inéquations suivantes :

a) $|x| - \frac{1}{|x+1|} \leq 2x - 1$; b) $|2 - x| \leq |x|$;

c) $\frac{(x-1)^2 + (x-1)^2}{(x+1)^2 - (x-1)^2} < -2$; d) $\frac{|x| - 2}{|x+1|} \geq |x - 1|$.

22 On considère la fonction polynôme f définie par :
$f(x) = (2x + 3)^2 - (x + 1)^2$.
1- Développe et réduis $f(x)$.
2- Factorise $f(x)$.
3- Résous dans ℝ :
a) $f(x) = 0$; b) $f(x) = 8$;
c) $f(x) = 3x^2$; d) $f(x) \leq (x + 2)(1 - x)$.

23 On considère les fonctions numériques f, g et h définies par :

$f(x) = \sqrt{(2x+1)(x-5)}$; $g(x) = \sqrt{x - x^2}$;

$h(x) = \sqrt{\dfrac{-2x}{x-4}}$.

Détermine les ensembles de définition des fonctions f, g et h.

24 Résous dans ℝ les inéquations suivantes.

a) $x^2 + 5x + 9 < (x-1)x + 12$; b) $2 < |x+3| < 3$

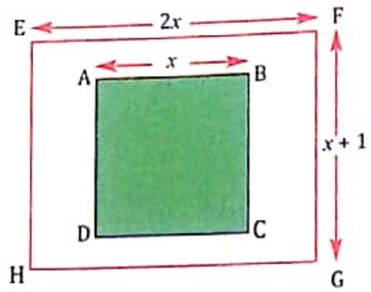
25 Dans une salle de spectacle, il y a des places à 1500 FCFA, à 2000 FCFA et à 2500 FCFA.
Le nombre de places à 2000 FCFA est le double du nombre de places à 2500 FCFA. Le nombre de places à 1500 FCFA est la moitié du nombre total de places.
Lorsque la salle est pleine, la recette est de 946 000 FCFA.
Détermine le nombre de places de chaque catégorie.

26 Un cycliste effectue un parcours en 9 h. Sa vitesse est de 30 km/h sur le premier tiers, 20 km/h sur le second tiers et 15 km/h sur le troisième tiers. Détermine la distance parcourue par le cycliste.

27 Un laborantin mélange deux substances, la première contient 20 % de vinaigre, la seconde contient 10 % de vinaigre. Il obtient dix litres de solution contenant 18 % de vinaigre.
Détermine en litres, le volume de la première solution.

29 On désire creuser un bassin carré dans un terrain rectangulaire.
La situation est représentée par le schéma ci-dessous.
On donne lesdimensions suivantes : $AB = x$, $EF = 2x$, $EH = x + 1$. L'unité de mesure étant le mère, on désire que l'aire de l'allée entourant le bassin n'excède pas 35 m^2.

1- Exprime l'aire de l'allée en fonction de x.
2- Justifie que le problème posé revient à résoudre l'inéquation : $x^2 + 2x - 35 \leq 0$.
3- Résous cette inéquation, puis donne un encadrement de la mesure du côté du bassin.



3-Situations d'évaluation

28 Une entreprise de fabrication d'ordinateurs recrute des employés et propose à ceux-ci deux types de contrats :
Contrat A : un salaire mensuel fixe de 208 000 FCFA auquel s'ajoute 16000 FCFA par ordinateur fabriqué ;
Contrat B : un salaire mensuel fixe de 445 900 FCFA auquel s'ajoute 5200 FCFA par ordinateur fabriqué.
Des élèves de 2nde C étant informés veulent savoir le nombre minimum pour lequel contrat B est le plus avatageux car ils sont attirés par cette proposition.
Tu fais partie de ces élèves, donne ton avis argumenté.

RENDEZ-VOUS DES CURIEUX !

Les travaux d'**Al-Khawarizmi** sont souvent considérés comme l'acte de naissance de la branche des mathématiques appelée Algèbre. Son traité sur les équations intitulé Kitâb al-jabr wa al-muqâbala utilise le terme l-jabr qui est devenu algèbre plus tard.En arabe, al-jabr « correspond à transformer une soustraction dans un membre en une addition dans l'autre membre » dans l'objectif d'obtenir uniquement des coefficients positifs.
Par exemple : $2x^2 + 100 - 20x = 58$ devient par al-jabr :
$2x^2 + 100 = 58 + 20x$.
Al-Khawarizmi s'intéresse à toutes les équations du second degré alors que Diophante ne cherchait à résoudre que celles ayant des solutions, soit entières, soit rationnelles.

***Robert Recorde** est un précurseur pour l'écriture d'une équation. Il invente l'usage du signe = pour désigner une égalité.*

12 Homothéties

Notions essentielles :

- Définitions d'une homothétie et conséquences
- Propriétés des homothéties
- Caractérisation d'une homothétie

SITUATION D'APPRENTISSAGE

Le professeur d'art plastique a confié le travail de maison ci-dessous aux élèves :
«Voici une photographie d'un tableau de Théo Van Doesburg datant de 1930 qui s'intitule Dessin Arithmétique IV. Il mesure environ 30 cm de côté. Il comprend des figures géométriques homothétiques. Le reproduire pour obtenir une réduction du tableau original ou encore un agrandissement de la photo sur une feuille de papier canson selon le programme suivant.

Première semaine : Bien examiner et analyser le tableau afin d'identifier les alignements, les directions, les rapports entre les mesures et l'effet des axes du tableau. Réaliser au crayon le tracé sur la feuille dans un cadre en partant d'un carré convenablement choisi.

Deuxième semaine : Achever l'œuvre par des couleurs au gré. »

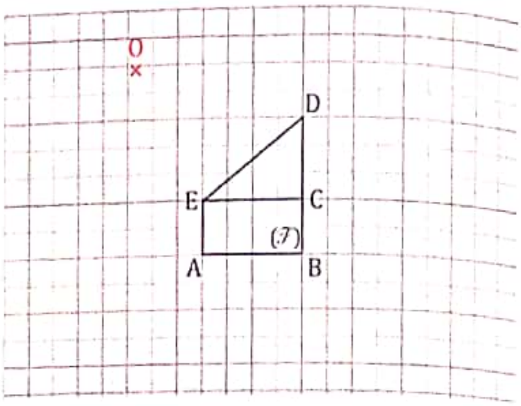
Pour mieux réussir ce travail, les élèves proposent au professeur de mathématiques de les instruire sur les caractéristiques et propriétés des figures géométriques homothétiques.

I- ACTIVITÉS DE DÉCOUVERTE

1- CONNAÎTRE LA DÉFINITION D'UNE HOMOTHÉTIE, CONSÉQUENCES DE LA DÉFINITION

Connaître la définition d'une homothétie - Construire l'image d'un point par une homothétie en utilisant la définition

Activité 1



On réalise sur un quadrillage la figure $(\mathcal{F})$ ci-contre.

1- Réalise une autre figure $(\mathcal{F}')$ en construisant successivement :
- Le point A' tel que : $\overrightarrow{OA'} = 2\overrightarrow{OA}$.
- Le point B' tel que : $\overrightarrow{OB'} = 2\overrightarrow{OB}$.
- Le point C' tel que : $\overrightarrow{OC'} = 2\overrightarrow{OC}$.
- Le point D' tel que : $\overrightarrow{OD'} = 2\overrightarrow{OD}$.
- Le point E' tel que : $\overrightarrow{OE'} = 2\overrightarrow{OE}$.

2- Compléte :
$\overrightarrow{A'B'} = \dots \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{B'C'} = \dots \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{C'D'} = \dots \overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{D'E'} = \dots \overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{A'E'} = \dots \overrightarrow{AE}$.

Déduis des consignes précédentes les caractéristiques de l'application du plan lui même qui transforme $(\mathcal{F})$ en $(\mathcal{F}')$.

Je fais le point de l'activité

- La transformation du plan de cette activité permet de déplacer un objet en l'agrandissant ou en le rétrécissant suivant un réel non nul k.
- Cette transformation est une homothétie.
- Étant donné un point O et un nombre réel k non nul, on appelle homothétie de centre O et de rapport k l'application notée h(O ; k) du plan dans lui-même qui, à tout point M, associe le point M' tel que : $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.
- Le centre, un point et son image sont alignés.

J'évalue mes acquis

Une égalité de la forme $\overrightarrow{HU} = -2\overrightarrow{HV}$ signifie que U est l'image de V par l'homothétie de centre H et de rapport -2.
Interprète de même les égalités suivantes :
a) $\overrightarrow{KB} = -3\overrightarrow{KA}$; b) $\overrightarrow{CV} = 2\overrightarrow{CU}$; c) $\overrightarrow{JC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{JK}$; d) $\overrightarrow{OM} + 4\overrightarrow{MH} = \vec{0}$.

2- CONNAÎTRE LA PROPRIÉTÉ FONDAMENTALE DE L'HOMOTHÉTIE

Activité 2

h étant l'homothétie de centre O et de rapport k, M' et N' les images respectives de M et N par h:
1- Traduis les égalités h(M) = M' et h(N) = N' par des égalités vectorielles.
2- Justifie que : $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$.

Je fais le point de l'activité

M' et N' étant les images respectives des points M et N par une homothétie de rapport k, on a : $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$.

J'évalue mes acquis

Soit A, B, C et D quatre points d'images respectives E, F, G et H par l'homothétie k de rapport - 5.
Recopie et complète les égalités vectorielles suivantes en utilisant la propriété fondamentale des homothéties :
a) $\overrightarrow{EF}$ = ... ; b) $\overrightarrow{GH}$ = ... ; c) $\overrightarrow{HE}$ = ...

3- CONNAÎTRE LA PROPRIÉTÉ RELATIVE AUX POINTS INVARIANTS PAR UNE HOMOTHÉTIE

ACTIVITÉ 3

h est l'homothétie de centre O et de rapport k.
1- Demontre que si $k = 1$ alors tout point M du plan verifie $h(M) = M$.
2- Demontre que si $k \neq 1$, alors O est l'unique point du plan vérifiant $h(M) = M$.

Je fais le point de l'activité

Si $k \neq 1$, O est la seule solution de cette équation.
Si $k = 1$, tout point du plan (P) est solution de cette équation.
Toute solution de l'équation (E) est appelé point invariant par h.

J'évalue mes acquis

Soit h l'homothétie de centre O et de rapport $k(k \neq 1)$ et M un point invariant par h.
Justifie que M est égal à O.

4- CONNAÎTRE LES PROPRIÉTÉS RELATIVES AUX IMAGES DE FIGURES SIMPLES PAR UNE HOMOTHÉTIE

a) Image d'une droite par une homothétie

ACTIVITÉ 4

Soit(D) une droite du plan et h une homothétie de rapport k. A et B sont deux points distincts de la droite (D) d'images respectives A' et B' par h.
1- a) Justifie que les points A' et B' sont distincts .
b) Soit M un point de la droite (D). Jutifie qu'il existe un nombre réel α tel que : $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB}$.
c) Soit M' l'image de M par l'homothétie h. Justifie que: $\overrightarrow{A'M'} = \alpha\overrightarrow{A'B'}$.
d) Déduis de ce qui précéde que : $h(D) \subset (A'B')$
2- Soit M' un point de la droite (A'B').
a) Justifie qu'il existe un nombre réel β tel que : $\overrightarrow{A'M'} = \beta\overrightarrow{A'B'}$.
b) Justifie qu'il existe un point M tel du plan tel que : $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{k}\overrightarrow{A'M'}$.
c) Justifie que : $\overrightarrow{AM} = \beta\overrightarrow{AB}$.
d) Soit O le centre de l'homothétie h. Justifie que : $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.
e) Déduis de tout ce qui précéde que M' admet un antécédent par h dans la droite (AB).
3- Justifie que l'image (D') de (D) par h est une droite parallèle à (D).

Je fais le point de l'activité

L'image d'une droite (D) par une homothétie est une droite (D') parallèle à (D).

J'évalue mes acquis

A, B et C sont les images respectives de E, F et G par une homothétie.
Indique les images des droites (EF), (EG) et (FG) par cette homothétie en précisant les paires de droites parallèles.

b) Image d'un segment par une homothétie

ACTIVITÉ 5

Soit A et B deux points distincts du plan et h une homothétie de rapport k. On désigne par A' et B' les images respectives de A et B par h.

1- a) Justifie que A' et B' sont deux points distincts du plan.
   b) Justifie que $A'B' = |k|AB$.
2- Soit M un point de [AB], d'image M' par h.
   a) Traduis par une égalité vectorielle l'appartenance de M à [AB].
   b) Démontre que M' appartient à [A'B'].
3- a) Soit Q un point du segment [A'B'].
   Démontre qu'il existe un point N appartenant à [AB] tel que $h(N) = Q$.
   b) Déduis de ce qui précede l'image de [AB] par h.

Je fais le point de l'activité

L'image d'un segment [AB] par une homothétie h est le segment [A'B'], A' et B' étant les images respectives de A et B par h. On a aussi $A'B' = |k|AB$.

J'évalue mes acquis

EFG est un triangle rectangle en E tel que : EF = 8 cm et EG = 6 cm.
A, B et C sont les images respectives des points E, F et G par l'homothétie de centr et de rapport -2.
a) Détermine les images des segments [EF] et [EG].
b) Calcule les longueurs AB et AC.

c) Image d'une demi-droite par une homothétie

Activité 6

Soit h l'homothétie de centre O et de rapport k.
1- Construis l'image (A'B') de la droite (AB) par h pour $k = 2$.
2- a) Place un point M sur la demi-droite [AB) et construis $M' = h(M)$.
   b) Dis à quelle partie de la droite (A'B'), M' appartient. Justifie ta réponse.
3- a) Soit N' un point de la demi-droite [A'B').
   b) Justifie qu'il existe un point N appartenant à [AB) tel que $h(N) = N'$.
   c) Détermine l'image de la demi-droite [AB) par h.

Je fais le point de l'activité

L'image de la demi-droite [AB) par l'homothétie h est la demi-droite [A'B').

J'évalue mes acquis

A, B et C sont les images respectives de E, F et G par une homothétie.
Indique les images des demi-droites [EF) et [FG) par cette homothétie.

d) Image d'un cercle par une homothétie

Activité 7

Soit $(\mathscr{C})$ un cercle de centre I et rayon r et h une honothétie de rapport k. Soit I' l'image de I par h.

1- Soit M un point de $(\mathscr{C})$ d'image M' par h.
   a) Démontre que : $I'M' = |k|r$.
   b) Déduis-en que M' appartient à un cercle $(\mathscr{C}')$ dont on précisera le centre et le rayon.
2- a) Soit N' un point du cercle $(\mathscr{C}')$ trouvé ci-dessus.
   Démontre qu'il existe un point N du plan tel que $h(N) = N'$.
   b) Déduis-en que N appartient au cercle $(\mathscr{C})$.
3- Détermine l'image de $(\mathscr{C})$ par h.

Je fais le point de l'activité

L'image du cercle de centre I et de rayon r par une homothétie h de rapport k est le cercle de centre I' et de rayon $|k|r$ où $I' = h(I)$.

J'évalue mes acquis

Soit h l'homothétie de rapport -3.

- Soit A et B deux points d'images respectives E et F par h.
- $(\mathscr{C})$ est un cercle de centre A et de rayon 2 cm.

Recopie et complète l'affirmation suivante:

L'image du cercle $(\mathscr{C})$ par h est le ...... de centre ..... et de rayon ...

5- CONNAÎTRE LA PROPRIÉTÉ RELATIVE À LA MULTIPLICATION DES LONGUEURS ET DES AIRES PAR LES HOMOTHÉTIES

ACTIVITÉ 8

On considère un triangle ABC rectangle en A.

Soit l'homothétie $h_{(O\,;\,k)}$ et $A'B'C'$ l'image de ABC par cette homothétie.

1- Justifie que $A'B' = |k|AB$; $A'C' = |k|AC$; $B'C' = |k|BC$.

2- On désigne par $\mathscr{A}$ l'aire de ABC et par $\mathscr{A}'$ l'aire de A'B'C'.

Démontre que : $\mathscr{A}' = k^2\mathscr{A}$.

Je fais le point de l'activité

Dans une homothétie de rapport k :
L'image du triangle ABC d'aire $\mathscr{A}$ est le triangle A'B'C' d'aire $k^2\mathscr{A}$.

J'évalue mes acquis

Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

a) Toute homothétie conserve les aires.

b) Si une homothétie multiplie les aires par 9, alors son rapport est 3.

c) Toute homothétie de rapport 2 ou -2 multiplie les aires par 4.

6- CONNAÎTRE LA PROPRIÉTÉ RELATIVE À LA CONSERVATION DU PARALLÉLISME DES DROITES PAR UNE HOMOTHÉTIE

ACTIVITÉ 10

Soit h une homothétie de rapport k.

Soit (D_1) et (D_2) deux droites parallèles.

(D_1') et (D_2') sont les images respectives de (D_1) et (D_2) par h.

a) Explique pourquoi (D_1) et (D_1') sont parallèles puis (D_2) et (D'_2) sont parallèles.

b) Déduis-en que (D_1') et (D_2') sont parallèles.

Je fais le point de l'activité

Toute homothétie conserve le **parallélisme de droites**.

J'évalue mes acquis

ABCD est un rectangle. R, S, T et Q sont les images respectives de A, B, C et D par l'homothétie de rapport 2 et de centre O, point d'intersection des droites (AC) et (BD).

Justifie que les droitess (RS) et (TQ) sont parallèles.

7- CONNAÎTRE LA PROPRIÉTÉ RELATIVE À LA CONSERVATION DE L'ORTHOGONALITÉ DES DROITES PAR UNE HOMOTHÉTIE

ACTIVITÉ 11

Soit l'homothétie h de centre O et de rapport k.
(D_1) et (D_2) sont deux droites perpendiculaires.
Soit (D_1') et (D_2'), les images respectives de (D_1) et (D_2) par h.

a) Justifie que : $(D_1) // (D'_1)$ et $(D_2) // (D'_2)$.
b) Déduis-en que : $(D'_1) \perp (D'_2)$.

Je fais le point de l'activité

Toute homothétie conserve **l'orthogonalité.**

J'évalue mes acquis

- ABC est un triangle inscrit dans un cercle (C) de centre O dont [AB] est un diamètre.
- Les points I, L et K sont les images respectives de C, B et A par l'homothétie de centre C et de rapport -2 :

1- Justifie que $(AC) \perp (BC)$.
2- Déduis-en que la $(KI) \perp (LI)$.

8- CONNAÎTRE LA PROPRIÉTÉ RELATIVE À LA CONSERVATION DU MILIEU D'UN SEGMENT

ACTIVITÉ 12

Soit h l'homothétie de centre O et de rapport k.
Soit [AB] un segment et I son milieu.

a) Justifie que $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.
b) Démontre que $\overrightarrow{I'A'} + \overrightarrow{I'B'} = \vec{0}$, puis conclus.

Je fais le point de l'activité

Toute homothétie conserve **le milieu d'un segment.**

J'évalue mes acquis

On construit le milieu A d'un segment [MN].
Soit B, P et Q les images respectives des points A, M et N par une homothétie.
Indique le milieu du segment [PQ]. Justifie ta réponse.

9- CONNAÎTRE LA PROPRIÉTÉ RELATIVE À LA CONSERVATION DES ANGLES ORIENTÉS

ACTIVITÉ 13

Soit h une homothétie de rapport k et $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$ un angle orienté. Soit O un point d'un plan. On considère les points A et B tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$.

A' et B' designent les images respectives des points A et B par h.

1- Justifie que : $\widehat{(k\overrightarrow{AB}, k\overrightarrow{AC})} = \widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}$.

2- Déduis-en que : $\widehat{(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})} = \widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}$.

3- Énonce la propriété établie.

Je fais le point de l'activité

Toute homothétie conserve **les angles orientés.**

J'évalue mes acquis

EFG est un triangle. U et V sont les images respectives de F et G par l'homothétie de E et de rapport 2.
Cite les angles orientés de EFG égaux à ceux de UVE.

10- CARACTÉRISATION D'UNE HOMOTHÉTIE

a) Déterminer une homothétie caractérisée par son centre, un point et son image (1ère partie)

ACTIVITÉ 14

Soit trois points O, B et C deux à deux distincts et alignés.

1- Justifie qu'il existe un nombre réel k différent de 1 tel que $\overrightarrow{OC} = k\overrightarrow{OB}$.

2- Justifie qu'il existe une seule homothétie de centre O et transformant B en C.

Je fais le point de l'activité

Soit trois points O, B et C, deux à deux distincts et alignés. Il existe une unique homothétie de centre O qui transforme B en C.

J'évalue mes acquis

R est un point de la droite (EF) tel que : $\overrightarrow{ER} = \frac{5}{3}\overrightarrow{EF}$.
Justifie qu'il existe une unique homothétie h qui transforme F en R dont on précisera son centre et son rapport.

b) Déterminer une homothétie caractérisée par son rapport, un point et son image

ACTIVITÉ 15

Soit A et B deux points distincts et k un nombre réel non nul et différent de 1.
L'objectif de cette cette activité est de démontrer l'existence et l'unité d'une homothétie h de rapport k qui applique A sur B.

1- Démontre qu'il existe un point unique O du plan tel que $\overrightarrow{BO} = \frac{k}{1-k}\overrightarrow{AB}$.

2- Conclus.

J'évalue mes acquis

Soit [RS] un segment et h l'homothétie de rapport 3.
Construis le centre O de h qui transforme R en S.

Je fais le point de l'activité

Il existe une homothétie et une seule de rapport k non nul et différent de 1 qui transforme le point A en B.

c) Déterminer une homothétie caractérisée par deux points et leurs images

ACTIVITÉ 16

Soit A, B, A' et B' des points tels que : A ≠ B et A' ≠ B'.
L'objectif est de rechercher une homothétie h telle que h(A) = A' et h(B) = A'.

1- Supposons qu'une telle homothétie h existe.
Démontre que dans ce cas que (AB) //(A'B') et $\overrightarrow{A'B'} \neq \overrightarrow{AB}$.

2- On considère le cas où A, B, A' et B' ne sont pas alignés où (AB) //(A'B') et $\overrightarrow{A'B'} \neq \overrightarrow{AB}$.

a) Démontre que les droites (AA') et (BB') sont sécantes en un point O.

b) Démontre qu'il existe une unique homothétie h de centre O qui applique A sur A'.

c) Justifie que h(B) = B'.

3- On considère le cas où A, B, A' et B'sont alignés où $\overrightarrow{A'B'} \neq \overrightarrow{AB}$.

a) Démontre qu'il existe une unique homothétie h de rapport $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$ qui applique A sur A'.

b) Justifie que $h(B) = B'$.

4- Enoncé la propriété établie.

Je fais le point de l'activité

Soit quatre points A, B, A' et B' tels que : $(AB) // (A'B')$ et $\overrightarrow{A'B'} \neq \overrightarrow{AB}$.
Il existe une homothétie et une seule qui transforme A en A' et B en B' .

J'évalue mes acquis

Soit deux segments [AB] et [CD] de supports parallèles tels que :

$AB = \frac{1}{2} CD = 2$.

1- Construis le centre de l'homothétie h qui transforme A en C et B en D.

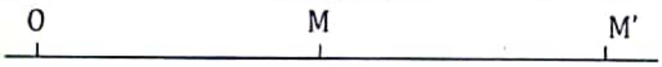
2- Détermine le rapport de h.

II- RÉSUMÉ DE COURS

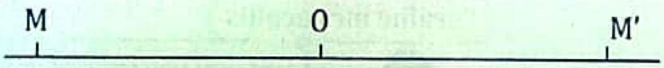
1- DÉFINITION D'UNE HOMOTHÉTIE, CONSÉQUENCES DE LA DÉFINITION

Soit O un point du plan et k un nombre réel non nul. On appelle homothétie de centre O et de rapport k, l'application h du plan dans lui-même qui, à tout point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.

* Si $k > 0$, les vecteurs $\overrightarrow{OM'}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont colinéaires et de même sens.



* Si $k < 0$, les vecteurs $\overrightarrow{OM'}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont colinéaires et de sens contraires.

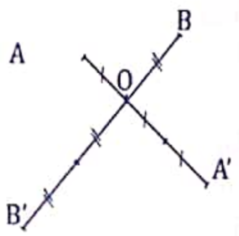


Vocabulaire-Notation

- On note l'homothétie h de centre O et de rapport k : $h(O ; k)$.
- Lorsqu'il n'y a pas de confusion, on notera cette homothétie par la lettre h.
- Pour indiquer que M' est l'image de M par h, on note : $M' = h(M)$ ou $M \overset{h}{\longmapsto} M'$.

Exemple

- h est l'homothétie de centre O et de rapport -2.



Toute homothétie de rapport 1 est une application identique du plan.
Toute homothétie de rapport -1 et de centre J est la symétrie centrale de centre J.

Propriété (Conséquence de la définition de l'homothétie)

Propriété

Le centre d'une homothétie, un point et son image sont alignés.

Démonstration

Propriété

Toute homothétie de rapport k :

- multiplie les longueurs par $|k|$;
- multiplie les aires par k^2.

2- Propriétés de l'homothétie

Vocabulaire

a) Propriété

Propriété

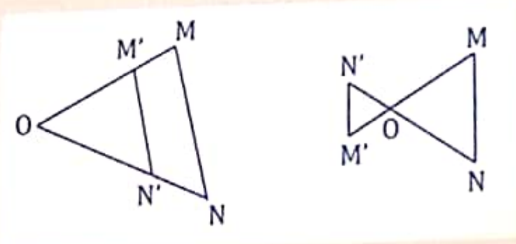
Une homothétie de rapport différent de 1 admet un seul point invariant qui est son centre.

Tout point est invariant par l'application identique du plan.

b) Propriété fondamentale de l'homothétie

Propriété fondamentale

Soit h une homothétie de rapport k :
M' et N', les images respectives par h de deux points quelconques M et N du plan.
On a : $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$.



c) Propriétés relatives aux images de figures simples par une homothétie

Propriété

Par une homothétie de rapport k :
- l'image d'une droite est une droite qui lui est parallèle ;
- l'image d'une demi-droite est une demi-droite ;
- l'image d'un segment de longueur ℓ est un segment de longueur $|k|\ell$;
- l'image du cercle de centre I et de rayon r est le cercle de centre I' et de rayon $|k|r$ où $I' = h(I)$.

Conséuence :

Toute homothétie transforme des points alignés en des points alignés.

d) Propriétés relatives à la conservation de l'alignement de points , du parallélisme, de l'orthogonalité, du milieu et des angles orientés par une homothétie

Propriété 1 (conservation de l'alignement et du parallélisme)

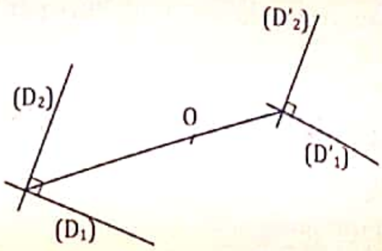
Propriété

Toute homothétie transforme deux droites parallèles en deux droites parallèles.

Propriété 2 (Conservation de l'orthogonalité par une homothétie)

Propriété

Toute homothétie transforme deux droites perpendiculaires en deux droites perpendiculaires.



Vocabulaire

Lorsque qu'une figure est l'image d'une autre figure par une homothétie, on parle aussi de **figures homothétiques** ou **de figures semblables.**

Propriété 4 (Conservation des angles orientés par une homothétie)

Propriété

Toute homothétie conserve les angles orientés.

REMARQUES

De cette propriété, découle que toute homothétie conserve les mesures des angles non orientés.

3- CARACTÉRISATION D'UNE HOMOTHÉTIE

Propriété (homothétie définie par son centre, un point et son image)

Propriété

Soit trois points alignés O, A et A' deux à deux distincts.
Il existe une homothétie et une seule de centre O qui transforme A en A'.

Propriété (homothétie définie par son rapport un point et son image)

Propriété

Soit un nombre réel k différent de 0 et 1 et deux points distints A et A'.
Il existe une homothétie et une seule de rapport k qui transforme A en A'.

Propriété (homothétie définie par deux points et leurs images)

Propriété

Soit des points A, B, A', B' tels que $(AB)//(A'B')$ et $\overrightarrow{A'B'} \neq \overrightarrow{AB}$.
Il existe une homothétie et une seule qui transforme A en A' et B en B'.

III- MÉTHODE

• DÉMONTRER QUE DES POINTS SONT ALIGNÉS

Pour démontrer que des points sont alignés :

• on peut démontrer qu'ils sont les images par une homothétie de points alignés ;

• on peut utiliser la propriété relative à l'alignement d'un point, de son image et du centre par une l'homothétie.

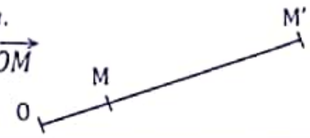
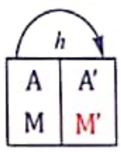
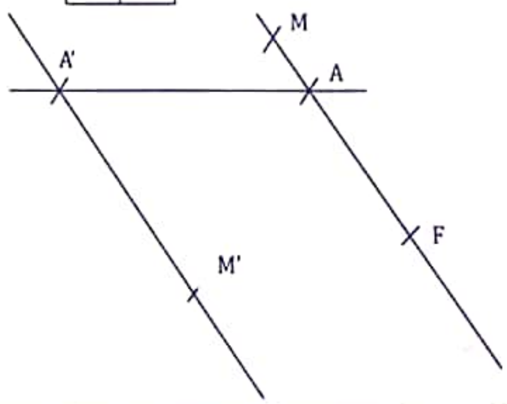
• Démontrer que deux droites sont perpendiculaires (resp. parallèles).

Pour démontrer que deux droites sont perpendiculaires (resp. parallèles) :

on peut démontrer qu'elles sont les images de deux droites perpendiculaires (resp. parallèles) par une homothétie.

• Construire l'image d'un point par une homothétie.

Pour construire l'image d'un point M par une homothétie définie par :

(1) son centre et son rapport, on peut appliquer la définition.	***Exemple :*** h étant l'homothétie de centre O et de rapport 3, on veut construire l'image d'un point M par h. On a $h(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{OM'} = 3\overrightarrow{OM}$ 
(2) par son rapport et, un point et son image, on peut utiliser la propriété fondamentale.	***Exemple :*** h étant l'homothétie de rapport -2 et qui transforme A en A', on veut construire l'image d'un point M par h. On a : La propriété fondamentale donne $\overrightarrow{A'M'} = -2\overrightarrow{AM}$  

<table>
<tr>
<td>(3) deux points et leurs images, on peut utiliser la propriété fondamentale.</td>
<td>

Exemple :

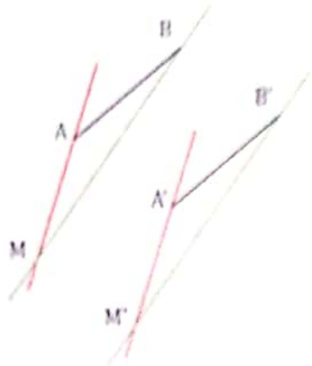
Soit A, B, A' et B' quatre points tels que $\overrightarrow{A'B'} \neq \overrightarrow{AB}$, h étant l'homothétie transformant A en A', et B en B'. On veut construire l'image d'un point M par h. On a :

$$\begin{array}{|c|c|} \hline A & A' \\ B & B' \\ M & M' \\ \hline \end{array} \quad (h)$$

D'après la propriété fondamentale
$(A'M')//(AM)$ et $(B'M')//(BM)$

Ainsi, pour construire M', on peut procéder comme suit :

- Construire la droite passant par A' et parallèle à la droite (AM);
- Construire la droite passant par B' et parallèle à la droite (BM);
- Marquer M' à l'intersection de ces deux droites.



M ∉ (AB)

</td>
</tr>
</table>

(4) par son centre O et, un point A et son image A', on peut ...

1[er] cas :
Si M n'appartient pas à la droite (OA), utiliser la propriété fondamentale et la propriété de l'alignement du centre de l'homothétie, d'un point et de son image.

Exemple : h étant l'homothétie de centre O transformant A en A', on veut construire l'image d'un point M distinct de O et A.

1[er] cas : M n'appartient pas à la droite (OA).
On désigne par M' l'image de M par h.
Les données peuvent se résumer dans le tableau suivant :

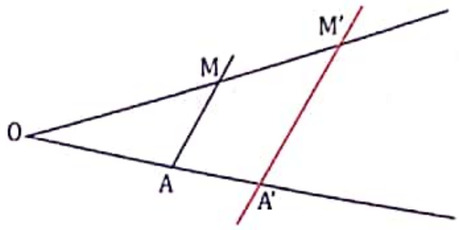
$\xrightarrow{h}$

O	O
A	A'
M	M'

On tire de ce tableau que $(AM)//(A'M')$ (*propriété fondamentale*) et O, M et M' sont alignés.

Ainsi, pour construire M', on peut procéder comme suit :

- Construire la droite passant par A' et parallèle à la droite (AM) ;
- Marquer M' à l'intersection de cette droite et de la droite (OM).



2[ème] cas :
Si M appartient à la droite (OA), utiliser un point intermédiaire n'appartenant pas à la droite (OA).

2[ème] cas : M appartient à la droite (OA).
Choisissons un point N n'appartenant pas à la droite (OA).
On construit le point N' image de N par h en suivant la même démarche que dans le premier cas.
En désignant par M' l'image de M par h, on a :

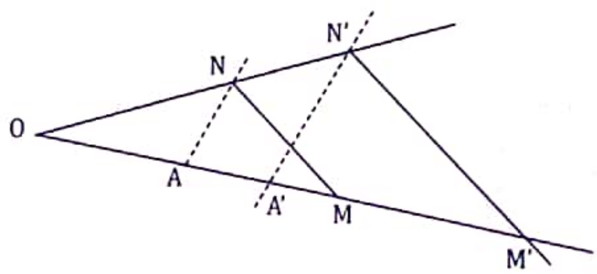
$\xrightarrow{h}$

N	N'
M	M'

On tire de ce tableau que $(N'M')//(NM)$ (*propriété fondamentale*) et O, M et M' sont alignés

M' est donc l'intersection de la droite (OM) et de la droite passant par N' et parallèle à la droite (NM).
En résumé, pour construire M', on peut procéder comme suit :

- Construire le point N' image par h du point N n'appartenant pas à (OA), en suivant la même démarche que dans le 1[er] cas.
- Construire la droite passant par N' et parallèle à la droite (NM) ;
- Marquer M' à l'intersection de cette droite et de la droite (OM).



(5) Quand, dans une figure, on reconnaît une configuration de Thalès c'est-à-dire deux droites sécantes coupées par deux droites parallèles, on peut introduire une homothétie qui, permet souvent de démontrer plus simplement.

IV- SAVOIR-FAIRE

Savoir-faire 1- Construire l'image d'un point par une homothétie en utilisant la définition.

ÉNONCÉ

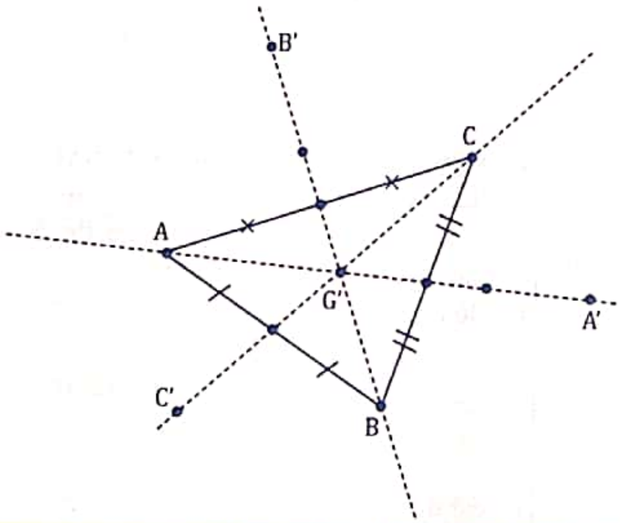
Soit ABC un triangle de centre de gravité G et h l'homothétie de centre G et de rapport -2.
Construis les points A', B' et C', images respectives des points A, B et C par h.

SOLUTION COMMENTÉE

Construction les points A' B' et C'.

- $h(A) = A' \Leftrightarrow \overrightarrow{GA'} = -2\overrightarrow{GA}$
- $h(B) = B' \Leftrightarrow \overrightarrow{GB'} = -2\overrightarrow{GB}$
- $h(C) = C' \Leftrightarrow \overrightarrow{GC'} = -2\overrightarrow{GC}$

A partir des égalités vectorielles ci-dessus, on construis les points A', B' et C'.



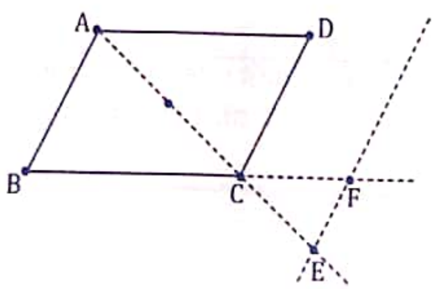
Savoir-faire 2 Démontrer que deux droites sont parallèles en utilisant une homothétie.

ÉNONCÉ

Soit $ABCD$ est un parallélogramme et h l'homothétie de centre C et de rapport $\frac{1}{2}$.
Soit E et F les images respectives de A et B par h.
Démontre que les droites (EF) et (DC) sont parallèles.

SOLUTION COMMENTÉE

On sait que $ABCD$ est un parallélogramme, donc les droites (AB) et (DC) sont parallèles entant que supports de deux cotés opposés d'un parallélogramme..
On a $h(A) = E$ et $h(B) = F$.
Donc $(AB) /\!/ (EF)$ d'après la propriété fondamentale des homothéties.
Or $(AB) /\!/ (DC)$, donc $(EF) /\!/ (DC)$.



Savoir-faire 3- Démontrer que des droites sont perpendiculaires en utilisant une homothétie.

Énoncé

Soit ADC est un triangle rectangle en C, h l'homothétie de centre A et de rapport 2.
Soit K et L les images respectives des points D et C par h.
Démontre que : $(AC) \perp (KL)$.

Solution commentée

On sait que ADC est un triangle rectangle en C, donc $(AC) \perp (DC)$.
On a : $h(C) = L$, $h(D) = K$, donc $h(CD) = (KL)$.
$h(AC) = (AC)$ car (AC) passe par le centre de h.
Comme les homothéties conservent l'orthogonalité on a : $(AC) \perp (KL)$.

Savoir-faire 4- Démontre qu'un point est le milieu d'un segment en utilisant une homothétie.

Énoncé

Sur la figure ci-contre :

- $EFGH$ est parllélogramme de centre O ;
- H est le milieu du segment $[AE]$;
- F est le milieu du segment $[BE]$.

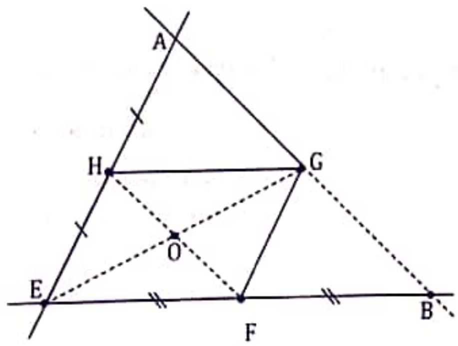
Démontre que G est le milieu du segment $[AB]$.

Solution commentée

Démontrons que G est le milieu du segment $[AB]$ en utilisant l'homothétie de centre E et de rapport 2.
On a :

- $\overrightarrow{EA} = 2\overrightarrow{EH}$, donc $h_{(E\,;\,2)}(H) = A$.
- $\overrightarrow{EG} = 2\overrightarrow{EO}$, donc $h_{(E\,;\,2)}(O) = G$.
- $\overrightarrow{EB} = 2\overrightarrow{EF}$, donc $h_{(E\,;\,2)}(F) = B$.

Or O est le milieu du segment $[HF]$, donc G est le milieu du segment $[AB]$ car les homothéties conservent le milieu d'un segment.



V- JE M'EXERCE

1- Exercices de fixation/ Application

Connaître la définition d'une homothétie

1 Réponds par vrai (V) ou par faux (F) à chacune des affirmations contenues dans le tableau ci-dessous. Récopie et complète.

N°	Affirmations	Réponses
1	Une homothétie de rapport positif agrandit les figures	
2	L'image d'un parallélogramme par une homothétie est un parallélogramme.	
3	Si A' est l'image de A par une homothétie de centre O et de rapport k; alors A est l'image de A' par l'homothétie de centre O et de rapport $-k$.	

2 Une égalité de la forme $\overrightarrow{HU} = -2\overrightarrow{HV}$ signifie que U est l'image de V par l'homothétie de centre H et de rapport -2.

Interpréte de même les égalités suivantes :

a) $\overrightarrow{KB} = -3\overrightarrow{KA}$; b) $\overrightarrow{CV} = 2\overrightarrow{CU}$; c) $\overrightarrow{JC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{JK}$;

d) $\overrightarrow{AM} = -3\overrightarrow{MG}$; e) $\overrightarrow{DK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DG}$; f) $\overrightarrow{OM} + 4\overrightarrow{MH} = \vec{0}$.

3 Exprime les phrases suivantes à l'aide d'une égalité vectorielle.

a) J est l'image de R par l'homothétie de centre K et de rapport -2.

b) L'homothétie de centre G et de rapport 3 transforme E en F.

c) P a pour image Q par l'homothétie de centre O et de rapport 6.

4 Soit la relation vectorielle suivante : $\overrightarrow{AC} = -5\overrightarrow{AB}$.

1- Justifie que le point B est l'image du point C par l'homothétie de centre A et de rapport $-\frac{1}{5}$.

2- Justifie que le point C est l'image du point A par l'homothétie de centre B et de rapport 6.

Construire l'image d'un point par une homothétie en utilisant la définition

5 A, B et C sont trois points distincts du plan. Soit h, l'homothétie de centre C et de rapport $\frac{2}{3}$.

Construis les points A' et B', images respectives des points A et B par l'homothétie h.

6 Place deux points distincts A et O.
Construis l'image du point A par l'homothétie de centre O et de rapport $-\frac{1}{2}$.

7 Soit ABC un triangle quelconque. D et E sont deux points tels que $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$.

Démontre que E est l'image de C par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{3}{2}$.

Démontrer que deux droites sont parallèles en utilisant une homothétie

8 A, B et O sont trois points distincts du plan. Soit h, l'homothétie de centre O et de rapports -3.
A' et B' sont les images respectives de A et B par h.
Démontre que les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèles.

Trouver le rapport d'une homothétie caractérisée par deux points et leurs images

9 Trois points A, B et C alignés dans cet ordre sont tels que $AB = 2$ et $BC = 3$.
Détermine, dans chacun des cas suivants, le rapport k de :

1- l'homothétie de centre A qui transforme B en C ;

2- l'homothétie de centre B qui transforme C en A ;

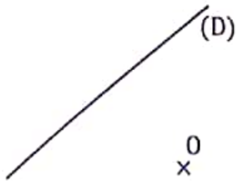
3- l'homothétie de centre C qui transforme A en B.

10

$EFGH$ est un quadrilatère tels que $(EF) \mathbin{/\!/} (GH)$, $EF = 30\ cm$ et $GH = 12\ cm$.
Détermine le rapport de l'homothétie h qui transforme E en H et F en G.

Construire l'image d'une droite, d'un segment, d'une demi-droite, d'un cercle par une homothétie

11 Soit l'homothétie h de centre O et de rapport $\frac{2}{3}$. Construis l'image de la droite (D) par h.



12

1) Construis un triangle ABC.
2) Construis l'image du segment $[BC]$ par l'homothétie de centre A et de rapport 2.
3) Construis l'image du segment $[BC]$ par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{2}{3}$.

13 Construis un cercle $(\mathscr{C})$ de centre O et de rayon 1,5 cm. Marque un point A à l'extérieur du cercle $(\mathscr{C})$. Construis l'image du cercle $(\mathscr{C})$ par l'homothétie de centre A et de rapport –2.

Connaître la propriété relative à la caractérisation d'une homothétie.

14 Réponds par vrai (V) ou par faux (F) à chacune des

N°	Affirmations	Réponses
1	Si O, A et B sont trois points deux à deux distincts alors il existe une homothétie et une seule de centre B qui transforme A en O.	
2	Si ABA'B' est un parallèlogramme alors il existe une homothétie h et une seule telle que $h(A) = A'$ et $h(B) = B'$.	
3	k étant un nombre réel différent de 0 et 1. Deux points distincts A et B étant donnés, Il existe une homothétie et une seule de rapport k qui applique B sur A.	

Construire l'image d'un point par une homothétie définie par l'une de ses caractéristiques

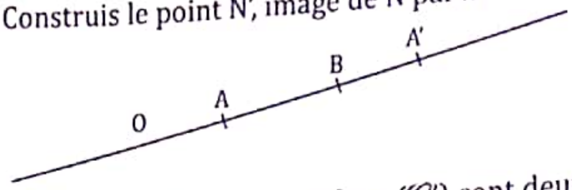
15 Trace un triangle KMP. On considère l'homothétie h' de rapport 3 et qui transforme M en P. Construis le point K' image de K par h'.

16 ABC est un triangle et I est un point du segment $[AB]$. Construis le point C', image de C par l'homothétie de centre I qui applique A sur B.

17 Marque trois points A, O et A' alignés dans cet ordre et deux à deux distincts. On considère l'homothétie h de centre O qui transforme un point A en A'. Marque un point P n'appartenant pas à la droite (OA). Construis le point P', image de M par h.

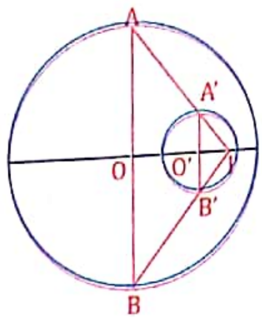
18 On donne les points O, A, N et A' alignés. Soit h l'homothétie de centre O qui transforme A en A'.

a) Marque un point n'appartenant pas à la droite (AB) et construis son image par h.
b) Construis le point N', image de N par h'.

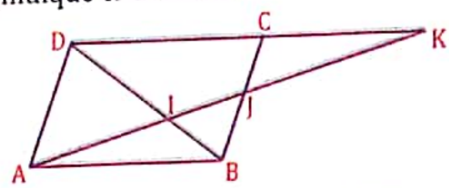


19 Sur la figure ci-dessous, $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ sont deux cercles intérieurs, [AB] et [A'B'] sont deux diamètres respectifs de $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ de supports parallèles.

a) Démontre que (AA') et (BB') se coupent sur la ligne des centres.
b) Dis s'il en est de même pour (AB') et (A'B). Justifie.



20 ABCD est un parallélogramme. On note h l'homothétie de centre I qui applique B sur D comme indiqué ci-dessous :



1-a) Détermine l'image de la droite (AB) par h.
   b) Déduis-en que $h(A) = K$.
2- a) Détermine l'image de la droite (BC) par h.
   b) Déduis-en que : $h(J) = A$.
3- Démontre que : $IA^2 = IJ \times IK$.

21 Soit ABC un triangle équilatéral de côté 5 cm. Le point G est le centre de gravité de ABC et A' le milieu du côté $[BC]$. On définit l'homothétie h de centre A qui transforme A' en G.

1- Détermine le rapport de h.
2- Construis l'image de ABC par h.
3- Détermine les mesures des côtés du triangle image obtenu à la question 2).

2- Exercices de renforcement / approfondissement

22 h est une homothétie de centre O et de rapport 2. Soient M et N deux points quelconques du plan et leurs images respectives M' et N' par h.

1- fais une figure.
2- Justifie que l'image de $[MN]$ est $[M'N']$.
3- Justifie que (MN) est parallèle à $(M'N')$.
4- Détermine l'image de la demi-droite $[MN)$ par h.

23 BAC est un triangle rectangle en A.
H est le pied de la hauteur issue de A. I et J sont les projetés orthogonaux de H sur les droites (AB) et (AC). (AH) et (IJ) se coupent en O. Par A, on mène la parallèle à (IJ), elle coupe (HI) en P et (HJ) en Q. On note h l'homothétie de centre H qui transforme J en Q.

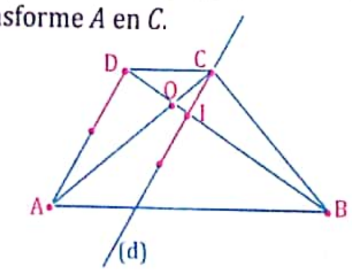
1- a) Détermine l'image de I par h.
 b) Détermine l'image de (IJ) par h.
2- a) Démontre que A est l'image de O par h. Détermine alors le rapport de l'homothétie h.
 b) Déduis de la consigne précédente que le points I et J sont respectivement les milieux des segments $[PH]$ et $[HQ]$.

24 Soit un parallélogramme $ABCD$ de centre I. On définit l'homothétie h de centre A et de rapport $\frac{3}{2}$

On pose: $B' = h(B)$ et $D' = h(D)$.

1- Justifie que les droites (BD) et (B'D') sont parallèles.
2- La droite (AC) coupe $(B'D')$ en K. Justifie que le point K est le milieu du segment $[B'D']$.
3- La droite $(B'D')$ coupe les droites (DC) et (BC) respectivement en E et F.
 a) Compare les vecteurs $\overrightarrow{B'F}$ et $\overrightarrow{ED'}$.
 b) Déduis-en que le point K est le milieu du segment [EF].

25 Sur la figure ci-dessous, $ABCD$ est un trapèze tel que $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{DC}$, O est le point d'intersection de ses diagonales. On note h l'homothétie de centre O qui transforme A en C.



1-a) Justifie que la droite (AB) a pour image par h la droite (DC).
 b) Justifie que le rapport de l'homothétie est $-\frac{1}{3}$.
2- La droite (Δ_1) parallèle à (AD) coupe (DB) en I.
 a) Justifie que (Δ_1) est l'image de (AD) par h.
 b) Déduis-en que $h(D) = I$.
3- On note (Δ_2) la droite passant par le point D et parallèle à (BC) qui coupe (AC) en J.
 a) En reprenant le raisonnement de la consigne précédente, démontre que $h(C) = J$.
 b) Déduis-en que $\overrightarrow{IS} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$.

26 ABC est un triangle rectangle en A. H est le pied de la hauteur issue de A. I et J sont les projetés orthogonaux de H sur les droites (AB) et (AC). (AH) et (IJ) se coupent en O.

1- Donne la nature du quadrilatère $AIHJ$.
2- La parallèle à (IJ) passant par A coupe (HI) en P et (HJ) en Q.

On note h l'homothétie de centre H qui transforme J en Q.
 a) Donne l'image de (IJ) par h.
 b) Détermine $h(I)$ et justifie que $h(O) = A$.
 c) Détermine le rapport de l'homothétie h.
 d) Déduis-en que I et J sont les milieux respectifs de (PH) et (HQ).

27 ABC est un triangle de centre de gravité G. On nomme C', B', A' les milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[AC]$et $[BC]$.
Démontre qu'il existe une homothétie h de centre G qui transforme ABC en $A'B'C'$.

28 $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ sont deux cercles de centre respectifs O et O' sécants en A et B. E et F sont les points diamétralement opposés à A sur $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$.

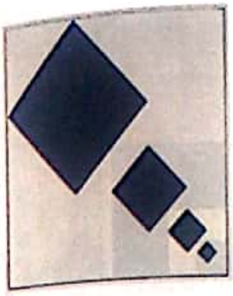
1- Détermine les images de O et O' par l'homothétie h de centre A et de rapport 2 .
2- Détermine le point qui a pour image B par h .
3- Déduis-en que les points E, B et F sont alignés.

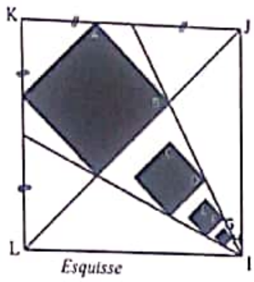
3- Situations d'évaluation

29 Le club artistique de ton lycée sollicite les élèves de seconde scientifique dont ta classe, pour aider à réaliser une reproduction d'une œuvre de Théo Van Doesburg réalisée à partir de carrés qui s'intitule Composition arithmétique.

L'examen de la photo ci-contre de l'œuvre révèle les informations ci-dessous, illustrées d'une esquisse codée :

- les côtés des carrés à l'intérieur du cadre carré IJKL, suivent deux directions fixes.
- AB = 2CD ; CD = 2EF ; et EF = 2GH.





Esquisse

1- Justifie qu'il existe une unique homothétie h qui transforme A en C et B en D.

2- Trouve le rapport et le centre de l'homothétie h.

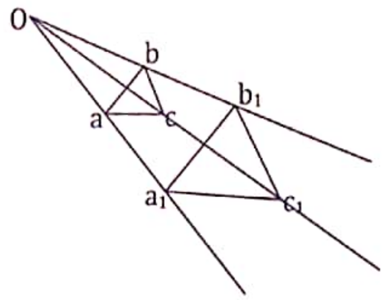
3- Recopie et complète :

Points	C	D	E	F
Images par h				

4) Construis la figure de l'œuvre de Théo Van Doesburg dans un cadre carré IJKL de côté 12 centimètres.

VI- RENDEZ-VOUS DES CURIEUX !

Le terme homothétie est dû au mathématicien français **Michel Chasles**. Il est composé de deux éléments d'origine grecque, le préfixe homo- pour « semblable » et thesis pour « position ». Il traduit la correspondance entre deux figures de même forme et de même orientation.



Le triangle $a_1b_1c_1$ est l'image du triangle abc par une homothétie de centre O.

ARTS PLASTIQUES ET TRANSFORMATIONS GEOMETRIQUES

Théo van Doesburg est une figure essentielle de l'art du XX^ème^ siècle. Originaire du Pays-Bas, il a débuté sa carrière en tant que chanteur, mais c'est surtout en tant que peintre qu'il se fît connaître en 1908, lors de sa première exposition.

Il est connu pour être le fondateur de plusieurs mouvements artistiques très influents de l'histoire de l'art, si bien que son nom reste indubitablement lié à De Stijl, au néo-plasticisme, à l'élémentarisme, à l'art abstrait ; mais aussi à l'art concret et au mouvement abstraction-création qu'il fonda en 1931, juste avant de décéder. Démontrant de fait, que ce sont également et peut-être avant tout des idées dont il est question dans l'art.

Peintre de formation, Théo van Doesburg n'a pas hésité à explorer toutes sortes de supports durant son parcours artistique tels que la peinture, le dessin, la sculpture, l'architecture, l'architecture d'intérieure, mais aussi le design de meubles, la publicité et l'art graphique. Certaines de ses compositions artistiques laissent transparaitre la place des transformations géométriques, les homothéties en particulier.

NB : Deux œuvres de l'artiste ont enrichi l'apprentissage et l'évaluation lors de l'étude de la notion d'homothétie dans ce manuel.

13 Étude de fonctions de référence

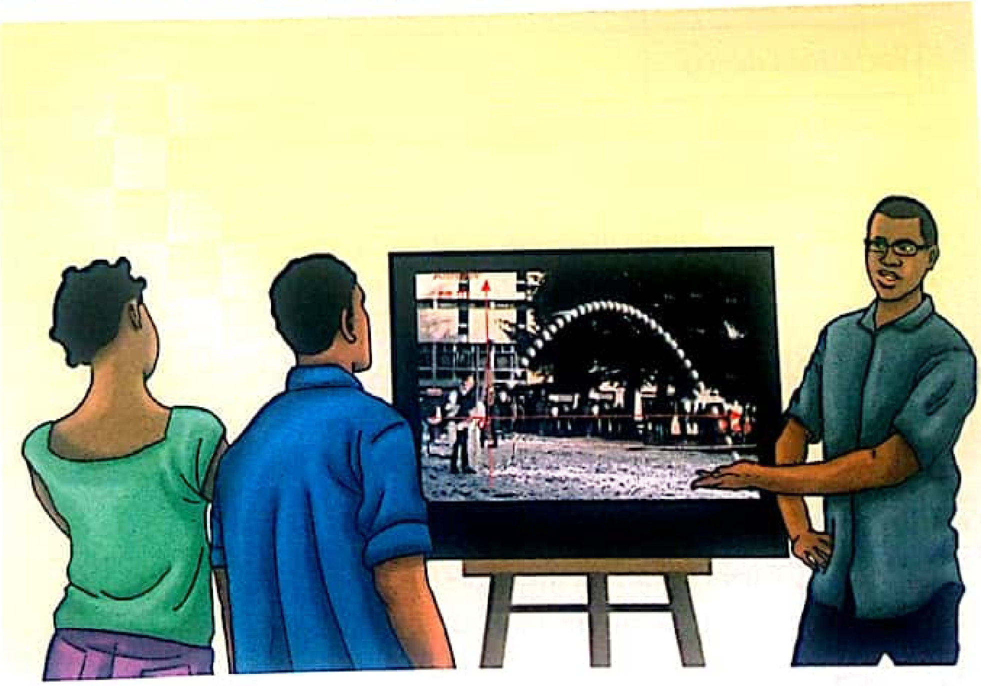
Notions essentielles :

- Fonction affine par intervalles
- Etude de fonctions de référence
- Utilisation des fonctions référence

SITUATION D'APPRENTISSAGE

A l'espace des jeux de la ville, un élève a assisté à un spectacle de lancer de balles. Chaque balle est propulsée par un souffleur à 1,10 m du sol.

A l'aide d'un appareil puissant, il en a réalisé une chronophotographie .



Ayant montré l'image à ses camarades de classe, ceux-ci s'interrogent sur l'équation de la trajectoire du ballon.

Pour les aider, le professeur de mathématiques définit un repère dans lequel il indique l'altitude du ballon, en mètres exprimée en fonction du temps t écoulé, en seconde, depuis son départ par : $f(t)=-4,9t^2+5,6t$.

Les élèves se disant avoir toutes les informations, désirent connaitre la hauteur maximale atteinte par le ballon et le temps au bout duquel le ballon a atteint le sol.

I- ACTIVITÉS DE DÉCOUVERTE

1- Identifier une fonction affine par intervalles à partir de son expression – Etudier les variations des fonctions de référence - Représenter une fonction affine par intervalles

Activité 1

Des élèves du lycée de Sinfra ont établi la formule suivante pour aider une entreprise à estimer la consommation journalière de sa chaudière à gaz.

$$\text{Formule : } \begin{cases} y = -0{,}25x + 3{,}5 & \text{si } x < 4 \\ y = -0{,}5x + 0{,}5 & \text{si } 4 \leq x \leq 9 \\ y = 5 & \text{si } x > 9 \end{cases}$$

où x est la température ambiante exprimée en degré Celsius (°C) et y la consommation journalière de gaz exprimée en kilogramme (kg).

Afin d'interpréter cette formule, ils vous invitent à les aider à répondre aux questions suivantes.

1-a) Précise le type de fonction qui coincide avec la consommation y sur chaque intervalle donné.

b) Si la température extérieure est de 6°C, donne l'expression de y à utiliser pour calculer la consommation journalière de gaz. Calcule cette valeur.

2-a) Appelons f cette fonction, détermine son ensemble de définition .

b) Calcule l'image par f des nombres réels : -3 ; 0 ; 4 ; 9 ; 10 ; 13.

3-a) Donne les variations de f en complétant par "constante", "strictement croissante" ou "strictement décroissante".

f est .... sur l'intervalle $]-\infty\,;4[$.

f est .... sur l'intervalle $[4\,;9]$.

f est .... sur l'intervalle $]9\,;+\infty[$.

b) Recopie et complète le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	4	9	$+\infty$
Variations de $f(x)$				

4-Représente graphiquement la fonction sur chacun des intervalles $]-\infty;4[$, $[4;9]$ et $]9;+\infty[$.

Je fais le point de l'activité

- On dit que la consommation journalière de gaz est une fonction affine par intervalles.
- On peut identifier une fonction affine par intervalles à partir de son expression qui est du type : $x \mapsto ax + b$ sur chaque intervalle considéré.
- Les sens de variation d'une fonction affine dépend du signe du coefficient a dans la formule.
- La représentation graphique d'une fonction affine par intervalles est une réunion de segments ou de demi-droites.

J'évalue mes acquis

Parmi les fonctions ci-dessous,

1- Indique celle qui est une fonction affine par intervalles ;

2- Donne ses variations ;

3- Représente-la dans un repère orthonormé (O, I, J).

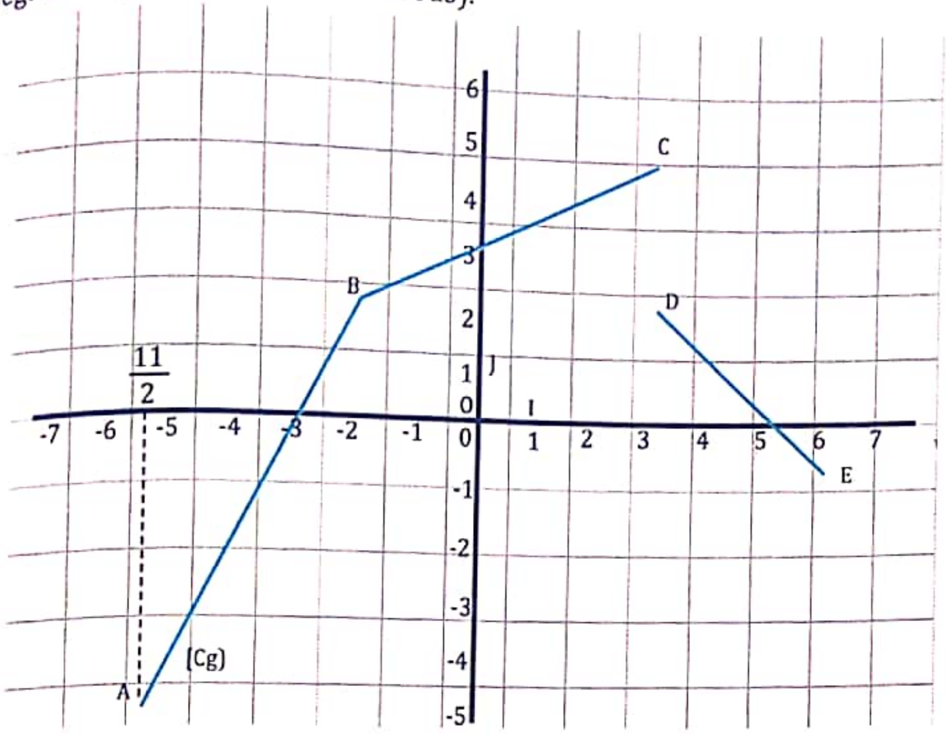
a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq -1 \\ 2x - 1 & \text{si } x \geq 9 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 2x - 5 & \text{si } -5 \leq x \leq 2 \\ -x + 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

2- Identifier une fonction affine par intervalles à partir de sa représentation graphique

ACTIVITÉ 2

La courbe représentative (C_g) d'une fonction g dans le plan muni d'un repère (O, I, J) est constituée de trois segments (voir graphique ci-dessous).



Cette activité vise à rechercher l'expression de g.

1- Complète le tableau ci-dessous :

Segments constituant la courbe (C_g)			
Intervalles des abscisses correspondant			

2 -a) Détermine graphiquement l'ordonnée à l'origine et le coefficient directeur de chacune des droites (AB), (BC) et (DE).

b) Donne l'équation de chacune des droites (AB), (BC) et (DE).

c) Déduis des consignes précédentes, l'expression de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

3- Justifie que la fonction g ainsi obtenue est une fonction affine par intervalles.

Je fais le point de l'activité

On peut identifier une fonction affine par intervalles à partir de sa représentation graphique.

J'évalue mes acquis

Choisis la (ou les) bonne(s) réponse(s) :

a) La représentation graphique de toute fonction affine définie une fonction affine par intervalles.

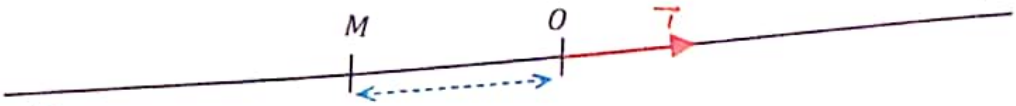
b) Deux demi-droites de même origine et sécantes à l'axe des ordonnées définies une fonction affine par intervalles.

c) Toute réunion de segments dans un repère définie une fonction affine par intervalles.

3- Représenter graphiquement la fonction valeur absolue : $x \mapsto |x|$

Activité 3

On considère un axe de repère $(O ; \vec{i})$. M est un point quelconque de l'axe, d'abscisse x.



On désigne par g la fonction qui à tout nombre réel x associe la distance OM.

1- a) Donne l'ensemble de définition de g.

b) Exprime $g(x)$ en fonction de x.

2- Démontre que la fonction g est une fonction affine par intervalles.

(On pourra écrire $g(x)$ sans le symbole de valeur absolue)

3- a) Donne le sens de variation de la fonction g sur chacun des intervalles $]-\infty ; 0]$ et $[0 ; +\infty[$.

b) Dresse le tableau de variations de la fonction g sur son ensemble de définition.

4- Justifie que la fonction g admet le nombre 0 pour minimum.

Détermine la valeur de x en laquelle ce minimum est atteint.

5- Construis la représentation graphique (C_g) de la fonction g dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

6- La droite (OJ) semble être un axe de symétrie de la courbe (C_g), vérifie-le.

Je fais le point de l'activité

- La fonction valeur absolue est un exemple de fonction affine par intervalles.
- Elle est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty ;0]$ et strictement croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

J'évalue mes acquis

Choisis la (ou les) réponses exactes parmi les affirmations suivantes :

a) L'image directe de l'ensemble $\mathbb{R}$ par la fonction valeur absolue est l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

b) La fonction valeur absolue atteint son minimum en 0 sur $\mathbb{R}$.

c) Tout nombre réel admet un antécédent par la fonction valeur absolue.

d) L'axe des ordonnées est un axe de symétrie à la représentation graphique de la fonction valeur absolue dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

4- Etudier le sens de variations, dresser le tableau de variations et représenter la fonction $x \longmapsto |ax + b|$

Activité 4

On considère la fonction h définie par : $h(x) = |-2x + 4|$.

1- a) Détermine l'ensemble de définition D_h de h.

b) Recopie et compléte le tableau ci-dessous :

x	....	0	......
Signe de $-2x + 4$			
Expression de $\lvert -2x + 4 \rvert$ sans le symbole "valeur absolue"	......	......	......

c) Justifie que h est une fonction affine par intervalles.

2- a) Donne le sens de variations de la fonction h.

b) Dresse le tableau de variations de la fonction h.

3- Construis la représentation graphique (C_h) de h dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; I; J)$.

Je fais le point de l'activité

Une fonction dont l'expression est de la forme $x \longmapsto |ax+b| (a \neq 0)$, est une fonction affine par intervalles.

J'évalue mes acquis

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = |2x - 3|$.
Construis la représentation graphique (C_g) de g dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J).

5- Identifier la fonction partie entière - Calculer la partie entière d'un nombre réel

Activité 5

1- Pour prévoir le nombre de bouteilles identiques entièrement pleines lorsqu'on y transvase une certaine quantité d'huile, un détaillant fait le calcul suivant :

$$\frac{\text{(Volume total d' huile)}}{\text{(Volume d' une bouteille)}}$$

Compléte le tableau ci-dessous.

Calcul et nombre affiché à la calculatrice	$\frac{4,5}{0,6} = 7,5$	$\frac{25}{1,6} = 15,625$	$\frac{20}{0,5} = 40$
Encadrement par deux entiers consécutifs	.... ≤ 7,5 <	.... ≤ 15,625 <	.... ≤ 40 < ....
Nombre de bouteilles identiques entièrement pleines	....	....	....

Le nombre de bouteilles entièrement pleines est le .... nombre entier qui est .... ou égal au nombre affiché.

2- Complète le tableau ci-dessous pour des nombres réels négatifs :

Nombre	-3,45	-52,9	-6
Encadrement par deux entiers consécutifs	.... ≤ -3,45 <	.... ≤ -32,6 <	.... ≤ -6 < ....
Le plus grand entier qui est plus petit ou égal au nombre donné est	....	....	....

Je fais le point de l'activité

Pour tout nombre réel x, on peut trouver un unique nombre entier n tel que que $n \leq x < n+1$.
C'est le plus grand nombre entier inférieur ou égal à x.
On admet ce résultat.
Le nombre entier n ainsi trouvé est appelé partie entière du nombre x.
Les nombres 7 ; 15 ; 40 ; -4 ; -53 et -6 sont respectivement les parties entières de 7,5 ; 15,625 ; 40 ; -3,45 ; -52,9 et -6.

J'évalue mes acquis

1- Donne la partie entière de chacun des nombres suivants : -8,29 ; -2,973 ; 89,99 ; 179,85.
2- Dans chacun des cas suivants, détermine l'ensemble des nombres réels qui ont pour partie entière : a) -2 ; b) 0 ; c) 7.

6- Représenter la fonction partie entière - Donner le sens de variations de la fonction partie entière sur un intervalle

ACTIVITÉ 6

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$
$x \longmapsto \mathrm{E}(x)$

C'est la fonction partie entière.

1- a) Détermine l'ensemble de définition D_f de f.
b) Recopie et compléte le tableau ci-dessous :

x appartient à l'intervalle	[-3 ; -2[	[-2 ; -1[	[-1 ; 0[	[0 ; 1[	[1 ; 2[	[2 ; 3[	[3 ; 4[
E(x) est égal à							

2- Donne le sens de variation de la fonction f sur chacun des intervalles ci-dessus.
3- Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), représente graphiquement f sur l'intervalle [-3 ; 4[.

Je fais le point de l'activité

- La fonction partie entière est un exemple de fonction affine par intervalles.
- La fonction partie entière est une fonction en escalier définie sur $\mathbb{R}$.

J'évalue mes acquis

Soit h la fonction définie sur [-2 ; 5] par : $h(x) = \mathrm{E}(x)$.
Construis la représentation graphique (C_h) de h dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

7- Etudier et représenter les fonctions référence : $x \longmapsto x^2$; $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$; $x \longmapsto \sqrt{x}$ et $x \longmapsto x^3$

Les fonctions déjà connues suivantes sont des fonctions dites de référence :
La fonction constante : $x \longmapsto c$ *où c est un nombre réel donné ;*
La fonction identité : $x \longmapsto x$;
La fonction valeur absolue : $x \longmapsto |x|$;
La fonction partie entière : $x \longmapsto \mathrm{E}(x)$.
Les quatre activités suivantes, présentent d'autres fonctions de référence.

7-1 Etudier et représenter la fonction carré

ACTIVITÉ 7

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$
$x \longmapsto x^2$

C'est la fonction carré.

1- Détermine son ensemble de définition Df.
2- Etude du sens de variation de la fonction f sur Df.
Soit u et v deux nombres réels tels que $u < v$.

a) Lorsque u et v appartiennent à l'intervalle $[0 ; +\infty[$, compare $f(u)$ et $f(v)$.
b) Interprète le résultat précédent.
c) Lorsque u et v appartiennent à l'intervalle $]-\infty ; 0]$, compare $f(u)$ et $f(v)$.
d) Interprète le résultat précédent.
3- Dresse le tableau de variation de la fonction f sur Df.
4- a) Justifie que la fonction f admet le nombre 0 pour minimum.
b) Donne la valeur de x en laquelle ce minimum est atteint.
5- a) Complète le tableau de valeurs ci-dessous.

x	-3	-2	-1	-0,5	0	1	0,5	1	2	3
$f(x)$										

b) On admet que la représentation graphique (C_f) de la fonction carré f est une ligne n'ayant aucune partie rectiligne et est continue.
Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), construis (C_f) sur l'intervalle $[-3 ; 3]$.
6- Le droite (OJ) semble être un axe de symétrie de la courbe (C_f), vérifie-le.

Je fais le point de l'activité

- La fonction carré est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty ; 0]$ et strictement croissante sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
- La courbe représentative de la fonction carré est une parabole d'axe la droite des ordonnées et de sommet l'origine O du repère dans un repère orthogonal (O, I, J).

REMARQUES

On retrouve des formes paraboliques dans la nature et dans notre milieu de vie, comme le montre les images ci-dessous :


Forme parabolique de dunes de sable


Antenne parabolique


Immeuble de La Grande Motte, France

J'évalue mes acquis

Soit f la fonction numérique d'une variable réelle telle que : $f(x) = x^2$.
Recopie et complète par vrai ou par faux chaque colonne du tableau ci-dessous :

Affirmations	Appréciations
f est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty ; 3]$	
f est strictement croissante sur l'intervalle $[-2 ; 4]$	
f est strictement croissante sur l'intervalle $[0 ; 10[$	

7-2 Etudier et représenter la fonction inverse

ACTIVITÉ 8

On considère la fonction $g : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{1}{x}.$$

C'est la fonction inverse.

1- Détermine son ensemble de définition D_g et écris-le résultat sous forme de réunion d'intervalles.

2- Etude du sens de variation de la fonction g sur D_g.

Soit u et v deux nombres réels tels que $u < v$.

a) Lorsque u et v appartiennent à l'intervalle $]0 ; +\infty[$, compare $g(u)$ et $g(v)$.

b) Interprète le résultat.

c) Lorsque u et v appartiennent à l'intervalle $]-\infty ; 0[$, compare $g(u)$ et $g(v)$.

d) Interprète le résultat.

3- Dresse le tableau de variation de la fonction g sur D_g.

4- a) Complète si possible chaque case vide du tableau ci-dessous :

x	-5	-4	-3	-2	-1	-0,5	-0,2	0	0,2	0,5	1	2	3	4	5
$g(x)$															

b) On admet que la représentation graphique (C_g) de la fonction inverse g est constituée de deux lignes disjointes n'ayant aucune partie rectiligne et correspondant respectivement aux intervalles $]-\infty ; 0[$ et $]0 ; +\infty[$.

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), construis (C_g) sur $[-5 ; 0[\cup]0 ; 5]$.

c) Les points de (C_g) semblent symétrique par rapport à O, vérifie-le.

Je fais le point de l'activité

- La fonction inverse est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty; 0[$ et est strictement décroissante sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
- La courbe représentative de la fonction inverse est une hyperbole de centre l'origine O du repère.

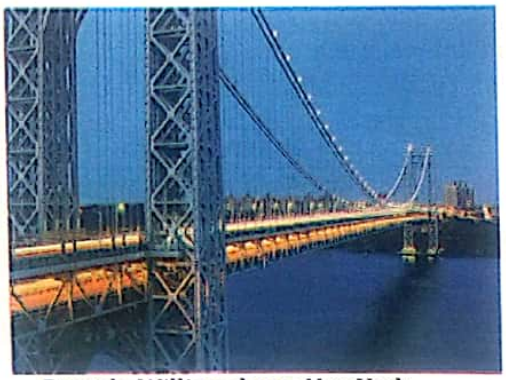
J'évalue mes acquis

Soit g la fonction numérique d'une variable réelle définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $g(x) = \frac{1}{x}$.

a) Dresse le tableau de variation de g sur $[-8 ; 8]$.

b) Représente graphiquement g sur $[-8 ; 0[$ et déduis sa représentation graphique sur $]0 ; 8]$.

Les formes hyperboliques sont souvent utilisées en architecture, comme le montre les images ci-dessous :



Pont de Williamsburg, NewYork

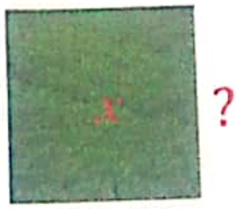
St Dominic's Athy 02

7-3 Etudier et représenter la fonction racine carrée

ACTIVITÉ 9

Une unité de longueur étant choisie, des élèves essaient de construire des carrés connaissant leurs aires. Ils veulent comprendre l'évolution du côté en fonction de l'aire.

Ils désignent par g la fonction qui à l'aire x, associe la mesure du côté .



1- a) Donne l'expression de $g(x)$ en fonction de x.

b) Donne son ensemble de définition D_g.

2- Etudie du sens de variation de la fonction g sur D_g.

3- Dresse le tableau de variation de la fonction g sur D_g.

4- a) Complète le tableau de valeurs ci-dessous :

g	0	0,25	1	2	3	4	6	9
Arrondi d'ordre 1 de $g(x)$								

b) On admet que la représentation graphique (C_g) de la fonction g est une ligne n'ayant aucune partie rectiligne.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), construis (C_g) sur l'intervalle [0 ; 9].

Je fais le point de l'activité

- L'aire du carré et la mesure de son côté varient dans le même sens.
- La fonction racine carrée est strictement croissante sur son ensemble de définition, l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

J'évalue mes acquis

Soit f la fonction numérique d'une variable réelle telle que : $f(x) = \sqrt{x}$.

a) Dresse le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

b) Représente f sur $[0 ; +\infty[$ dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

7-4 Etudier et représenter la fonction cube

ACTIVITÉ 10

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$

$x \longmapsto x^3$

C'est la fonction cube.

1- Détermine l'ensemble de définition de f.

2- Etude des variations de f.

Soit u et v deux nombres réels.

a) Justifie que : $v^3 - u^3 = (v - u)(v^2 + uv + u^2)$.

b) Justifie que : $v^2 + uv + u^2 = (v + \frac{u}{2})^2 + \frac{3}{4}u^2$.

c) On suppose que : $u < v$.

Justifie que : $f(u) < f(v)$.

d) Déduis de ce qui précède le sens de variation de f.

e) Dresse le tableau de variation de f.

3- Représentation graphique de f.

Le plan est rapporté à un repère (O, I, J).

On désigne par (Cf) la représentation graphique de f.

a) Soit $M(x ; y)$un point du plan d'image $M'(x' ; y')$ par la symétrie centrale de centre O.

Justifie que : $x' = -x$ et $y' = -y$.

b) Déduis de ce qui précède que M appartient à (Cf) si et seulement si M' appartient à (Cf).

c) Interprète le résultat précédent.

d) Construis (Cf) sur une fenêtre de ton choix.

Je fais le point de l'activité

- La fonction cube est strictement croissant sur $\mathbb{R}$.
- Dans le plan rapporté à un repère, l'origine du repère est centre de symétrie de la courbe représentative de la fonction cube.

J'évalue mes acquis

On considère la fonction h de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $h(x) = x^3$.

1- Justifie que : $h(\sqrt{2}) < h(3\sqrt{5})$.

2- Le point A(3 ; 27) appartient à la représentation graphique (C) de f dans le plan rapporte à un repère (O, I, J).
Justifie que le point B(-3 ; -27) appartient à (C).

3- Construis la courbe (C) de h sur l'intervalle [-2 ; 2].

8- Utiliser les fonctions de reférence pour étudier les fonctions du type :

$x \longmapsto ax^2$ et $x \longmapsto \frac{a}{x}$ avec $a \in \mathbb{R}^*$

8-1 Etude de la fonction $x \longmapsto ax^2$ avec $a \neq 0$

ACTIVITÉ 11

On considère la fonction h définie par $h : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$

$x \longmapsto ax^2$, avec $a \in \mathbb{R}^*$

1- Détermine l'ensemble de définition D_h de h .

2- On suppose $a > 0$

a) Soit u et v deux nombres réels tels que $u < v$. Complète le tableau ci-dessous après justifications :

	u et v appartiennent à l'intervalle $]-\infty ; 0]$	u et v appartiennent à l'intervalle $[0 ; +\infty[$
Comparaison de u^2 et v^2		
Comparaison de au^2 et av^2		

b) Interprète les résultats du tableau ci-dessus.

c) Dresse le tableau de variations de h sur D_h .

3- On suppose $a < 0$: Réponds aux mêmes questions que dans le cas précédent.

4- a)Complète les tableaux de valeurs ci-dessous :

Pour $a = 2$,

x	-3	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2	3
$k(x)$									

Pour $a = -2$,

x	-3	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2	3
$k(x)$									

b) Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), construis sur l'intervalle [-3 ; 3], (C_2) et (C_{-2}) courbes représentatives respectives de h pour $a = 2$ et pour $a = -2$.

5- Suivant le signe du coefficient a, compare l'allure, les sommets et les éléments de symétrie de la courbe de la fonction h à ceux de la fonction carrée.

Je fais le point de l'activité

L'étude de la fonction $x \longmapsto ax^2$ (avec $a \in \mathbb{R}^*$) peut se déduire de celle de la fonction $x \longmapsto x^2$.
Sa courbe représentative est une parabole de sommet l'origine O du repère et d'axe la droite des ordonnées dans le plan rapporté a un repère orthogonal (O, I, J).

J'évalue mes acquis

Parmi les fonctions suivantes, indique celles dont les courbes représentatives présentent la même allure et donne une allure de celles-ci.

a) $x \longmapsto \frac{\sqrt{2}}{3}x^2$; b) $ax \longmapsto -3x^2$ c) $x \longmapsto (2-\sqrt{2})x^2$; d) $x \longmapsto (3-\pi)x^2$.

8-2 Etude de la fonction $x \mapsto \frac{a}{x}$, avec $a \neq 0$

ACTIVITÉ 12

On considère la fonction h de $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ définie par : $h(x) = \frac{a}{x}$, où $a \in \mathbb{R}^*$.

1- Détermine l'ensemble de définition D_k de k .h

2- On suppose $a > 0$.

a) Soit u et v deux nombres réels tels que $u < v$. Complète le tableau ci-dessous après justifications :

	u et v appartiennent à l'intervalle $]-\infty ; 0]$	u et v appartiennent à l'intervalle $[0 ; +\infty[$
Comparaison de $\frac{1}{u}$ et $\frac{1}{u}$		
Comparaison de $\frac{a}{u}$ et $\frac{a}{v}$		

b) Interprète les résultats du tableau.

c) Dresse le tableau de variations de k sur D_k.

3- On suppose $a < 0$: Réponds aux mêmes questions que dans le cas précédent.

4- a) Complète si possible chacune des cases vides des tableaux de valeurs ci-dessous :

Pour a = 2,

x	-3	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2	3
$h(x)$									

Pour a = -2,

x	-3	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2	3
$h(x)$									

b) Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), construis sur l'intervalle [-5 ;5], (C_2) et (C_{-2}) courbes représentatives respectives de k pour $a = 2$ et pour $a = -2$.

5- Suivant le signe du coefficient a, compare l'allure et les éléments de symétrie de la courbe de la fonction k à ceux de la fonction inverse.

Je fais le point de l'activité

L'étude de la fonction $x \longmapsto \frac{a}{x}$ (avec $a \in \mathbb{R}^*$) peut se déduire de celle de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$. Sa courbe représentative est une hyperbole de centre l'origine O du repère.

J'évalue mes acquis

Parmi les fonctions suivantes, indique celles dont les courbes représentatives présentent la même allure.

a) $x \mapsto \frac{2}{5x}$; b) $x \mapsto \frac{\sqrt{6}}{x}$; c) $x \mapsto \frac{6}{(3-2\sqrt{5})x}$; d) $x \mapsto \frac{3{,}2-\pi}{11x}$.

II- RÉSUMÉ DE COURS

1- FONCTIONS AFFINES PAR INTERVALLES

1-1 Définition

DÉFINITION

- On appelle fonction affine par intervalles ou fonction affine par morceaux, toute fonction numérique f d'une variable réelle dont l'ensemble de définition est une réunion d'intervalles sur chacun desquels f coïncide avec une fonction affine.

REMARQUES

Lorsque sur chacun de ces intervalles f coïncide avec une fonction constante, on dit que f est une fonction en escalier.

Exemple :

•La fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

Pour $x \in]-\infty ; -2]$, $g(x) = 2x+7$
Pour $x \in [-2 ; 2]$, $g(x) = 3$
Pour $x \in [2 ; 8]$, $g(x) = -\frac{1}{2}$

est une fonction affine par intervalles.
Son ensemble de définition est $D_g =]-\infty ; -2] \cup [-2 ; 2] \cup [2 ; 8] =]-\infty ; 8]$.

1-2 Représentation graphique

La représentation graphique d'une fonction affine par intervalles est une réunion de segments ou de demi-droites.

2- FONCTION VALEUR ABSOLUE

2-1 Définition

DÉFINITION

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$, qui à tout nombre réel x associe sa valeur absolue $|x|$, est appelée fonction valeur absolue.
Lorsqu'on désigne par f, la fonction valeur absolue, on a pour tout x appartient à $\mathbb{R}$, $f(x) = |x|$.

2-2 Sens de variation

PROPRIÉTÉ

La fonction valeur absolue est croissante sur $[0 ; +\infty[$ et décroissante sur $]-\infty ; 0]$.

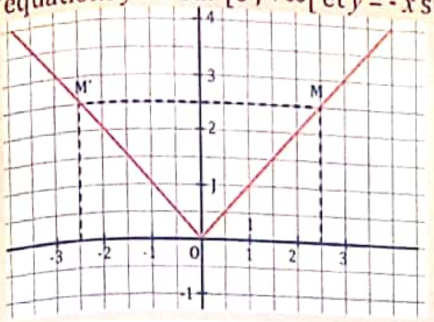
Tableau de variation

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\|x\|$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

2-3 Représentation graphique

PROPRIÉTÉ

Dans un repère orthogonal, la courbe représentative (C) de la fonction valeur absolue est la réunion des demi-droites d'équations $y = x$ sur $[0 ; +\infty[$ et $y = -x$ sur $]-\infty ; 0]$.



REMARQUES

- La fonction valeur absolue est une fonction affine par intervalles.

En effet pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\begin{cases} f(x) = -x \text{ si } x \leq 0 \\ f(x) = x \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$

3 - FONCTION DU TYPE $x \longmapsto |ax + b|$

Une fonction dont l'expression est de la forme $|ax + b|$ avec $a \neq 0$, est une fonction affine par intervalles.

Exemple : $f(x) = |2x + 5|$

PROPRIÉTÉ

Dans un repère orthogonal, la courbe représentative (C) de la fonction valeur absolue est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (OJ).

4- FONCTION PARTIE ENTIERE

4-1 Propriété et definition

- Pour tout nombre réel x, il existe un unique entier relatif n vérifiant : $n \leq x < n + 1$.

Ce nombre entier relatif n est appelé la partie entière du nombre réel x. Il est noté $E(x)$ ou $[x]$.

- On appelle fonction partie entière, la fonction définie sur $\mathbb{R}$, qui à tout nombre réel x associe sa partie entière.

REMARQUES

1- La partie entière d'un nombre réel x est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x.

2- Pour tout nombre réel x et pour tout entier relatif n, on a : $E(x) = n \Leftrightarrow x \in [n ; n+1[$.

Exemple :

$12 \leq 12{,}5 < 13$;	donc $E(12{,}5) = 12$	$0 \leq 0 < 1$;	donc $E(0) = 0$
$12 \leq 12{,}97 < 13$;	donc $E(12{,}97) = 12$	$-8 \leq -7{,}2 < -7$;	donc $E(-7{,}2) = -8$
$3 \leq \pi < 4$;	donc $E(\pi) = 3$	$-26 \leq -26 < -26$;	donc $E(-26) = -26$
$51 \leq 51 < 52$;	donc $E(51) = 51$	$-1 \leq \frac{-2}{3} < 0$;	donc $E(\frac{-2}{3}) = -1$

4-2 Représentation graphique de la fonction partie entière

Ainsi, la fonction partie entière est une fonction en escalier.

On a : $E(x) = -4$ pour $x \in [-4 ; -3[$;

$E(x) = -3$ pour $x \in [-3 ; -2[$;

$E(x) = -2$ pour $x \in [-2 ; -1[$;

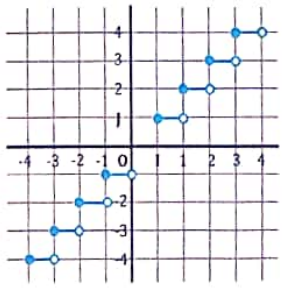
$E(x) = -1$ pour $x \in [-1 ; 0[$;

$E(x) = 0$ pour $x \in [0 ; 1[$.

$E(x) = 1$ pour $x \in [1;2[$;

$E(x) = 2$ pour $x \in [2;3[$;

$E(x) = 3$ pour $x \in [3;4[$;



Voici ci-contre la représentation
de la fonction partie entière sur l'intervalle [-4 ; 4[:

5- ETUDE ET REPRESENTATION DES FONCTIONS DE REFERENCE :

$x \longmapsto x^2$; $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$; $x \longmapsto \sqrt{x}$; $x \longmapsto x^3$; $x \longmapsto |ax+b|, a \in \mathbb{R}^*$

5-1 La fonction carré

a- Définition

La fonction carré est la fonction définie sur $\mathbb{R}$, qui à tout nombre réel x associe son carré, x^2.
Lorsqu'on désigne par f, la fonction carré, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.

b- Sens de variations et représentation graphique de la fonction carré

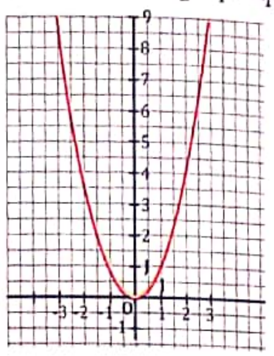
La fonction carré :
- est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty ;0]$;
- est strictement croissante l'intervalle $[0 ;+\infty[$.

Tableau de variation

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2	$\searrow$	0	$\nearrow$

Pour tout réel x, $x^2 \geq 0$ et $0^2 = 0$. Ainsi, la fonction carré admet 0 comme minimum.

Représentation graphique



Dans le plan muni du repère orthogonal (O, I, J), la courbe représentant de la fonction carré est une parabole d'axe la droite (OJ) et de sommet l'origine O du repère.

Le tableau ci - contre déduis du tableau ci-dessus donne les variations de la fonction carré sur l'intervalle [-3 ;3].

x	-3	0	3
x^2	$9 \searrow$	0	$\nearrow 9$

Voici ci-dessus, la représentation graphique de la fonction carré sur l'intervalle [-3 ;3].

5-2 La fonction inverse

a- Définition

La fonction inverse est la fonction définie sur $]-\infty ;0[\cup]0 ;+\infty[$, qui à tout nombre réel x associe son inverse, $\dfrac{1}{x}$.
Lorsqu'on désigne par f, la fonction inverse, on a pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

b- Sens de variations et représentation graphique de la fonction inverse

- La fonction inverse :
- est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty ;0[$;
- est strictement décroissante sur l'intervalle $]0 ;+\infty[$.

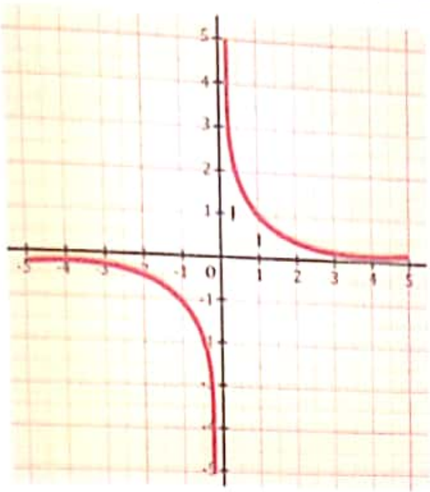
Tableau de variation sur $]-\infty ;0[\cup]0 ;+\infty[$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\dfrac{1}{x}$	$\searrow$	$\|\|$	$\searrow$

- Dans le plan muni du repère (O ; I ; J), la courbe représentative de la fonction inverse est une hyperbole de centre l'origine O du repère.
- Le tableau ci-dessous donne les variations de la fonction inverse sur [-5 ; 0[∪]0 ; 5].

x	-5	0	5
$\frac{1}{x}$	0.2 ↘	‖	↘ 0.2

Voici ci-dessous, la représentation graphique de la fonction inverse sur [-5 ;0[∪]0 ; 5].



5-3. La fonction racine carrée

a- Définition

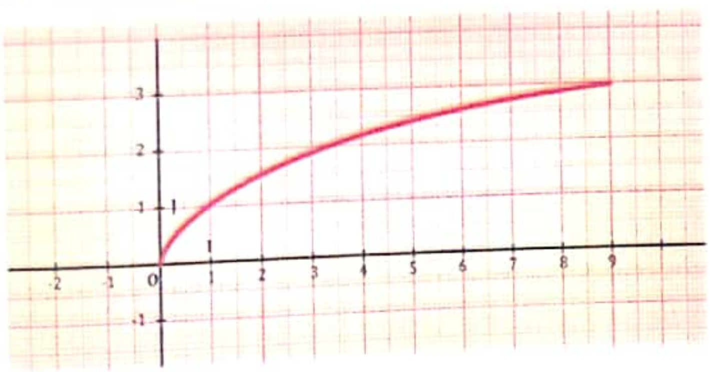
La fonction racine carrée est la fonction définie sur [0 ;+∞[, qui à tout nombre réel x associe sa racine carrée, $\sqrt{x}$.
Lorsqu'on désigne par f, la fonction racine carrée, on a pour tout $x \in [0 ; +\infty[$, $f(x) = \sqrt{x}$.

b- Sens de variations et représentation graphique de la fonction racine carrée

Tableau de variation sur [0 ; +∞[

x	0	+∞
$\sqrt{x}$	0 ↗	

Représentation graphique de la fonction racine carrée sur l'intervalle [0 ; 9] :



5-4 La fonction cube

a- Définition

La fonction cube est la fonction de ℝ vers ℝ qui à la fonction réel x, associe x^3.

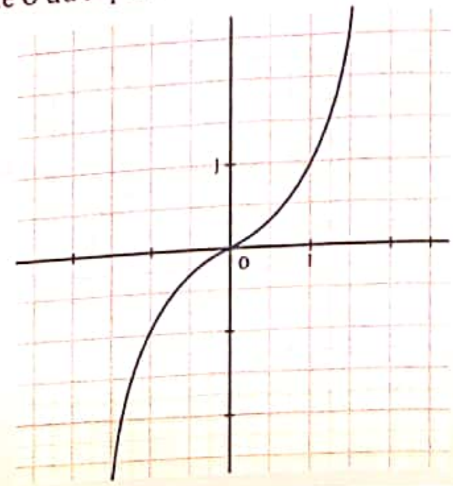
REMARQUES L'ensemble de définition de la fonction cube est ℝ.

b- Propriété

PROPRIÉTÉ 1

- La fonction cube est strictement croissante sur ℝ.
- Dans le plan rapporté à un repère (O, I, J), l'origine O du repère est le centre de symétriede la courbe représentative de f.

x	0 $\qquad$ $+\infty$
x^3	↗



III- MÉTHODE

1- Représenter graphiquement une fonction affine par intervalles

☞ *Pour représenter graphiquement une fonction affine par intervalles, on construit pour chaque fonction affine la composant, la droite la représentant et on ne garde que sa partie correspondante à l'intervalle associé.*

EXEMPLE :

On considère f, la fonction affine par intervalles définie par :

Pour $x \in [-4;-2[$, $f(x) = 2x + 5$

Pour $x \in [-2;1[$, $f(x) = -x - 1$

Pour $x \in [1;5[$, $f(x) = -2$

1- Détermine l'ensemble de définition Df de la fonction f.

2- Calcule $f(-3)$; $f(0)$; $f(4,3)$.

3- Construis la courbe représentative (Cf) de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

RÉSOLUTION :

1- Ensemble de définition Df :

$Df = [-4 ; -2[\cup [-2 ; 1[\cup [1 ; 5[= [-4 ; 5[$

2- Calcul des images de -3 et 0 par f.

$-3 \in [-4\,;-2[$; donc $f(-3) = 2 \times (-3) + 5 = -1$.

$0 \in [-2\,;1]$; donc $f(0) = -0 - 1 = -1$

$4{,}3 \in [1\,;5[$; donc $f(4{,}3) = -2$

3- Représentation graphique de f.

(Cf est obtenue à partir des droites (D_1), (D_2) et (D_3) d'équations respectives :
(D_1): $y = 2x + 5$, (D_2): $y = -x-1$ et (D_3): $y = -2$

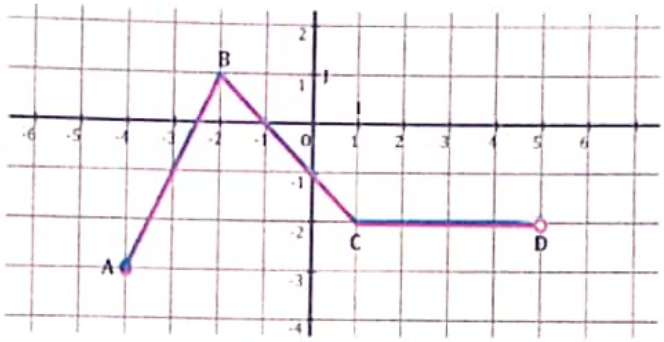
On construit les droites (D_1), (D_2) et (D_3) en déterminant les coordonnées de deux points de chacune d'elles. On peut choisir en particulier les extrémités des bornes des intervalles $[-4\,;-2]$, $[-2\,;1]$ et $[1\,;5[$.

(D_1)	A	B
x	-4	-2
y	-3	1

(D_2)	B	C
x	-2	1
y	1	-2

(D_3)	C	D
x	1	5
y	-2	-2

$(Cf) = [AB[\cup [BC[\cup [CD[$.



2- Déterminer l'expression d'une fonction affine par intervalles connaissant sa représentation graphique

☞ *Pour déterminer l'expression d'une fonction affine par intervalles f connaissant sa représentation graphique, on peut procéder comme suit :*

- identifier les segments et demi-droites composant la représentation graphique de f, ainsi que les intervalles respectifs correspondant sur l'axe des abscisses ;

- Déterminer pour chaque intervalle, l'expression de f sous la forme $f(x) = ax + b$.

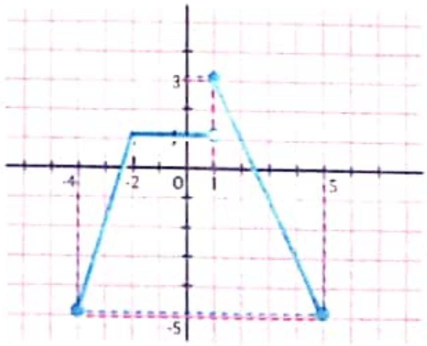
Exemple :

La courbe bleu ci-contre est la représentation graphique d'une fonction affine par intervalles f.

1- Donne l'ensemble de définition de f.

2- Donne le sens de variation de f.

3- Détermine l'expression de $f(x)$ suivant les valeurs de x.



Solution

1- Ensemble de Définition :

$Df = [-4\,;-2] \cup [-2\,;1[\cup [1\,;5] = [-4\,;5]$.

2- Sens de Variations de f :

Sur $[-4\,;-2]$, f est strictement croissante ;

Sur $[-2\,;1[$, f est constante ;

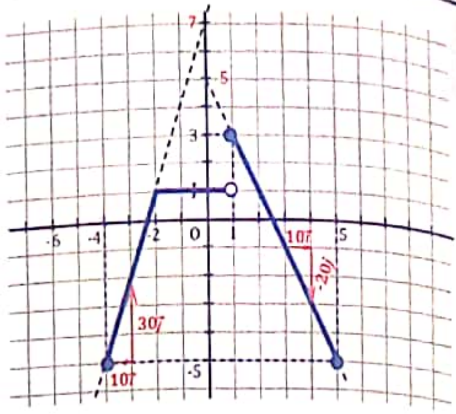
Sur $[1\,;5]$, f est strictement décroissante.

3- Expression de f

La courbe de f est composée de trois segments correspondant aux intervalles $[-4\,;-2]$, $[-2\,;1[$ et $[1\,;5]$.

On détermine sous la forme $y = ax + b$, une équation de chacune des droites, supports de ces segments *et demi-droites. Cela peut se faire par le calcul mais exposons ici la méthode graphique*

- Le segment correspondant à l'intervalle $[-4;-2]$ a pour support la droite de coefficient directeur 3 et d'ordonnée à l'origine 7.
Une équation de cette droite est $y = 3x + 7$.
Ainsi, pour $x \in [-4;-2]$, $f(x) = 3x + 7$.
- De façon analogue, on obtient pour $x \in [1;5]$, $f(x) = -2x + 5$.



CONCLUSION :

Voici l'expression de $f(x)$ suivant les valeurs de x :
Pour $x \in [-4;-2]$, $f(x) = 3x + 7$
Pour $x \in [-2;1[$, $f(x) = 1$
Pour $x \in [1;5]$, $f(x) = -2x + 5$

3- Expression d'une fonction sans valeur absolue

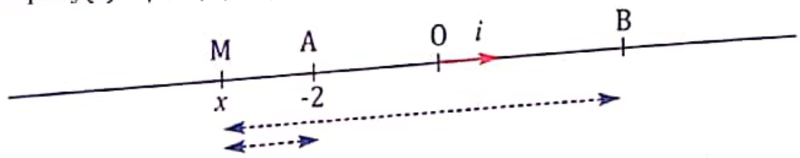
☞ *Pour écrire l'expression $f(x)$ d'une fonction f sans le symbole de valeur absolue, on peut procéder de la façon suivante :*

- Etudier le signe de chaque expression se trouvant dans le symbole de valeur absolue ;
- Suivant x, écrire chaque valeur absolue sans son symbole;
- Déduire l'expression de f(x) sans valeur absolue.
Généralement, le travail est présenté dans un tableau.

Exemple 1

Sur un axe de repère $(O; i)$, on considère les points A d'abscisse -2 et B d'abscisse 3.
M est un point quelconque de l'axe repéré par son abscisse x. On désigne par f, la fonction qui à tout nombre réel x associe la somme de distances AM+BM.

1- Vérifie que $f(x) = |x + 2| + |x - 3|$.
2- Ecris $f(x)$ sans le symbole de valeur absolue.
3- Je vérifie que $f(x) = |x+2|+|x-3|$.



Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) = AM + BM$
$= |x_M - x_A| + |x_M - x_B|$
$= |x - (-2)| + |x - 3|$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = |x + 2| + |x - 3|$.

2- J'écris $f(x)$ sans le symbole de valeur absolue.

Pour cela, il faut connaître le signe de $x + 2$ et celui de $x - 3$, ainsi que les expressions de $|x + 2|$ et $|x - 3|$ sans valeur absolue.

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$\lvert x+2\rvert$		$-x-2$	0	$x+2$		$x+2$	
$\lvert x-3\rvert$		$-x+3$		$-x+3$	0	$x-3$	
$\lvert x+2\rvert+\lvert x-3\rvert$		$-2x+1$	5	5	5	$2x-1$	

3- Expression d'une fonction sans valeur absolue

CONCLUSION :

Voici l'expression de $f(x)$ suivant les valeurs de x :

Pour $x \in [-\infty; -2]$, $f(x) = -2x + 1$

Pour $x \in [-2; 3]$, $f(x) = 5$

Pour $x \in [3; +\infty[$, $f(x) = 2x - 1$

4-Représenter graphiquement une fonction dont l'expression contient des valeurs absolues

☞ *Pour représenter graphiquement une fonction dont l'expression contient des valeurs absolues, on peut déterminer son expression sans valeur absolue après avoir indiqué son ensemble de définition.*

Exemple 2

On considère la fonction k de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $k(x) = 3 - 2x + |2x - 1|$ de représentation graphique (Ck) dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

a) Donne son ensemble de définition.

b) Démontre que k est une fonction affine par intervalles.

c) Construis la courbe (C_k).

SOLUTION

a) L'ensemble de définition Dk de la fonction k est $\mathbb{R}$.

b) Je démontre que k est une fonction affine par intervalles :

Pour cela, je transforme l'écriture de $k(x)$ afin d'obtenir une écriture sans valeur absolue.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+-\infty$
$\|2x - 1\|$	$-2x + 1$	0	$2x-1$
$3 - 2x + \|2x-1\|$	$4 - 4x$	2	2

On a donc :

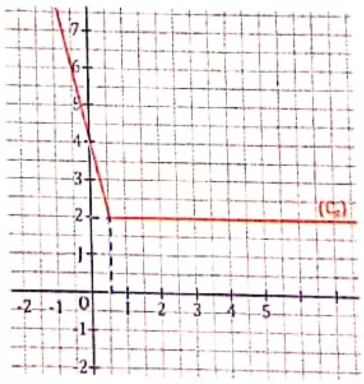
Pour $x \in \left[-\infty; \frac{1}{2}\right]$, $k(x) = 4 - 4x$

Pour $x \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right]$, $k(x) = 2$

Ainsi, k est une fonction affine par intervalles.

c)Je construis (C_k)

Voici en rouge la représentation graphique de k.



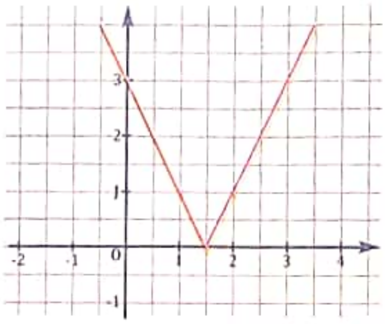
IV- SAVOIR-FAIRE

Savoir-faire 1- Représenter graphiquement la fonction $x \longmapsto |ax + b|$

ÉNONCÉ

Représente graphiquement la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = | 3 - 2x |$.

SOLUTION COMMENTÉE



Je représente graphiquement la fonction f.

Si $x \geq \frac{3}{2}$, $f(x) = -(3 - 2x)$ et si $x \leq \frac{3}{2}$, $f(x) = 3 - 2x$

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x \geq \frac{3}{2} \\ 3 - 2x & \text{si } x \leq \frac{3}{2} \end{cases}$$

Savoir-faire 2- Utiliser les fonctions de référence pour étudier les fonctions $x \longmapsto ax^2$ et $x \longmapsto \frac{a}{x}$

ÉNONCÉ

A partir des fonctions de référence $x \longmapsto x^2$ et $x \longmapsto \frac{1}{x}$, détermine les variations des fonctions f et g de [- 2; 2] vers $\mathbb{R}$ telles que $f(x) = -2x^2$ et $g(x) = \frac{2019}{x}$.

SOLUTION COMMENTÉE

- La fonction f est du type : $x \longmapsto ax^2$ avec $a = -2$, donc les fonctions f et $x \longmapsto x^2$ ont des sens de variation contraires sur chacun des intervalles [- 0; 2] et [0; 2].

  Ainsi la fonction f est strictement :

  - croissante sur l'intervalle [- 2; 0] car la fonction $x \longmapsto x^2$ est strictement décroissante sur cet intervalle.
  - décroissante sur l'intervalle [0; 2] car la fonction $x \longmapsto x^2$ est strictement croissante sur cet intervalle.

- La fonction g est du type $x \longmapsto \frac{a}{x}$ avec $a = 2019$

  Donc les fonctions g et x : $\longmapsto \frac{1}{x}$ ont les mêmes variations sur chacun des intervalles [- 2; 0 [et] 0; 2].

  Ainsi la fonction g est strictement :

  - décroissante sur l'intervalle [-2; 0 [car la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ l'est aussi.
  - décroissante sur l'intervalle]0 ; 2] car la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ l'est aussi.

- La fonction f est du type : $x \longmapsto ax^2$ avec $a = -2$, donc les fonctions f et $x \longmapsto x^2$ ont des sens de variations contraires sur chacun des intervalles $[-0\,;2]$ et $[0\,;2]$.

  Ainsi la fonction f est strictement :

  - croissante sur l'intervalle $[-2;0]$ car la fonction $x \longmapsto x^2$ est strictement décroissante sur cet intervalle.
  - décroissante sur l'intervalle $[0;2]$ car la fonction $x \longmapsto x^2$ est strictement croissante sur cet intervalle.

- La fonction g est du type $x \longmapsto \frac{a}{x}$ avec $a = 2019$

  Donc les fonctions g et $x \longmapsto \frac{1}{x}$ ont les mêmes variations sur chacun des intervalles $[-2;0[$ et $]0;2]$.

  Ainsi la fonction g est strictement :

  - décroissante sur l'intervalle $[-2;0[$ car la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ l'est aussi.
  - décroissante sur l'intervalle $]0\,;2]$ car la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ l'est aussi.

V- JE M'EXERCE

1- Exercices de fixation/ Application

Identifier/reconnaître une fonction affine par intervalles

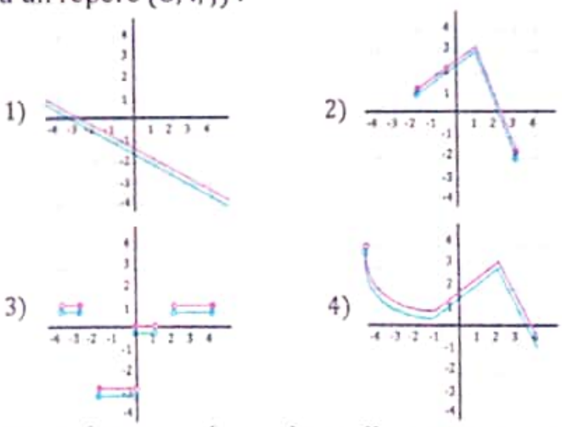
1 f, g, h et k sont des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ d'expressions explicites suivantes :

$$\begin{cases} f(x) = 2x + 5 & \text{si } x \in \,]-\infty\,;2[\\ f(x) = -x^2 - 1 & \text{si } x \in [2\,;4[\\ f(x) = 4x & \text{si } x \in [4\,;+\infty[\end{cases} \qquad \begin{cases} \text{Pour } x \in [-2\,;0[,\ g(x) = 4 - x \\ \text{Pour } x \in [0\,;2[,\ g(x) = 30x \\ \text{Pour } x \in [4\,;8],\ g(x) = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} h(x) = -2 & \text{si } x < 2[\\ h(x) = 0 & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \\ h(x) = 3 & \text{si } x > 3 \end{cases} \qquad k(x) = \frac{-2x+5}{3} \text{ si } x \leq 2 \text{ et } k(x) = -x + 1 \text{ si } x \geq 2$$

Note les numéros de celles qui sont des fonctions affines par intervalles.

2 Quatre correspondances f_1, f_2, f_3 et f_4, sont représentées graphiquement dans le plan muni d'un repère (O, I, J) :



Note les numéros de celles qui sont des fonctions affines

Représenter une fonction affine par intervalles

4 Dans un repère orthonormé (O, I, J), construis la représentation graphique de la fonction affine par intervalles f qui admet le tableau de variation ci-dessous :

x	-5		-2		0		3
$f(x)$	-1	↘	-3	↗	0	↘	-2

5 Dans un repère orthonormé (O, I, J), construis la représentation graphique de la fonction affine par intervalles g définie par :

Pour $x \in [-3 ; 0]$, $g(x) = 3 + 2x$
Pour $x \in [0 ; 2[$, $g(x) = -x + 3$
Pour $x \in [3 ; 6]$, $g(x) = -1$.

Etudier le sens de variations, dresser le tableau de variations, construire la courbe représentative de la fonction de référence $x \mapsto |x|$

6 On considère la fonction q de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $q(x)=|x|$ de représentation graphique (C_q) dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

1- Donne le sens de variation de q sur $\mathbb{R}$.
2- Dresse le tableau de variation de q.
3- Construis (C_q).

Représenter la fonction $x \mapsto |ax + b|$ avec $a \neq 0$

7 On considère la fonction h de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $h(x) = |2x + 2|$ de représentation graphique (C_h) dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

1- Donne l'ensemble de définition de h.
2- Ecris $h(x)$ sans le symbole de valeur absolue.
3- Dresse le tableau de variations de h sur l'intervalle [-3 ; 3].
4- Construis (C_h) sur l'intervalle [-3 ; 3].

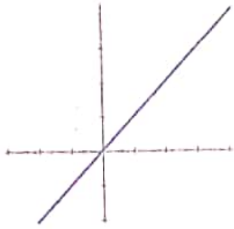
Reconnaitre les fonctions de référence

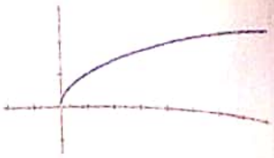
8 Soit quinze fonctions numériques d'une variable réelle d'expressions suivantes :

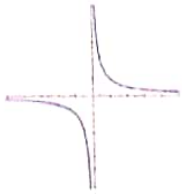
$g_1(x)=x^3+x^2$	$g_2(x)=x^3$	$g_3(x)=\sqrt{-x}$	$g_4(x)=E(x^2)$	$g_5(x)=x+1$
$g_6(x)=-x^2$	$g_7(x)=-3$	$g_8(x)=x$	$g_9(x)=\sqrt{x}$	$g_{10}(x)=2x$
$g_{11}(x)=\|x\|$	$g_{12}(2x)=\dfrac{2}{x}$	$g_{13}(x)=\dfrac{1}{x}$	$g_{14}(x)=\dfrac{1}{\|x\|}$	$g_{15}(x)=x^2$

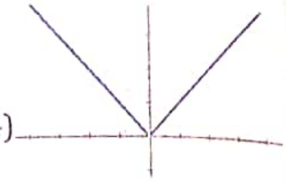
Relève les expressions des fonctions de références.

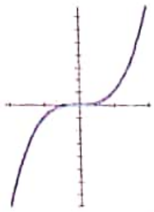
9 Voici des courbes représentatives de fonctions de référence. Ecris sur ta copie le nom de la courbe représentative et l'expression de la fonction de référence correspondante.

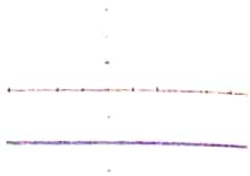
1) 

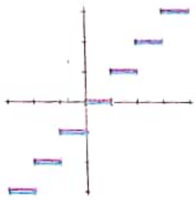
2) 

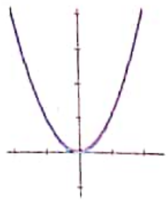
3) 

4) 

5) 

6) 

7) 

8) 

Identifier la partie entière d'un nombre réel, calculer la partie entière d'un nombre réel

10 Réponds par Vrai ou par Faux à chacune des affirmations contenues dans le tableau ci-dessous.

N°	Affirmations	Réponses
01	$E(x)$ est inférieur ou égal à x	
02	$E(x)$ est le plus grand des nombres entiers relatifs inférieurs ou égaux à x	
03	$E(8) = 9$	
04	La partie entière de $-43{,}8$ est -43	
05	$-10 \leq -9{,}25 < -9$, donc $E(-9{,}25) = -10$	
06	$-9{,}25 \in [-10 ; -9[$, donc $E(-9{,}25) = -10$	

11

Calcule: $E\left(\dfrac{1}{2}\right)$; $E\left(-\dfrac{42}{7}\right)$; $E(10^2)$; $E(-10^{-3})$.

Représenter la fonction de référence $x \mapsto E(x)$

12 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). On définit sur l'intervalle [-3 ; 2[, la fonction g telle que : $g(x) = E(x)$.

Représente graphiquement la fonction g.

Etudier le sens de variations, dresser le tableau de variations, représenter les fonctions élémentaires

$x \mapsto x^2$; $x \mapsto x^3$; $x \mapsto \frac{1}{x}$; $x \mapsto \sqrt{x}$

FONCTION CARRÉ

13 Soit f la fonction numérique d'une variable réelle telle que $f(x) = x^2$.

Recopie et complète par vrai ou par faux.

AFFIRMATION	REPONSE
f est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty ; 0]$	
f est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty ; 3]$	
f est strictement croissante sur l'intervalle $[-2 ; 4]$	
f est strictement croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$	
f est strictement décroissante sur l'intervalle $[-5 ; -1]$	

14 Soit g la fonction d'ensemble de définition l'intervalle $[-8 ; 8]$ telle que : $g(x) = x^2$.
Etudie le sens de variation de g sur $[-8 ; 8]$.

15 Soit h la fonction numérique d'une variable réelle telle que : $h(x) = x^2$.
Dresse le tableau de variation de h sur l'intervalle $[-4 ;-1]$.

FONCTION INVERSE

16 Soit la fonction $k : [-6 ; 6] \to \mathbb{R}$
$$x \mapsto \frac{1}{x}$$
Etudie le sens de variation de k.

17 Soit g la fonction numérique d'une variable réelle telle que : $g(x) = \frac{1}{x}$.

Dresse le tableau de variation de g sur l'intervalle $[-8 ; 0[$.

18 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
On définit sur $[-3 ; 0[\cup]0 ; 3]$, la fonction f telle que $f(x) = \frac{1}{x}$.
En t'aidant d'un tableau de variation et d'un tableau de valeurs, représente graphiquement la fonction f.

FONCTION RACINE CARRÉE

19 Soit h la fonction numérique d'une variable réelle telle que : $h(x) = \sqrt{x}$.
Dresse le tableau de variation de h sur l'intervalle $[0 ; 16]$.

20 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
On définit sur $[0 ; 4]$, la fonction g telle que : $g(x) = \sqrt{x}$.
En t'aidant d'un tableau de variation et d'un tableau de valeurs, représente graphiquement la fonction g.

Utiliser les fonctions de référence pour étudier les fonctions du type $x \mapsto ax^2$ et $x \mapsto \frac{a}{x}$ avec $a \in \mathbb{R}^*$

21 Soit g la fonction numérique définie sur l'intervalle $[-6 ; 6]$ par : $g(x) = \frac{2x^2}{9}$.

1-
  a) u et v étant deux nombres réels positifs tels que $u < v$, justifie que $g(u) < g(v)$. Interpréte le résultat.
  b) Démontre de même que g est strictement décroissante sur l'intervalle $[-6 ; 0]$.
2- Dresse le tableau de variation g.
3- A l'aide d'un tableau de valeurs, construis la courbe représentative de g dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

22 Soit h la fonction numérique de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que :
$h(x) = -\frac{5}{2x}$.

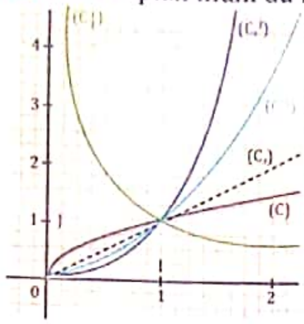
1- Donne l'ensemble de définition de h sous forme de réunion d'intervalles.
2- Démontre que :
a) h est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty ; 0[$;
b) h est strictement croissante sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.
3- Dresse le tableau de variation de h sur $[-8 ; 0[\cup]0 ; 8]$.
4- Complète si possible chaque case vide du tableau de valeurs ci-dessous :

x	-8	-5	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2	5	8
Arrondi d'ordre 1 de $h(x)$											

5- Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), construis la courbe représentative de h sur $[-8 ; 0[\cup]0 ; 8]$.

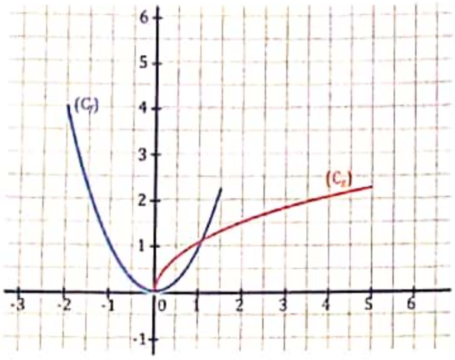
2- Exercices de renforcement/ Approfondissement

23 Dans le plan muni du repère orthogonal (O, I, J), sont représentées sur $\mathbb{R}$. des fonctions de référence. Soit x un nombre réel strictement positif. Suivant les valeurs de la variable x, range dans l'ordre croissant les nombres $\sqrt{x}, x, x^2$ et x^3.



On utilisera la représentation graphique ci-dessus.

24 Les fonctions f et g réprésentées ci-dessous ont pour expressions, celles d'une fonction de référence. Dresse le tableau de variation de chacune d'elles.



25 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). On considère les fonctions numériques f et g, définies sur [-2 ; 2] par : $f(x) = x|x|$ et $g(x) = x^3$.

1- Donne suivant les valeurs de x, l'expression de $f(x)$ sans valeur absolue.

2- Démontre que :

- f est strictement croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$;
- f est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty ; 0]$.

3-

a) Dresse le tableau de variation de f sur l'intervalle [-2 ; 2].

b) Dresse le tableau de variation de la fonction g sur l'intervalle [-2 ; 2].

4- Construis dans le même repère, les courbes représentatives des fonctions f et g.

On utilisera des tableaux de valeurs.

5- Par lecture graphique, compare $f(x)$ et $g(x)$ suivant les valeurs de x.

26 1- Démontre que pour tout nombre réel x non nul, on a : $\frac{x-1}{x} - \frac{x-2}{x} = \frac{1}{x}$.

2- Compare $\frac{x-1}{x}$ et $\frac{x-2}{x}$ suivant les valeurs de la variable réelle x.

27 Dis si les phrases suivantes sont-elles vraies ou fausses.

Si la phrase est vraie, justifie par une règle ; si elle est fausse, donne un contre-exemple.

1- La racine carrée d'une somme est la somme des racines carrées.

2- L'inverse d'un produit de nombres réels non nuls est le produit des inverses.

3- Le cube d'un quotient est le quotient des cubes.

4- Le carré d'un produit est le produit des carrés.

5- L'inverse d'une somme est la somme des inverses.

6- Le cube d'une différence est la différence des cubes.

Détermination de l'expression d'une fonction affine par intervalles

28 Soit h la fonction affine par intervalles qui admet le tableau de variation ci-dessous :

x	-2	0	2	5
$h(x)$	0 ↘	-2 ↗	3 ↘	-1

1- Détermine l'ensemble de définition D_h de h.

2- Représente graphiquement h dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

3- Suivant les valeurs de x, détermine l'expression de $h(x)$.

29 Dans le cadre d'un séminaire de formation, un entrepreneur à Yaoundé se rend à New-York.

Voulant consulter l'heure, il se rend compte de la chose suivante : lorsqu'il est 13h à Yaoundé, il est 7h à New-York.

1- Complète le tableau suivant :

Heure à Yaoundé	15h	19h	23h	00h	01h	05h	06h
Heure à New-York							

2- Désignons par f la fonction qui a l'heure t de Yaounde fait correspondre l'heure $f(t)$ de New-York.

a) Donne l'ensemble de définition D_f de la fonction f.

b) Détermine l'expression de $f(t)$ suivant les valeurs de t.

3- Représente graphiquement cette fonction f. Pour la graduation, on prendra 1cm pour 1 heure.

30 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Soit k la fonction numérique d'une variable réelle telle que :

$k(x) = x - 1 + |4 - 2x| - |x + 1|$.

1-
a) Précise l'ensemble de définition de k.
b) Ecris $k(x)$ sans valeur absolue.

2-
a) Donne le sens de variations de k.
b) Dresse le tableau de variation de k.

3- Représente graphiquement k.

31 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
1- Soit h la fonction numérique d'une variable réelle telle que :
$h(x) = |2 + 2x| - |1 - x|$.
a) Précise l'ensemble de définition de g.
b) Ecris $h(x)$ sans valeur absolue.
c) Représente graphiquement h.

Fonctions dont l'expression contient la fonction partie entière

32 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Pour tout nombre réel x, la différence $x - E(x)$ est appelé mantisse de x, $E(x)$ étant la partie entière de x.
On considère la fonction $m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$$x \mapsto x - E(x),$$
1- a) Donne l'ensemble de définition D_m de la fonction m.
b) Calcule la mantisse de chacun des nombres suivants : -2 ; -1 ; -1,5 ; -23,4 ; 6,8 ; 1,7 et 2.

2- a) Soit n un nombre entier relatif et x un nombre réel.
Démontre que $x \in [n ; n + 1[\Leftrightarrow m(x) = x - n$.
b) Déduis que m est une fonction affine par intervalles.

3- Donne les variations de m sur l'intervalle [-2 ; 2[.

4) Construis la représentation graphique ($\mathscr{C}_m$) de la fonction m sur l'intervalle [-2 ; 2[.

5) On considère l'équation $m(x) = 0$.
a) Par lecture graphique, donne les solutions qui appartiennent à l'intervalle [-2 ; 2[.
b) Résous dans $\mathbb{R}$ cette équation.

33 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
On considère la fonction g définie sur l'intervalle [-4 ; 4[par $g(x) = x.E(x)$, $E(x)$ étant la partie entière de x.

1- Calcule les images par g de chacun des nombres suivants : -4 ; -1,8 ; 0 ; 0,5 ; 2,4 ; 3 et 3,5.
2- Démontre que g est une fonction affine par intervalles.
3- Détermine le sens de variation de g sur chacun des intervalles [-4 ;-3[, [-3 ; -2[, [-2 ; -1[, [-1 ; 0[, [0 ; 1[, [1 ; 2[, [2 ; 3[et [3 ; 4[.
4- Représente graphiquement la fonction g sur [-4 ; 4[.

Raisonnement

34 Complète les pointillés en justifiant chaque étape du raisonnement. Soit f la fonction définie sur [-2 ; 5] par : $f(x) = (x - 5)^2 + 1$

1- On a : $-2 \leq a < b \leq 5$
Etape 1 : $-7 \leq a - 5 < b - 5 \leq$ .....
Etape 2 : $(a - 5)^2$ ....$(b - 5)^2 \geq 0$
Etape 3 : $(a - 5)^2 + 1$ ... $(b - 5)^2 + 1$

2- On peut conclure que la fonction f est ...

35 Dans chaque cas suivants, compare $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$ sans les calculer.

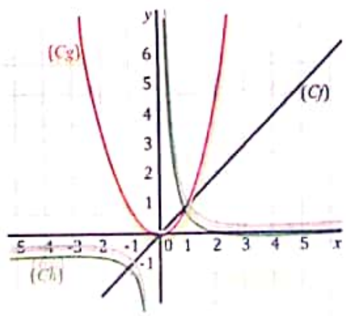
a) Si $a = 2$ et $b = 3$; b) Si $a = -5$ et $b = -4$;
c) Si $a = 2$ et $b = -1$; d) Si $a = \pi - 2$ et $b = -1$;
e) Si $a = -0{,}012$ et $b = -0{,}0012$.

36 Utilise le tableau de variation de la fonction inverse pour dire à quel intervalle appartient $\frac{1}{x}$ lorsque :

a) $x \in [1 ; 6]$; b) $x \in]0 ; 5]$;
c) $x \in \left]-2 ; \frac{1}{4}\right]$; d) $x > 2$;
e) $x < -3$.

37 On construit dans un repère orthonormé les courbes représentatives des trois fonctions suivantes :

a) f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = x$
b) g définie sur $\mathbb{R}$ par :
$g(x) = x^2$
c) h définie sur $\mathbb{R}^*$ par :
$h(x) = \frac{1}{x}$



A l'aide de ces courbes, dis si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifie ta réponse.

1- Si $x > 2$, alors $x^2 > 4$.

2- Si $x^2 > 4$, alors $x > 2$.

3- Si $0 < x < 1$, alors $x^2 < x$.

4- Si $x < -1$, alors $x < \frac{1}{x}$.

5- Si $-1 < x < 2$, alors $1 < x^2 < 4$.

6- Si $\frac{1}{x} > -\frac{1}{2}$, alors $x < -2$.

Fonctions, équations et inéquations

38

1- Construis la parabole d'équation $y = x^2$ dans un repère orthogonal.

2- Résous graphiquement dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 = 5$.

3- Résous algébriquement dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 = 5$.

4- Résous dans $\mathbb{R}$, en appuyant ton raisonnement sur un graphique, l'inéquation $x^2 \geq 5$.

39

1- Construis l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$ dans un repère orthogonal.

2- Résous graphiquement et algébriquement dans $\mathbb{R}$, l'équation $\frac{1}{x} = 2$.

3- Résous dans $\mathbb{R}$, en appuyant ton raisonnement sur un graphique, l'inéquation $\frac{1}{x} \geq 2$.

Aide-toi de la courbe représentative de la fonction inverse pour trouver les nombres réels tels que :

a) $1 \leq \frac{1}{x} \leq 6$; b) $-4 \leq \frac{1}{x} \leq -\frac{1}{3}$; c) $-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x} \leq 4$.

Etudier le sens de variation d'une fonction

40 On considère la fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$
$x \mapsto 2x^2 + 12x - 7$.

Notre objectif est d'étudier les variations de la fonction f.

1- Vérifie que pour tout nombre réel x, $f(x) = 2(x + 3)^2 - 25$.

2- En utilisant le sens de variations de la fonction carré, étudie celui de la fonction f sur les intervalles $]-\infty ;-3]$ et $[-3 ;+\infty[$.

41 On considère la fonction $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{2x-1}{x-1}$.

1- Détermine l'ensemble de définition D_g de la fonction g sous forme de réunion d'intervalles.

2- Vérifie que pour tout nombre réel x différent de 1, $g(x) = 2 + \frac{1}{x-1}$

3- Démontre que :

- g est strictement décroissante sur l'intervalle $]1 ; +\infty[$.
- g est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty ; 1[$.

3-Situations d'évaluation

42 A la suite des nombreuses plaintes de son père relativement au coût de sa facture d'eau, un élève s'est informé sur la facturation de la SODECI :

« Pour un client ayant souscrit pour un usage domestique, le tarif toutes taxes exclues est le suivant :

- Jusqu'à 9 m³, le client paie un forfait de 2 115 FCFA ;
- les cubages consommés après 9 m³ jusqu'au 18è m³, sont facturés à 235 FCFA le m³ ;
- les cubages consommés au-delà de 18 m³, sont facturés à 367,3 FCFA le m³.

Il sait que la précédente consommation familiale est de 30 m³ et que son père veut que le coût hors taxes de leur consommation soit 6 110 FCFA comme celui du voisin.

Il désire estimer la consommation de leur voisin.

On désigne par x le nombre de m³ consommés pour un usage domestique et par $f(x)$ le coût hors taxes de cette consommation.

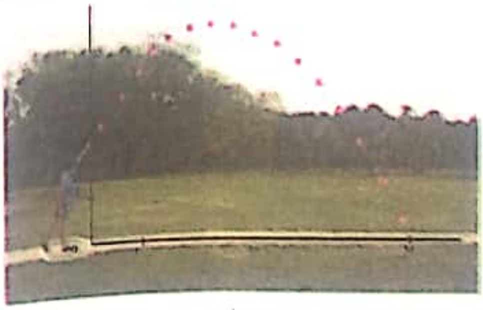
1- Vérifie que le coût hors taxes d'une consommation de 30 m³ est égal à 15 249 FCFA.

2- Justifie que $\begin{cases} f(x) = 2115 & \text{si } x \leq 9 \\ f(x) = 235x + 2115 & \text{si } 9 < x \leq 18 \\ f(x) = 367{,}3x + 4230 & \text{si } x > 18 \end{cases}$

3- Représente graphiquement le coût hors taxes $f(x)$ en fonction de nombre x de m³ consommés. Prendre en abscisse 0,5 cm pour 1 m³ et en ordonnées 1 cm pour 1000 FCFA.

4- Estime graphiquement puis par le calcul, le nombre de m³ dont le coût hors taxes est 6 110 FCFA.

Au cours d'EPS, les élèves d'une classe de seconde observaient leur camarade exécuter un essai de lancer de poids. Avec l'accord du professeur, l'un d'eux a réalisé la chronophotographie de l'essai grâce à une vidéo puissante. L'appareil a assimilé la trajectoire de la boule à une parabole d'équation $y = -0{,}32x^2 + 1{,}6x + 1{,}92$ dans le repère orthonormé (O, I, J) indiqué sur l'image.



La valeur de l'essai est égale à la distance OM où M est le point de chute du poids sur l'axe horizontal. Les élèves désirent déterminer la hauteur maximale atteinte par la boule et la valeur de l'essai.

On considère f la fonction qui à tout réel positif x associe $f(x) = -0{,}32x^2 + 1{,}6x + 1{,}92$.

1- Justifie que pour tout réel positif x, on a :

$$f(x) = -0{,}32\left[\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{49}{4}\right]$$

2- Démontre que :

- f est strictement décroissante sur l'intervalle $\left[\frac{5}{2}\,;+\infty\right[$;
- f est strictement croissante sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{5}{2}\right]$.

3- Dresse le tableau de variations de f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

4- Détermine la hauteur maximale atteinte par la boule et la valeur de l'essai.

VI- RENDEZ-VOUS DES CURIEUX !

Archimède de Syracuse, né à Syracuse vers 287 av. J-C et mort en cette même ville en 212 av. J-C , est un grand scientifique grec de Sicile (Grande –Grèce) de l'antiquité, physicien, mathématicien et ingénieur. Bien que peu de détails de sa vie soient connus, il est considéré comme l'un des principaux scientifiques de l'antiquité classique. Parmi ses domaines d'étude en physique, on peut citer l'hydrostatique, la mécanique statique et l'explication du principe du levier. Il est crédité de la conception de plusieurs outils innovants, comme la vie d'Archimède. Archimède est généralement considéré comme le plus grand mathématicien de l'antiquité et l'un des plus grands de tous les temps.

Archimède de Syracuse

Archimède
Domenico Fetti, 1620, Musée Alte Meister, Dresde (Allemagne)

Il a utilisé la méthode d'exhaustion pour calculer l'aire sous un arc de parabole avec la somme d'une série infinie et a donné un encadrement de Pi d'une remarquable précision.

Il a introduit la spirale qui porte son nom, des formules pour les volumes des surfaces de révolution et un système ingénieux pour l'expression de très grands nombres. Archimède est mort pendant le siège de Syracuse ou il a été tué par un soldat romain qui a agi malgré les ordres demandant de ne pas lui nuire.

source : wikipedia.org

Obtenir une parabole, une hyperbole ... !

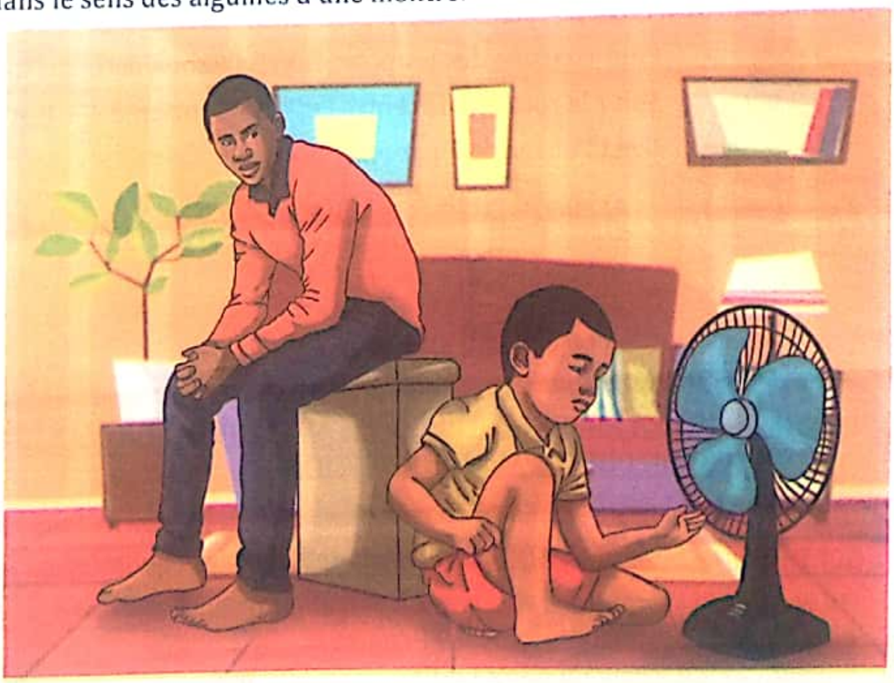
14 Rotations

Notions essentielles :

- Définition d'une rotation et conséquences
- Propriétés des rotations
- Caractérisation d'une rotation

SITUATION D'APPRENTISSAGE

Un élève de seconde observe son petit frère qui, du doigt, fait tourner légèrement l'hélice d'un ventilateur au repos. Ses trois pales sont des triangles rectangles identiques, régulièrement séparées et équilibrées. Curieux, il veut représenter l'hélice dans la position initiale de repos, après l'avoir tournée d'un angle de 30° dans le sens des aiguilles d'une montre.



Au forum des chateurs du net, il lui est proposé de se servir de la représentation ci-dessous pour caratériser une transformation du plan qui lui permet de résoudre son problème. Informée, toute sa classe s'engage avec lui à cette tâche.

I- ACTIVITÉS DE DÉCOUVERTE

1- CONNAÎTRE LA DÉFINITION D'UNE ROTATION – CONSTRUIRE L'IMAGE D'UN POINT PAR UNE ROTATION

ACTIVITÉ 1

Partant d'une position initiale, une bille B entame une oscillation au bout d'une ficelle fixée en O.

1- Ayant décrit un angle de 45° dans le sens contraire des aiguilles d'une montre :
   a) Identifie le mouvement de la bille.
   b) Précise son sens.
   c) Construis le point B' représentant la bille B dans sa nouvelle position.
   d) Complète pour obtenir des propositions correctes : OB'...OB ; $Mes(\widehat{\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OB'}})$ = ...

2- Soit M un point distinct de O et pris dans le plan du mouvement de B.
   a) Construis le point M' correspondant au point M si ce dernier suit le même mouvement que B.
   b) Ecris les conditions respectées par O, M et M'.

3- Donne la position du point O quand M est en M'.

Je fais le point de l'activité

En suivant le mouvement de rotation décrit, l'on obtient une correspondance du plan caractérisée par le point O et l'angle orienté $-\frac{\pi}{4}$.

O se retrouve en O quand M est en M'. On définit ainsi une application du plan dans lui-même appelée rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$. Cette rotation se note $r_{(O\,;\,\frac{\pi}{4})}$.

$M' = r_{(O\,;\,\frac{\pi}{4})}(M) \Leftrightarrow OM' = OM$ et $Mes(\widehat{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}}) = -\frac{\pi}{4}$ si $M \neq O$ et $M' = M$ si $M = O$.

J'évalue mes acquis

Pour chacune des propositions ci-dessous, écris sur ton cahier la bonne réponse.

Soit r la rotation de centre I et d'angle orienté $\frac{2\pi}{3}$. P et G deux points distints de I.

G est l'image de P par r signifie que :

a) $Mes(\widehat{\overrightarrow{IG};\overrightarrow{IP}}) = \frac{2\pi}{3}$ et $IG = IP$.

b) $Mes(\widehat{\overrightarrow{IP};\overrightarrow{IG}}) = \frac{2\pi}{3}$.

c) $Mes(\widehat{\overrightarrow{IP};\overrightarrow{IG}}) = \frac{2\pi}{3}$ et $IP = IG$.

2- CONNAÎTRE LA PROPRIÉTÉ RELATIVE AUX POINTS INVARIANTS PAR UNE ROTATION - TROUVER L'IMAGE D'UN POINT PAR UNE ROTATION

ACTIVITÉ 2

Sur la figure ci-dessous, ADB et ABE sont des triangles équilatéraux.

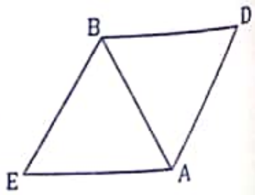
On considère la rotation r de centre A et d'angle orienté $\frac{\pi}{3}$.

1- Recopie et complète le tableau ci-contre :

$\xrightarrow{r}$	
B	.....
D	.....
A	.....

2- Examine s'il existe un point I différent de A tel que : $r(I) = I$. Démontre-le. Conclus.

3- Soit R la rotation de centre O et d'angle α non nul. Justifie que O est le seul point invariant par R.



Scanné avec CamScanner

Je fais le point de l'activité

Le seul point invariant par une rotation d'angle non nul est le centre de cette rotation.

J'évalue mes acquis

Soit r la rotation de centre O d'angle α non nul. Soit I un point du plan tel que $r(I) = I$. Justifie que I est égal à O.

3- CONNAÎTRE LA PROPRIÉTÉ FONDAMENTALE DE LA ROTATION

ACTIVITÉ 3

Soit O, A et B trois points deux à deux distincts du plan.

On considère la rotation r de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

1) Construis les points A' et B', images respectives de A et B par la rotation r.
2) A l'aide du rapporteur ou du compas :
   a) Compare A'B' et AB ;
   b) Vérifie avec des instruments de mésure $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{A'B'}}\right) = -\frac{\pi}{4}$.
   c) Formule une conclusion. On admettra ce résultat.

Je fais le point de l'activité

Soit r une rotation d'angle α tel que : $r(A) = A'$ et $r(B) = B'$.

On a : $A'B' = AB$ et $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{A'B'}}\right) = \alpha$.

J'évalue mes acquis

Pour chacune des propositions ci-dessous, recopie la bonne réponse.

Soit r la rotation de centre I et d'angle orienté $\frac{\pi}{4}$.

Si E' et F' sont les images respectives de E et F par r, alors on a :

- $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{EF}\,;\overrightarrow{E'F'}}\right) = \frac{\pi}{4}$ et $EF = E'F'$.
- $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{EE'}\,;\overrightarrow{FF'}}\right) = \frac{\pi}{4}$ et $EF = E'F'$.
- $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{E'F'}\,;\overrightarrow{EF}}\right) = \frac{\pi}{4}$ et $E'F' = EF$.

4- CONNAÎTRE LES PROPRIÉTÉS RELATIVES AUX IMAGES DE FIGURES SIMPLES PAR UNE ROTATION

a) L'image d'un cercle

ACTIVITÉ 4

Soit r la rotation de centre O et d'angle orienté α. On considère le cercle de centre A et de rayon R.

Soit M un point de $(\mathscr{C})$, M' l'image de M par r et A' l'image de A par r.

1-a) Justifie que AM' = AM.
   b) Déduis-en que M' appartient au cercle $(\mathscr{C}')$ de centre A' et de rayon R.
2- Soit M' un point de $(\mathscr{C}')$. Justifie qu'il existe un point M appartenant et à $(\mathscr{C})$ tel que $r(M) = M'$.
3- Donne une conclusion à cette activité.

Je fais le point de l'activité

- Toute rotation r transforme un cercle de centre A et de rayon R en un cercle de centre $r(A)$ et de rayon R.

J'évalue mes acquis

Soit r la rotation de centre K et d'angle α, C(I, 3) le cercle de centre I et de rayon 3 et J l'image I par r. Détermine l'imge de C(I, 3) par r.

b) Image d'une droite

Activité 5

Soit r une rotation de centre O et d'angle orienté α. on considère une droite (D).
Soit A et B deux points distincts de (D), A' et B' les images respectives de A et B par r.

1- Trace la droite (D) et la droite (A'B').

2-a) Soit M un point de (D) et M' l'image de M par r.

b) Construis M' pour $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

3-a) Vérifie avec les intruments que : $(\widehat{\overrightarrow{AM}\,;\,\overrightarrow{BM}}) = (\widehat{\overrightarrow{A'M'}\,;\,\overrightarrow{B'M'}})$ si M ≠ A et M ≠ B.

b) Démontre le résultat précédent.

c) Déduis-en que M' appartient à (A'B'). (Tu examineras le cas où M = A ou M = B)

4-a) Soit N' un point de (A'B').

b) Justifie qu'il existe un point N appatenant à (D) tel que r(N) = N'.

c)Donne une conclusion à cette activité.

Je fais le point de l'activité

- **Toute rotation transforme une droite en une droite.**

J'évalue mes acquis

Dans le tableau ci-dessous, r est la rotation de centre O et d'angle non nul.

Objet	A	B	O	(AB)	(AO)
Image par r	D	F			

Recopie et complète le tableau ci-dessus.

c) L'image d'un segment

Activité 6

Soit r la rotation de centre O et d'angle α.
On considère un segment [AB] et on note A' et B' les images respectives de A et B par r.

1- Construis A' et B' avec $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

2-a) Soit M un point de [AB] et M' l'image de M par r.

b) Construie M' avec $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

3- Justifie que M' appartient à [A'B'].

4- Soit N' un point de [A'B'].

a) Jutifie qu'il esxite un point N tel que r(N) = N'.

b) Justifie que N appartient à [AB].

5- Conclus.

Je fais le point de l'activité

Soit r une rotation, [AB] un segment.
L'image de [AB] par r est le segment [A'B'] où A' = r(A) et B' = r(B).

J'évalue mes acquis

[AB] un segment et O un point n'appartenant pas à (AB).

Construis l'image [A'B'] de [AB] par la relation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

5- CONNAÎTRE LES PROPRIÉTÉS DE CONSERVATION

a) Conservation du milieu

ACTIVITÉ 7

Soit r la rotation de centre O et d'angle α.

On considère un segment [AB] de milieu I.

Soit [A'B'] l'image de [AB] par r et I' l'image de I par r.

1-a) Construis I' avec $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

b) Avec le compas vérifie la position de I' sur [A'B'].

2- Démontre que I'est le milieu de [A'B'].

Je fais le point de l'activité

- La rotaion conserve le milieu.

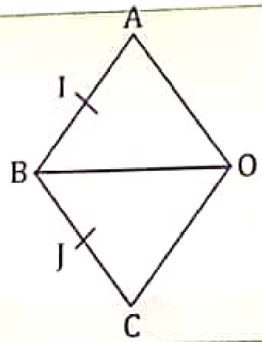
J'évalue mes acquis

Sur la figure ci-contre :

- OAB et OBC sont deux triangles équilatéraux de sens direct.
- I et J sont les milieux respectifs des segments [AB] et [BC].
- On considère la rotation r de centre O

et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Demontre que $r(I) = J$.



b) Conservation de l'orthogonalité

ACTIVITÉ 8

(D) et (Δ) sont deux droites perpendiculaires en A.

B et C deux points distincts de A appartenant respectivement à (D) et (Δ) . Soit r une rotation de centre O et d'angle α.

1-a) Justifie que l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{A'B'} ; \overrightarrow{A'C'}})$ est droit où $A' = r(A)$, $B' = r(B)$ et $C' = r(C)$.

2- Déduis-en que les droites (A'B') et (A'C') sont perpendiculaires.

3- Donne une conclusion à cette activité.

Je fais le point de l'activité

Toute rotation transforme deux droites perpendiculaires en deux droites perpendiculaires

J'évalue mes acquis

ABC est un triangle rectangle de sens direct. On désigne par A', B' et C' les images respectives des points A, B et C par une rotation r.

Justifie que le triangle A'B'C' est rectangle.

c) Conservation du parallélisme

ACTIVITÉ 9

Soit r la rotation de centre O et d'angle α.

(D) et (Δ) sont deux droites parallèles.

On désigne par (D') et (Δ') les images respectives de (D) et (Δ) par r.

Soit (D_1) une perpendiculaire commune à (D) et (Δ) et (D_1') son image par r.

1- Démontre que (D_1') est une perpendiculaire commune à (D') et (Δ').
2- Déduis-en que (D') et (Δ') sont parallèles.
3- Donne une conclusion à cette activité.

Je fais le point de l'activité

- Toute rotation transforme deux droites parallèles en deux droites parallèles.

J'évalue mes acquis

ABCD est un carré de sens direct.
Soit r la rotation de centre D et d'angle α.
On désigne par A', B' et C' les images respectives de A, B et C par r.
Justifie que (A'B') et (DC') sont parallèles.

ACTIVITÉ 10

Soit A, B, A' et B' quatre points deux à deux distincts tels que : AB = A'B' et $\overrightarrow{AA'} \neq \overrightarrow{BB'}$.
Soit (Δ) et (Δ') les médiatrices respectives de [AA'] et [BB'].
1- On suppose que (Δ) et (Δ') sont sécantes en un point O.
Démontre qu'il existe une unique rotation de centre O qui applique A sur A' et B sur B'.
2- On suppose que (Δ) et (Δ') sont confondues.
Démontre qu'il existe une unique rotation qui applique A sur A' et B sur B'.
2- Donne une conclusion à cette activité.

Je fais le point de l'activité

A, B, A' et B' sont quatre points tels que :
AB = A'B' et $\overrightarrow{AA'} \neq \overrightarrow{BB'}$.
(Δ) et (Δ') les médiatrices respectives des segments [AA'] et [BB'].
Il existe une seule rotation r qui applique A sur A' et B sur B' et d'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{A'B'}})$.

- Si (Δ) et (Δ') sont confondues, alors la rotation qui applique A sur A' et B sur B' a pour centre le point d'intersection O de (AB) et (A'B').
- Si (Δ) et (Δ') sont sécantes en O, alors la rotation qui applique A sur A' et B sur B' a pour centre O.

J'évalue mes acquis

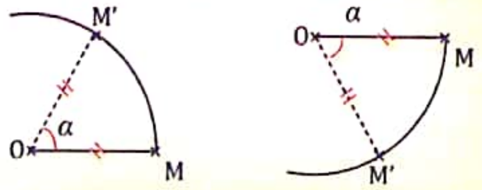
ABCD est un trapèze isocèle tel que : AB ≠ BC.
1- Justifie qu'il existe une seule rotation r qui applique A sur C et B sur D.
2- Détermine son angle orienté et construis son centre O.

II- RÉSUMÉ DE COURS

1- DÉFINITION D'UNE ROTATION, CONSÉQUENCES DE LA DÉFINITION

DÉFINITION

- Soit O un point et α un nombre réel appartenant à l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$. On appelle rotation de centre O et d'angle α, l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M associe le point M' tel que :
  - si M = O, alors M' = M.
  - si M ≠ O, alors OM' = OM et Mes$(\widehat{\overrightarrow{OM}\,;\,\overrightarrow{OM'}}) = \alpha$.



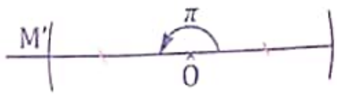
$\alpha > 0$ $\alpha < 0$

Notation :

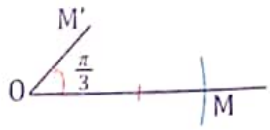
La rotation de centre O et d'angle α se note : $r(O\,;\,\alpha)$.

Exemple :

- M' est l'image de M par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
- La rotation de centre O et d'angle π est la symétrie centrale de centre O.



- Toute rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ est aussi appelée quart de tour direct.
- Toute rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ est aussi appelée quart de tour indirect.



- La rotation d'angle nulle est l'application identique.

Conséquences de la définition

Propriété 1

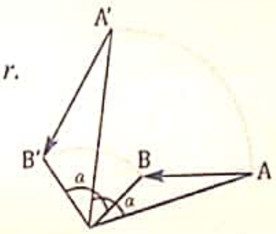
Le seul point invariant par une rotation d'un angle non nul est le centre de cette rotation.

2- PROPRIÉTÉS DE LA ROTATION

Propriété fondamentale

Soit r une rotation d'angle α, et A' et B' les images respectives par r. de deux points distincts A et B.

On a : $A'B' = AB$ et $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{A'B'}}) = \alpha$.

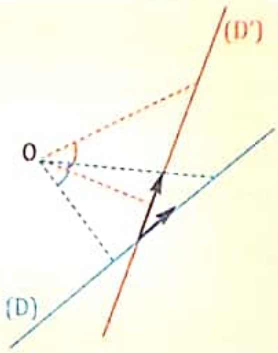


a) Images de figures simples par une rotation

Propriété 1

Toute rotation transforme :

- une droite en une droite,
- un segment en un segment de même longueur;
- une demi-droite en une demi-droite ;
- un cercle en un cercle de même rayon.



b) Conservation de l'alignement, du parallélisme, de l'orthogonalité, du milieu et des angles orientés par une rotation

Propriétés

Par une rotation,

- trois points alignés ont pour images trois points alignés ;
- un angle orienté a pour image un angle orienté qui lui est égal ;
- deux droites parallèles ont pour images deux droites parallèles ;
- deux droites perpendiculaires ont pour images deux droites perpendiculaires ;
- le milieu d'un segment a pour image le milieu du segment image.

3- CARACTÉRISATION D'UNE ROTATION

Propriété 1

Soit O un point, et A et A' deux points distincts de O.
Si OA'= OA, alors il existe une unique rotation de centre O et qui transforme A en A'.

PROPRIÉTÉ 2

Soit A, B, A' et B' quatre points deux à deux distincts tels que AB = A'B' et $\overrightarrow{AA'} \neq \overrightarrow{BB'}$.
Il existe une unique rotation qui transforme A en A' et B en B'.≠

REMARQUES

Soit (Δ) et (Δ') les médiatrices respectives de [AA'] et [BB'].

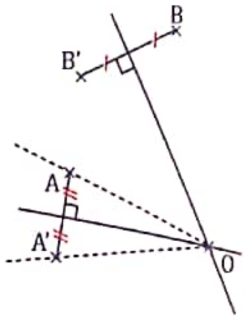
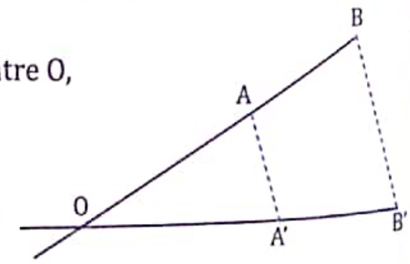
Si (Δ) et (Δ') sont sécantes en O , la rotation qui applique A sur A' et B sur B' est de centre O et d'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{A'B'}})$

Si (Δ) et (Δ')sont confondues, alors la rotation qui applique A sur A' et B sur B' a pour centre le point de rencontre de (AB) et (A'B') et pour angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{A'B'}})$.

III- MÉTHODE

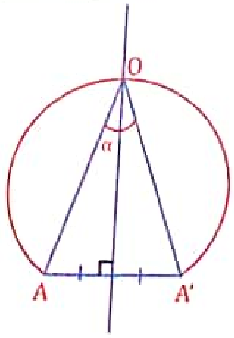
- Construire de centre d'une rotation en utilisant deux points et leurs images

- Pour trouver le centre O d'une rotation , on peut utiliser deux points distincts A et B d'images respectives A' et B' :

- Lorsque les droites(AA') et (BB') ne sont pas parallèles ; on construit les médiatrices des segments [AA'] et [BB'] ; et on marque O l'intersection de ces deux médiatrices.	***Exemple 1 :*** Soit r une rotation. Ayant choisi deux points distincts A et B d'images respectives A' et B' par la rotation r de sorte que les droites (AA') et (BB') ne soit pas parallèles, déterminons le centre O de cette rotation. En effet, de r(A) =A' et r(B) = B', on tire que OA' = OA et OB'= OB ; donc O et le point d'intersection des médiatrices des segments [AA'] et [BB']. Ainsi, pour construire le centre O, on trace les médiatrices de [AA'] et [BB']. 
- Lorsque les droites (AA') et (BB') sont parallèles, les médiatrices des segments [AA'] et [BB'] sont confondues. - Dans ce cas, O est le point d'intersection des droites (AB) et (A'B').	***Exemple 2 :*** Soit r une rotation. Soit deux points distincts A et B d'images respectives A' et B' par la rotation r de sorte que les droites (AA') et (BB') soient parallèles, déterminons le centre O de la rotation. Ainsi, pour construire le centre O, on trace les droites (AB) et (A'B'). O est le point d'intersection des droites (AB) et (A'B'). 

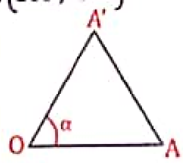
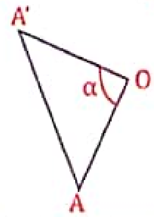
- Construire le centre d'une rotation connaissant son angle, un point et son image

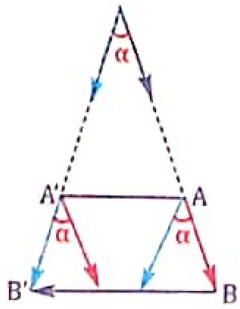
- Pour trouver le centre O d'une rotation connaissant son angle α, un point A et son image A' :

On peut marquer O à l'intersection de la médiatrice de [AA'] avec l'arc capable d'angle d'extrémité [AA'] de sorte que l'angle $(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OA'})$ soit de même mesure que α.	***Exemple:*** Soit A et A' deux points distincts, r la rotation d'angle α et qui transforme A en A'. Déterminons le centre O de la rotation r. En effet, de $r(A) = A'$, on a : $OA' = OA$ et $Mes(\widehat{\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OA'}}) = \alpha$. donc O est l'intersection de la médiatrice de [AA'] avec l'arc capable d'angle α d'extrémité [AA'], comme indiqué ci-dessous. 

- Déterminer l'angle d'une rotation

- Pour déterminer l'angle d'une rotation connaissant sont centre, un point A et son image A' :

On peut utiliser la définition d'une rotation.	***Exemple :*** Soit O, A et A' deux points distincts, r la rotation de centre O qui transforme A en A'. Déterminons l'angle de la rotation r. Soit α l'angle de la rotation r. De $r(A) = A'$, on tire de la définition que $\alpha = Mes(\widehat{\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OA'}})$ Ainsi : - Lorsque OAA' est un triangle équilatéral de sens direct, on a : $\alpha = Mes(\widehat{\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OA'}})$, c'est-à-dire $\alpha = \frac{\pi}{3}$.  - Lorsque OAA' est un triangle isocèle rectangle en O et de sens indirect, on a : $\alpha = Mes(\widehat{\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OA'}})$, c'est-à-dire $\alpha = -\frac{\pi}{2}$. 

On peut utiliser la propriété fondamentale de la rotation.	***Exemple :*** Soit AA'B'B un trapèze isocèle direct de grande base [BB'] tel que *mes* $\widehat{ABB'}=72°$. On considère la rotation r qui transforme A en A' et B en B'. Déterminons l'angle α de la rotation r. De $r(A) = A'$ et $r(B) = B'$, on tire de la propriété fondamentale que $\alpha = Mes(\widehat{\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{A'B'}})$. Ici, il apparait nécessaire de ramener les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ à la même origine. Ainsi, on détermine aisément α. On trouve $\alpha = -\frac{\pi}{5}$. 

IV- SAVOIR-FAIRE

Savoir-faire 1- Trouver l'image d'un point par une rotation

ENONCÉ

ABC est un triangle équilatéral direct de centre O. Les points I, J et K sont les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$.

Détermine les images : $r_{\left(O\,;\,\frac{2\pi}{3}\right)}(A)$, $r_{\left(B\,;\,\frac{\pi}{3}\right)}(C)$ et $r_{\left(O\,;\,-\frac{2\pi}{3}\right)}(I)$.

SOLUTION COMMENTÉE

Détermination des images $r_{\left(O\,;\,\frac{2\pi}{3}\right)}(A)$, $r_{\left(B\,;\,\frac{\pi}{3}\right)}(C)$ et $r_{\left(O\,;\,-\frac{\pi}{3}\right)}(I)$.

- Soit $r_{\left(O\,;\,\frac{2\pi}{3}\right)}(A) = M$, donc $\begin{cases} OA = OM \\ Mes\left(\widehat{\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OM}}\right) = \dfrac{2\pi}{3} \end{cases}$

Or $OA = OB$ et $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OM}}\right) = \dfrac{2\pi}{3}$, donc $M = B$.

Ainsi l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$ est bien le point B.

- Soit $r_{\left(O\,;\,\frac{\pi}{3}\right)}(C) = P$, donc $\begin{cases} BP = BC \\ Mes\left(\widehat{\overrightarrow{BC}\,;\,\overrightarrow{BP}}\right) = \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$

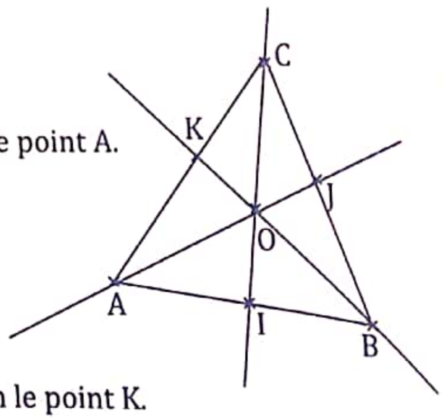
Or $BA = BC$ et $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{BC}\,;\,\overrightarrow{BA}}\right) = \dfrac{\pi}{3}$, donc $P = A$.

Ainsi l'image de C par la rotation de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ est bien le point A.

- Soit $r_{\left(O\,;\,\frac{-2\pi}{3}\right)}(I) = N$, donc $\begin{cases} OI = ON \\ Mes\left(\widehat{\overrightarrow{OI}\,;\,\overrightarrow{ON}}\right) = \dfrac{-2\pi}{3} \end{cases}$

Or $OI = OK$ et $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{OI}\,;\,\overrightarrow{ON}}\right) = \dfrac{-2\pi}{3}$, donc $N = K$.

Ainsi l'image de I par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{-2\pi}{3}$ est bien le point K.



Savoir-faire 2- Démontrer que deux droites sont perpendiculaires en utilisant une rotation

ENONCÉ

ABC est un triangle rectangle en B et de sens direct tel que : $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}}\right) = \dfrac{\pi}{3}$. Le cercle de centre A qui passe par le point B, coupe le segment [AC] en D.

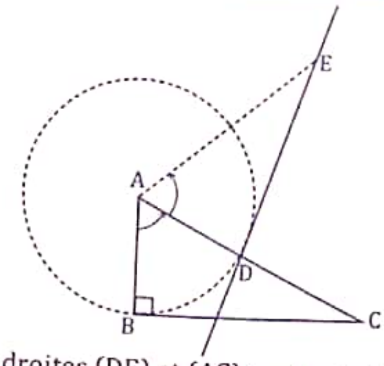
Soit E l'image de C par la rotation r de centre A qui transforme B en D.

a) Fais une figure.

b) Démontre que les droites (DE) et (AC) sont perpendiculaires.

Solution commentée

a) Je fais la figure



b) Je démontre que les droites (DE) et (AC) sont perpendiculaires.
On sait que ABC est un triangle rectangle en B, donc les droites (AB) et (BC) sont perpendiculaires.

Considérons la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Je dresse le tableau de correspondance suivant :

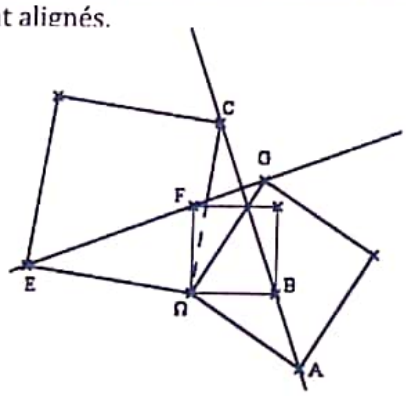
	A	B	C	(AB)	(BC)
Image par la rotation r	A	D	E	(AD)	(DE)

Or la rotation conserve l'orthogonalité, donc les droites (AD) et (DE) sont perpendiculaires.
De plus $(\widehat{\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD}}) = (\widehat{\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}})$. D'où : $(\widehat{\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AB}}) = (\widehat{\overrightarrow{AD} , \overrightarrow{AC}}) = (\widehat{O})$. Par suite D ∈ [AC). D'où le résultat.

Savoir-faire 3- Démontrer que trois points sont alignés en utilisant une rotation

Enoncé

Sur la figure ci-dessous, les trois carrés ont un sommet commun Ω et les points A, B et C sont alignés.
Démontre que les points E, F et G sont alignés.



Solution commentée

Je démontre que les points E, F et G sont alignés
On sait que les points A, B et C sont alignés.

Considérons la rotation r de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

On dresse le tableau de correspondance suivant :

	A	B	C
Image par la rotation r	G	F	E

Les points A, B, et C étant alignés, leurs images par la rotation r sont alignés. Car la rotation conserve l'alignement . On déduit que les points E, F et G sont alignés.

V- JE M'EXERCE

1- Exercices de fixation/ Application

Connaître la définition d'une rotation - Connaître la propriété relative aux points invariants par une rotation

1 Pour chacune des propositions ci-dessous, Recopie la bonne réponse.

1- Soit r la rotation de centre K et d'angle orienté $\frac{\pi}{5}$.

A est l'image de B par r signifie que :

a) $Mes(\widehat{\overrightarrow{KA}\,;\overrightarrow{KB}}) = -\frac{\pi}{5}$ et KA=KB;

b) $Mes(\widehat{\overrightarrow{KB}\,;\overrightarrow{KA}}) = -\frac{\pi}{5}$ et KA=AB;

c) $Mes(\widehat{\overrightarrow{KB}\,;\overrightarrow{KA}}) = -\frac{\pi}{5}$ et KA=KB.

2- Soit r la rotation de centre O et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.

La figure qui indique que B est l'image de A par r est :

a)

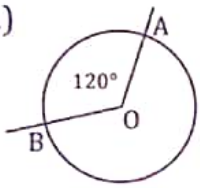


figure 1

b)

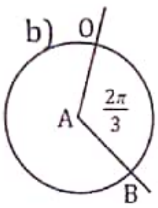


figure2

c)

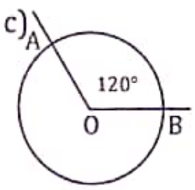


figure3

3- Soit r la rotation de centre I et d'angle orienté $\frac{\pi}{3}$.

M' étant l'image de M par r, on a :

a) $Mes(\widehat{\overrightarrow{MI}\,;\overrightarrow{IM'}}) = \frac{\pi}{3}$;

b) IM' = IM ;

c) IMM' est un triangle équilatéral direct.

2 ABCD est un carré de sens direct, c'est-à-dire tel que $Mes(\widehat{\overrightarrow{A3}\,;\overrightarrow{AD}}) = \frac{\pi}{2}$ et de centre O.

r est le quart de tour tel que : $r(A) = D$ et $r(B) = A$.

Indique la réponse exacte parmi les affirmations suivantes :

1- r est un quart de tour direct ;

2- Le centre de r est le point O ;

3- Le centre de r est le point C.

Construire l'image d'un point par une rotation en utilisant la définition

3 Soit ABC un triangle équilatéral de sens direct.

a) Construis le point E, image de B par la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

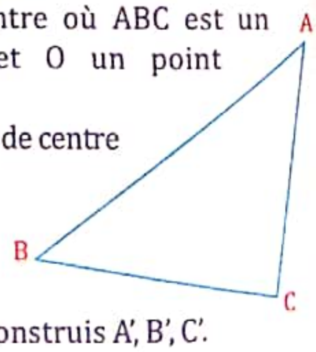
b) Construis le point G, image de B par la rotation de centre A et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.

c) Construis le point N, image de C par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

4 Soit la figure ci-contre où ABC est un triangle quelconque et O un point extérieur au triangle.

On considèrela rotation r de centre O et d'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}})$.

On pose : A' = (A),
B' = r(B) et C' = r(C).
Reproduis la figure et construis A', B', C'.



5 ABC est un triangle équilatéral de sens direct. Construis l'image de A par la rotation de centre C et d'angle orienté $(\overrightarrow{BA}\,;\,\overrightarrow{BC})$.

Connaître la propriété fondamentale de la rotation

6 Pour chacune des propositions ci-dessous, recopie la bonne réponse.

1- Soit r la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
E' et F' sont les images respectives de E et F par r.
On a:

a) $Mes(\widehat{\overrightarrow{EF}\,;\,\overrightarrow{E'F'}}) = \frac{\pi}{4}$;

b) EE' = FF';

c) $Mes(\widehat{\overrightarrow{E'F'}\,;\,\overrightarrow{EF}}) = \frac{\pi}{4}$.

2- O, A et B sont trois points non alignés du plan, A' et B' sont les images respectives des points A et B par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

On a :

a) $Mes(\widehat{\overrightarrow{AA'}\,;\,\overrightarrow{BB'}}) = \frac{\pi}{3}$;

b) $Mes(\widehat{\overrightarrow{A'B'}\,;\,\overrightarrow{AB}}) = -\frac{\pi}{3}$.

Connaître les propriétés relatives aux images de figures simples par une rotation

7 Dans le tableau ci-dessous, r est la rotation de centre K et d'angle non nul α.

Objet	G	M	K	(MG)	[KG]	[MK)	$(\widehat{\overrightarrow{GM}\,;\,\overrightarrow{GK}})$	$\mathscr{C}(K\,;3)$
Image par r	E	N						

Recopie et complète le tableau ci-dessus.

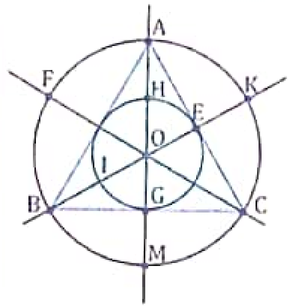
8 A, B, C, D et E sont des points deux à deux distincts tels que par la rotation r de centre A et d'angle non nul, on ait : r(B) = C, r(C) = D et r(D) = E.
Recopie et complète :

Objet	(BD)	[AC]	[DC]	$(\widehat{\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{BC}})$	$\mathscr{C}(A\,;4)$
Image par r					

Trouver l'image d'un point par une rotation

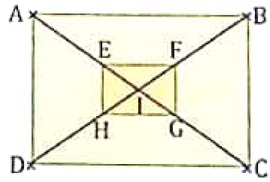
9 Observe la figure puis recopie complète le tableau ci-dessous.
On considère la rotation r de centre O et d'angle non nul α.

Angle α	Point	Image du point par r
60°	A	
-60°		B
-120°	K	
	C	A
180°	F	



10 ABC est un triangle isocèle A et de sens direct tel que : $mes\ \widehat{BAC} = 30°$. M est un point extérieur au triangle ABC.
Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{6}$.
Donne l'image de B par la rotation r.
En utilisant uniquement un compas, construis C', image de C par la rotation r.

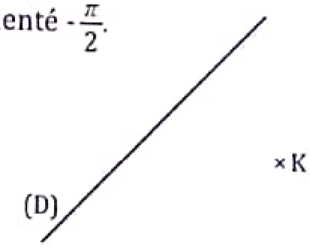
11 Sur la figure ci-contre, ABCD et EFGH sont deux rectangles de centre I.
On pose : $\alpha = Mes(\widehat{\overrightarrow{IF}\,;\,\overrightarrow{IA}})$.
On considère la rotation r de centre I et d'angle α.
Complète par Vrai ou Faux.



Affirmation	R(A) = B	R(H) = G	R(C) = B	R(A) = B	R(E) = H
Reponse					

Construire l'image d'une figure simple par une rotation

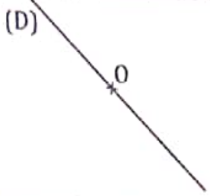
12 Refais la figure ci-dessous ; puis construis l'image de la droite (D) par la rotation r de centre K et d'angle orienté $-\frac{\pi}{2}$.



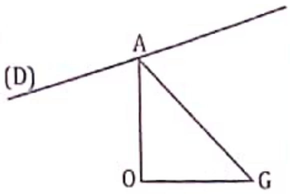
13 ABC est un triangle équilatéral indirect. Construis l'image de la droite (BC) par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

14 A l'aide d'une non graduée et d'une équerre, construis la droite (D'), image de la droite (D) par la rotation r dans chacun des cas suivants:

1er cas : r est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.



2ème cas : r est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
On donne : $r(A) = G$.

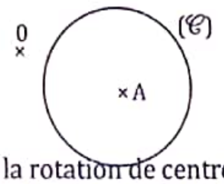


15 Soit un rectangle indirect ABCD.
Construis l'image de ce rectangle par la rotation de centre A d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

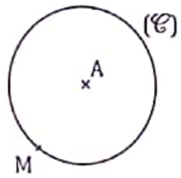
16 EFG est un triangle équilatéral direct. Construis l'image de la demi-droite [FG) par la rotation r de centre E et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

17 Dans chaque cas, refais la figure et construis l'image du cercle ($\mathscr{C}$) par la rotation r.

1er cas : r est la rotation de centre A et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.



2ème cas : r est la rotation de centre M et d'angle $\frac{\pi}{5}$.



Connaître les propriétés relatives à la conservation de l'alignement, du parallélisme, de l'orthogonalité, du milieu et des angles orientés par une rotation

18 Soit r une rotation. Complète la phrase suivante :

1- Si par la rotation r, les droites parallèles (AB) et (CD) ont pour images respectives les droites (A'B') et (C'D'), alors ...... car (propriété) ....

2- Si on a

$\xrightarrow{r}$	
(AB)	(A'B')
(CD)	(C'D')

et (AB) // (CD) alors .... car (propriété) ....
....

3- Si par la rotation r, les points alignés A, B et C ont pour images les points A', B' et C', alors ......
.... car (propriété) ....
....

4- Si on a

$\xrightarrow{r}$	
A	A'
B	B'
I	K

et I est le milieu du segment [AB], alors ....car (propriété) ....
....

5- Si par la rotation r, on a $r(A) = A'$, $r(B) = B'$, $r(C) = C'$ et $r(D) = D'$, alors les angles orientés $(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{CD})$ et .... ont la................car (propriété) ....

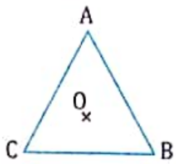
Connaître les propriétés relatives à la caractérisation d'une rotation. Déterminer le centre et l'angle d'une rotation

19 Complète chacun des propriétés suivantes :

1- Soit O un point, et A et A' deux points distincts de O.
Si .... alors il existe une unique rotation de centre O et qui transforme A en A'.

2- Soit A et B deux points distincts, et A' et B' deux autres points.
Si .... avec .... alors il existe une unique rotation qui transforme A en A' et B en B'.

20 O est le centre du cercle circonscrit du triangle ABC équilatéral direct ci-dessous.



1- Justifie qu'il existe une unique rotation r de centre O telle que : $r(A) = B$.

2- Détermine l'angle orienté de la rotation r.

21 Soit A et B deux points tels que : AB = 5 cm, et r la rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et qui transforme A en B.
Détermine le centre O de la rotation r.

22 Soit AEFB un trapèze tel que le triplet (A, E, F) soit de sens direct de petite base [BF]. Soit r une rotation qui transforme respectivement A et B en E et F. Détermine le centre O de la rotation ainsi que son angle.

En utilisant une rotation, démontrer que deux droites sont parallèles, que des droites sont perpendiculaires, une égalité angulaire, qu'un point est le milieu d'un segment

23 ABC est un triangle équilatéral direct. On considère la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

On pose : $E = r(B)$ et $G = r(C)$.

1- Justifie que $(AE) \perp (AB)$.

2- Justifie que $(BC) \perp (EG)$.

24 Soit M un point appartenant à un cercle $(\mathscr{C})$ de diamètre [BC], distinct de B et C.

On considère la rotation r de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

On pose : $E = r(C)$ et $N = r(M)$.

Démontre que $(EN) \perp (BN)$.

25 Soit $(\mathscr{C})$ un cercle de centre O et de diamètre [BC] ; M un point de $(\mathscr{C})$ distinct de B et C.

On considère la rotation r de centre M et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

On pose $E = r(B)$, $F = r(C)$ et $K = r(O)$.

Justifie que K est le milieu du segment [EF].

26 A, B et C trois points non alignés et K un point extérieur au triangle ABC.

On considère la rotation r de centre K et d'angle $\frac{\pi}{5}$.

E, F et G sont respectivement les images de A, B et C par r.

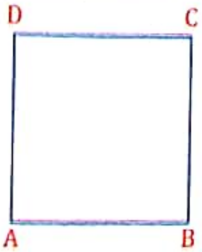
Justifie que $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{EF}\,;\,\overrightarrow{EG}}\right) = Mes\left(\widehat{\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}}\right)$.

2- Exercices de renforcement / approfondissement

27 Soit ABCD le carré ci-dessous. On donne M un point de [AB] et N un point de [BC] tel que :

AM= CN.

Démontre qu'il existe une rotation r qui transforme M en N dont on déterminera le centre et l'angle.



28 ABC est un triangle équilatéral direct. K, M et N sont les milieux respectifs des segments [AB], [AC] et [BC].

1-Justifie qu'il existe une unique rotation r qui trans forme A en M et N en B.

2- Détermine le centre et l'angle de r.

29 Sur la figure ci-dessous, ABC est un triangle isocèle en A. Soit D un point quelconque du plan distinct de A, B et C.

1- Construis l'image E de D par la rotation r de centre A et d'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}}\right)$.

2- Démontre que : CE = BD.

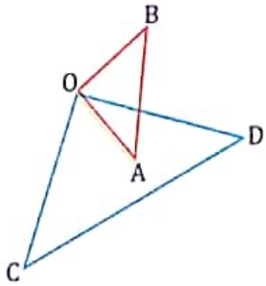
30 (Δ), (D) et (L) sont trois droites strictement parallèles, et A un point de (Δ).

Construis un triangle ABC équilatéral direct tel que B appartienne à (D) et C à (L).

31 OAB et OCD sont deux triangles rectangles isocèles en O de même sens.direct.

1- Démontre que AC = BD.

2- Démontre que les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires.



32 O et A sont deux points du plan. On considère la rotation r de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

On pose : $r(A)=B$ et $r(B)=C$.

1- a) Construis B et C.

b) Justifie que AB=BC.

2- a) Démontre que le point A est l'image du point C par la rotation r.

b) Déduis de ce qui précède que le triangle ABC est équilatéral.

33 Soit $(\mathscr{C})$ un cercle de centre O et A un point de ce cercle.

A tout point M de $(\mathscr{C})$ distinct de A , on associe le point M' tel que AMM' soit un triangle équilatéral direct.

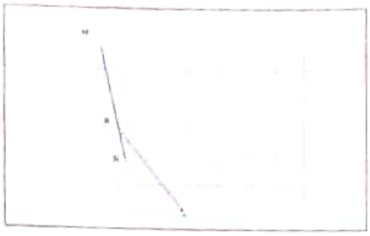
1- Justifie que le point M' est l'image du point M par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

2- Détermine et construis le lieu des points M' lorsque M décrit $(\mathscr{C})$.

3- Situation d'évaluation

L'essuie-glace

37 Un élève observe le mouvement de l'essuie-glace d'un camion sur le pare-brise quasi-plat.
Il représente le pare-brise par un cadre rectangle et y schématise l'essuie-glace dans une position.
Ce dernier dispositif comprend un balai [MN]sur lequel aboutit le bras [AB], le tout pouvant tourner autour du point inférieur A où il est fixé.



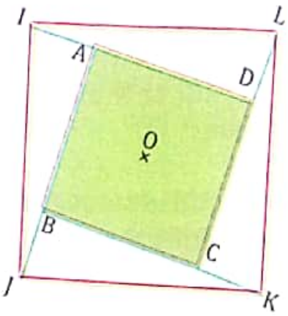
Il veut schématiser sur le même cadre, la nouvelle position de l'essuie-glace après une rotation de $\frac{\pi}{6}$ de tour dans le sens des aiguilles d'une montre. Il désigne respectivement par B', M' et N', les points homologues des points B, M et N. Mais, comme il ne dispose que d'un compas et d'une règle non graduée, il sollicite ton aide.
On considère la rotation r qui transforme respectivement B, M et N en B', M' et N'.

1- Justifie que l'angle orienté de la rotation r est $-\frac{\pi}{3}$.
2- Justifie que le triangle ANN' est équilatéral.
3- En utilisant uniquement une règle non graduée et un compas, construis la nouvelle position de l'essuie-glace.

38 Un jardinier voudrait agrandir sa parcelle carrée en reculant les bornes de la même longueur. Mais il s'inquiète car il aimerait que la nouvelle parcelle soit également carrée ; il demande ton avis.

La figure ci-dessous présente la situation :
- Parcelle initiale : le carré ABCD direct de centre O ;
- AI=BJ=CK=DL

Nouvelle parcelle : le quadrilatère IJKL.



On considère la rotation r qui transforme A en B et I en J.
1- Donne le centre et l'angle de la rotation r.
2- Trouve respectivement les images par la rotation r, des points B, C, J, D, K et L.
3- Démontre que le quadrilatère IJKL est un carré.

RENDEZ-VOUS DES CURIEUX !

La photo 1 présente une rose des vents, qui se trouve au Portugal, près du Monument des Découvertes, à Lisbonne. La photo 2 présente la mosaïque de sol du IIème siècle représentant Méduce au jardin du Namathènes, Grèce. Comme dans des rosaces, ces œuvres d'arts contiennent des motifs pouvant s'obtenir par des rotations.

15 Équations et inéquations dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Notions essentielles :

- **Notions d'équations**
- **Notions d'inéquations**
- **Résolution d'équations du 1^{er} ou 2^{nd} degré dans $\mathbb{R}$**
- **Résolution d'inéquations du 1^{er} ou 2^{nd} degré dans $\mathbb{R}$**

SITUATION D'APPRENTISSAGE

Pendant les grandes vacances, une élève de 2^{de} C d'un lycée moderne veut se spécialiser dans la couture. Elle fabrique deux modèles de robe dans son atelier. L'un exige 2,50 mètres de tissu et 13 heures de travail et donne un bénéfice de 3.200 F.

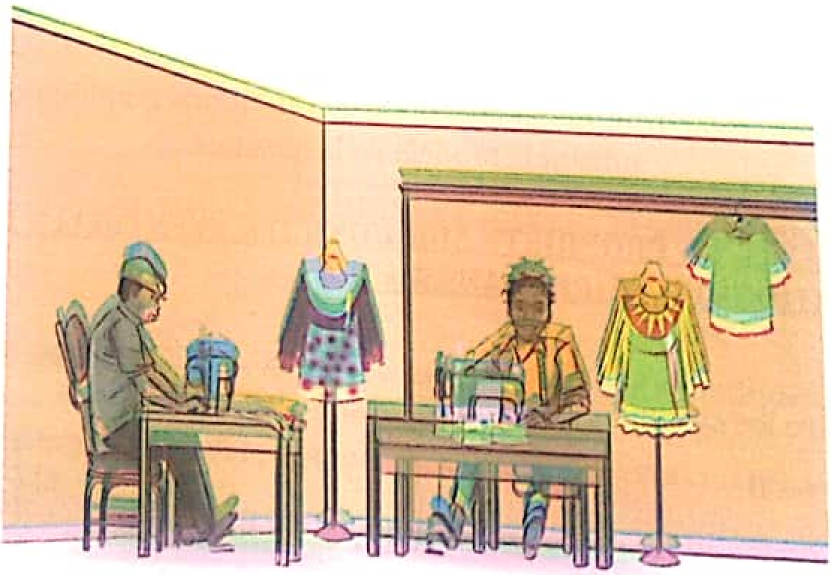
L'autre exige 3 mètres de tissu et 6 heures de travail et donne un bénéfice de 4.500 F.

L'atelier dispose d'au plus : 37 mètres de tissu et 130 heures de travail.

Malheureusement, elle ne se souvient plus de son bénéfice.

Emerveillés, ses camarades de classe souhaitent déterminer le bénéfice maximum que cette jeune fille peut réaliser.

Ils décident de rechercher les outils mathématiques qui vont leur permettre de répondre à leurs préocuptions.



I- ACTIVITÉS DE DÉCOUVERTE

Généralités

1- CONNAÎTRE LE THÉORÈME FONDAMENTAL À L'INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE D'UNE INÉQUATION DU PREMIER DEGRÉ DANS $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Activité 1

x et y désignent des nombres réels. On donne l'expression $P = 2x - y - 1$.
Soit les couples $(-3\,;-7)$, $(1\,;0)$, $(0\,;1)$, $(3\,;2)$, $(1\,;1)$, $(-3\,;2)$, $(2\,;3)$, $(3\,;-2)$ et $(-2\,;2)$.

1- Recopie et range, selon les différents cas, les points dont les couples de coordonnées sont donnés ci-dessus dans le plan muni du repère (O, I, J) :

$P = 0$	$P < 0$	$P > 0$
(... ; ...) ;...	(... ; ...) ;...	(... ; ...) ;...

2- Dans le plan muni du repère (O, I, J), la droite (D) a pour équation $2x - y - 1 = 0$.
Construis la droite (D) puis place dans le repère (O, I, J) les points dont les couples de coordonnées sont données ci-dessus.

3- Hachure la partie du plan constitué des points $M(x\,;y)$ qui vérifient $2x - y - 1 > 0$.

Je fais le point de l'activité

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), la droite (D) d'équation $2x - y - 1 = 0$ partage le plan en trois parties:
- la droite (D);
- l'ensemble (P_1) des points $M(x\,;y)$ qui vérifient : $2x - y - 1 < 0$;
- l'ensemble (P_2) des points $M(x\,;y)$ qui vérifient : $2x - y - 1 > 0$
- (P_1) et (P_2) sont les deux demi plans ouverts de bord (D).

J'évalue mes acquis

Le plan est muni du repère (O, I, J). On donne les inéquations suivantes :
$(I_1) : 2x - y < 0$; $(I_2) : x - 2 > 0$; $(I_3) : x - 2y - 1 < 0$; $(I_4) : 3x - y + 1 > 0$.

a) Recopie et complète la phrase suivante avec l'un des points O, I, et J selon le cas qui convient:
L'ensemble des solutions graphiques de l'inéquation (I_1) est le demi-plan ouvert de frontière la droite d'équation $2x - y - 1 = 0$ contenant le point ....

b) Indique l'ensemble des solutions graphiques des trois autres inéquations en suivant le modèle de la question a).

2- CONNAÎTRE LA PROPRIÉTÉ SUR L'UNICITÉ ÉVENTUELLE DE LA SOLUTION D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS LINÉAIRES DANS $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Activité 2

On considère les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 0 \\ x - y - 4 = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ -4x + 2y - 2 = 0 \end{cases}$

1- a) Dans trois repères différents, construis les droites dont les équations constituent chaque système.
b) Dis dans quel cas les droites sont sécantes.

c) Calcule le déterminant de chacun des systèmes ci-dessus.

d) Dis dans quel cas le déterminant du système est non nul.

2- Soit le système (S) : $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$, avec $(a, b) \neq (0\,;0)$ et $(a', b') \neq (0\,;0)$

Soit (D) et (D') les droites d'équations respectives $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$ dans le plan rapporté à un repère orthonomé (O, I, J).

On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$.

1-a) Démontre que $\vec{u}$ est orthogonal à tout vecteur directeur de (D).

b) Démontre que $\vec{v}$ est orthogonal à tout vecteur directeur de (D').

2-a) Déduis-en que (D) et (D') sont parallèles si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

b) Déduis-en que (D) et (D') sont sécantes si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}) \neq 0$.

3-a) Déduis de 2) que le système (S) admet une solution unique si et seulement si $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$.

b) Déduis de 2) que le système (S) admet aucune solution unique ou une infinité de solution si et seulement si $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0$.

Je fais le point de l'activité

Le système (S) : $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$, avec $(a, b) \neq (0\,;0)$ et $(a', b') \neq (0\,;0)$

- admet une solution unique si et seulement si $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$.
- admet une infinité de solution ou aucune solution si et seulement si $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0$.
- le nombre $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$ est appelé le détterminant du système (S).

J'évalue mes acquis

Exercice 1

Parmi les systèmes suivants, indique ceux qui ont une solution unique dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

a) $\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ x + 2y - 4 = 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3x - 5y + 7 = 0 \\ -6x + 10y + 4 = 0 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} -\frac{1}{2}x + y + 4 = 0 \\ x - 2y - 8 = 0 \end{cases}$.

Exercice 2

Avec les données de l'exercice 1, interprète géométriquement les déterminants calculés.

3- RÉSOUDRE UN PROBLÈME DE VIE COURANTE CONDUISANT À UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS OU D'INÉQUATIONS LINÉAIRES

Activité 3

L'effectif d'une classe de seconde C est de 32 élèves. Au devoir surveillé de mathématiques, les filles de cette classe ont obtenu une moyenne de 10, les garçons, une moyenne de 9 et l'ensemble des élèves une moyenne de 9,75. Détermine le nombre de filles et le nombre de garçons de cette classe sachant qu'aucune absence n'est signalée.

Je fais le point de l'activité

Pour résoudre un problème de vie courante conduisant à un système d'équations ou d'inéquations linéaires, on procède comme suit :

- Choix des inconnues ;
- Mise en équations ;
- Résolution des équations ou des inéquations ;
- Vérification des résultats obtenus.

J'évalue mes acquis

Détermine deux nombres connaissant leur somme 20 et le rapport de leurs carrés $\frac{3}{2}$

4- INTERPRÉTER GÉOMÉTRIQUEMENT LES SOLUTIONS DES SYSTÈMES D'INÉQUATIONS DANS $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Activité 4

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), on donne les droites (L_1) et (L_2) d'équations respectives $2x + y - 4 = 0$ et $2x - y = 0$.

1- a) Construis les droites (L_1) et (L_2).

b) Hachure en bleu l'ensemble des solutions graphiques de l'inéquation $2x + y - 4 \leq 0$, puis en rouge l'ensemble des solutions graphiques de l'inéquation $2x - y \leq 0$.

c) A l'aide du graphique, déduis-en l'ensemble des solutions du système d'inéquations :

$$\begin{cases} 2x + y - 4 \leq 0 \\ 2x - y \leq 0 \end{cases}$$

Je fais le point de l'activité

- Les systèmes d'inéquations ne peuvent se résoudre que graphiquement.
- Lorsque la frontière est non comprise, on la trace en pointillé.
- L'ensemble solution est la partie couverte par les deux couleurs.

J'évalue mes acquis

Résous graphiquement les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} x + 2y - 1 \leq 0 \\ x - y + 7 \geq 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x - 4y - 6 < 0 \\ -x + 2y - 3 > 0 \end{cases}$

II- RÉSUMÉ DE COURS

1- Généralités

Théorème fondamental

(O, I, J) un repère du plan et (D) la droite d'équation : $ax + by + c = 0$.
Soit (P_1) l'ensemble des points $M(x\,;y)$ vérifiant : $ax + by + c > 0$.
Soit (P_2) l'ensemble des points $M(x\,;y)$ vérifiant : $ax + by + c < 0$.
(P_1) et (P_2) sont les deux demi-plans ouverts de frontière (D) ou de bord (D).
Tout point $M(x\,;y)$ est soit :

- sur la droite (D) ;
- dans l'un des demi plans ouverts de bord (D).

Définition

Soit le système (S) : $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$

Le nombre $ab' - a'b$, noté $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$ est appelé le déterminant du système (S)

Propriété 1

Un système de deux équations à deux inconnues admet un seul couple solution si et seulement si son déterminant est non nul.

III- MÉTHODE

Pour reconnaître si un système $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ **admet une solution :**

On calcule le déterminant $ab' - a'b$:
- Si le déterminant est non nul, le système admet un unique couple solution que l'on détermine par la méthode de combinaisons linéaires ou par substitution;
- Si le déterminant est nul et a' ; b' et c' sont non nuls :
  * soit $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ le système a une infinité de solutions.
  * soit $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ mais $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$, le système n'admet aucune solution.

Pour résoudre une inéquation du type : $ax + by + c < 0$
- On construit dans le plan, muni d'un repère (O, I, J) la droite (D) d'équation : $ax + by + c = 0$;
- On choisit un point particulier à l'extérieur de (D), par exemple, O, I ou J du repère (O, I, J).
  - si l'expression $ax + by + c$ est strictement négative pour les coordonnées de ce point, le demi-plan ouvert de frontière (D) contenant ce point représente l'ensemble des solutions ;
  - sinon, l'ensemble des solutions est représenté par l'autre demi-plan ouvert ;
- On conclut en tenant compte des contraintes.

IV- SAVOIR-FAIRE

Savoir-faire 1- Interpréter géométriquement les solutions des systèmes d'équations dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Enoncé

Interprète géométriquement les solutions de chacun des systèmes d'équations dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

a) $\begin{cases} x + 3y - 6 = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} y = 2x + 1 \\ 6x - 3y + 3 = 0 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 5x - 2y = 0 \\ 5x - 2y + 1 = 0 \end{cases}$

Solution commentée

Interprétation géométrique des solutions de chacun des systèmes d'équations dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

a) On calcule le déterminant de (S_1) et on trouve - 4 qui est non nul, donc (S) admet une solution unique.
On construit les droites (D_1) et (D_2) d'équations respectives : $x + 3y - 6 = 0$ et $x - y + 2 = 0$.
Elles sont sécantes en un point A dont ses coordonnées (0 ; 2) sont les solutions de (S_1).

b) On calcule le déterminant (S_2) et on trouve 0. Dans l'équation $6x - 3y + 3 = 0$, en exprimant y en-fonction de x, on obtient $y = 2x + 1$. Donc les droites sont confondues et le système (S_2) admet une infinité de solutions.

c) On calcule le déterminant de (S_3) et on trouve 0. On exprime y en fonction de x dans chaque équation de (S_3) et on obtient : $y = 2,5x$ et $y = 2,5x + 0,5$. Les ordonnées à l'origine sont différentes, donc les droites sont strictement parallèles et le système n'a pas de solution.

Savoir-faire 2- Interpréter géométriquement les solutions des systèmes d'inéquations dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Énoncé

Détermine graphiquement les couples de nombres entiers naturels non nuls $(x ; y)$ solutions du système d'inéquations :

$$(S) \begin{cases} 2x + y - 6 < 0 \\ x + y - 4 < 0 \end{cases}$$

Solution commentée

Détermination des couples de nombres entiers naturels solutions de (S).
Dans un repère orthonormé (O, I, J), on construit les droites (D_1) et (D_2) d'équations respectives. $2x - y - 6 = 0$ et $x + y - 4 = 0$, puis on choisit le demi- plan (P_1) tel que $2x - y - 6 < 0$ et le demi- plan (P_2) tel que : $x + y - 4 < 0$.
On hachure la partie commune aux deux demi- plans (P_1) et (P_2) et on obtient les couples (1 ; 1) ; (1 ; 2) et (2 ; 1).

V- JE M'EXERCE

1- Exercices de fixation/ Application

Identifier le déterminant d'un système d'équations

1 Associe chaque système d'équations à son déterminant par la lettre suivie du numéro:

a) $\begin{cases} 3x - 6y + 5 = 0 \\ 7x + 4y = 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} -5x - 8y - 1 = 0 \\ 10x + 16y + 2 = 0 \end{cases}$

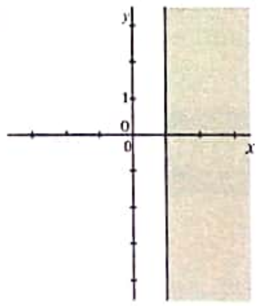
c) $\begin{cases} -3x + 2y + 5 = 0 \\ 2x + 11 = 0 \end{cases}$

1) 0 ; 2) -4 ; 3) 54.

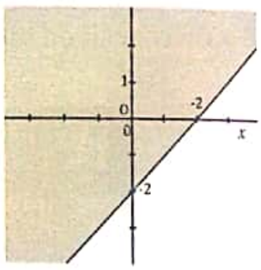
Connaître le théorème fondamental relatif à l'interprétation géométrique d'une inéquation du premier degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

2 Le plan est muni du repère (O, I, J). On donne les inéquations suivantes :
$(I_1) : y + 1 < 0$; $(I_2) : x + y + 2 > 0$; $(I_3) : x - 1 > 0$ et (I_4) : $x - y - 2 < 0$.
Associe chacune de ces inéquations à l'un des demi-plans hachurés de l'un des graphiques suivants.

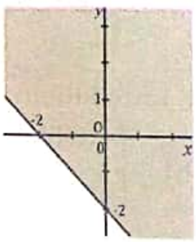
a)



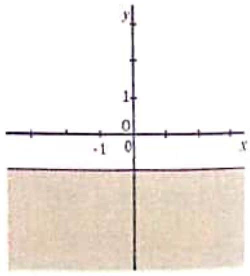
b)



c)



d)



3 Le plan est muni du repère (O, I, J). On donne les inéquations suivantes :
$(I_1) : 2x + y < 0$; $(I_2) : x - 2 > 0$; $(I_3) : x - 2y - 1 < 0$ et $(I_4) : x - y - 2 < 0$.

a) Recopie et complète la phrase suivante avec l'un des points O, I et J selon le cas qui convient :

L'ensemble des solutions de l'inéquation (I_1) est le demi-plan ouvert de frontière la droite d'équa tion .... contenant le point ....

b) Indique l'ensemble des solutions des trois autres inéquations en suivant le modèle de a).

4 On donne l'inéquation (I) : $6x - 5y + 3 > 0$. Parmi les couples suivants, indique ceux qui sont solutions de(I) : $(0\,;0)$, $(-2\,;3)$, $(-5\,;-2)$, $(4\,;8)$, $\left(\frac{2}{3}\,;\frac{5}{3}\right)$, $\left(\frac{-8}{5}\;\frac{5}{3}\right)$.

Indique l'inéquation qui correspond à chaque demi-plan hachuré dans chacun des cas de figures

Fig. a

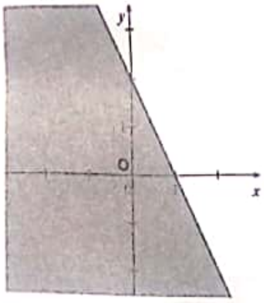


Fig. b

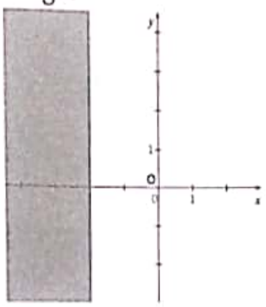


Fig. c

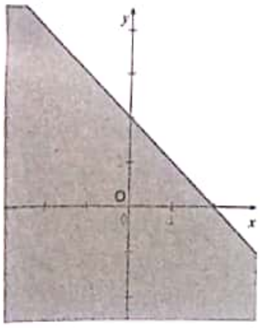
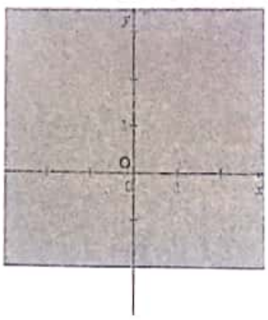


Fig. d



Connaître la propriété sur l'unicité éventuelle d'un système d'équations linéaires dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

5 Parmi les systèmes suivants, indique ceux qui ont une solution unique dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

a) $\begin{cases} 2x - 3y - 1 = 0 \\ 3x - 4y + 2 = 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} -x + y + 3 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 6x - 2y - 5 = 0 \\ 5x + y + 4 = 0 \end{cases}$; d) $\begin{cases} 2x - y - 4 = 0 \\ -x + \frac{1}{2}y + 2 = 0 \end{cases}$

6 Pour chacune des affirmations ci-dessous, trois réponses sont proposées, choisis la réponse exacte.

1- Le système $\begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases}$ admet :

a) Une solution unique ;

b) Une infinité de solutions ;

c) Zéro solution.

2- Le système $\begin{cases} -8x + 4y = 1 \\ 2x - y = -3 \end{cases}$ admet :

a) Une solution unique ;

b) Une infinité de solutions ;

c) Zéro solution.

Calculer le déterminant d'un système d'équations linéaires dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

7 Calcule le déterminant de chacun des systèmes d'équations linéaires ci-dessous :

a) $\begin{cases} x - 3y - 7 = 0 \\ 2x + 5y - 25 = 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x\sqrt{2} - \sqrt{3}y = 1 \\ 5x\sqrt{2} - 4\sqrt{3}y = 8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2(x + 2) = -3(y - 4) \\ 4(x - 3) - (y - 5) = 26 \end{cases}$; d) $\begin{cases} -3y = 2 - 4x \\ x = \quad (y + 3) = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} mx + 2y = m + 5 \\ 8x + my = 2m + 6 \end{cases}$, où $m \in \mathbb{R}$.

8 Calcule le déterminant du système :

$$\begin{cases} (2 - \sqrt{3})x = 2 - 3(\sqrt{2} + \sqrt{3})y \\ (\sqrt{3} - 2)x + (\sqrt{3} + 2)y - 25 = 0 \end{cases}$$

Utiliser le déterminant pour prouver l'unicité éventuelle de la solution d'un système d'équations linéaires dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

9 Sans résoudre, justifie que chacun des systèmes suivants admet une solution unique

a) $\begin{cases} 5x - 2y = 0 \\ 7x + 8y = 5 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3(x - 1) + 4(y + 2) = 3 \\ 5(x - 1) + 2(y + 2) = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} mx + y = m \\ x - my = m - 1 \end{cases}$, où $m \in \mathbb{R}$.

10 Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), on donne les droites (D_1) et (D_2) d'équations respectives :

$y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{5}$ et $7x + 3y - 6 = 0$.

Démontre que les droites (D_1) et (D_2) sont sécantes.

Traduire en équations diverses situations concrètes

11 Traduis ces énoncés par des équations

a) Deux nombres sont tels que si on ajoute le double de l'un à la moitié de l'autre on obtient 6, alors que si on échange les nombres la même opération donne 9.

b) Le rapport de deux nombres strictement positifs est $\frac{3}{11}$, leur différence est 152.

c) Deux nombres non nuls ont pour somme 20 et le rapport de leur carré est $\frac{4}{9}$.

d) Un nombre entier naturel de deux chiffres est tel que la somme de ses chiffres égale 14 et si l'on permute ses chiffres, le nombre entier augmente de 18.

e) On considère un rectangle dont le périmètre est de 1300 m. Si on augmente sa largeur de 20% et si on diminue sa longueur de 25% alors le rectangle devient un carré.

Traduire en inéquations diverses situations concrètes

12 Traduis les énoncés suivants par des inéquations :

a) Trois nombres réels sont tels que chacun d'eux est inférieur à la somme des deux autres.

b) La somme de deux nombres diminués de 2 est plus petite que 9 et leur différence augmentée de 4 est plus petite que 2.

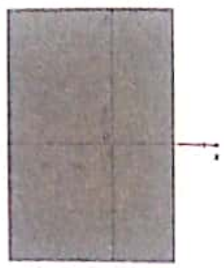
Interpréter géométriquement les solutions des systèmes d'équations et d'inéquations

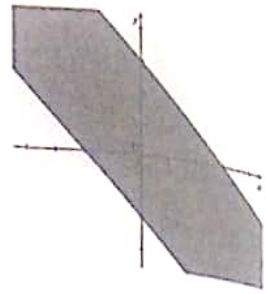
13 Interprète géométriquement les solutions des systèmes suivants :

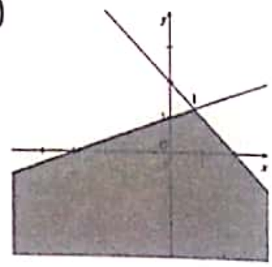
a) $\begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ 2x + y + 7 = 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 6x - 6y = 5 \\ -3x + 9y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x - 6y + 18 = 0 \\ x - \frac{3}{2}y - \frac{9}{2} = 2 \end{cases}$; d) $\begin{cases} 3x - 6y + 3 = 0 \\ x - 2y - 1 = 0 \end{cases}$

14 Interprète géométriquement les solutions des inéquations et systèmes d'inéquations représentées sur chaque graphique.

a) 

b) 

c) 

15 Résous chaque système :

a) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - 2y = 3 \\ -6x + 3y = -12 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x - 3y = -13 \\ 5x - 6y = 28 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$

16 Résous graphiquement chaque système d'inéquations :

a) $\begin{cases} 2x + y - 1 < 0 \\ x - 3y + 2 > 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} y \leq 2 \\ 3x + y \geq 0 \\ x - 3y + 2 \geq 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -1 \leq x + y \leq 1 \\ -1 \leq x - y \leq 1 \end{cases}$

2- Exercices de renforcement / approfondissement

17 Résous chaque système en utilisant une méthode de calcul par combinaisons linéaires :

a) $\begin{cases} 4x - 7y = 3 \\ 3x - 7y = 2 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3x + 2y = -5 \\ 6x + 8y = 24 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 3y = 11 \\ 5x - 68 = 3(x - 1) \end{cases}$

18 Résous chaque système en utilisant une méthode de calcul par substitution :

a) $\begin{cases} y = 10 - 4x \\ 5x + 3y - 9 = 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 4x - 5y = -2 \\ 3x + y = 8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - 9y = 3 \\ -10x + 9y = -4 \end{cases}$

19 Résous chaque système par la méthode de votre choix.

a) $\begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \\ 3x + 5y = \frac{7}{2} \end{cases}$; b) $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 4 \\ \frac{x}{4} - \frac{y}{2} = -2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x - 7y = 3 \\ 3x - 7y = 2 \end{cases}$

20 Dans chacun des cas ci-dessous, représente graphiquement l'ensemble des solutions.

a) $(2x - 3y)^2 = 4$; b) $\begin{cases} y \leq 2 \\ y \geq -3x \\ x - y + 1 \leq 0 \end{cases}$

21

1- Résous le système : $\begin{cases} x - y = 0{,}6 \\ x + y = 5 \end{cases}$

2- On considère le système (S) : $\begin{cases} x > 0 ; y > 0 \\ x^2 + y^2 = 12{,}66 \\ xy = 6{,}16 \end{cases}$

a) Développe $(x + y)^2$, puis calcule $(x + y)^2$ en utilisant les données de (S).

b) Déduis-en la valeur de $x + y$.

c) Développe $(x - y)^2$,Déduis-en la valeur de $(x - y)^2$ puis celle de $x - y$.

d) Utilise les résultats précédents pour trouver les nombres x et y.

22

1- Vérifie l'égalité : $(x - y)^2 = (x + y)^2 - 4xy$.

2- Utilise cette égalité pour déterminer les nombres x et y tels que : $\begin{cases} x + y = 135 \\ xy = 4284 \end{cases}$

23

Soit le système suivant (S) :

$\begin{cases} (m - 1)x + 2my = m + 5 \\ 2x + 3y = 2m + 6 \end{cases}$, où m désigne un nombre réel quelconque.

a) Détermine l'ensemble E des nombres réels m pour lesquels le système (S) admet une unique solution dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

b) On suppose $m = 3$.
Interprète géométriquement les solutions du système (S).

c) Pour tout le nombre réel m, résous le système (S). (On discutera suivant les valeurs de m)

24

On considère le système (S) : $\begin{cases} ax + 2y = a + 5 \\ 8x + ay = 2a + 6 \end{cases}$ où a désigne un nombre réel.

1- Etablis une condition sur le nombre réel a pour que le système (S) ait une solution unique.

2- Détermine la valeur de a pour laquelle le système admet une infinité de solutions.

3- Détermine la valeur de a pour laquelle le système n'admet aucune solution.

25

a) Résous le système : $\begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 2 \\ 4x + 6y = 26 \end{cases}$

b) Déduis-en les solutions du système :

$\begin{cases} 3(x^2 + 1) + 2(y^2 - 1) = 12 \\ 4(x^2 + 1) + 6(y^2 - 1) = 26 \end{cases}$

26

Résous dans $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$: $\begin{cases} x + y + z = 5 \\ 3x - y = 1 \\ 2x - 5y = 12 \end{cases}$

27

Résous dans $\mathbb{R}^3$: $\begin{cases} 2x - 3y + z = 7 \\ 3x - 2y - z = 8 \\ x + 4y + 3z = -10 \end{cases}$

(Indication : on pourra se ramener à un système de deux équations à deux inconnues x et y).

28

Résous dans $\mathbb{R}^3$: $\begin{cases} \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{5} \\ x + 2y - z = -8 \end{cases}$

29

a) Résous le système : $\begin{cases} x + 2y - a = 0 \\ 3x + 4y - 11 = 0 \end{cases}$, où a désigne un nombre réel.

b) Détermine les valeurs du nombre réel a pour lesquelles les solutions du système sont positives.

30

Résous graphiquement :

a) $\begin{cases} x + y - 4 < 0 \\ x - 4 < 0 \\ y - 4 < 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x + 2y - 3 \leq 0 \\ 3x + y - 4 \leq 0 \\ 2x - 3y \leq 0 \end{cases}$

31 On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Détermine les nombres réels a, b et c de sorte que $f(1) = 0$, $f(-1) = 6$ et $f(0) = 1$.

32 Résous les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} \dfrac{4}{x - 2} + \dfrac{5}{y - 3} = 6 \\ \dfrac{1}{x - 2} - \dfrac{5}{y - 3} = -7 \end{cases}$; (On pourra poser : $X = \dfrac{1}{x - 2}$ et $Y = \dfrac{1}{y - 2}$).

b) $\begin{cases} 5(x - 1)^2 - 2(y - 1)^2 = 14 \\ 2(x - 1)^2 - 3(y - 1)^2 = -1 \end{cases}$; (On pourra poser : $X = (x - 1)^2$ et $Y = (y - 2)^2$)).

33 Le plan est muni du repère (O, I, J). On considère les droites : $(D_1) : 2x - y - 11 = 0$; $(D_2) : 3x - 2y - 17 = 0$ et $(D_3) : 5x + 3y - 22 = 0$.
Démontre que les droites (D_1), (D_2) et (D_3) sont concourantes.

34

1- Résous le système : $\begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = 2 \\ 4x + 0{,}6y = 2{,}6 \end{cases}$

2- Déduis-en les solutions du système :
$$\begin{cases} 3(u^2 + 1) + 6(v^2 - 1) = 12 \\ 4(u^2 + 1) + 6(v^2 - 1) = 26 \end{cases}$$

35 Un sac contient des cartons noirs et des cartons rouges.
Si l'on retire du sac 2 cartons rouges, les cartons rouges restants représentent 60% du nouveau contenu du sac.
Si l'on ajoute 6 cartons noirs au contenu initial du sac, les cartons rouges représentent la moitié de ce nouveau contenu de sac.
Détermine le nombre de cartons noirs et le nombre de cartons rouges qu'il contient au départ.

36 Tous les soirs, Bernard et Jean Claude font de la course à pied. Le parcours est de 12 km.
Ce soir, Bernard est fatigué et il met 20 minutes de plus que Jean Claude pour finir le parcours.
Mais la dernière fois, en allant deux fois plus vite, il était arrivé 10 minutes en avance.
Sachant que Bernard court toujours à la même vitesse, déterminer les vitesses de Jean Claude et de Bernard.

37 Une cliente regarde avec envie un bracelet et une bague présentés dans la vitrine d'un magasin. Le prix total de ces deux bijoux est de 55 000 F et dépasse son budget. Quelques semaines plus tard le prix du bracelet a baissé de 20 % et celui de la bague a baissé de 30 %. Le prix total a baissé de 14 000 F ce qui lui permet d'acheter ces deux bijoux. Détermine le prix du bracelet et celui de la bague avant la baisse.

38 Le périmètre d'un rectangle, mesuré en mètres, est exprimé par le nombre $2p$.
Si l'on augmente sa longueur x de 7 cm et sa largeur y de 2 cm, son aire augmente de 224 cm².

1- Exprime la longueur et la largeur du rectangle en fonction de p.
2- Détermine les valeurs de p pour lesquelles le problème est possible.
3- Représente graphiquement x et y en fonction de p, lorsque p varie entre les limites déterminées à la question précédente (échelle : 1/10).
4- Détermine la valeur de p pour laquelle ce rectangle est un carré.
5- Détermine, en utilisant la calculatrice, les valeurs de p entières pour lesquelles la longueur et la largeur des nombres entiers naturels. Calcule alors les dimensions de ce rectangle.

39 Une personne veut fabriquer pour une vente de charité des ours, et des lapins en peluche. Pour fabriquer un ours, il faut 40 cm de tissu beige et 10 cm de tissu blanc, pour un lapin, il faut 20 cm de tissu beige et 30 cm de tissu blanc. La personne dispose de 1,6 m et de 0,9 m de tissu blanc.
Sachant que la vente d'un ours rapporte un bénéfice de 3.500 F et que la vente d'un lapin rapporte un bénéfice de 4.000 F.
Détermine graphiquement le nombre d'ours et de lapins que l'on doit fabriquer pour obtenir un bénéfice maximum.

40

1- Résous le système : $\begin{cases} 2x - 4y = 7 \\ 3x + y = a \end{cases}$

x et y sont les nombres inconnus, a est un nombre supposé connu.

2- Détermine les conditions que le nombre a doit satisfaire pour que dans la solution précédemment trouvée, le nombre x soit positif et le nombre y négatif.
Vérifie graphiquement le résultat trouvé.

41

1- Résous le système : $\begin{cases} 2x - y = -3 \\ 3x + y = a \end{cases}$

2- Vérifie graphiquement le résultat de 1).
3- Résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $2x + 1 \geq 4x + 1$, puis interprète ce résultat à l'aide du graphique du 2).
4- Résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(2x + 3)(4x + 1) > 0$, puis interprète ce résultat à l'aide du graphique du 2).

1 Le club journal de ton établissement a travaillé dur pour rédiger leur premier journal. Il souhaite faire éditer ce journal avant la fin du premier trimestre. Il prend rendez-vous avec un éditeur qui lui propose deux types de contrat. (le journal est vendu à 100 F).

Contrat 1	Contrat 2
Le club gagne 10 % sur chaque journal vendu	Le club gagne la somme de 10 000 F plus 5 % par journal vendu

Le club décide de choisir le contrat le plus avantageux. Pour cela il sollicite un groupe d'élèves de niveau 2nd C dont tu fais partie pour l'aider dans son choix. nées.

1. Détermine graphiquement le contrat le plus intéressant suivant le nombre de journaux vendus.
2. Retrouve algébriquement le résultat de 1) puis indique au club le type de contrat à choisir.

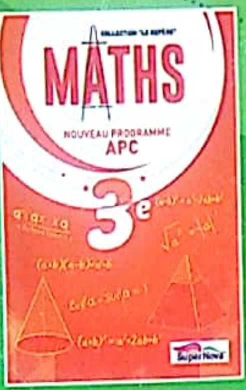
RENDEZ-VOUS DES CURIEUX !

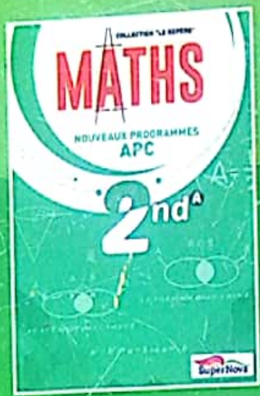
Zhu Shijie (1270-1330), un mathématicien chinois, a publié en 1209 un ouvrage détaillant de nombreuses techniques de résolution algébrique de problèmes. Les méthodes employées ressemblent à celles que nous utilisons encore aujourd'hui : choix des inconnues, construction d'une équation et résolution numérique de celle-ci. La différence fondamentale tient pourtant en ce que le calcul algébrique y est effectué à l'aide des bâtonnets.
Seki Takakazu (? - 1708) et son élève Takebe Katahiro (1664-1739), deux mathématiciens japonais, ont prolongé et modernisé ce travail. Ils ont dissocié le calcul de son support à l'époque indispensable qu'est le bâtonnet. Leur nouvelle approche du calcul algébrique a permis de ne plus être limité par le nombre d'inconnues et d'être exprimable entièrement par écrit.
De plus, ils ne cherchèrent pas, comme leurs contemporains, à résoudre des problèmes au cas par cas, mais plutôt à établir des méthodes générales indiquant la démarche à employer.

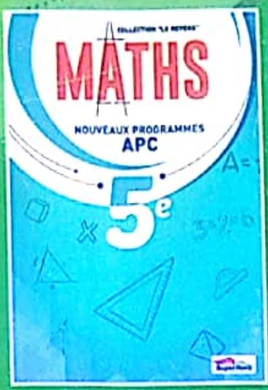
Zhu Shijie (1270-1330)
(source internet)

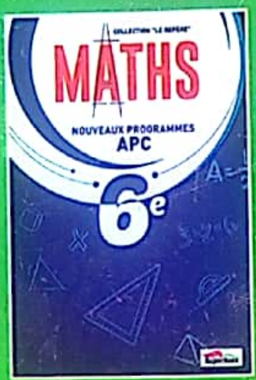
MAQUETTE ET MISE EN PAGES : SERVICE INFOGRAPHIE
Achevé d'imprimer pour le compte
des ÉDITIONS SUPERNOVA
Août 2020
Dépot légal n° 16245 - 1er trimestre 2020

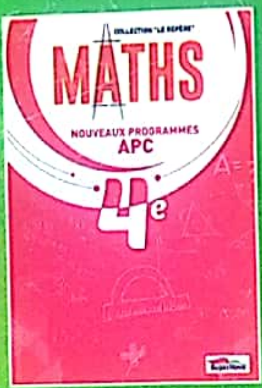
DANS LA MEME COLLECTION

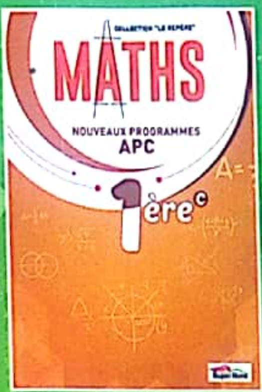


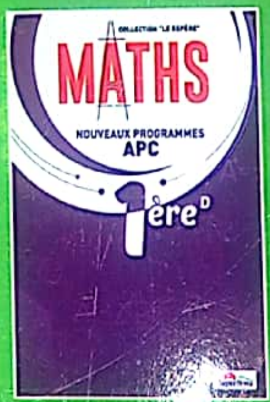


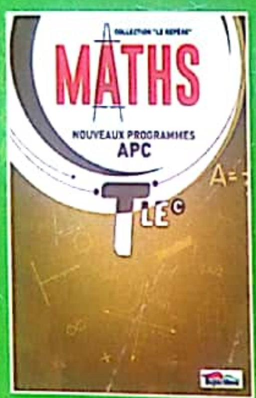


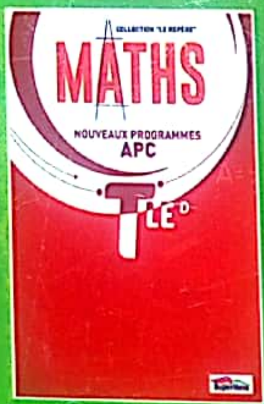


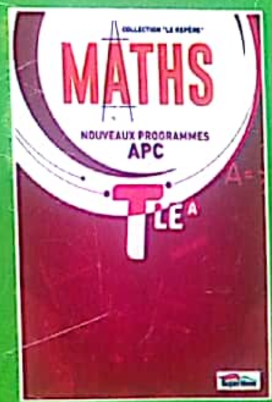












ISBN 9782379670084