PROGRAMME
APC

2^{de} C

Collection
PYRAMIDE

Mon livre de MATHÉMATIQUES

MATÉRIALISEZ VOS IDÉES
JD Editions
L'Edition autrement

3 500
F CFA

Mon livre de Mathématiques 2^{de}C

COLLECTION PYRAMIDE

JD Editions

PROGRAMME APC

2^de^ C

Collection

PYRAMIDE

Mon livre de MATHÉMATIQUES

TUO Pieman
Inspecteur de l'Enseignement Secondaire

AÏKO Okoumon Jean Claude
Encadreur Pédagogique

MAHI Louis Clément
Encadreur Pédagogique

KEWO Seidou
Encadreur Pédagogique

GAGNIE Guillaume
Encadreur Pédagogique

Sous la direction de

TANOH KOUACOU
Docteur en Mathématiques
Inspecteur Général de l'Éducation Nationale
et de l'Alphabétisation

JD Éditions
L'Édition autrement

21 BP 3636 Abidjan 21
Côte d'Ivoire

ISBN : 978-2-493344-43-4

DÉCOUVRIR VOTRE MANUEL

Le manuel de mathématiques de la **collection « PYRAMIDE »** des classes de second C est le fruit d'une étroite collaboration entre plusieurs acteurs du système éducatif de Côte d'Ivoire : Inspecteurs de mathématiques, Encadreurs Pédagogiques de mathématiques et Enseignants de mathématiques des lycées et collèges.
Conforme au programme officiel en vigueur, cet ouvrage a été conçu pour accompagner efficacement la mise en œuvre de l'approche par les compétences. Ce souci d'aide et d'accompagnement des apprenants et des enseignants a amené les auteurs à intégrer à ce support pédagogique sept blocs rédactionnels :

BLOC 1 : COMMENTAIRE DE LA LEÇON

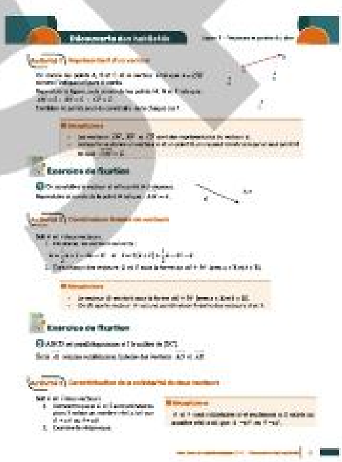
Ce bloc donne un aperçu historique de la notion mathématique, objet de l'étude. Il informe brièvement le lecteur des acquis de l'apprenant par rapport à la leçon, ce qui est attendu de lui lors du déroulement de la leçon et précise éventuellement l'évolution de la notion au cours des études ultérieures de l'apprenant. Ce bloc donne également le domaine d'application de la leçon.

BLOC 2 : HABILETÉS ET CONTENUS

Il présente pour chaque leçon, la liste des habiletés et contenus prescrits par le programme officiel en vigueur. Elle fera l'objet de découpage par le professeur afin d'organiser ses séances journalières de cours.

BLOC 3 : SITUATION D'APPRENTISSAGE

Il s'agit ici de donner du sens aux notions mathématiques et de fixer le cadre des apprentissages. Durant toute la leçon, il sera possible d'exploiter la situation d'apprentissage.



BLOC 4 : DÉCOUVERTE DES HABILETÉS

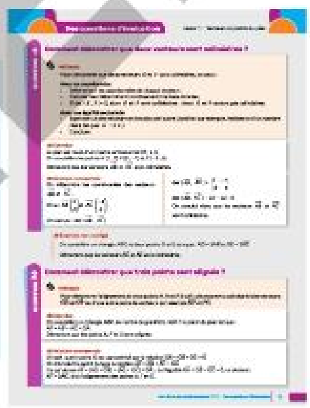
Constitué d'activités de découverte, ce bloc permet de mettre l'élève en situation de recherche. Il comprend également la synthèse de l'activité appelée « récapitulons », suivie d'un ou de plusieurs exercices de fixation.

BLOC 5 : RÉSUMÉ DE LA LEÇON

Ce bloc présente l'essentiel à retenir par l'apprenant. Il comprend des définitions, des propriétés, des remarques…
Chaque définition donnée est suivie d'un exemple et chaque propriété est suivie d'un exemple d'application. Ce bloc oriente les apprenants à travers la rubrique « pour s'entraîner » vers certains types d'exercices contenus dans le bloc «mes séances d'exercices».

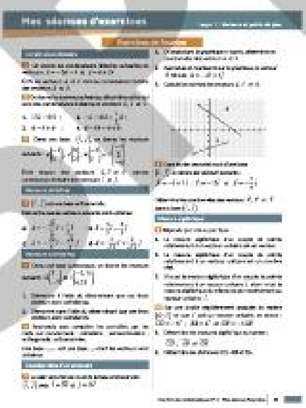
BLOC 6 : DES QUESTIONS D'ÉVALUATION

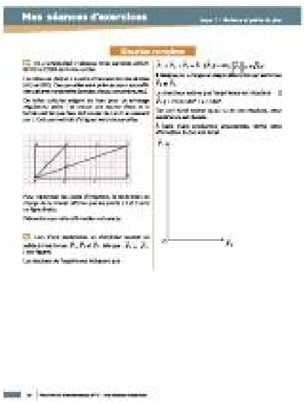
Il est constitué de plusieurs habiletés/contenus exigibles selon le programme. Chaque habileté/contenu retenu est formulé sous la forme d'une question. Un point méthode relatif à l'habileté/contenu est proposé au lecteur. Ce point méthode est suivi d'un exercice corrigé et commenté. Un autre exercice du même type est proposé afin de vérifier l'acquisition de l'habileté/contenu retenu.



BLOC 7 : MES SÉANCES D'EXERCICES

Ce bloc est composé d'exercices de fixation, d'exercices de renforcement, d'exercices d'approfondissement et de situations complexes. L'objectif ici est de renforcer les acquis installés durant le déroulement de la leçon.





Les auteurs voudraient s'excuser pour d'éventuelles erreurs ou fautes de frappe contenues dans ce manuel.
Ils vous remercient d'avance de bien vouloir les signaler à l'adresse :
jdeditions@yahoo.fr, afin de contribuer à l'amélioration continue du présent ouvrage.

Comment utiliser ce manuel

Pour l'élève

- Commentaire de la leçon : Il t'indiquera l'historique de la notion que tu vas étudier. Il te dira ce que tu as déjà appris sur cette notion et ce que deviendra la notion au cours de tes études ultérieures.
- Habiletés et contenus : Il t'informera sur ce que tu dois savoir et ce que tu dois savoir faire à l'issue de cette leçon. Tu t'entraîneras sur chaque habileté/contenu afin de t'auto - évaluer.
- Situation d'apprentissage : Tu liras la situation d'apprentissage avant de venir en classe. Si tu ne la comprends pas, tu poseras ensuite des questions à ton professeur le jour de la leçon.
- Découverte des habiletés : Tu exécuteras les consignes que ton professeur te donnera. Mais avant de venir en classe, tu essayeras de lire les consignes qui sont dans ton livre même si tu ne les comprends pas toujours.
- Résumé de la leçon : Tu devras retenir mais surtout comprendre le contenu de ce bloc. Des exemples y sont donnés pour faciliter ta compréhension. Tu utiliseras le contenu de ce bloc pour préparer les séances d'exercices, les contrôles continus et les questions d'évaluation. Tu utiliseras la rubrique «Pour s'entraîner» afin de mieux approfondir une habileté/contenu donnée.
- Des questions d'évaluation : Tu essayeras de comprendre le point méthode proposé dans ce bloc. Tu essayeras de faire toi-même l'exercice corrigé mais sans regarder la correction. Tu compareras ta production à la solution commentée et tu feras immédiatement l'exercice non résolu afin de t'assurer que tu as bien compris le point méthode.
- Mes séances d'exercices : Dans le résumé de cours, tu seras constamment renvoyé à cette rubrique. Tu utiliseras ces renvois pour t'entraîner sur les habiletés/contenus bien précises. Il faut varier les types d'exercices que tu résous. Tu résoudras en particulier toutes les situations d'évaluation de cette rubrique.

Pour l'enseignant

- Commentaire de la leçon : Vous utiliserez ce bloc pour :
  - motiver les apprenants à travers une brève histoire de la notion et l'évolution de la notion au cours des études ultérieures de l'apprenant;
  - préparer les prérequis nécessaires à la leçon.
- Habiletés et contenus : Vous utiliserez ce bloc pour orienter toute la leçon. Vous découperez ce bloc en séances de 55 minutes de telle sorte que ce découpage corresponde au temps imparti à la leçon. Vous veillerez à ce que la majorité des élèves comprennent les habiletés/contenus de ce bloc.
- Situation d'apprentissage : Vous ferez lire en classe la situation d'apprentissage directement dans le manuel de l'apprenant. Vous pourrez mettre les apprenants en groupe pour aider ceux qui n'ont pas de manuel. Vous ferez dégager les constituants de la situation par les élèves avant d'annoncer le plan de la leçon. En tout état de cause, vous pouvez consulter le guide du professeur de ce manuel.
- Découverte des habiletés : Vous utilisez ce bloc pour mettre les apprenants en activités ; donnez-leur un temps de recherche ponctué par des aides collectives ou individuelles ; la phase de formulation à l'issue de la recherche correspond à la rubrique « récapitulons » : essayez de la faire formuler par les apprenants avant d'aborder la trace écrite et l'exercice de fixation.
- Résumé de la leçon : L'enseignant pourra utiliser ce bloc pour évaluer les niveaux taxonomiques relatifs à la connaissance, à la compréhension et à l'application. Cette utilisation de ce bloc par l'enseignant incitera les apprenants à apprendre et à comprendre l'essentiel à retenir par rapport à une leçon donnée. La rubrique « pour s'entraîner » aidera l'enseignant à opérer des choix d'exercices par rapport à ses objectifs opérationnels.
- Des questions d'évaluation : Les questions d'évaluation ne sont pas à faire uniquement à la fin de la leçon. Elles peuvent être utilisées en classe au cours de la leçon ou lors des séances de travaux dirigés. L'enseignant pourra commenter avec ses élèves le point méthode, l'exercice commenté pour mieux faire comprendre le point méthode et soumettre ensuite ses élèves à l'exercice non corrigé.
- Mes séances d'exercices : Le professeur utilisera ce bloc pour faire travailler les apprenants aussi bien en classe qu'à la maison. Il s'en servira aussi pour animer des séances de travaux dirigés directement avec le manuel, grâce à la sélection d'exercices appropriés. Les situations complexes sont à faire traiter par les élèves.

Pour le parent d'élève

- Commentaire de la leçon : Le parent s'informera sur l'histoire de la notion, discutera avec ses enfants afin de les motiver à aborder la leçon.
- Habiletés et contenus : Le parent suivra les acquis de son enfant en l'amenant à s'exercer sur chaque habileté/contenu de ce bloc.
- Situation d'apprentissage : Le parent fera lire la situation d'apprentissage de la prochaine leçon à son enfant à la maison dès qu'il se rendra compte qu'une leçon est terminée. Il pourra essayer d'expliquer s'il le peut ce dont il est question dans la situation.
- Découverte des habiletés : Le parent vérifiera à la maison si l'enfant a compris l'activité de découverte et qu'il sait faire l'exercice de fixation qui lui est rattaché.
- Résumé de la leçon : Le parent utilisera ce bloc pour s'assurer que l'enfant apprend sa leçon. Sans être un spécialiste de la discipline, il peut utiliser ce bloc pour évaluer les connaissances de son enfant.
- Des questions d'évaluation : Le parent utilisera cette rubrique pour vérifier les acquis de ses enfants par rapport à une habileté précise. Il encouragera ses enfants à traiter cette rubrique et s'assurera avec l'aide du professeur que ses enfants ont bien acquis l'habileté retenue.
- Mes séances d'exercices : Le parent peut faire travailler ses enfants en utilisant ce bloc et en les encourageant à faire des exercices variés.

Sommaire

1 VECTEURS ET POINTS DU PLAN

Commentaire de la Leçon

Sir William Rowan Hamilton, mathématicien irlandais (1805-1865) fut le premier à employer le terme de vecteur. Ses travaux sur une forme de multiplication de triplets de nombres réels l'ont conduit, en 1843, à la découverte de la notion de quaternions. Les quaternions sont de nouveaux nombres, constitués de quatre composantes dans l'ensemble des nombres complexes étudiés en classe de terminale. Leurs applications dans les domaines de la physique et des mathématiques ont contribué à la naissance du calcul vectoriel.

La notion de vecteur apparait dans le parcours scolaire de l'apprenant dès la classe de quatrième. En classe de troisième, les notions de : vecteurs colinéaires, de vecteurs orthogonaux, les propriétés relatives au produit d'un vecteur par un nombre réel etc. sont connues. L'apprenant sait utiliser une égalité vectorielle pour justifier un alignement de points ou le parallélisme de deux droites. En classe de seconde C, il s'agira de consolider la notion de vecteur, d'introduire la mesure algébrique d'un couple de points et de présenter la notion de base d'un plan vectoriel et de repère du plan. En exercice, on pourra caractériser vectoriellement le centre de gravité d'un triangle.

La mesure algébrique permettra de définir le produit scalaire. On fera le lien entre la notion de vecteur et de force ou de vitesse d'un mobile (caractérisée par une direction, un sens et une intensité et non uniquement par l'intensité « je roule à 60km/h ») etc. La notion de vecteur se prolongera en première C par l'étude des vecteurs de l'espace qui sera réinvestie dans l'étude de la géométrie analytique de l'espace en classe de terminale C.

Aujourd'hui, les vecteurs sont présents dans des domaines nombreux et très variés : économie, traitement de l'image en mécanique, optique, …

Habiletés et Contenus

- ✓ **Connaître** la définition d'une combinaison linéaire de vecteurs ; la définition de deux vecteurs colinéaires; la définition de la norme d'un vecteur ; la définition d'un vecteur unitaire ; la définition d'une base orthonormée ; la définition de la mesure algébrique d'un couple de points ; la définition du déterminant d'un couple de vecteurs ; la définition d'un repère du plan ; les règles de calculs sur les vecteurs ; la propriété relative à l'existence et à l'unicité du point M tel que : $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$, où O est un point et $\vec{u}$ un vecteur ; la propriété relative à la colinéarité de deux vecteurs ; la propriété fondamentale relative aux coordonnées d'un vecteur ; l'expression de la norme d'un vecteur dans une base orthonormée ; la caractérisation de la colinéarité de deux vecteurs.
- ✓ **Noter** un vecteur en utilisant une lettre minuscule,
- ✓ **Écrire** un vecteur comme combinaison linéaire des vecteurs de base connaissant les coordonnées de ce vecteur dans cette base.
- ✓ **Représenter** un vecteur connaissant ses coordonnées.
- ✓ **Tracer** une droite connaissant un de ses points et un de ses vecteurs directeurs.
- ✓ **Construire** le point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$; un représentant d'une combinaison linéaire de vecteurs.
- ✓ **Décomposer** un vecteur en combinaison linéaire de deux vecteurs non colinéaires graphiquement ou algébriquement.
- ✓ **Calculer** le déterminant de deux vecteurs ; la norme d'un vecteur dans une base orthonormée.
- ✓ **Déterminer** les coordonnées d'un vecteur ou d'une combinaison linéaire de vecteurs dans une base ; une équation cartésienne de droite en utilisant le déterminant de deux vecteurs.
- ✓ **Justifier** que deux droites sont parallèles en utilisant le déterminant de deux vecteurs ; que des points sont alignés en utilisant le déterminant de deux vecteurs.
- ✓ **Démontrer** qu'un couple de vecteurs est une base du plan vectoriel $\mathcal{V}$; l'alignement de trois points en utilisant la colinéarité de deux vecteurs ; le parallélisme de deux droites en utilisant la colinéarité de deux vecteurs.
- ✓ **Simplifier** une expression vectorielle en utilisant la relation de Chasles.
- ✓ **Traiter une situation** faisant appel aux vecteurs et aux points du plan.

Situation d'Apprentissage

Un élève d'une classe de 2^de^ C effectue des recherches sur les circuits R, C. Il découvre l'exercice ci-dessous.

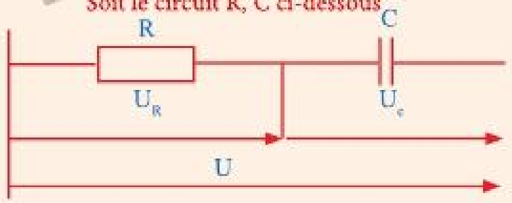
Un circuit R, C est un circuit électrique composé d'une résistance (R) et d'un condensateur (C) montés en série comme l'indique la figure ci-dessous.

On donne : $\|\vec{u}_R\| = 40$ volts et $\|\vec{u}_c\| = 30$ volts.

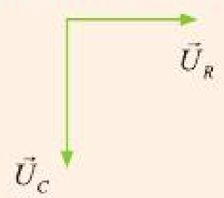
À partir du diagramme de Fresnel, construis $\vec{U} = \vec{U}_R + \vec{U}_c$ et calcule l'intensité $\|\vec{U}\|$ de $\vec{U}$.

Ayant des difficultés, il le propose à ses camarades de classe. Ceux-ci décident de faire des recherches sur les vecteurs et points du plan pour résoudre l'exercice.

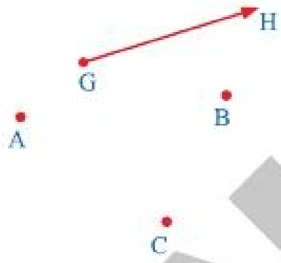
Soit le circuit R, C ci-dessous



Le diagramme de Fresnel représentatif de l'état du circuit est :



Activité 1 Représentant d'un vecteur



On donne les points A, B et C et le vecteur $\vec{u}$ tel que $\vec{u} = \overrightarrow{GH}$ comme l'indique la figure ci-contre.

Reproduis la figure, puis construis les points M, N et P tels que : $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$; $\overrightarrow{BN} = \vec{u}$; $\overrightarrow{CP} = \vec{u}$.

Combien de points peut-tu construire dans chaque cas ?

Récapitulons

- Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BN}$ *et* $\overrightarrow{CP}$ sont des représentants du vecteur $\vec{u}$.
- Lorsqu'on se donne un vecteur $\vec{u}$ et un point O, on ne peut construire qu'un seul point M tel que : $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.

Exercice de fixation

1 On considère le vecteur $\vec{u}$ et le point A, ci-contre.
Reproduis et construis le point M tel que : $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$.

Activité 2 Combinaison linéaire de vecteurs

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

On donne les vecteurs suivants :

$$\vec{w} = \frac{1}{2}\vec{u} + \vec{v} - 4\vec{u} - 3\vec{v} \quad et \quad \vec{x} = 2(\vec{u} + \vec{v}) + \frac{1}{2}\vec{u} - 6\vec{v} - \vec{u} .$$

Écris chacun des vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{x}$ sous la forme $a\vec{u} + b\vec{v}$ (avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$).

Récapitulons

- Le vecteur $\vec{w}$ est écrit sous la forme $a\vec{u} + b\vec{v}$ (avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$).
- On dit que le vecteur $\vec{w}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Exercice de fixation

2 ABCD est un parallélogramme et I le milieu de [BC].

Écris le vecteur $\overrightarrow{AI}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB}$.

Activité 3 Caractérisation de la colinéarité de deux vecteurs

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

1. Démontre que si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors il existe un nombre réel α tel que $\vec{u} = \alpha\vec{v}$ ou $\vec{v} = \alpha\vec{u}$.
2. Examine la réciproque.

Récapitulons

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un nombre réel α tel que $\vec{u} = \alpha\vec{v}$ ou $\vec{v} = \alpha\vec{u}$.

Remarques

- La colinéarité de deux vecteurs traduit le parallélisme ou l'alignement.
- Pour démontrer par exemple que des points A, B et C deux à deux distincts sont alignés, il suffit d'établir une relation de colinéarité du type : $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

Exercices de fixation

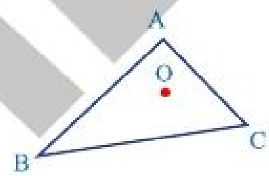
3 ABC est un triangle. On considère les points J, K et L tels que :

$6\overrightarrow{JK} = 3\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{BA}$ et $2\overrightarrow{KL} = 3\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{BA}$.

1. Démontre que les vecteurs $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{KL}$ sont colinéaires.
2. Déduis-en la position des points L, J et K.

4 On considère quatre points E, G, J et P tels que trois points quelconques d'entre eux ne soient pas alignés et tels que : $\overrightarrow{EJ} + \overrightarrow{PG} = \vec{0}$.
Démontre que les droites (JP) et (EG) sont parallèles.

Activité 4 Base et repère du plan



Sur la figure ci-contre, ABC est un triangle quelconque et O un point.

1. Justifie que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Justifie que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

Récapitulons

- Le triplet (A, B, C) est un repère du plan (P).
- Le couple de vecteurs ($\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$) est une base du plan vectoriel $\mathcal{V}$.

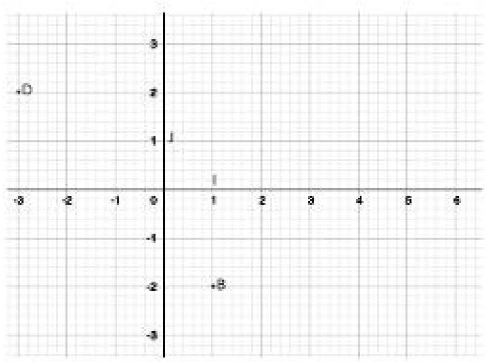
Exercice de fixation

5 EFGH est un parallélogramme de centre J.
Écris dans ton cahier le numéro de l'affirmation suivi de V si l'affirmation est vraie ou de F si l'affirmation est fausse.

1. $(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{GH})$ est une base ;
2. $(\overrightarrow{JF}, \overrightarrow{GH})$ est une base ;
3. $(\overrightarrow{FG}, \overrightarrow{FH})$ n'est pas une base ;
4. $(\overrightarrow{EG}, \overrightarrow{FH})$ est une base ;
5. (E, J, H) est un repère du plan ;
6. (E, H, J) est un repère du plan ;
7. (J, G, F) est un repère du plan .

Activité 5 Coordonnées d'un vecteur dans une base

Sur le graphique ci-contre, $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ est une base et on pose : $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$.



1. Recopie et place sur le graphique le point A tel que : $\overrightarrow{OA} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$.
2. Écris les vecteurs $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OD}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{i}$ *et* $\vec{j}$.
3. Démontre que $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB}$; déduis-en l'écriture du vecteur $\overrightarrow{BD}$ en fonction des vecteurs $\vec{i}$ *et* $\vec{j}$.

Récapitulons

- $\overrightarrow{OA} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$; on dit que le couple (4 ; 2) est le couple de coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OA}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.
- $\overrightarrow{BD}$ a pour coordonnées le couple (–4 ; 4) dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Exercices de fixation

6 Le plan vectoriel est muni d'une base ($\vec{k}$, $\vec{i}$).

Dans chacun de ces cas, détermine le couple de coordonnées du vecteur $\vec{u}$.

1. $\vec{u} = 3\vec{k} - 4\vec{i}$;
2. $\vec{u} = -5\vec{i} + 3\vec{k}$;
3. $\vec{u} = -7\vec{i}$;
4. $\vec{u} = \sqrt{7}\vec{k}$.

7 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
On donne les points A (−4 ; −1), B (3 ; −3) et C(2 ; 4).

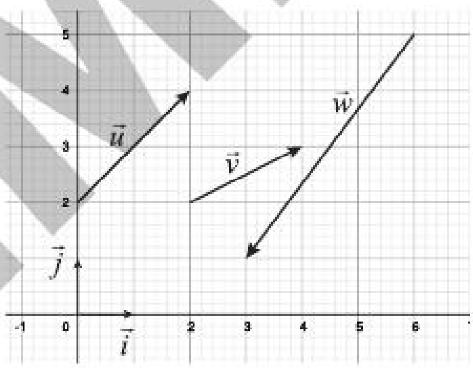
1. Détermine les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CB}$.

2. Détermine les coordonnées des vecteurs $2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ et $-0{,}8\overrightarrow{BA} - 2{,}4\overrightarrow{BC}$.

8 Soit ABCD un parallélogramme de centre O.
Justifie que le vecteur $\overrightarrow{OA}$ a pour couple de coordonnée $\left(\frac{-1}{2} ; \frac{-1}{2}\right)$ dans la base $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$.

9 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.
Un représentant de chacun des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est donné sur la figure ci-dessous.

1. Exprime les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ en fonction des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
2. Déduis-en les coordonnées de chacun des vecteurs suivants : $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ dans la base ($\vec{i}$, $\vec{j}$).



Activité 6 Base orthonormé

Soit ABCD un carré de côté 1.

1. Justifie que le triplet (A, B, D) est un repère du plan.
2. Justifie que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux.
3. Détermine AB et AD.

Récapitulons

- $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$ et AB = AD = 1, la base $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$ est une base orthonormée de $\mathcal{V}$.
- Un repère (O, I, J) tel que $\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$ est une base orthonormée est appelé un repère orthonormé du plan (P).
- Un repère $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}\right)$ tel que $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ est une base orthonormée est appelé un repère orthonormé du plan vectoriel $\mathcal{V}$.

Remarques

À la place du vocabulaire « orthonormé », on utilise aussi le vocabulaire « orthonormal ».

Exercice de fixation

10 Écris dans ton cahier le numéro de l'affirmation suivi de V si l'affirmation est vraie ou de F si l'affirmation est fausse.
E, F et G sont trois points distincts non alignés du plan.
1. Si $(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EG})$ est une base orthonormée, alors $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EG}$;
2. Si la droite (EF) est perpendiculaire à la droite (GE), alors la base $(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EG})$ est toujours orthonormée ;
3. Si la droite (EF) est perpendiculaire à la droite (EG) et EF = GE = 1, alors la base $(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{GH})$ est orthonormée.

Activité 7 Norme d'un vecteur et vecteur unitaire

On considère le carré ABCD de côté 1 unité, I le milieu de [DB] et P le point tel que :
$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{AD}$ et la base orthonormée $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$.

1. Démontre que : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.
2. Calcule la distance AI.
3. Démontre que : OP = 1.

Récapitulons

- La distance AI est appelée la norme du vecteur $\overrightarrow{AI}$ dans la base orthonormée $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$; on la note $\left\|\overrightarrow{AI}\right\|$.
- Le vecteur $\overrightarrow{OP}$ est tel que : $\left\|\overrightarrow{OP}\right\| = 1$. Le vecteur $\overrightarrow{OP}$ est un vecteur unitaire.

Exercice de fixation

11 Soit ABCD un carré de côté 1 unité.
Soit M le point du plan tel que : $\overrightarrow{AM} = -2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.
Détermine $\left\|\overrightarrow{AM}\right\|$ dans la base $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$.

Activité 8 Inégalité triangulaire

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, A, B et C trois points du plan tels que : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$.
1. Démontre que : AC $\leq$ AB + BC.
2. Déduis-en que : $\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.
3. Démontre que : $\|-2\vec{u}\| = 2\|\vec{u}\|$.

Récapitulons

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.
Cette inégalité est appelée *inégalité triangulaire*.
Pour tout vecteur $\vec{u}$ et tout nombre réel λ : On a : $\|\lambda\vec{u}\| = |\lambda|\|\vec{u}\|$.

Exercices de fixation

12 Écris dans ton cahier le numéro de l'affirmation suivi de V si l'affirmation est vraie ou de F si l'affirmation est fausse.

1. Si $\vec{u} = -5\overrightarrow{AB}$, alors $\|\vec{u}\| = 5\overrightarrow{AB}$.
2. Si $\vec{u} = -2\overrightarrow{AB}$, alors $\|\vec{u}\| = 2AB$.
3. Si $\vec{u} = 9\overrightarrow{AB}$, alors $\|\overrightarrow{AB}\| = \frac{\|\vec{u}\|}{9}$.
4. $\|\vec{u}+\vec{v}\| > \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

13 Écris dans ton cahier le numéro de l'affirmation suivi de V si l'affirmation est vraie ou de F si l'affirmation est fausse.

1. La norme d'un vecteur unitaire est égale à : −1.
2. Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur d'une droite (D). Pour deux points distincts A et B de (D), $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas colinéaires.
3. Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O ; I, J), il y a exactement deux vecteurs unitaires qui sont : $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$.
4. $\vec{u}$ n'est pas un vecteur directeur d'une droite (D) si pour deux points distincts A et B de (D), on a : $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB}$.

Activité 9 Déterminant de deux vecteurs.

Le plan vectoriel $\mathcal{V}$ est muni de la base $(\vec{i}, \vec{j})$. Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{u}'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs de $\mathcal{V}$.

1. Détermine une relation entre x, x', y et y' pour que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ soient colinéaires.
2. On donne les points A(1 ; 1) ; B(−2 ; 7) et C(2 ; −1). Démontre que les points A, B et C sont alignés.

Récapitulons

- Le nombre réel $xy' - x'y$ s'appelle le déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.
  On le note : $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\end{vmatrix} = xy' - x'y$.
- Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont colinéaires si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$, dans une base donnée.
- Trois points A, B et C sont alignés si et seulement si $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$, dans une base donnée.

Exercices de fixation

14 On donne $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{u}'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan vectoriel $\mathcal{V}$ muni d'une base.

Indique dans ton cahier la lettre correspondant à la bonne réponse.

$\det(\vec{u}, \vec{v})$ est égal à :

a) $xx' - yy'$; **b)** $x'y' - xy$; **c)** $xy' - yx'$;

d) $xx' + yy'$; **e)** $y'x + x'y$.

15 On donne les combinaisons linéaires de vecteurs suivantes : $\vec{x} = -3\vec{u} - \vec{v}$ et $\vec{y} = \vec{u} + 2\vec{v}$

Calcule $\det(\vec{x}, \vec{y})$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$.

Activité 10 Équation cartésienne d'une droite.

1. Le plan est muni d'un repère (O, I, J). On donne les points A(−5 ; −2) et B(2 ; 3). À l'aide du déterminant, détermine une équation cartésienne de la droite (AB).
2. Soit A et B, deux points distincts du plan. Justifie que : $M \in (AB) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0$.

Récapitulons

$M \in (AB) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0$.

Exercice de fixation

16 Le plan est muni d'un repère (O, I, J).
Dans chacun des cas ci-dessous, détermine une équation de la droite (AB).

a) $A\left(-\dfrac{2}{3}\,;1\right)$ *et* $B\left(\dfrac{4}{5}\,;\dfrac{1}{4}\right)$.

b) $A\left(1;-\sqrt{2}\right)$ et $B\left(\sqrt{2}\,;-\sqrt{2}\right)$.

Activité 11 Mesure algébrique

Soit (D) une droite orientée de repère $\left(O;\vec{i}\right)$ où $\vec{i}$ est un vecteur unitaire tel que : $\vec{i}=\overrightarrow{OI}$.

1. Détermine les nombres réels α et β tels que $\overrightarrow{ML}=\alpha\vec{i}$ et $\overrightarrow{FJ}=\beta\vec{i}$.
2. Détermine les abscisses x_J, x_M, x_F et x_L des points J, M, F et L dans le repère $\left(O;\vec{i}\right)$.
3. Compare les nombres $x_L - x_M$ et α d'une part et $x_J - x_F$ et β d'autre part.

Récapitulons

- Le nombre réel α est appelé la mesure algébrique de (M, L) relativement au vecteur $\vec{i}$.
- La mesure algébrique de (M, L) est notée : $\overline{ML}$.
- On a : $\overline{ML}=x_L - x_M$.

Exercices de fixation

17 Recopie dans ton cahier les tableaux 1 et 2, puis relie chaque mesure algébrique du tableau 1 à sa valeur correspondante du tableau 2.

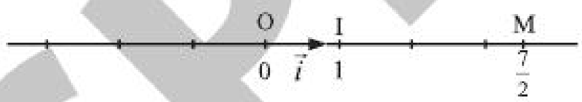


Tableau 1

$\overline{IO}$ •
$\overline{IM}$ •
$2\overline{OM}$ •
$\overline{MO}$ •

Tableau 2

• $\dfrac{5}{2}$
• $-\dfrac{7}{2}$
• -1
• 7

18 Soit (D) une droite orientée par un vecteur unitaire $\vec{i}$.
A, B, C, D, E, F et G sont des points de (D) comme indiqués sur la figure ci-dessous :

1. Détermine : $\overline{AB}$; $\overline{AE}$; $\overline{CD}$; $\overline{FG}$; $\overline{DF}$.

2. Calcule :

$$\overline{AD}+\overline{DG}\ ;\ \overline{BF}-\overline{FG}\ ;\ \overline{AC}+\overline{DE}\ ;\ 3\overline{DC}-\frac{5}{2}\overline{FE}\ ;$$

$$\overline{AC}\times\overline{CD}\ \textit{et}\ \frac{\overline{GC}}{\overline{GB}}.$$

1. VECTEURS

a) Propriété fondamentale

Pour tout point O et tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique point M tel que : $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.

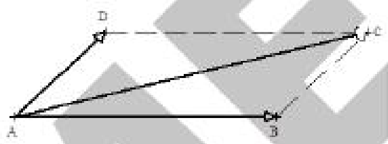
b) Somme de deux vecteurs

Propriété et définition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et des points A, B et C tels que : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ *et* $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$.
Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est indépendant des représentants des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Il est appelé la somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On écrit : $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

Exemple

Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est la somme des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.



Pour s'entraîner : Exercice 13 ; 14 ; 15 ; 29

c) Produit d'un vecteur par un nombre réel (rappel)

Propriété

Soit $\vec{u}$ un vecteur.

- $0.\vec{u} = \vec{0}$.
- Pour tout nombre réel t, $t.\vec{0} = \vec{0}$.
- Pour tout nombre réel t : $t\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow t = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$.
- Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ *et* $\vec{w}$ et tous nombres réels λ et μ, on a :

$(\lambda + \mu)\vec{u} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{u}$; $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$; $\lambda(\mu\vec{u}) = (\lambda\mu)\vec{u}$; $1\vec{u} = \vec{u}$.

Exemples d'application

- $3(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) = 3\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{CD}$.
- Posons : $\overrightarrow{AM} = -2\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AD}$.

$\overrightarrow{AM} = -2(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD})$, donc $\overrightarrow{AM} = -2\,\overrightarrow{DB}$.

Pour s'entraîner : Exercice 26 ; 29

d) Combinaison linéaire de deux vecteurs

Définition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On appelle combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, tout vecteur de la forme $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ où λ et μ sont des nombres réels.

Propriétés

- Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un nombre réel λ tel que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ ou $\vec{v} = \lambda\vec{u}$.
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs colinéaires si et seulement si il existe une combinaison linéaire nulle de ces vecteurs sans que ses coefficients soient tous les deux nuls.

Exemple

On pose : $\vec{v} = -2\vec{u} + 7\vec{k}$

Le vecteur $\vec{v}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{k}$.

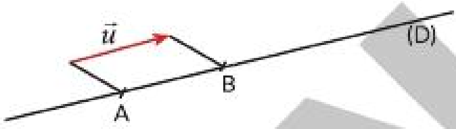
Pour s'entraîner : Exercice 22 ; 26 ; 27

e) Vecteurs directeurs d'une droite

Définition
On appelle vecteur directeur d'une droite (D), tout vecteur non nul $\vec{u}$ tel qu'il existe deux points distincts A et B de (D) vérifiant : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

Exemple

Le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite (AB).



Pour s'entraîner : Exercice 34 ; 37

f) Norme d'un vecteur

Définition
On appelle norme d'un vecteur $\vec{u}$ de représentant (A, B), la distance AB. On note : $\|\vec{u}\|$ = AB.

g) Vecteur unitaire

Définition
On appelle vecteur unitaire, tout vecteur dont la norme est égale à 1.

Propriété
Pour tout vecteur $\vec{u}$ non nul, il existe deux vecteurs unitaires colinéaires à $\vec{u}$.
Ces deux vecteurs sont opposés.

h) Centre de gravité d'un triangle

Propriété
Un point G est centre de gravité d'un triangle ABC si et seulement si : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Pour s'entraîner : Exercice 38

2. BASES ET REPÈRE

a) Coordonnée d'un vecteur

Propriété
Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ un couple de vecteurs non colinéaires.
Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique couple (x, y) de nombres réels tels que : $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Définition
Tout couple $(\vec{i}, \vec{j})$ de vecteurs non colinéaires est appelé une base de l'ensemble $\mathcal{V}$ des vecteurs du plan.
Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base. L'unique couple (x, y) de nombres réels tels que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ est appelé couple de coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$. On écrit : $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

b) Repère du plan

Définitions

- On appelle repère du plan, la donnée d'un triplet (O, I, J) où les points O, I et J ne sont pas alignés. Le point O est appelé l'origine du répère.
- On appelle repère du plan vectoriel, la donnée d'un triplet $(O; \vec{i}, \vec{j})$ où $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base du plan vectoriel.

Propriété

Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base du plan vectoriel, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et λ un nombre réel.

Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{u'}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, alors $\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$; $\lambda\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$.

Exemple

- Soit $(\vec{i},\vec{j})$ une base orthonormée, et $\vec{u}$ un vecteur tel que : $\vec{u} = -3\vec{i}+\vec{j}$.
- Le vecteur $2\vec{u}$ a pour couple de coordonnées (– 6, 2).

Pour s'entraîner : Exercice 22 ; 25 ; 28

Définition d'une base orthogonale et d'une base orthonormée

Un couple $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base orthogonale si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vérifient simultanément les conditions suivantes :

(1) $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base ; (2) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux ;

Un couple $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base orthonormée si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vérifient simultanément les conditions suivantes :

(1) $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base orthogonale ; (2) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont unitaires.

Expression de la norme dans une base orthonormée

Propriété

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur dans une base orthonormée. On a : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$.

Exemple d'application

Soit $(\vec{i},\vec{j})$ une base orthonormé, et $\vec{u}$ un vecteur tel que : $\vec{u} = -3\vec{i}+\vec{j}$.
Déterminons $||\vec{u}||$ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$.
$||\vec{u}|| = \sqrt{(-3)^2+1^2}$, donc $||\vec{u}|| = \sqrt{10}$.

Pour s'entraîner : Exercice 16 ; 17

Déterminant de deux vecteurs

Soit deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{u'}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs dans une base quelconque.

Le déterminant de $(\vec{u}, \vec{v})$ relativement à cette base est le nombre réel noté $\det(\vec{u}, \vec{v})$ défini par :

$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$.

Propriété
Dans une base donnée, deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant relativement à cette base est nul.

Remarque
Les coordonnées d'un vecteur se déterminent dans une base, tandis que celles d'un point se déterminent dans un repère.

Exemple

Le plan vectoriel est rapporté à une base $(\vec{i}, \vec{j})$. On donne : $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\1,5\end{pmatrix}$.
Justifions que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
$\det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix}-2 & -1\\3 & 1,5\end{vmatrix}$ = −2 × 1,5 + 3 = 0. Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Pour s'entraîner : Exercice 18 ; 19 ; 24 ; 25

Calculs dans un repère

Dans un repère, on donne les points suivants : A(x_A ; y_A), B(x_B ; y_B), C(x_C ; y_C).
- $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\end{pmatrix}$;
- Le milieu M du segment [AB] a pour coordonnées $\left(\frac{x_A + x_B}{2} ; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$;
- Si ABC est un triangle, alors son centre de gravité G a pour coordonnées $\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3} ; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$.

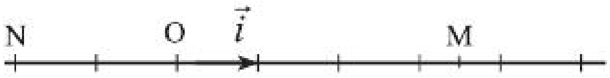
3. MESURES ALGÉBRIQUES

Définition
Soit (D) une droite de repère $(O ; \vec{i})$ où $\vec{i}$ est un vecteur unitaire. Soit A et B deux points de la droite (D).
On appelle mesure algébrique de (A, B) relativement au vecteur $\vec{i}$ le nombre réel noté $\overline{AB}$ défini par $\overline{AB} = \overrightarrow{AB}.\vec{i}$.

Propriété de la mesure algébrique
- $\left|\overline{AB}\right| = AB$ • $\overline{BA} = -\overline{AB}$ • $\overline{AB} = 0 \Leftrightarrow A = B$ • $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ **(Relation de Chasles)**

Exemple

On a : $\overrightarrow{OM} = \frac{7}{2}\vec{i}$ donc $\overline{OM} = \frac{7}{2}$.
On a : $\overrightarrow{ON} = -2\,\vec{i}$ donc $\overline{ON} = -2$.



Pour s'entraîner : Exercice 9 ; 10

QUESTION 1

Comment démontrer que deux vecteurs sont colinéaires ?

Méthode

Pour démontrer que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, on peut :

Avec les coordonnées

- Déterminer les coordonnées de chaque vecteur ;
- Calculer leur déterminant relativement à la base donnée ;
- Si det $(\vec{u}, \vec{v}) = 0$, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ; sinon $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

Avec une égalité vectorielle

- Exprimer un des vecteurs en fonction de l'autre (Justifier par exemple, l'existence d'un nombre réel k tel que : $\vec{u} = k\,\vec{v}$.)
- Conclure.

Exercice

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O ; I, J).
On considère les points A (1 ; 2), B (3 ; −1) et C (−3 ; 8).
Démontre que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Solution commentée

On détermine les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix}$.

On calcule : det $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

det $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix}2 & -4\\-3 & 6\end{vmatrix}$

det $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 12 - 12 = 0$

On conclut donc que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Exercice non corrigé

On considère un triangle ABC et deux points D et E tels que : $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE} = 3\overrightarrow{BC}$.

Démontre que les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires.

QUESTION 2

Comment démontrer que trois points sont alignés ?

Méthode

Pour démontrer l'alignement de trois points M, N et P, il suffit de prouver la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ ou d'une autre paire de vecteurs par exemple $\overrightarrow{NP}$ et $\overrightarrow{PM}$.

Exercice

On considère un triangle ABC de centre de gravité G. Soit F le point du plan tel que :
$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{GA}$.
Démontre que les points A, F et G sont alignés.

Solution commentée

On sait que le point G est caractérisé par la relation $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
On introduit le point G dans la relation $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{GA}$
Ce qui donne $\overrightarrow{AF} = (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB}) + (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GC}) + \overrightarrow{GA}$; de l'égalité $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$, on obtient :
$\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AG}$, d'où l'alignement des points A, F et G.

Exercice non corrigé

Soient A, B et C trois points non alignés du plan.

Construis sur une figure les points M, N et P tels que : $\overrightarrow{MB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MC}$; $\overrightarrow{PA} = \frac{-3}{2}\overrightarrow{PB}$ et $\overrightarrow{NC} = -2\overrightarrow{NA}$.

Démontre que les points M, N et P sont alignés.

(On pourra par exemple utiliser la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$).

QUESTION 3

Comment déterminer un vecteur unitaire colinéaire à un vecteur donné ?

Méthode

Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée et $\vec{u}$ (a, b) un vecteur non nul donné.
Soit $\vec{v}$ un vecteur unitaire et colinéaire à $\vec{u}$.

- On pose que : $\vec{v} = \alpha\vec{u}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ et $||\vec{v}|| = 1$.
- On en déduit que : $|\alpha|\ ||\vec{u}|| = 1$, soit $|\alpha| = \frac{1}{||\vec{u}||}$.
- Il existe donc deux vecteurs colinéaires à $\vec{u}$ et qui sont unitaires : le vecteur $\vec{v}_1 = \frac{1}{||\vec{u}||}\vec{u}$ et le vecteur $\vec{v}_2 = -\frac{1}{||\vec{u}||}\vec{u}$.

Exercice

Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée et $\vec{k}$ $(-1, 2)$ un vecteur.

Détermine les vecteurs unitaires colinéaires au vecteur $\vec{k}$.

Solution commentée

- On calcule $||\vec{k}||$ relativement à la base $(\vec{i}, \vec{j})$

$||\vec{k}|| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$.

- On calcule : $\frac{1}{||\vec{k}||}$

$\frac{1}{||\vec{k}||} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ soit, $\frac{1}{||\vec{k}||} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Les deux vecteurs unitaires et colinéaires au vecteur $\vec{k}$ sont les vecteurs $\vec{k_1}$ et $\vec{k_2}$, tels que :

$\vec{k_1} = \frac{1}{||\vec{k}||}\vec{k}$ et $\vec{k_2} = -\frac{1}{||\vec{k}||}\vec{k}$ soit $\vec{k_1}\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}; \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$ et $\vec{k_2}\left(\frac{\sqrt{5}}{5}; \frac{-2\sqrt{5}}{5}\right)$.

Exercice non corrigé

Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée et $\vec{w}\left(-\sqrt{3}, -1\right)$ un vecteur.
Détermine les vecteurs unitaires colinéaires au vecteur $\vec{w}$.

Exercices de fixation

Combinaison linéaire

1 On donne les combinaisons linéaires suivantes de vecteurs : $\vec{x} = -3\vec{u} - \vec{v}$ et $\vec{y} = \vec{u} + 2\vec{v}$.

Écris les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$.

2 On donne les sommes ci-dessous, détermine celles qui sont des combinaisons linéaires de vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

1. $17\vec{u} - 65\vec{v}$; 2. $-\vec{u} - 65\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}$;
3. $\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$; 4. $\vec{u} - 6\vec{v} + \vec{w} + \vec{0}$.

3 Dans une base $(\vec{i}, \vec{j})$, on donne les vecteurs suivants : $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$; $\vec{w}\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{t}\begin{pmatrix}\frac{-3}{2}\\-4\end{pmatrix}$.

Écris chacun des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{t}$ et $\vec{w}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

Vecteurs unitaires

4 $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base orthonormée.

Démontre que les vecteurs suivants sont unitaires.

a) $\vec{a} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$; b) $\vec{b} = \frac{3}{5}\vec{i} - \frac{4}{5}\vec{j}$

c) $\vec{c} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$; d) $\vec{d} = \frac{3}{\sqrt{13}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{13}}\vec{j}$.

Vecteurs colinéaires

5 Dans une base quelconque, on donne les vecteurs suivants : $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-3,75\\6,25\end{pmatrix}$.

1. Démontre à l'aide du déterminant que ces deux vecteurs sont colinéaires.
2. Démontre sans l'aide du déterminant que ces deux vecteurs sont colinéaires.

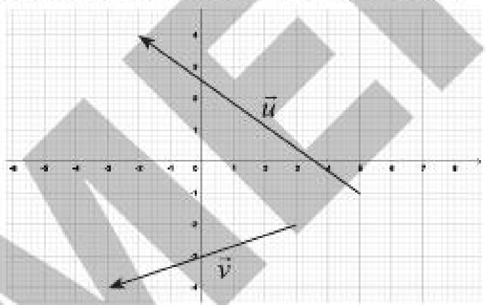
6 Recopie puis complète les pointillés par les mots qui conviennent : colinéaire ; perpendiculaire ; orthogonale; orthonormée ;

Une base .... est une base ......dont les vecteurs sont unitaires.

Coordonnées d'un vecteur

7 Le plan vectoriel est muni de la base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$ avec $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$.

1. En exploitant le graphique ci-dessous, détermine les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
2. Reproduis et représente sur le graphique, le vecteur $\vec{w}$ tel que : $\vec{w} = -2\vec{i} + 5\vec{j}$.
3. Calcule les normes des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.



8 Dans le plan vectoriel muni d'une base $(\vec{i}, \vec{j})$, on donne les vecteurs suivants :

$\vec{X} = -\vec{i} + 7\vec{j}$; $\vec{Y} = -13\vec{i}$ et $\vec{Z} = -\frac{7}{9}\vec{j}$.

Détermine les coordonnées des vecteurs $\vec{X}$, $\vec{Y}$ et $\vec{Z}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Mesure algébrique

9 Pour chacune des propositions ci-dessous, écris le numéro de la proposition suivi de vrai si la proposition est vrai ou de faux si la proposition est fausse.

1. La mesure algébrique d'un couple de points relativement à un vecteur unitaire est un vecteur.
2. La mesure algébrique d'un couple de points relativement à un vecteur unitaire est un nombre réel.
3. Si a est la mesure algébrique d'un couple de points relativement à un vecteur unitaire $\vec{i}$, alors $-a$ est la mesure algébrique du même couple de points relativement au vecteur unitaire $-\vec{i}$.

10 Sur une droite régulièrement graduée de repère $(O; \vec{i})$ tel que $\vec{i}$ soit un vecteur unitaire, on donne :

$\overrightarrow{CD} = -5\vec{i}$; $\overrightarrow{BA} = 2\vec{i}$ et $\overrightarrow{GE} = -3\overrightarrow{AB}$.

1. Détermine les mesures algébriques suivantes :

   $\overline{CD}$; $\overline{AB}$ et $\overline{GE}$.

2. Détermine les distances CD, AB et EG.

Réduction d'une somme de vecteurs

11

1. Démontre que : $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{CB}=\vec{0}$.
2. Démontre que : $2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CA}=3\overrightarrow{AB}$.
3. Réduis la somme : $\frac{1}{4}(\vec{u}-\vec{v})+\frac{3}{5}(2\vec{u}-\vec{v})$.

12 Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ *et* $\vec{w}$ trois vecteurs.

Réduis les sommes suivantes :

a) $2\vec{u}+(\vec{v}-3\vec{u})+2(7\vec{u}+\vec{v})$

b) $-7(\vec{u}-\vec{w})+2(3\vec{v}-3\vec{u}+\vec{w})-2(\vec{w}-\vec{v})$

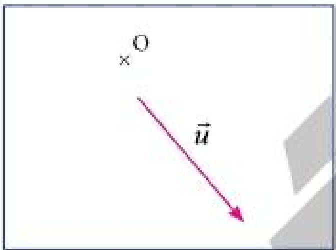
c) $8(\vec{v}+3\vec{u})+2(7\vec{u}+\vec{v})-10\vec{v}$

Construction de vecteurs

13 Reproduis dans ton cahier la figure ci-dessous.

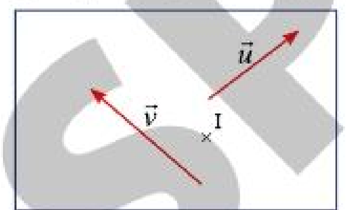
Représente les points P et K tels que :

$\overrightarrow{OP}=\frac{-1}{2}\vec{u}$ *et* $\overrightarrow{PK}=2\vec{u}$.



14 Reproduis dans ton cahier la figure ci-dessous. .

Construis deux vecteurs $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ tels que :
$\vec{X}=\vec{u}-\vec{v}$ *et* $\vec{Y}=-2\vec{u}-\vec{v}$.



15 Soit quatre points non alignés A, B, C et I.

Construis deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dont un représentant à pour origine le point I et tel que :
$\vec{u}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$ *et* $\vec{v}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$.

Calcul de norme

16 $(\vec{i},\vec{j})$ est une base orthonormée.

Calcule les normes des vecteurs suivants : $\vec{u}=\vec{i}$;

$\vec{v}=\vec{i}+\vec{j}$; $\vec{w}=\frac{3}{4}\vec{i}+\frac{1}{4}\vec{j}$

17 $(\vec{i},\vec{j})$ est une base orthonormée.

1. Calcule les normes des vecteurs suivants :

$\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\-\sqrt{3}\end{pmatrix}$; $v=\frac{7}{2}\vec{i}-\vec{j}$ *et* $\vec{w}=\frac{-1}{7}\vec{j}$.

2. Détermine les coordonnées de deux vecteurs unitaires colinéaires au vecteur $R\begin{pmatrix}\sqrt{7}\\-3\end{pmatrix}$.

Calcul de déterminant

18 $(\vec{i},\vec{j})$ est une base du plan vectoriel V.

Dans chacun des cas suivants, calcule le déterminant du couple $(\vec{u},\vec{v})$ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$.

1. $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}$; $\vec{v}=\vec{i}-\vec{j}$; 2. $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\-5\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$;

3. $\vec{u}\begin{pmatrix}12\\-1\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}9\\5\end{pmatrix}$; 4. $\vec{u}\begin{pmatrix}-10\\8\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}-14\\-13\end{pmatrix}$.

Équation d'une droite

19 Le plan est muni du repère (O, I, J).

À l'aide du déterminant, détermine une équation de la droite :

1. (AB) tel que A(1, 3) et B(2, −7).
2. (D) de repère $(K,\vec{u})$ tel que K(1, 6) et $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$.

20 Soit la proposition suivante :

« Si deux droites ont un même vecteur directeur, alors ces deux droites sont toujours confondues ».

À l'aide d'un contre-exemple, démontre que cette proposition est fausse.

Exercices de renforcement / approfondissement

21 ABC est un triangle. Soit I et J deux points tels que :
$3\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}-2\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ et $\overrightarrow{AJ}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.

1. Démontre que :
   a) $\overrightarrow{AI}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$;
   b) $\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{JI}=\vec{0}$.
2. Déduis-en que le point J est le milieu du segment [IC].

22 Dans un repère (O, I, J), place les points P(1, 3) ; Q(5 ; −2) et R(3 ; −5)

1. Démontre que les points P, Q et R sont non alignés.
2. Place le point G(3 ; 2) dans le repère (O, I, J).
3. Démontre que $\overrightarrow{GP}+\overrightarrow{GQ}+\overrightarrow{GR}=\vec{0}$.
4. Soit K le point défini par : $-\overrightarrow{KP}+3\overrightarrow{KQ}=\vec{0}$.
   a) Démontre que $-\overrightarrow{OP}+3\overrightarrow{OQ}=2\overrightarrow{OK}$.
   b) Déduis-en les coordonnées du point K.
   c) Représente K dans le repère (O, I, J).

23 Écris dans ton cahier le numéro de chaque affirmation suivi de V si l'affirmation est vraie ou de F si l'affirmation est fausse.

1. Dans une base orthonormée, le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ a pour norme 5.
2. Si $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\vec{0}$, alors le point O est le milieu du segment [AB].
3. Soit A, B, C et O des points dont trois quelconques sont non alignés. Si $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$, alors le quadrilatère OACB est un parallélogramme.
4. La somme suivante : $-2+7\vec{u}-13\vec{v}$ est une combinaison linéaire de vecteurs.
5. Si $\det\left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right)=0$, alors les points A, B et C sont alignés.
6. Les vecteurs $-\vec{u}$ *et* $25\vec{u}$ sont colinéaires.
7. Dans un repère (A, B, C), le point K tel que $\overrightarrow{BK}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées (2, −1).
8. Si ABC est un triangle, alors le triplé (C, B, A) est un repère.

24 $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ est un repère orthonormé.

1. Trace la droite (D) de repère $\left(A\ ;\vec{u}\right)$ tel que A(1, −2) et $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$ et la droite (D') de repère $\left(B\ ;\vec{v}\right)$ tel que B(0 ; 4) et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$.
2. Démontre à l'aide du déterminant que les droites (D) et (D') sont parallèles.
3. Une droite (L) a pour repère $\left(C,\ \vec{w}\right)$ tel que C(−4, 0) et $\vec{w}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$. Démontre que les droites (D) et (L) ne sont pas parallèles et détermine les coordonnées de leur point d'intersection.
4. Trace la droite (L).

25

1. Dans un repère, on donne les points P(1 ; −1); Q(2 ; 2) et R(3 ; 5). Démontre à l'aide du déterminant que les points P, Q et R sont alignés.
2. Soit le point S de coordonnées (−1 ; 4). Détermine les coordonnées du point T symétrique de S par rapport à Q.
3. Démontre que le quadrilatère PTRS est un parallélogramme de centre Q.
4. Réalise une figure.

26 Soit ABCD un parallélogramme de centre I.

1. Démontre que : $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{O}$.
2. Pour tout point M du plan, démontre que : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MI}$.
3. Démontre que : $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}=2\overrightarrow{AB}$.

27 Soit ABCD un parallélogramme et G le point tel que: $-\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GC}+2\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.

1. Démontre que pour tout point M du plan,
$$-\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}+2\overrightarrow{MD}=6\overrightarrow{MG}.$$
2. Construis le point E tel que : $-\overrightarrow{EA}+3\overrightarrow{EB}=\vec{0}$.
3. Exprime le vecteur $\overrightarrow{GA}-3\overrightarrow{GB}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{GE}$.
4. Justifie que le point G est le centre de gravité du triangle ECD puis construis le point sG.

28 Dans un repère du plan, on donne les points A(−3 ; −1), B(2 ; 4), C(3 ; 2) et D(−2 ; −3).

1. Démontre que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.
2. On appelle I, J, K et L les milieux respectifs des côtés [AB],[BC], [CD] et [DA]. Détermine les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{LK}$.
3. Déduis-en que le quadrilatère IJKL est un parallélogramme.
4. Dis si tu peux prévoir ce résultat sans faire des calculs. Justifie ta réponse.

29 Soit ABC un triangle.

On considère les points E, F et G tels que :

$$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\ ;\ \overrightarrow{CF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}\quad et\quad \overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$$

1. Construis les points E, F et G.
2. Démontre que le quadrilatère AEBF est un parallélogramme et que : $\overrightarrow{EG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.
3. Démontre que les points E, F et G sont alignés.

30 ABCD est un parallélogramme.

Soit les points I et J tels que $3\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ et J le milieu du segment [IC]. Soit les vecteurs

$\vec{u}=3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$.

1. Démontre que :

   a) $\vec{u}=8\overrightarrow{MJ}$;

   b) $\vec{v}=\overrightarrow{BD}$.
2. Détermine l'ensemble des points M du plan pour lesquels les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.

31 Soit un segment [AB] de longueur 7 centimètres.

1. À l'aide de la propriété de Thalès, construis le point G défini par la relation vectorielle : $2\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}=\vec{0}$.
2. Soit M' le point défini par : $\overrightarrow{MM'}=2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}$.

Démontre que : $\overrightarrow{GM'}=-4\overrightarrow{GM}$.

32 Soit ABC un triangle quelconque. Le point O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

Soit A' le symétrique de O par rapport à la droite (BC).

1. Démontre que : $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA'}$.
2. Soit le point H tel que : $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$. Démontre que la droite (AH) est perpendiculaire à la droite (BC).
3. a) Détermine le point B' tel que : $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB'}$.

   b) Démontre que : $\overrightarrow{OB'}=\overrightarrow{BH}$.
4. Déduis-en que la droite (BH) est perpendiculaire à la droite (AC).
5. Démontre que les trois hauteurs du triangle ABC sont concourantes au point H.
6. Réalise une figure.

33 Soit un segment [AB] de mesure 6 cm.

1. Construis le point G tel que : $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.
2. Soit (C) l'ensemble des points M du plan tel que :

$\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right\|=12$.

3. Démontre que le point A appartient à l'ensemble (C).
4. Démontre que : $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MG}$.
5. Déduis de ce qui précède que l'ensemble (C) est un cercle et précise son centre et son rayon.
6. Construis l'ensemble (C).

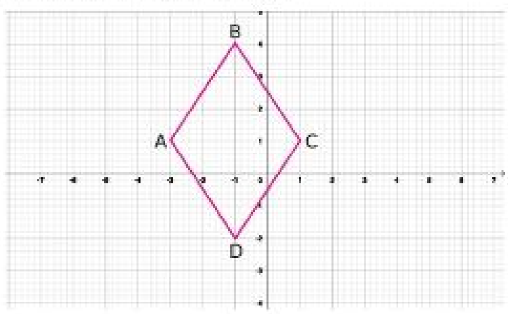
34 Le plan est muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

On donne dans un repère du plan, deux points P(3 ; −1) Q(0 ; 2) . Soit t la translation de vecteur $\vec{u}$ tel que : $\vec{u}=-\vec{i}-2\vec{j}$. Soit P' = t(P) et Q' = t(Q).

1. Détermine une équation de la droite (PQ).
2. Justifie que la droite (Q'P') est parallèle à la droite (QP).
3. Détermine une équation de la droite (Q'P').

35 Dans plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on a représenté ci-dessous les points A, B, C et D.

1. Démontre que le quadrilatère ABCD est un losange.
2. On note G le centre du losange ABCD. Détermine les coordonnées du point G.



36 Dans plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on donne les points M(4 ; 3), N(−4 ; −3) et P(−3 ; 4).

1. Détermine les coordonnées des vecteurs.

$\overrightarrow{PM}$, $\overrightarrow{MN}$ *et* $\overrightarrow{NP}$ dans la base $\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$.

2. Démontre que le triangle MNP est un triangle rectangle isocèle.
3. Déduis-en que les points M, N et P sont sur un cercle et détermine les coordonnées du centre de ce cercle
4. Soit Q le symétrique de P par rapport à O.

   a) Détermine les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OQ}$ dans la base $\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$.

   b) Démontre que le quadrilatère PMQN est un carré.
5. L'unité est le centimètre. Représente les points P, M, Q et N.

37 Le plan est muni d'un repère.

A tout nombre réel m, on associe la droite (D_m) d'équation $(2m-1)x+(m+2)y-m+3=0$.

1. Démontre que le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-m-2\\2m-1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (D_m).
2. Détermine m pour que (D_m) soit parallèle à la droite des abscisses.
3. Détermine m pour que la droite (D_m) passe par le point A(2 ; 3).
4. Démontre que toutes les droites (D_m) passent par un point B ; détermine les coordonnées du point B.

38 On veut montrer que les trois médianes dans un triangle sont concourantes, et préciser la position de leur point d'intersection.

Soit ABC un triangle.

Trace les médianes (CI) et (AJ) de ce triangle.

1. Explique pourquoi les droites (CI) et (AJ) sont sécantes.
2. Appelle G leur point d'intersection et construis le point D, symétrique de B par rapport à G.
3. Justifie que les droites (CI) et (DA) sont parallèles.
4. Justifie que (AJ) et (CD) sont parallèles.
5. Déduis des questions 3 et 4 que le quadrilatère GADC est un parallélogramme.
6. (BG) coupe (AC) au point O. Justifie que la droite (BO) est la médiane du triangle ABG issu du point B.
7. Déduis-en que les trois médianes du triangle ABC sont concourantes.
8. Justifie que :

   a) BG = 2GO.

   b) GO = $\dfrac{1}{3}$ BO.
9. Déduis de la question 8 que le point G est tel que : $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

39 Le plan est muni d'un repère (O, I, J). On donne les points A(−2 ; 1), B(−1 ; 4) et C(2 ; 3).

1. On pose M = S_B(A) et N = S_C(A). Détermine les coordonnées des points M et N.
2. On considère les points P et Q tels que : $\overrightarrow{AP}=-3\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AQ}=-3\overrightarrow{AC}$.

   a) Détermine les coordonné des points P et Q.

   b) Démontre que les droites (MN) et (PQ) sont parallèles.

40 On considère un triangle ABC.

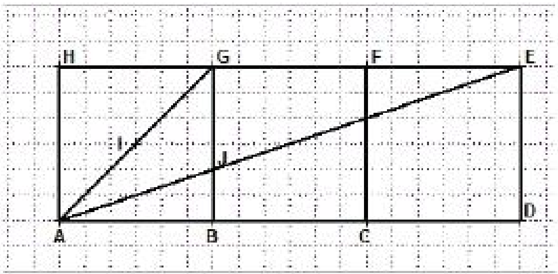
1. Construis les points E et D tels que :
   $\overrightarrow{CE}=-2\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AD}=\dfrac{5}{2}\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CB}$.
2. Justifie que les droites (DE) et (CA) sont parallèles.

Situations complexes

39 On a schématisé ci-dessous trois parcelles ABGH, BCFG et CDEF de forme carrée.

I le milieu de [AG] et J le point d'intersection des droites (AE) et (BG). Ces parcelles sont prévues pour accueillir des cultures maraichères (tomate, choux, concombre, etc.)

De telles cultures exigent de l'eau pour un arrosage régulier. Au point I se trouve une source d'eau et le terrain est tel que l'eau doit couler de I en C en passant par J. Cela permettrait d'irriguer les trois parcelles.



Pour minimiser les coûts d'irrigation, le technicien en charge de ce travail, affirme que les points I, J et C sont sur une ligne droite.

Démontre que cette affirmation est exacte.

40 Lors d'une expérience, un chercheur soumet un solide à trois forces $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$ et $\vec{F_3}$ tels que : $\vec{F_1} \perp \vec{F_2}$ (voir figure).

Les résultats de l'expérience indiquent que :

$\vec{F_1}+\vec{F_2}+\vec{F_3}=\vec{0}$; $\|\vec{F_2}\|$ = 4N ; $\left\|\vec{F_1}\right\| = 4\sqrt{3}N$.

Il désigne par α l'angle en degré déterminé par les forces $\vec{F_2}$ et $\vec{F_3}$.

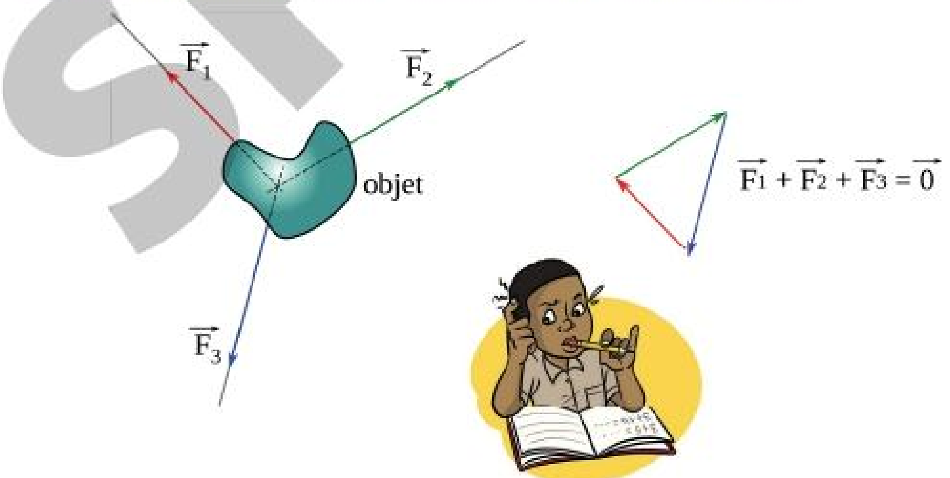
Le chercheur estime que l'expérience est réussie si

$\|\vec{F_3}\| > 7$N et $140° < \alpha < 160°$.

Ton ami Koné estime qu'au vu de ces résultats, cette expérience est réussie.

À l'aide d'une production argumentée, vérifie cette affirmation de ton ami Koné.

Équilibre d'un solide soumis à trois forces



2 ENSEMBLE DES NOMBRES RÉELS

Commentaire de la Leçon

Résoudre l'équation $x^2 = 2$ revient à trouver le nombre qui, multiplié par lui-même donne 2. La solution positive est : $\sqrt{2}$, soit environ 1,414213562373095. Ce nombre possède une infinité de décimales qui, de surcroit, se suivent sans aucune suite logique. Il n'y a plus rien ici de rationnel ; $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel. Ce sont les Pythagoriciens qui, au VI^e siècle avant J-C, ont découvert les nombres irrationnels. Ils ont longtemps tenté de cacher ces nombres « inexprimables » et « privés de raison ». Les nombres irrationnels font partie de l'ensemble des nombres réels qui se note $\mathbb{R}$. Cet ensemble, obtenu par complétion de l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels, n'est pas nouvelle en classe de seconde.

Dans le parcours scolaire de l'apprenant, l'ensemble des nombres réels apparait pour la première fois en classe de troisième dans la leçon « racine carrée ». Les notions d'intervalles, d'encadrement, d'arrondis, de comparaisons de nombres réels, etc. sont connues de l'apprenant qui arrive en classe de seconde. L'enseignant renforcera ces pré acquis et installera les notions véritablement nouvelles : majorants, minorants, maximum, minimum d'un sous ensemble de $\mathbb{R}$ lorsqu'ils existent, la manipulation des propriétés de la fonction valeur absolue et le raisonnement par l'absurde. Pour permettre aux élèves de s'entraîner suffisamment sur le raisonnement par l'absurde, on évitera de le proposer aux évaluations durant le premier trimestre.

Les nombres réels sont utilisés dans l'industrie, dans la construction, dans le commerce, etc. pour exprimer des grandeurs physiques. Toutefois, pour se faire une idée de ces grandeurs, celles-ci sont approchées par des nombres rationnels grâce à la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

Habiletés et Contenus

- ✓ **Connaître** la définition d'un majorant d'un ensemble, la définition d'un minorant d'un ensemble, la définition du maximum d'un ensemble, la définition du minimum d'un ensemble, la distance de deux nombres réels et les propriétés liées à la valeur absolue d'un nombre réel.
- ✓ **Déterminer** un majorant d'un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$ quand c'est possible, un minorant d'un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$ quand c'est possible, le maximum d'un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$ quand c'est possible et le minimum d'un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$ quand c'est possible.
- ✓ **Résoudre** algébriquement une équation du type $|x-a|=r$, graphiquement une équation du type $|x-a|=r$, algébriquement une inéquation du type $|x-a|<r$, graphiquement une inéquation du type $|x-a|<r$.
- ✓ **Démontrer** une propriété en utilisant le raisonnement inductif, déductif ou le raisonnement par l'absurde.
- ✓ **Traiter une situation** faisant appel aux nombres réels.

Situation d'Apprentissage

À l'entame d'une leçon de mathématiques dans une classe de 2de C, un professeur dit à ses élèves :

« Pythagore et ses disciples ont découvert le nombre $\sqrt{2}$ au VIème siècle avant J.-C, en cherchant le rapport entre la diagonale d'un carré et son côté.

Or son étude sur la musique avait conduit Pythagore à penser que « l'harmonie divine consiste aux rapports numériques des nombres entiers ».

Hélas, $\sqrt{2}$ ne rentrait pas dans ce monde rationnel ; c'est pourquoi Pythagore a nommé ces nombres « irrationnels ».

La démonstration par l'absurde de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ repose sur le fait qu'un entier est soit pair, soit impair.

On suppose que $\sqrt{2}$ est rationnel, c'est-à-dire qu'il s'écrit sous forme irréductible $\frac{p}{q}$, p et q étant des entiers naturels non nuls ».

Le professeur ne termine pas ses propos et demande à ses élèves de démontrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Ceux-ci, par petits groupes, décident de faire des recherches sur l'ensemble des nombres réels afin de mieux s'outiller pour répondre à la préoccupation de leur professeur de mathématiques.

Activité 1 Majorant, minorant d'un ensemble

On donne l'ensemble A tel que : A = [−5 ; 2].

1. Représente l'ensemble A sur une droite graduée.
2. Cite un nombre réel supérieur ou égal à chacun des éléments de A.
3. Cite un nombre réel inférieur ou égal à chacun des éléments de A.

Récapitulons

- Tout nombre réel supérieur ou égal à chaque élément de A est appelé un majorant de A.
- Tout nombre réel inférieur ou égal à chaque élément de A est appelé minorant de A.

Exercices de fixation

1 Soit l'intervalle A tel que : A =]−3;5].

1. Cite deux minorants et deux majorants de A.
2. Écris l'ensemble de tous les majorants de A.
3. Écris l'ensemble de tous les minorants de A.

2 Recopie le numéro de chaque affirmation suivi de V si l'affirmation est vraie ou de F si l'affirmation est fausse.

1. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Le nombre réel M est un majorant de A signifie que pour tout x élément de A, $M < x$.
2. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Le nombre réel m est un minorant de A signifie que pour tout x élément de A, $m \leq x$.
3. L'ensemble $\mathbb{N}$ n'admet pas de majorant.
4. L'ensemble $\mathbb{Z}$ n'admet pas de minorant.

Activité 2 Maximum, minimum d'un ensemble

On considère l'ensemble B tel que : B = {−5 ; −4 ; −3 ; 0 ; 1 ; 2}.

a) Cite le plus grand élément de B.
b) Cite le plus petit élément de B.

Récapitulons

- Le plus grand élément de l'ensemble B est appelé le maximum de B.
- Le plus petit élément de l'ensemble B est appelé le minimum de B.

Exercice de fixation

3 Recopie le numéro de chaque affirmation suivie de V si l'affirmation est vraie ou de F si l'affirmation est fausse.

1. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Le nombre réel M est le maximum de A signifie que pour tout x élément de A, $x < M$.
2. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Le nombre réel m est le minimum de A signifie que pour tout x élément de A, $x > m$.
3. Le nombre réel 2,99 est le maximum de [1 ; 2,99[.
4. Le nombre réel 0 est le minimum de $\mathbb{N}$.

Activité 3 Valeur absolue d'un nombre réel

1. Indique le plus grand des nombres réels -10 et 10.
2. Soit a un nombre réel. Indique lequel des nombres $-a$ et a est le plus grand lorsque :
   a) a est négatif ;
   b) a est positif.
3. Justifie que la valeur absolue de a est le plus grand des deux nombres a et $-a$.

Récapitulons

La valeur absolue d'un nombre réel a est le plus grand des nombres réels $-a$ et a.

Exercice de fixation

4 Écris les nombres suivants sans le symbole $|\ |$.

a) $\left|1-\sqrt{2}\right|$; b) $\left|\sqrt{13}-\sqrt{11}\right|$.

Activité 4 Propriétés de la valeur absolue d'un nombre réel

Soit x et y deux nombres réels et r un nombre réel positif.

1. **a)** Justifie que : $|x| \geq 0$.
   b) Démontre que : $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
   c) Démontre que : $|-x| = |x|$.
2. **a)** Démontre que : $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y$ ou $x = -y$.
   b) Démontre que : $|x| \leq r \Leftrightarrow -r \leq x \leq r$.
3. **a)** Démontre que : $|x \times y| = |x| \times |y|$.
   b) Démontre que : si $x \neq 0$, alors $\left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|}$.
   c) Déduis de **2-a)** et **2-b)** que : si $y \neq 0$, alors $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$.
4. **a)** Développe : $(x+y)^2$ et $(|x| + |y|)^2$.
   b) Déduis-en que : $|x+y| \leq |x| + |y|$.

Récapitulons

Soit x et y deux nombres réels et r un nombre réel positif.
On a :

- $|x| \geq 0$
- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $|-x| = |x|$
- $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y$ ou $x = -y$
- $|x| \leq r \Leftrightarrow -r \leq x \leq r$
- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
- $\left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|};(x \neq 0)$
- $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|};(y \neq 0)$
- $|x+y| \leq |x| + |y|$

Exercice de fixation

5 Dans chacun des cas, détermine les nombres réels x s'ils existent.

a) $|x| = 2$; **b)** $|x| = 3$; **c)** $|x| = 0$; **d)** $|4x| = 12$; **e)** $\left|\frac{x}{-\sqrt{2}}\right| = 5$.

Activité 5 Distance de deux nombres réels

Soit (D) la droite graduée de repère (O, I) et A, B, C des points d'abscisses respectives −2 ; 5 et − 4,5.

1. Fais une figure.
2. Par une lecture graphique, détermine les distances AB ; BC et AC.
3. **a)** Calcule : $|-2-5|$, $|5-(-4,5)|$ et $|-2-(-4,5)|$.

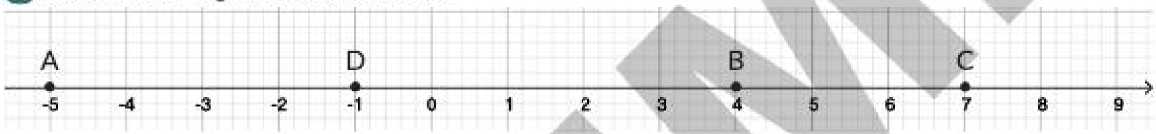
   b) Compare les résultats à ceux trouvés à la consigne 2.

Récapitulons

La distance entre deux nombres a et b est la valeur absolue de leur différence.
$|a-b| = AB$ où $x_A = a$ et $x_B = b$.

Exercices de fixation

6 Soit la droite graduée ci-dessous :



Calcule les distances suivantes : AB ; BC et AD.

7 À chacune des affirmations ci-dessous, correspond une seule information correcte.
Pour chacune d'elle, écris le numéro de l'affirmation suivi de la lettre correspondant à l'information correcte.

N°	AFFIRMATIONS	INFORMATIONS			
		a	b	c	d
1	La distance entre −43 et −13 est :	−56	56	−30	30
2	La distance entre 10 et 24 est :	14	−34	34	−14
3	La distance entre − 40 et 15 est :	−55	25	55	−25
4	La distance entre 8 et 21 est :	− 13	29	13	− 29

Activité 6 Résolution algébrique d'équation du type $|x-a| = r$

1. On veut résoudre l'équation $|x-4| = 2,5$.

   a) Recopie et complète :

   $|x-4| = 2,5 \Leftrightarrow x - 4 = ...$ ou .... = −2,5 .

   $\Leftrightarrow x = ...$ ou ... = ...

   b) Donne l'ensemble des solutions de cette équation.
2. Explique la méthode de résolution de l'équation $|x-a| = r$ lorsque :

   a) $r = 0$; **b)** $r < 0$; **c)** $r > 0$.

Récapitulons

- Pour $r = 0$, $|x-a| = 0 \Leftrightarrow x = a$.
- Pour $r < 0$, $|x-a| = r$ n'a pas de solution.
- Pour $r > 0$, $|x-a| = r \Leftrightarrow x = a + r$ ou $x = a - r$.

Exercice de fixation

8 Résous algébriquement dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes:

a) $|x-3|=4$; **b)** $|x+4|=1$; **c)** $|2x-6|=8$; **d)** $|-7x-4|=0$; **e)** $|-4x+7|=-1$.

Activité 7 Résolution graphique d'équation du type $|x-a|=r$, $(r\geq 0)$

1. On veut résoudre graphiquement l'équation $|x+2|=5$.
   a) Recopie et complète : $|x+2|=|x-(...)|$.
   b) Sur une droite graduée, indique les abscisses x des points tels que la distance entre x et -2 soit égale à 5.
   c) Donne les solutions de cette équation.
2. Explique une méthode de résolution graphique d'une équation du type : $|x-a|=r$, $(r\geq 0)$.

Récapitulons

Soit (D) une droite graduée de repère (O, I). A et M sont deux points de la droite (D) d'abscisses respectives a et x.

- $|x-a|=AM$;
- $|x-a|=r \Leftrightarrow AM=r$

Le cercle (C) de centre A et de rayon r coupe la droite (D) en deux points.
On lit les abscisses de ces deux points qui sont les solutions de l'équation.

Exercice de fixation

9 Résous graphiquement dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

a) $|x-4|=3$; **b)** $|x+1|=4$; **c)** $|2x-6|=4$.

Activité 8 Résolution algébrique d'inéquation de type $|x-a|\leq r$

1. On veut résoudre l'inéquation $|x-1|\leq 3$.

Recopie et complète : $|x-1|\leq 3 \Leftrightarrow$ .... $\leq x-1\leq$ ....

$\Leftrightarrow$ .... $\leq x\leq$ ....

2. Explique la méthode de résolution de l'inéquation du type $|x-a|\leq r$ lorsque :

a) $r<0$; **b)** $r>0$; **c)** $r=0$.

Récapitulons

- Pour $r=0$, $|x-a|\leq 0 \Leftrightarrow x=a$;
- Pour $r<0$, $|x-a|\leq r$ n'a pas de solution ;
- Pour $r>0$, $|x-a|\leq r \Leftrightarrow a-r\leq x\leq a+r$;
  $\Leftrightarrow x\in[a-r\,;a+r]$.

Exercice de fixation

10 Résous algébriquement dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

a) $\left|x-\frac{1}{2}\right|\leq 4$; **b)** $|x+4|<1$; **c)** $|3x+6|\leq 12$; **d)** $|-7x-4|\leq 0$; **e)** $|2x-1|\leq -1$.

Activité 9 Résolution graphique d'inéquation du type $|x - a| \leq r$

1. On veut résoudre graphiquement l'inéquation $|x - 1{,}5| \leq 2{,}5$.

Soit M le point d'abscisse x et le point A d'abscisse 1,5.

a) Recopie et complète : AM = | ... |.

b) Recopie et complète : $|x - 1{,}5| \leq 2{,}5 \Leftrightarrow$ .... $\leq$........

c) Soit (D) une droite graduée de repère (O ; I). Hachure en rouge l'ensemble des points M de (D) situés à l'intérieur du disque de centre A et de rayon 2,5.

d) Déduis-en l'ensemble des solutions de l'inéquation $|x - 1{,}5| \leq 2{,}5$.

2. Explique la méthode de résolution graphique de l'inéquation $|x - a| \leq r$.

Récapitulons

Soit A et M deux points d'une droite graduée d'abscisses respectives a et x.

- $|x - a| \leq r \Leftrightarrow AM \leq r$;
- Le disque de centre A et de rayon r et la droite graduée (D) ont un segment en commun dont les abscisses sont les solutions de l'inéquation $|x - a| \leq r$.

Exercice de fixation

11 Résous graphiquement dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

a) $|x - 1| \leq 4$; b) $|x + 3| < 2$; c) $|4 - 2x| \leq 6$.

Activité 10 Raisonnement par l'absurde

Soit p un entier naturel.

On veut démontrer que : si p^2 est impair, alors p est impair.

a) On suppose que p^2 soit impair et p pair.
Démontre que p^2 est pair.

b) Conclus.

Récapitulons

- Le raisonnement par l'absurde est un raisonnement qui permet de démontrer qu'une affirmation est vraie en montrant que son contraire est faux.
- Le raisonnement consiste à supposer que l'affirmation contraire est vraie et à en tirer les conséquences que cela pourrait avoir. Une seule conséquence absurde, manifestement fausse ou une contradiction permet d'affirmer que l'affirmation contraire est fausse et donc d'en conclure que l'affirmation initiale est vraie.

Exercices de fixation

12 En utilisant un raisonnement par l'absurde, démontre que $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

Rappel : un nombre est décimal s'il peut s'écrire $\frac{a}{10^n}$ *avec* $a \in \mathbb{Z}$ *et* $n \in \mathbb{N}$.

13 Démontre que si vous rangez $(n + 1)$ paires de chaussettes dans n tiroirs distincts, alors il y a au moins un tiroir qui contient au moins 2 paires de chaussettes.

1. Majorant, Minorant d'un ensemble

Définitions

Soit A un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$.

- On dit qu'un nombre réel M est **un majorant** de A si M est supérieur ou égal à tous les éléments de A. Un ensemble qui admet un majorant est dit **majoré**.
  M est majorant de A signifie que : $\forall x \in A, x \leq M$.
- On dit qu'un nombre réel m est **un minorant** de A si m est inférieur ou égal à tous les éléments de A.
  Un ensemble qui admet un minorant est dit **minoré**.
  m est minorant de A signifie que : $\forall x \in A, x \geq m$.
- Un ensemble qui est à la fois majoré et minoré est dit borné.

Exemples

- $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ ne sont ni majorés ni minorés. Par contre, $\mathbb{N}$ est minoré par 0, -1, - π, mais n'est pas majoré.
- Soit a un nombre réel, l'intervalle $]-\infty\,; a[$ est majoré par a mais n'est pas minoré.

Pour s'entraîner : Exercice 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10

2. Maximum, Minimum d'un ensemble

Définitions

Soit A un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$.

- Lorsqu'il existe, le plus grand élément de A, est appelé maximum de A.
- Lorsqu'il existe, le plus petit élément de A, est appelé minimum de A.

Exemples

- L'ensemble $\{-4\,; -2\,; -1\,; 1\,; 2\,; 4\,; 5\,; 7\}$ a pour maximum 7 et pour minimum -4.
- Le maximum et le minimum de l'intervalle $[0\,; 1]$ sont respectivement 1 et 0.
- L'intervalle $]-1\,; 6[$ de $\mathbb{R}$ n'admet ni maximum, ni minimum.

Pour s'entraîner : Exercices 11 ; 12 ; 13 ; 14 ; 14 ; 16 ; 17

Conséquence de la définition

Soit A un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$ et M un nombre réel. M est le maximum (resp le minimum) de A si et seulement si M est un majorant (resp un minorant) de A appartenant à A.

Remarques

- Lorsqu'il existe, le maximum (resp le minimum) d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ est unique.
- Un sous ensemble majoré (resp minoré) de $\mathbb{R}$ n'admet pas nécessairement de maximum (resp minimum). L'intervalle $]-1\,; 6[$ en est un exemple.

3. Valeur absolue d'un nombre réel

Définition

On appelle valeur absolue d'un nombre la distance à zéro de ce nombre.
Pour tout nombre positif a, $|a| = a$ si $a \geq 0$ et $|a| = -a$ si $a \leq 0$.

Propriété

Soit a un nombre réel.
Le plus grand des deux nombres réels a et $-a$ est appelé valeur absolue de a et est noté $|a|$.

Exemples

- $\left|\sqrt{3}-2\right| = 2-\sqrt{3}$ car $\sqrt{3}-2<0<2-\sqrt{3}$
- $\left|-69\right| = 69$
- $\left|5-\sqrt{2}\right| = 5-\sqrt{2}$ car $\sqrt{2}-5<0<5-\sqrt{2}$

Pour s'entraîner : Exercices 18 ; 19

4. Propriétés de la valeur absolue

Pour tous nombres réels x, y et tout nombre réel strictement positif r, on a :

1) $|x| \geq 0$; 2) $|x|=0 \Leftrightarrow x=0$; 3) $|x|=|-x|$;

4) $|x|=|y| \Leftrightarrow x=y$ ou $x=-y$; 5) $|xy|=|x||y|$; 6) Si $x \neq 0$, $\left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|}$;

7) Si $y \neq 0$, $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$; 8) $|x+y| \leq |x|+|y|$; 9) $|x| \leq r \Leftrightarrow -r \leq x \leq r$.

Pour s'entraîner : Exercices 15 ; 20

5. Distance de deux nombres réels

Définition

Soit x et y deux nombres réels.
Le nombre réel $|x-y|$ est appelé distance de x et y.

Exemple

La distance entre les nombres réels 5 et −7 est donnée par : $|5-(-7)|$ soit 12.

Remarques

Soit (D) une droite munie d'un repère (O, I). Pour tous points M et N de (D), d'abscisses respectives x et y, on a : $MN = |x-y|$.

Pour s'entraîner : Exercices 13 ; 14 ; 21 ; 22

6. Résolution algébrique d'une équation du type $|x-a| = r$ $(r > 0)$

Propriété

Soit a un nombre réel et r un nombre réel positif.
$|x-a| = r \Leftrightarrow x = a-r$ ou $x = a+r$.

Exemple

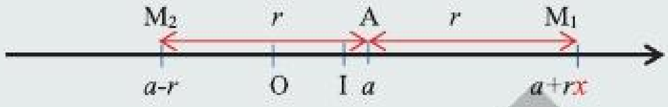
Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation : $|x-6| = 2$.
Je résous dans $\mathbb{R}$ l'équation : $|x-6| = 2$.
$|x-6|=2 \Leftrightarrow x = 6+2$ ou $x = 6-2$
$\Leftrightarrow x = 8$ ou $x = 4$
Donc : $S_{\mathbb{R}} = \{8 ; 4\}$

Pour s'entraîner : Exercices 23 ; 24

7. Résolution graphique d'une équation du type $|x-a| = r$ $(r > 0)$

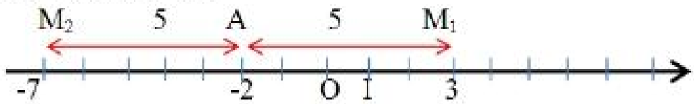
Propriété

A et M sont les points d'abscisses respectives a et x d'une droite graduée.
$|x - a| = r \Leftrightarrow AM = r$.



Exemple

Résolvons graphiquement dans $\mathbb{R}$ l'équation : $|x + 2| = 5$.
Je résous graphiquement l'équation $|x + 2| = 5$.
A et M sont les points d'abscisses respectives -2 et x d'une droite graduée.
$|x + 2| = 5 \Leftrightarrow AM = 5$.



Trouver graphiquement tous les réels x tels que $|x + 2| = 5$ revient donc à trouver les abscisses des points M de la droite graduée tels que : AM = 5.
D'après le graphique ci-dessus, les nombres cherchés sont -7 et 3. D'où $S_{\mathbb{R}} = \{-7\,;3\}$.

Pour s'entraîner : Exercices 25 ; 26

8. Résolution algébrique d'une inéquation du type $|x-a| \leq r$ (r > 0)

Propriété

a est un nombre réel, r est un nombre réel positif.
$|x - a| \leq r \Leftrightarrow a - r \leq x \leq a + r$.

Pour s'entraîner : Exercices 27 ; 28

Exemple

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $|x + 2| \leq 3$.

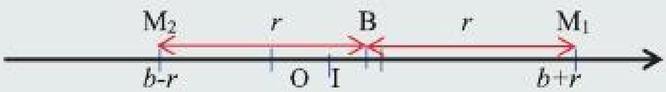
$$|x+2| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq x+2 \leq 3$$
$$\Leftrightarrow -2-3 \leq x \leq -2+3$$
$$\Leftrightarrow -5 \leq x \leq 1$$

donc $S_{\mathbb{R}} = [-5;1]$

9. Résolution graphique d'une inéquation du type $|x-b| \leq r$ (r > 0)

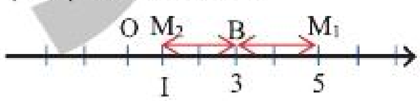
Propriété

B et M sont les points d'abscisses respectives b et x d'une droite graduée.
$|x - b| \leq r \Leftrightarrow BM \leq r$.



Exemple

Résolvons graphiquement dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $|x - 3| \leq 2$.
On résout graphiquement l'inéquation $||x - 3| \leq 2$.
B et M sont les points d'abscisses respectives 3 et x d'une droite graduée.
$|x - 3| \leq 2 \Leftrightarrow BM \leq 2$.



Trouver graphiquement tous les réels x tels que $|x - 3| \leq 2$ revient donc à trouver les abscisses des points M de la droite graduée tels que : $BM \leq 2$.
D'après le graphique ci-dessus, les nombres cherchés sont ceux qui appartiennent à l'intervalle [1 ; 5].
D'où $S_{\mathbb{R}} = [1\,;5]$.

Pour s'entraîner : Exercices 29 ; 30

QUESTION 1

Comment déterminer un majorant, le maximum d'un ensemble non vide de $\mathbb{R}$?

Méthode

- Pour déterminer un majorant d'un ensemble, on doit prouver l'existence d'un nombre réel M tel que : $\forall\ a \in A, a \leq M$.
- Pour déterminer le maximum d'un ensemble, on doit prouver l'existence d'un nombre réel M tel que : $\forall\ a \in A, a \leq M$ et $M \in A$.

Exercice

On donne l'ensemble A tel que : $A = \left\{\frac{3}{n}; n \in \mathbb{N}^*\right\}$, un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$.

1. Démontre que 3 est un majorant de A.
2. Déduis-en que 3 est le maximum de A.

Solution commentée

1. Il suffit de justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{3}{n} \leq 3$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{n} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{3}{n} \leq 3$. Donc 3 est un majorant de A.

2. 3 étant un majorant de A, il suffit de justifier que 3 est un élément de A.

D'après ce qui précède, 3 est un majorant de A.

De plus, $3 = \frac{3}{1}$. D'où 3 est de la forme $\frac{3}{n}$ avec $n = 1$. Donc $3 \in A$.

Par conséquent, 3 est le maximum de A.

Exercice non corrigé

Soit A un ensemble tel que : $A = \{ 3 - \frac{1}{n} ; n \in \mathbb{N}^* \}$.

Démontre par l'absurde que 3 n'est pas le maximum de A.

QUESTION 2

Comment résoudre algébriquement une équation du type : $|x-a| = r$?

Méthode

- Pour $r = 0$, $|x - a| = 0 \Leftrightarrow x = a$;
- Pour $r < 0$, $|x - a| = r$ n'a pas de solution ;
- Pour $r > 0$, $|x - a| = r \Leftrightarrow x = a + r$ ou $x = a - r$.

Exercice

Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $(E_1) : |x - 1| = -2$; $(E_2) : |x - 3| = 0$ et $(E_3) : |x - 3| = 5$.

Solution commentée

- $(E_1) : |x - 1| = -2$. Pas de solutions dans $\mathbb{R}$, car la valeur absolue d'un nombre réel est toujours positive.
- $(E_2) : |x - 3| = 0$.
  $|x - 3| = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$, donc : $S_{\mathbb{R}} = \{3\}$.
- $(E_3) : |x - 3| = 5$.
  $|x - 3| = 5 \Leftrightarrow x - 3 = -5$ ou $x - 3 = 5$
  $\Leftrightarrow x = -2$ ou $x = 8$, donc : $S_{\mathbb{R}} = \{-2 ; 8\}$.

Exercice non corrigé

1. Justifie que pour tout nombre réel x, on a : $|3x - 6| = 3|x - 2|$.
2. Résous dans $\mathbb{R}$, l'équation : $|3x - 6| = 2$.

QUESTION 3 — Comment résoudre graphiquement une équation du type $|x-a| = r$?

Méthode

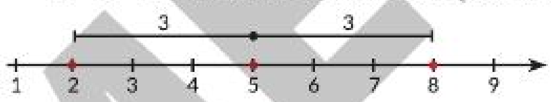
1. Traduire la valeur absolue en terme de distance : $|x - a|$ est la distance de x à a.
2. Faire un schéma traduisant la situation.
3. Conclure.

Exercice

Résous graphiquement chacune des équations suivantes : $(E_1) : |x + 1| = -3$, $(E_2) : |x - 2| = 0$ et $(E_3) : |x - 5| = 3$.

Solution commentée

- $(E_1) : |x + 1| = -3$.
  $|x + 1| = -3 \Leftrightarrow |x - (-1)| = -3 \Leftrightarrow$ la distance de x à -1 est égale à -3. Donc $S_{\mathbb{R}} = \varnothing$.
- $(E_2) : |x - 2| = 0$.
  $|x - 2| = 0 \Leftrightarrow$ la distance de x à 2 est égale à 0.
  Donc $S_{\mathbb{R}} = \{2\}$.
- $(E_3) : |x - 5| = 3$.
  $|x - 5| = 3 \Leftrightarrow$ la distance de x à 5 est égale à 3.



Donc $S_{\mathbb{R}} = \{2 ; 8\}$.

Exercice non corrigé

Résous graphiquement l'équation : $|x + 5| = 3$.

QUESTION 4 — Comment résoudre algébriquement une inéquation du type : $|x-a| \leq r$?

Méthode

- Pour $r = 0$, $|x - a| \leq 0 \Leftrightarrow x = a$;
- Pour $r < 0$, $|x - a| \leq r$ n'a pas de solution ;
- Pour $r > 0$, $|x - a| \leq r \Leftrightarrow a - r \leq x \leq a + r$.

Exercice

Résous dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes : $(I_1) : |x - 2| \leq -5$; $(I_2) : |x + 3| \leq 0$ et $(I_3) : |x - 2| \leq 4$.

Solution commentée

- $(I_1) : |x - 2| \leq -5$.
  Pas de solution dans $\mathbb{R}$, car la valeur absolue d'un nombre réel est toujours positive : $S_{\mathbb{R}} = \varnothing$.
- $(I_2) : |x + 3| \leq 0$.
  $|x + 3| \leq 0 \Leftrightarrow x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$, donc : $S_{\mathbb{R}} = \{-2\}$.
- $(I_3) : |x - 2| \leq 4$.
  $|x - 2| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq x - 2 \leq 4$
  $\Leftrightarrow -2 \leq x \leq 6$.
  Donc : $S_{\mathbb{R}} = [-2 ; 6]$.

Exercice non corrigé

Résous algébriquement chacune des inéquations suivantes :

$(I_1) : |x + 2| \leq 4{,}5$; $(I_2) : |x - 3| \leq 0$; $(I_3) : |x - 5| \leq -4$.

QUESTION 5

Comment résoudre graphiquement une inéquation du type $|x-a| \leq r$?

Méthode

1. Traduire la valeur absolue en terme de distance : $|x - a|$ est la distance de x à a.
2. Faire un schéma traduisant la situation.
3. Conclure.

Exercice

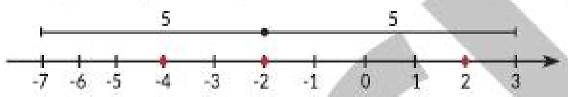
Résous dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes : $(I_1) : |x+5| \leq -6$; $(I_2) : |x-3| \leq 0$ et $(I_3) : |x+2| \leq 5$.

Solution commentée

- $(I_1) : |x+5| \leq -6$.
  $|x+5| \leq -6 \Leftrightarrow |x-(-5)| \leq -6$. La distance de x à -5 est inférieur ou égale à -6, donc : $S_{\mathbb{R}} = \varnothing$ car une distance est toujours positive.

- $(I_2) : |x-3| \leq 0$.
  $|x-3| \leq 0 \Leftrightarrow$ la distance de x à 3 est inférieure ou égale à 0. La seule possibilité est $x = 3$. Donc $S_{\mathbb{R}} = \{3\}$.

- $(I_3) : |x+2| \leq 5$.
  $|x+2| \leq 5 \Leftrightarrow |x-(-2)| \leq 5 \Leftrightarrow$ la distance de x à -2 est inférieur ou égale à 5.



Donc $S_{\mathbb{R}} = [-7 ; 3]$.

Exercice non corrigé 1

Résous graphiquement chacune des inéquations suivantes :
$(I_1) : |x+1| \leq 2$; $(I_2) : |x-5| \leq 1$.

Exercice non corrigé 2

1. Résous graphiquement dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\left|x - \frac{3}{2}\right| < 2$.
2. Déduis-en les solutions dans $\mathbb{R}$ des inéquations :
   a) $|2x-3| < 4$;
   b) $|2x-3| \geq 4$.

Exercices de fixation

Majorant d'un ensemble

1 Parmi les affirmations ci-dessous, recopie les lettres de celle qui sont vraies :

a) « Un majorant d'un ensemble, s'il existe, est supérieur à tout élément de cet ensemble ».

b) « Un majorant d'un ensemble, s'il existe, n'est pas nécessairement élément de cet ensemble ».

c) « Un majorant d'un ensemble est toujours le plus grand élément de cet ensemble ».

d) « Tout intervalle borné admet un majorant ».

2 Indique un majorant de chacun des ensembles ci-dessous.

$A = \{-1 ; -2 ; \frac{1}{2} ; \frac{\sqrt{5}}{3}\}$;

$B =]-8 ; 2 - \frac{1}{\sqrt{2}}]$;

$C =]-2{,}5 ; 3{,}7] \cap \mathbb{Z}$.

3

a) Écris en extension un ensemble à quatre éléments dont $\sqrt{3}$ est un majorant.

b) Écris en extension un ensemble à 5 éléments dont $-\frac{7}{3}$ est un majorant.

c) Donne un intervalle d'amplitude 0,2 dont $-\frac{1}{2}$ est un majorant.

d) Cite quatre majorants de l'ensemble $X = \{1 - \frac{1}{n} / n \in \mathbb{N}^*\}$.

4 Dans chacun des cas suivants, détermine, lorsque cela est possible, un majorant de l'ensemble A.

$A = \left\{\frac{1}{2} ; \frac{2}{3} ; \frac{3}{4} ; \frac{4}{5}\right\}$; $B = [10 - \sqrt{7} ; 10 + \sqrt{11}[$

$C = \left\{0 ; \frac{1}{2} ; \frac{2}{3} ; \frac{3}{4} ; \dots ; \frac{n-1}{n}\right\}, n \in \mathbb{N}^*$;

$D = \left\{0 ; -\frac{1}{2} ; -\frac{2}{3} ; -\frac{3}{4} ; \dots ; \frac{1-n}{n}\right\}, n \in \mathbb{N}^*$;

$E = \{\sqrt{2} - 1 ; (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1) ; (\sqrt{2} + 1)^2 ; (\sqrt{2} - 1)^2\}$.

5 Soit $a \in \mathbb{N}^*$. Détermine un majorant de l'ensemble des diviseurs de a dans $\mathbb{N}$.

Minorant d'un ensemble

6 Parmi les affirmations suivantes, recopie les lettres de celles qui sont vraies.

a) « Tout intervalle admet un minorant. »

b) « Un minorant d'un ensemble peut être le plus petit élément de cet ensemble. »

c) « Un minorant, s'il existe, est un plus petit nombre qui n'est pas nécessairement dans cet ensemble. »

d) « Un ensemble qui admet un minorant est dit minoré. »

7 Pour chaque ensemble donné, recopie le ou les minorant(s) parmi ceux proposés.

1. $A = \{-3 + \frac{1}{3\sqrt{2}} ; 0 ; +1 ; 2 + \sqrt{2}\}$;

   a) -4 b) 5 c) -3

2. $B = [-5 + 10^{-6} ; 5 - 10^{-6}[$

   a) 5 b) -6 c) -4

3. $C = [-8{,}57 ; 8] \cap \mathbb{N}$

   a) -10 b) 0 c) 9

8

a) Écris en extension un ensemble à quatre éléments dont 2 est un minorant.

b) Écris en extension un ensemble à 3 éléments dont $-5{,}6$ est un minorant.

c) Donne trois minorants de l'ensemble $X = \{1 - \frac{1}{n} / n \in \mathbb{N}^*\}$.

9 Dans chacun des cas suivants, détermine lorsque cela est possible, un minorant de l'ensemble B.

a) $B = \left\{-\frac{1}{2} ; -\frac{2}{3} ; -\frac{3}{4} ; -\frac{4}{5}\right\}$

b) $B = \{a ; a^2 ; \sqrt{a}\}$

c) $B = \{1 - \sqrt{2} ; \sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} - 1) ; (-\sqrt{2} - 1)^2\}$

10 Soit $a \in \mathbb{N}^*$. Détermine un minorant de l'ensemble des multiples de a dans $\mathbb{N}$.

Maximum d'un ensemble

11 Recopie le numéro de chaque affirmation suivi de V si l'affirmation est vraie ou de F si l'affirmation est fausse.

a) « Le maximum d'un ensemble, lorsqu'il existe, est le plus petit élément de cet ensemble. »

b) « Le maximum d'un ensemble est nécessairement un élément de cet ensemble. »

c) « Tout intervalle borné admet un maximum. »

12 Parmi les ensembles ci-dessous, indique ceux qui admettent un maximum puis précise ce maximum.

- $I = \{-\frac{22}{7} ; -\pi ; \pi ; \frac{22}{7}\}$

- J = $[-3 - \frac{2}{\sqrt{2}} ; 3 - \frac{2}{\sqrt{2}}[$
- K = $\{1 - \frac{1}{n} / n \in \mathbb{N}^*\}$
- L = = $[-\sqrt{5} ; \sqrt{5}] \cap \mathbb{N}$

13 Dans chacun des cas suivants, dis si le nombre a est oui ou non le maximum de l'ensemble I.

1. $a = 2{,}66$; I = $[-2 ; \frac{8}{3}]$
2. $a = 5\sqrt{2}$; I = $\left[-5\sqrt{2};\sqrt{50}\right]$
3. $a = -3{,}14$; I = $\{-\pi ; -\pi + 1 ; -\pi + 2\}$
4. $a = 3$; I = $\left[-\frac{7}{4};\frac{18}{5}\right] \cap \mathbb{Z}$.

Minimum d'un ensemble

14 Recopie le numéro de chaque affirmation suivi de V si l'affirmation est vraie ou de F si l'affirmation est fausse.

1. « Le minimum d'un ensemble, lorsqu'il existe, est le plus petit élément de cet ensemble. »
2. « Le minimum d'un ensemble est toujours un minorant de cet ensemble. »

15 Parmi les ensembles ci-dessous, indique ceux qui admettent un minimum, puis précise ce minimum.

a) A = $\{-\pi ; -\pi + 1 ; \pi ; \pi + 1\}$;

b) B = $]-\frac{13}{3} ; \frac{13}{3}]$;

c) C = $]-\frac{13}{3} ; \frac{13}{2}] \cap \mathbb{Z}$.

16 Dans chacun des cas suivants, dis si le nombre b est oui ou non le minimum de l'ensemble F .

1. $b = -1$; F = $\left[-1;\frac{3}{2}\right]$; 2. $b = -\frac{3}{2}$; F = $\left[-\frac{3}{2};1\right]$;

3. $b = -3$; F = $\left[-\frac{7}{2};5\right] \cap \mathbb{Z}$.

17 Soit a un nombre entier naturel premier.

Déterminer le minimum des diviseurs de a dans $\mathbb{N}$.

Valeur absolue d'un nombre réel

18 Recopie le numéro de chaque affirmation suivi de V si l'affirmation est vraie ou de F si l'affirmation est fausse.

a) « La valeur absolue d'un nombre réel a est le plus grand des deux nombres a et $-a$. »

b) « Tout nombre réel admet une valeur absolue. »

c) « Tout nombre réel est la valeur absolue de ce nombre réel. »

d) « La valeur absolue d'un nombre réel est toujours positive. »

19 Donne la valeur absolue de chacun des nombres réels suivants :

a) $\pi - 5$; b) $\pi - 1$; c) $2 - \sqrt{11}$; d) $-\frac{22}{7} - \pi$.

Distance de deux nombres réels

20 Recopie la lettre qui correspond à la bonne réponse.

a) La distance de a et b est $a - b$.

b) La distance de a et b est $b - a$.

c) La distance de a et b est $|a - b|$.

d) La distance de a et b est $|a| - |b|$.

21 Reproduis puis complète le tableau.

x	y	Distance de x et y
8	5	
– 11	– 9	
– 20	40,5	

Propriétés de la valeur absolue d'un nombre réel

22 Recopie le numéro de chaque affirmation suivi de V si l'affirmation est vraie ou de F si l'affirmation est fausse.

1. Deux nombres réels ayant même valeur absolue sont soit égaux, soit opposés.
2. $|x^3| = |x|x^2$.
3. $|2a - 3b| \leq 2|a| - 3|b|$.
4. $-2 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow |x| \leq 2$.

Résolution algébrique d'une équation du type $|x - a| = r$

23 Résous algébriquement dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $|x - 1{,}5| = 2{,}5$; b) $|\frac{3}{2} + x| = \frac{7}{3}$; c) $|2 - x| = 5$.

24 Résous algébriquement dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $3|x - 1| = 6$; b) $|\frac{3}{5}x - 3| = 1$; c) $|2x + 1| = 2$.

Résolution graphique d'une équation du type $|x - a| = r$

25 Résous graphiquement les équations suivantes :

a) $|x + 2| = 3$; **b)** $|5 - x| = 2$; **c)** $|3x - 9| = 7{,}2$.

26 Résous graphiquement les équations suivantes :

a) $3|x - 1{,}6| = 1{,}8$; **b)** $\left|\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}\right| = 4{,}2$.

Résolution algébrique d'une inéquation du type $|x - a| < r$

27 Résous algébriquement les inéquations suivantes :

a) $|x - 1{,}2| < 2$; **b)** $|3 + x| < \frac{3}{2}$; **c)** $|-x - 1| < 4$.

28 Résous algébriquement les inéquations suivantes :

a) $|3x + 6| < 3{,}6$; **b)** $|-1{,}2x - 2{,}4| < 7{,}2$.

Résolution graphique d'une inéquation du type $|x - a| < r$

29 Résous graphiquement les inéquations suivantes :

a) $|x - 1| < 5$; **b)** $|x + 4| < 3$; **c)** $|3 - x| < 1$.

30 Résous graphiquement les inéquations suivantes :

a) $2|x| < 6$; **b)** $|2x - 1| < 4$; **c)** $|-6 - x| \leq 3\sqrt{2}$.

Démonstration d'une propriété en utilisant le raisonnement par l'absurde

31 En utilisant le raisonnement par l'absurde, démontre que l'intervalle $[2 ; 5[$ n'a pas de maximum.

32

1. Soit p un nombre entier naturel. En utilisant le raisonnement par l'absurde, démontre que si p^2 est pair, alors p est pair.
2. On veut démontrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel. On suppose que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel c'est-à-dire il s'écrit sous la forme d'une fraction irréductible $\frac{p}{q}$, p et q étant des nombres entiers naturels non nuls.
   - a) Justifie que $p^2 = 2q^2$.
   - b) Déduis de **1)** et de **2-a)** que p est pair.
   - c) Justifie que q est pair.
   - d) Conclus.

Démonstration d'une propriété en utilisant un raisonnement intuitif ou déductif

33 On considère l'équation (E) : $|3 - 1{,}5x| = \sqrt{4{,}5}$.

a) Démontre que (E) $\Leftrightarrow |x - 2| = \sqrt{2}$.

b) Déduis-en les solutions de (E).

Exercices de renforcement/approfondissement

34 Soit n un nombre entier naturel.

Détermine lorsque cela est possible, un minorant et un majorant de chacun des ensembles suivants.

a) $[n - 1 ; n]$; **b)** $[-n ; -n + 1]$; **c)** $\{\frac{n-2}{n} / n \in \mathbb{N}^*\}$.

35 Démontre que pour tout nombre réel x, on a :

a) $|5x - 7| \leq |2x - 8| + |3x + 1|$

b) $|3x^5 + x| \leq 3|x^5| + |x|$

36 Pour chaque expression, donne une écriture simplifiée lorsque x appartient à l'ensemble E.

a) $A = \left|\frac{2x}{3}\right| + \left|\frac{-3x}{2}\right|$ et $E = [0 ; +\infty[$;

b) $B = 3|x + 2| - 2|x - 2|$ et $E = [-2 ; 2]$.

37 Soit a, b et c trois nombres réel quelconques.

Démontre que $|a - c| \leq |a - b| + |b - c|$.

38 Soit E l'ensemble des solutions de l'inéquation $|1 - 3x| \leq 2 + \sqrt{3}$.

Détermine un minorant et le maximum de E.

39 Soit A, B, C et M quatre points, d'abscisses respectives 7 ; – 4 ; 2 et x.

1. Exprime les distances AM, BM et CM en fonction de x.
2. Calcule les distances AB, BC et AC.
3. Calcule AM, BM et CM lorsque $x = -3$.

40 Résous dans $\mathbb{R}$ les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} |x - 4| \leq 3 \\ |x - 3| \leq 4 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} d(x ; -1) < 2 \\ d(3 ; x) < 1 \end{cases}$.

41 On considère un nombre réel x tel que : $2{,}325 \leq x \leq 2{,}46$.

1. Justifie que : si $x \in [2{,}325 ; 2{,}46]$, alors $x \in [2{,}3 ; 2{,}46]$.
2. Traduis alors cette appartenance à l'aide d'une valeur absolue. On dit que 2,4 est une valeur approchée de x à 0,1 près.

42 Un carré a pour côté 12,4 cm. Mais la règle utilisée pour effectuer la mesure ne permet qu'une précision de 0,1 cm. Ainsi, si x est le côté exact du carré, on peut écrire $|x - 12{,}4| \leq 0{,}1$.

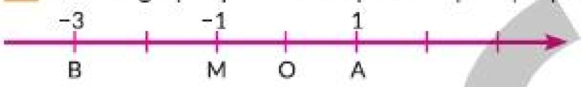
1. Détermine un encadrement de l'aire de ce carré par deux entiers.
2. Traduis cet encadrement à l'aide d'une valeur absolue.
3. Pour chaque réel x donné, établis une inégalité sous la forme : $|x - c| \leq r$.
   a) $x \in [669;976{,}6]$, r entier.
   b) $x \in [5238;5369]$, r entier, divisible par 10.

43 On connait l'imprécision de la mesure en cm des côtés x et y d'un rectangle :

$|x - 4{,}1| \leq 0{,}1$ et $|y - 3{,}4| \leq 0{,}3$.

1. Détermine un encadrement de x, de y et du périmètre **P** de ce rectangle.
2. Établis une égalité sous la forme : $|\mathbf{P} - c| \leq r$ où r est un entier. Déduis-en une valeur arrondie du périmètre et la précision.

44 Résous graphiquement l'équation : $|x - 1| = |x + 3|$.



45 Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation : $|1 - x| = |2x - 3|$.

46 On considère l'expression A telle que :

A = $|x + 2| + |x - 5|$.

1. Recopie et complète le tableau suivant :

x	$-\infty$	-2	5	$+\infty$
$\|x+2\|$				
$\|x-5\|$				
A				

2. Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation A = 11.
3. Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $|x + 2| - 2|x - 5| = 5$ en utilisant un tableau comme en 1.

47 Si a et b sont deux nombres réels, on appelle minimum de a et b, et on note min(a ; b), le plus petit de ces deux nombres. On appelle maximum de a et b, et on note max (a ; b), le plus grand de ces deux nombres.

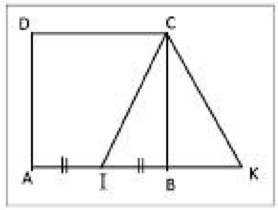
1. a) Soit a et b deux nombres réels tels que : $a \leq b$. Compare les nombres réels min(a ; b) et $\dfrac{a+b-|a-b|}{2}$.
   b) Compare ces mêmes quantités lorsque $a > b$.
   c) Conclus.
2. a) Établis une relation entre $\dfrac{a+b+|a-b|}{2}$ et max(a ; b) en raisonnant comme en 1).
   b) Démontre que : min(a ; b) + max (a ; b) = $a + b$.

48 Soient x et y deux nombres réels.

1. Démontre que : $2\sqrt{|xy|} \leq |x| + |y|$.
2. Démontre que : $2|xy| \leq x^2 + y^2$.
3. a) En écrivant x sous la forme $x = (x - y) + y$, démontre que : $|x| - |y| \leq |x - y|$.
   b) Déduis-en que : $||x| - |y|| \leq |x - y|$.
   c) Justifie que : $||x| - |y|| \leq |x + y|$.

49 ABCD est un carré de côté 1. I est le milieu du segment [AB]. K est le point de la demi- droite [AB) tel que : IK = IC (voir figure ci-dessous).

1. Démontre que : $AK = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.



2. On pose : $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
   a) Compare φ^2 et $\varphi + 1$.
   b) Démontre que : $\varphi = 1 + \dfrac{1}{\varphi}$.
   c) Sachant que $2{,}2360 < \sqrt{5} < 2{,}2361$, détermine l'arrondi d'ordre 3 du nombre φ.

50 Deux élèves, Soro et Zadi, habitent la même rue à 400 m l'un de l'autre.

Les parents de Soro lui demandent de ne pas s'éloigner de plus de 300 m de la maison. Ceux de Zadi demandent de ne pas s'éloigner de plus de 200 m.

Ils souhaitent déterminer la partie de la rue où ils peuvent jouer ensemble sans désobéir à leurs parents. Soucieux, ils demandent la contribution de l'aîné d'une des familles, élève en classe de seconde.

On représente la rue par une droite graduée de repère (O ; A) (unité : 1 cm).

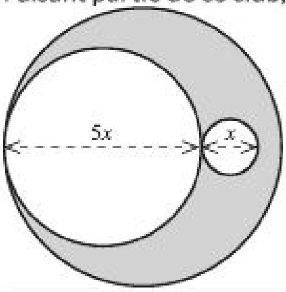
La maison de Zadi est en A et celle de Soro en C, avec A un point du segment [OC].

4. Traduis les phrases suivantes en langage mathématique
   a) « Les parents de Zadi lui demandent de ne pas s'éloigner de plus de 300 m »
   b) « Les parents de Soro lui demandent de ne pas s'éloigner de plus de 200 m »
2. Représente la partie de la rue ou les deux enfants peuvent jouer ensemble.

Situations complexes

51 La cour d'un lycée dispose d'un espace circulaire de rayon 40 m. Le Proviseur veut l'aménager selon le schéma ci-dessous en faisant planter du gazon et des fleurs sur l'espace grisé.

Compte tenu du coût élevé de l'aménagement, le Proviseur souhaite que l'aire de l'espace à gazonner soit comprise entre 2 900 m² et 3 000 m².
Les élèves de 2^de^ C du club environnement sont sollicités pour déterminer les valeurs de x pour lesquelles le souhait du proviseur sera réalisé.
Faisant partie de ce club, détermine les valeurs de x.

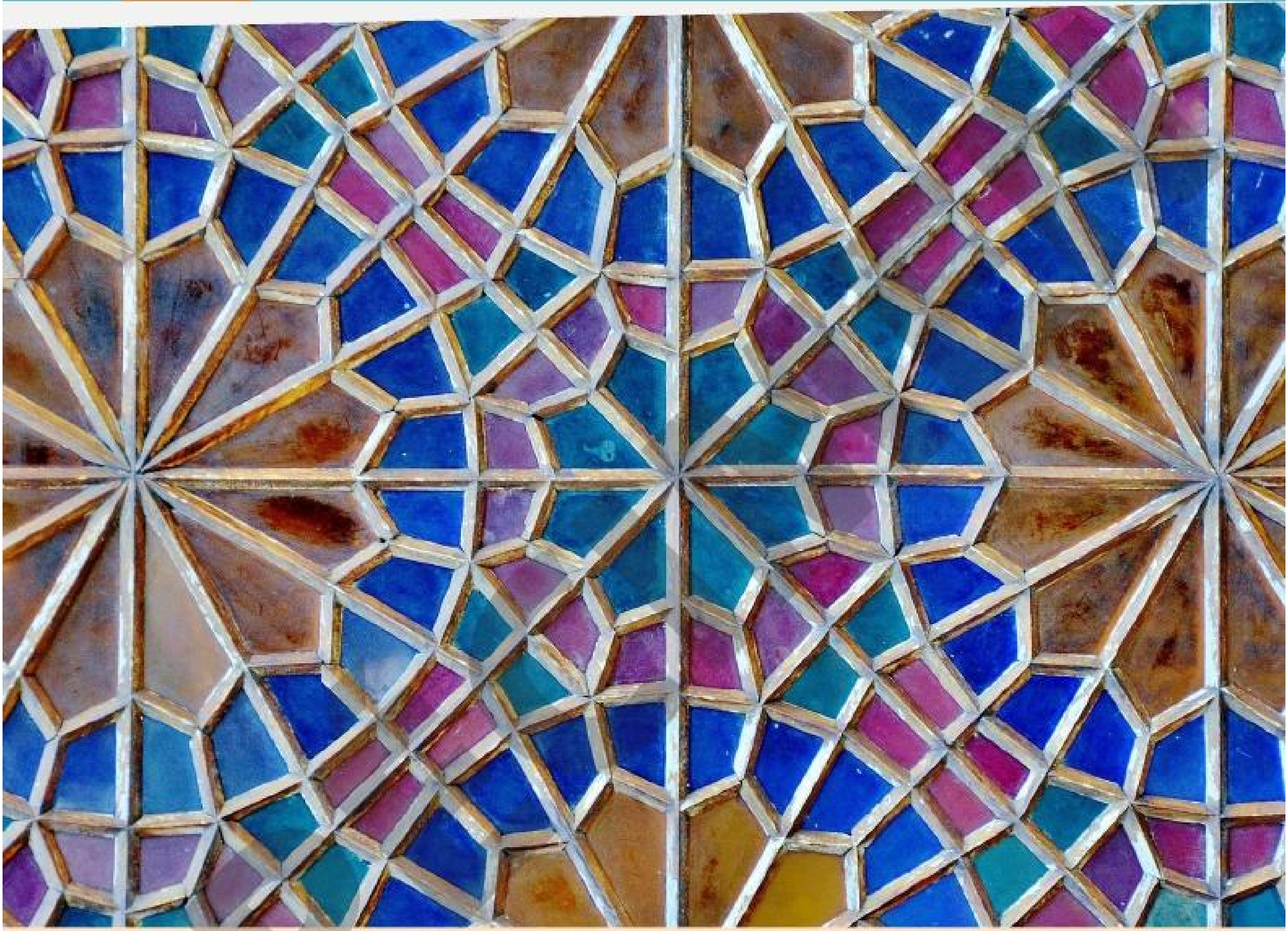


52 En début d'année scolaire, une classe de 2^de^ C d'un lycée commande chez un ferronnier une poubelle ayant la forme d'un pavé droit.
La classe souhaite avoir une poubelle dont le volume v en m³ est tel que : $|v - 2{,}25| \leq 0{,}45$.
Le ferronnier donne alors avec précision, en mètres les dimensions de ce pavé :

- Longueur (L) : $|L - 2| \leq 0{,}1$;
- Largeur (l) : $|l - 1{,}5| \leq 0{,}15$;
- Hauteur (h) : $|h - 0{,}75| \leq 0{,}01$.

N'étant pas convaincu pas les dimensions donné par le ferronnier, ta classe se charge de procéder à une vérification.
À l'aide d'une production argumentée, dis si les dimensions données par le ferronnier sont conformes à l'exigence de ta classe.

3 UTILISATION DES SYMÉTRIES ET TRANSLATIONS



Commentaire de la Leçon

L'étude des symétries et des translations n'est pas nouvelle en classe de seconde C. L'apprenant a étudié depuis les classes de sixième et de cinquième, la notion de figures symétriques par rapport à un point et par rapport une droite. En classe de quatrième, il a étudié la symétrie centrale, la symétrie orthogonale et la translation. En classe de seconde, l'enseignant s'appuiera sur ces pré-acquis pour approfondir ces notions. Ici, on insistera davantage sur l'utilisation de ces isométries planes pour construire, pour démontrer et pour chercher un lieu géométrique. Certaines composées de ces isométries seront abordées en classe de première et leur décomposition en classe de terminale C. Les translations et les symétries seront réinvesties en Terminale C lors de l'étude des isométries et des similitudes du plan.

Dans la nature, la symétrie est partout présente. Que ce soit dans les mathématiques, la biologie, la chimie, la physique, et même dans les sciences humaines. À très petite ou à très grande échelle, la symétrie est constitutive de notre monde. Les symétries et les translations sont largement utilisées dans la confection des motifs et dans la décoration.

Habiletés et Contenus

- ✓ **Connaître** la propriété caractéristique de la translation.
- ✓ **Construire** une figure en utilisant les propriétés des symétries orthogonales ; une figure en utilisant les propriétés des symétries centrales ; une figure en utilisant les propriétés des translations.
- ✓ **Démontrer** une propriété en utilisant une symétrie ou une translation.
- ✓ **Trouver** un ensemble de points en utilisant une symétrie ou une translation.
- ✓ **Traiter une situation** faisant appel à l'utilisation des symétries et des translations.

Situation d'Apprentissage

Akissi est une élève de seconde C au Lycée Houphouët-Boigny de Korhogo. Elle amène la gravure ci-dessus du peintre ESCHER en classe et raconte à ses camarades ce que son père, professeur de Mathématiques, lui a dit : « On peut obtenir tous les lézards de la figure à partir d'un seul d'entre eux en utilisant des symétries ou des translations ». Emerveillés par la gravure et impressionnés par ce qu'ils viennent d'apprendre, Akissi et ses camarades de classe décident de s'informer sur l'utilisation des symétries et translations pour construire, démontrer des propriétés et trouver des ensembles de points.

Activité 1 Propriété caractéristique de la translation

On donne un vecteur $\vec{u}$ du plan.

Soient A et B deux points du plan.

1. Construis les images respectives A' et B' des points A et B par la translation de vecteur $\vec{u}$.
2. Démontre que : $\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{AB}$.

Récapitulons

Etant donnés deux points M et N du plan d'images respectives M' et N' par une translation, on a : $\overrightarrow{M'N'}=\overrightarrow{MN}$.

Exercices de fixation

1 Pour l'énoncé ci-dessous, quatre réponses a), (b), c) et d) sont proposées dont une seule permet d'avoir une affirmation vraie. Choisis la lettre correspondant à l'affirmation vraie.

Énoncé : Etant donné deux points E et F du plan d'images respectives G et H par une translation, on a :

a) $\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{FG}$; **b)** $\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{FE}$; **c)** $\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{EF}$; **d)** $\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{HF}$.

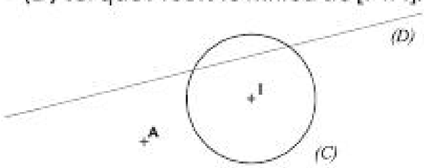
2 A et B sont deux points du plan d'images respectives A' et B' par une translation et C est un point du plan.

Justifie que : $2\,\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A'B'}=2\,\overrightarrow{AC}$.

Activité 2 Utilisation d'une symétrie ou d'une translation pour construire

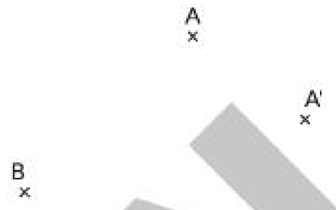
1. **Utilisation d'une symétrie centrale pour construire**
   a) ABC est un triangle et I, le milieu du segment [BC].
   - En utilisant uniquement une règle non graduée et un compas, construis un point P de la droite (D) tel que le quadrilatère ABPC soit un parallélogramme.
   - Justifie ta construction.

   b) (C) est un cercle de centre I, (D) est une droite (voir figure ci-dessous) et A est un point quelconque du plan. On se propose de construire un point M de (C) et un point N de (D) tel que A soit le milieu de [MN].



- Marque un point M_1 sur (C).
- Effectue la construction d'un point N_1, qui n'est pas forcément sur la (D), tel que A soit le milieu de [M_1 N_1]. Que suggère cette configuration ?
- Construis l'image (C') du cercle (C) par la symétrie centrale de centre A.
- Soit N un point d'intersection de (C') et de (D).
  - Justifie que son image M par une symétrie centrale appropriée appartient à (C).
  - Marque le point M.
  - Rédige un programme de construction.

2. Utilisation d'une symétrie orthogonale pour construire.



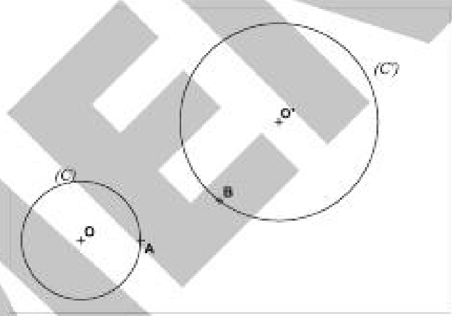
Sur la figure ci-contre, le point A' est l'image de A par une symétrie orthogonale.

a) En utilisant seulement un compas et une règle non graduée, construis le pont B', image de B par cette symétrie orthogonale.

b) Explique ta construction.

3. Utilisation d'une translation pour construire

Sur la figure ci-dessous, (C) et (C') sont deux cercles de centres respectifs O et O'. A et B sont des points respectivement des cercles (C) et (C').



a) Construis un point C sur le cercle (C') et un point D sur le cercle (C) tels que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme.

b) Donne ton programme de construction et justifie ce programme.

4. Synthèse

Dégage à partir de tout ce qui précède, une méthode pour résoudre un problème de construction en utilisant une symétrie ou une translation.

Récapitulons

Pour résoudre un problème de construction, on peut suivre les étapes suivantes :

Etape 1 : Lecture de l'énoncé
- Relever les données ;
- Relever les instruments imposés.

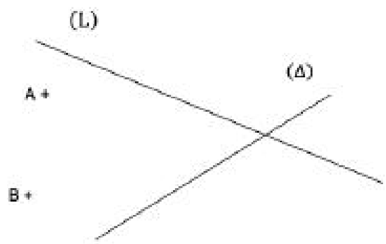
Etape 2 : Recherche d'une démarche
- Faire une esquisse ;
- Analyser cette esquisse ;
- Rechercher une méthode de construction.

Etape 3 : Réalisation de la solution
- Rédiger le programme de construction ;
- Construire la figure et la codée ;
- Examiner éventuellement le nombre de solutions ;
- Justifier que la construction respecte les contraintes de l'énoncé.

Exercices de fixation

3 On donne la figure ci-contre constituée de deux droites sécantes (Δ) et (L) et deux points A et B.

Reproduis la figure ci-contre et construis un parallélogramme ABCD tel que : C ∈ (Δ) et D ∈ (L).



4 Relie chaque numéro de la colonne 1 à une lettre de la colonne 2 de façon à établir une correspondance entre les éléments des deux colonnes.

Colonne 1 : les constituants des étapes	
Construire la figure et la codée.	1
Relever les données.	2
Faire une esquisse .	3
Rédiger le programme de construction.	4
Examiner éventuellement le nombre de solutions.	5
Analyser cette esquisse.	6
Relever les instruments imposés.	7
Rechercher une méthode de construction.	8
Rédiger le programme de construction.	9

Colonne 2 : les étapes	
A	Lecture de l'énoncé.
B	Recherche d'une démarche.
C	Réalisation de la solution.

Activité 3 Utilisation d'une symétrie ou d'une translation pour démontrer une propriété

a) Utilisation d'une symétrie centrale pour démontrer une propriété

ABCD est un losange de centre O ; (L) et (L') sont deux droites perpendiculaires en O.
La droite (L) coupe la droite (BC) en P et la droite (AD) en R ;
La droite (L') coupe la droite (CD) en Q et la droite (AB) en S.
Démontre que le quadrilatère PQRS est un losange.

b) Utilisation d'une symétrie orthogonale pour démontrer une propriété

ABC est un triangle isocèle en A. La médiatrice (Δ_1) du segment [AB] coupe la droite (BC) en E et la médiatrice (Δ_2) du segment [AC] coupe la droite (BC) en F.
Démontre que : BF = CE.

c) Utilisation d'une translation pour démontrer une propriété

ABC est un triangle et H est le milieu du segment [AB].

1. Construis les points M et P tels que : $M = t_{\overrightarrow{BC}}(H)$ et $P = t_{\overrightarrow{AH}}(C)$.
2. Démontre que le quadrilatère AMPB est un parallélogramme.

c) Synthèse

Dégage à partir de tout ce qui précède, une méthode pour résoudre un problème de démonstration en utilisant une symétrie ou une translation.

Récapitulons

Pour résoudre un problème de démonstration d'une propriété, on peut suivre les étapes suivantes :

Etape 1 : Lecture de l'énoncé
- Lire l'énoncé ;
- Relever les données.

Etape 2 : Recherche d'une démarche
- Faire une esquisse ;
- Analyser cette esquisse ;
- Rechercher une application (une symétrie ou une translation) qui convienne pour faire la démonstration.

Etape 3 : Réalisation de la solution
- Rédiger la démonstration ;
- Vérifier que la démonstration respecte les contraintes de l'énoncé.

Exercices de fixation

5 Relie chaque numéro de la colonne 1 à une lettre de la colonne 2 de façon à établir une correspondance entre les éléments des deux colonnes.

Colonne 1 : les constituants des étapes	
Rédiger la démonstration.	1
Faire une esquisse.	2
Rechercher une application (une symétrie ou une translation) qui convienne pour faire la démonstration.	3
Analyser cette esquisse.	4
Lire l'énoncé.	5
Vérifier que la démonstration respecte les contraintes de l'énoncé.	6
Relever les données.	7

Colonne 2 : les étapes	
A	Lecture de l'énoncé.
B	Recherche d'une démarche.
C	Réalisation de la solution.

6 OABC est un triangle, I milieu du segment [BC].

H et K sont les projetés orthogonaux respectifs de B et C sur la droite (AI).

En utilisant une symétrie centrale, démontre que le quadrilatère BHCK est un parallélogramme.

Activité 4 Utilisation d'une symétrie ou d'une translation pour trouver un ensemble de points

a) Utilisation d'une symétrie centrale pour trouver un ensemble de points

Soit [BD] un segment fixe, (C) un cercle de centre D et de rayon r non nul et A un point de (C). Détermine l'ensemble des points C tels que le quadrilatère ACBD soit un parallélogramme lorsque le point A décrit le cercle (C).

b) Utilisation d'une symétrie orthogonale pour trouver un ensemble de points

(D) est une droite, A et B sont deux points qui ne sont pas situés sur la droite (D).

À tout point M de (D), on associe le point M', le second point d'intersection du cercle de centre A et de rayon AM et du cercle de centre B et de rayon BM.

Détermine le lieu géométrique des points M' lorsque le point M décrit la droite (D), dans chacun des cas suivants :

1. Les droites (AB) et (D) ne sont pas perpendiculaires ;
2. Les droites (AB) et (D) sont perpendiculaires.

c) Utilisation d'une translation pour trouver un ensemble de points

A et B sont deux points distincts du plan et (Δ) est une droite fixe.

On considère un point M parcourant la droite (Δ).

Détermine le lieu géométrique des points N tels que le quadrilatère ABMN soit un parallélogramme.

d) Synthèse

Dégage à partir de ce qui précède, une méthode pour résoudre un problème de recherche de lieu géométrique en utilisant une symétrie ou une translation.

Récapitulons

Pour résoudre un problème de recherche de lieu géométrique, on peut suivre les étapes suivantes :

Etape 1 : Lecture de l'énoncé
- Lire l'énoncé ;
- Relever les données ;
- Relever les instruments à utiliser.

Etape 2 : Recherche d'une démarche
- Faire une esquisse ;
- Analyser cette esquisse ;
- Rechercher l'application (la symétrie ou la translation) appropriée qui permette de considérer un point comme image d'un autre par cette application.

Etape 3 : Réalisation de la solution
- Rédiger la solution ;
- Construire l'ensemble des points cherchés.

Exercices de fixation

7 Relie chaque numéro de la colonne 1 à une lettre de la colonne 2 de façon à établir une correspondance entre les éléments des deux colonnes.

Colonne 1 : les constituants des étapes	
Analyser cette esquisse	1
Construire l'ensemble des points cherchés	2
Lire l'énoncé	3
Rechercher l'application appropriée qui permette de considérer un point comme image d'un autre par cette application	4
Relever les instruments à utiliser	5
Faire une esquisse	6
Relever les données	7
Rédiger la méthode à utiliser	8

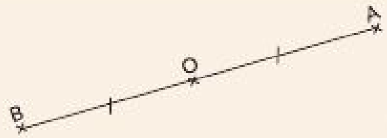
Colonne 2 : les étapes	
A	Lecture de l'énoncé
B	Recherche d'une démarche
C	Réalisation de la solution

8 (D) est une droite du plan, A et B sont deux points du plan n'appartenant pas à la droite (D).
1. E est un point de la droite (D). Construis le point F tel que le quadrilatère KLFE soit un parallélogramme.
2. Détermine l'ensemble décrit par le point F lorsque le point E parcourt la droite (D).

1. Symétrie centrale

Définition

O est un point du plan.
La symétrie centrale de centre O est l'application du plan dans le plan qui à tout point du plan associe son symétrique par rapport à O.



Notation

On la note S_O.

Point invariant

Le seul point invariant de la symétrie centrale de centre O est le point O.

Propriété

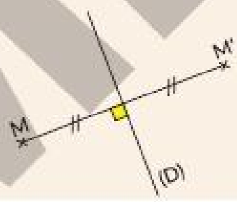
$M' = S_O(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$

2. Symétrie orthogonale

Définition

(D) est une droite du plan.
La symétrie orthogonale d'axe (D) est l'application qui à tout point M du plan associe le point M' tel que :

- $M' = M$ si $M \in (D)$;
- (D) est la médiatrice de [MM'] si $M \notin (D)$.



Notation

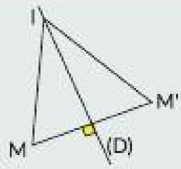
On la note $S_{(D)}$.

Point invariant

Les points invariants de $S_{(D)}$ sont les points de (D). On dit que la droite (D) est invariante par la symétrie orthogonale d'axe (D).

Propriété

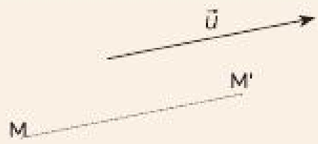
Soit une droite (D).
Pour tout point M, n'appartenant pas à (D) d'image M' par $S_{(D)}$ et pour tout point I de (D) n'appartenant pas à (MM'), on a : IMM' est un triangle isocèle en I.



3. Translation

Définition

$\vec{u}$ est un vecteur.
La translation de vecteur $\vec{u}$ est l'application du plan dans le plan qui à tout point M du plan associe le point M' tel que : $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.



Notation

On la note $t_{\vec{u}}$.

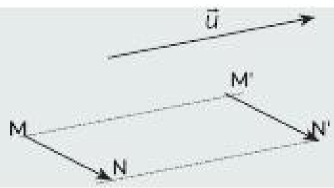
Point invariant

Lorsque $\vec{u} \neq \vec{0}$, $t_{\vec{u}}$ n'a pas de point invariant.

Lorsque $\vec{u} = \vec{0}$, tous les points du plan sont invariants.

Propriété fondamentale de la translation

Soit $\vec{u}$ un vecteur.
Pour tous points M et N d'images respectives M' et N' par la translation de vecteur $\vec{u}$, on a : $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$.



QUESTION 1

Comment utiliser une symétrie ou une translation pour construire des points vérifiant certaines contraintes ?

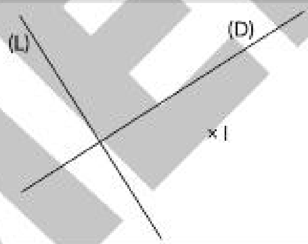
Méthode

- Relever les données ;
- Relever les contraintes ;
- Faire une esquisse de la figure ;
- Analyser l'esquisse de la figure et rechercher une application (une symétrie ou une translation) convenable permettant de faire la construction ;
- Rédiger le programme de construction ;
- Construire la figure et la codée ;
- Examiner éventuellement le nombre de solutions ;
- Justifier que la construction respecte les contraintes de l'énoncé.

Exercice

(D) et (L) sont deux droites sécantes et I est un point n'appartenant ni à (D) ni à (L).

Construis un point E appartenant à la droite (D) et un point F appartenant à la droite (L) tels que le point I soit le milieu du segment [EF].



Solution commentée

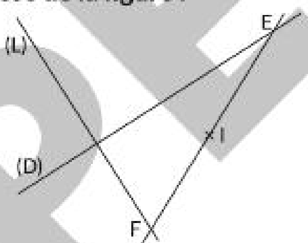
✓ **Les données de l'énoncé sont :**

- (D) et (L) sont deux droites sécantes ;
- I est un point n'appartenant ni à (D) ni à (L).

✓ **Les contraintes sont :**

- E appartenant à (D) et F appartenant à (L) ;
- I soit le milieu de[EF].

✓ **L'esquisse de la figure :**



- **L'analyse de l'esquisse de la figure et la recherche d'une application convenable**

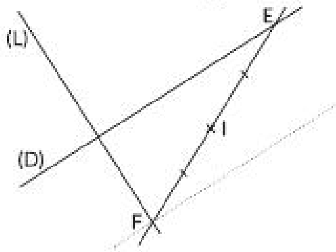
I est milieu du segment donc F est l'image de E par la symétrie centrale de centre I.

On peut considérer la symétrie centrale S_I de centre I et on peut noter (D'), l'image de la droite (D) par S_I. (D') // (D) et (D') coupe la droite (L) en un point un point. Notons F ce point. L'image du point E par S_I appartient à la droite (D). Ainsi le point I est le milieu du segment [FS_I (F)] et E=S_I (F).

✓ **Le programme de construction**

- Construire l'image (D') de la droite (D) par la symétrie centrale S_I .
- Noter F le point d'intersection des droites (D') et (L).
- Construire l'image du point F par la symétrie S_I.
- Noter E le point image de F par la symétrie S_I.

✓ **La construction de la figure codée**



✓ **L'examen du nombre de solutions**

La droite (D') coupe la droite (L) en un seul point. Donc le point F existe et est unique, d'où l'existence et l'unicité du point E.

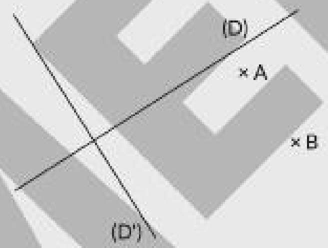
On en déduit qu'il existe un seul couple de points (E,F) du plan tel que le point I soit le milieu du segment [EF].

✓ **La justification du fait que la construction respecte les contraintes de l'énoncé**

- (D') est l'image de (D) par la symétrie centrale S_I de centre I, donc les droites (D') et (D) sont parallèles. Or les droites (D) et (L) sont sécantes, donc les droites (D') et (L) sont sécantes. Ainsi le point d'intersection F des droites (D') et (L) appartient à la droite (L).
- E est l'image de F par la symétrie centrale S_I, comme F appartient à (D'), donc E appartient à (D) ; car (D') et (D) sont symétriques par rapport au point I.
- E est l'image de F par la symétrie centrale S_I donc I est le milieu du segment[EF].

■ **Exercice non corrigé**

(D) et (D') sont deux droites sécantes, A et B sont deux points distincts comme indiqués sur la figure ci-contre.
Construis un point P appartenant à (D) et un point Q appartenant à (D') tels que : $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB}$.



QUESTION 2

Comment utiliser une symétrie ou une translation pour démontrer une propriété ?

Méthode

- Relever les données
- Relever la conclusion ;
- Faire une esquisse de la figure ;
- Analyser l'esquisse de la figure et rechercher une application (une symétrie ou une translation) convenable permettant de faire la démonstration ;
- Rechercher une démarche permettant d'obtenir la conclusion ;
- Réaliser la démonstration.

■ **Exercice**

ABCD est un parallélogramme de centre O. I est un point du segment [AD] et J un point du segment [DC].
La droite (OJ) coupe la droite (AB) en K et la parallèle à (IJ) passant par K coupe (BC) en L.
Démontre que O est le milieu du segment [IL].

■ **Solution commentée**

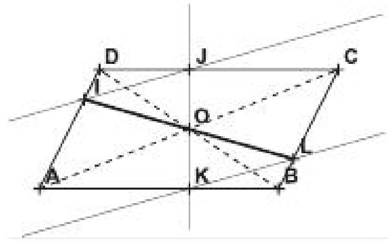
✓ **Les données de l'énoncé sont :**

- ABCD est un parallélogramme de centre O ;
- I est un point de la droite (AD) ;
- J est un point de la droite (DC) ;
- La droite (OJ) coupe la droite (AB) en K ;
- La parallèle à (IJ) passant par K coupe (BC) en L.

✓ **La conclusion est :**

O est le milieu du segment [IL].

✓ **L'esquisse de la figure :**



✓ **L'analyse de l'esquisse de la figure et la recherche d'une application convenable permettant de faire la démonstration :**

ABCD est un parallélogramme de centre O. Donc O est le milieu des segments [AC] et [BD].

Par conséquent les points C et D sont les images respectives des points A et B par la symétrie centrale S_O de centre O. On peut donc considérer la symétrie centrale S_O de centre O.

✓ **La recherche d'une démarche permettant d'obtenir la conclusion :**

Nous allons démontrer que le point L est l'image du point I par la symétrie centrale S_O de centre O.

Pour cela nous allons :

- Démontrer que S_O ((AD)) = (BC) ;
- Démontrer que S_O ((IJ)) = (KL) ;

✓ **La réalisation de la démonstration :**

- ABCD est un parallélogramme de centre O, donc O est le milieu de chacun des segments [AC] et [DB]. Par conséquent, S_O (A) = C et S_O(D) = B. On en déduit que S_O ((AD)) = (BC).
- $J \in (DC) \cap (OJ)$, donc $S_O(J) \in S_O((DC)) \cap S_O((OJ))$. Or $S_O((DC)) \cap S_O((OJ)) = (AB) \cap (OJ)$, donc S_O (J) est le point d'intersection des droites (AB) et (OJ). Ainsi S_O (J) = K car la droite (OJ) coupe la droite (AB) en K.

  On a S_O (J) = K et (KL) // (IJ), donc S_O ((IJ)) = (KL) car le symétrique d'une droite par rapport à un point est une droite qui lui est parallèle.
- Les droites (AD) et (IJ) étant sécantes en I, leur symétriques respectives (BC) et (KL) sont sécantes en S_O (I). Or les droites (BC) et (KL) sont sécantes en L, donc S_O(I) = L.

Ainsi le point O est le milieu du segment [IL].

Exercice non corrigé

(C) est un cercle de centre de centre O, [EG] et [FH] sont deux diamètres de ce cercle.
Démontre que le quadrilatère EFGH est un rectangle.

QUESTION 3

Comment utiliser une symétrie ou une translation pour déterminer un lieu géométrique ?

Méthode

- Relever les données ;
- Faire une esquisse de la figure ;
- Analyser l'esquisse de la figure et rechercher une application (la symétrie ou la translation) appropriée permettant de répondre à la question ;
- Identifier les instruments à utiliser
- Rédiger la solution ;
- Construire l'ensemble des points cherchés.

Exercice

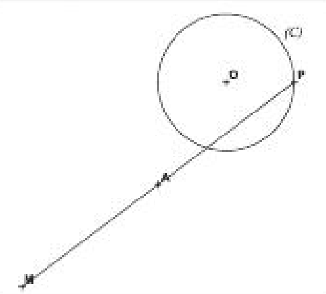
On donne un point A et un cercle (C) de centre O. P étant un point de (C), on désigne par M le point tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{PA}$. Détermine le lieu géométrique du point M lorsque P parcourt (C).

Solution commentée

✓ **Les données de l'énoncé :**

- A est un point ;
- (C) est une cercle de centre O ;
- M le point tel que : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{PA}$.

✓ **L'esquisse de la figure :**



✓ **L'analyse de l'esquisse de la figure et la recherche d'une application appropriée permettant de répondre à la question :**

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{PA} \Leftrightarrow \overrightarrow{PM}=2\overrightarrow{PA}$. Donc A est le milieu du segment [PM], c'est-à-dire que M est l'image de P par la symétrie centrale S_A de centre A. L'application convenable est la symétrie centrale S_A de centre A.

✓ **L'identification des instruments à utiliser :**

- La règle non graduée ;
- Le compas.

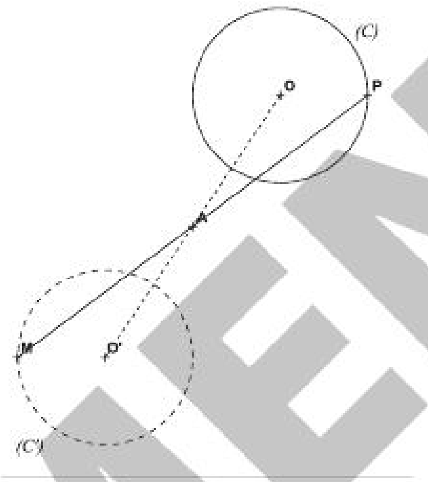
✓ **La rédaction de la solution :**

Considérons la symétrie centrale S_A de centre A.

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{PA} \Leftrightarrow \overrightarrow{PM}=2\overrightarrow{PA}$. Donc A est le milieu du segment [PM]. Ainsi S_A (P) = M.

Par conséquent, lorsque P parcourt le cercle (C), le point M = S_A(P) parcourt le cercle (C'), image de (C) par la symétrie centrale S_A de centre A.

✓ **Construire l'ensemble des points cherchés**



Exercice non corrigé

(C) est un cercle de centre O et A un point fixe du cercle (C).

À tout point M du cercle (C) distinct de A, on associe le point N est tel que le quadrilatère OANM soit un parallélogramme.

1. Fais une figure.
2. Détermine l'ensemble décrit par le point N lorsque le point M décrit le cercle.

Exercices de fixation

Propriétés des symétries et translations

1 Recopie et complète le texte ci-dessous à l'aide des mots ou groupe de mots suivants :

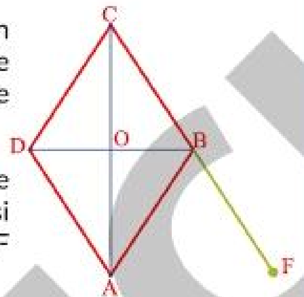
la distance - orthogonale - parallèle - la mesure des angles - un segment - les angles orientés - même longueur.

Par une symétrie centrale, une symétrie orthogonale ou une translation, l'image d'un segment est ...(1)... de ...(2)...

On dit que ces applications du plan conservent ...(3)... . De même, elles conservent ...(4)... . Mais contrairement aux deux autres, la symétrie ...(5)... ne conserve pas ...(6)... .

L'image d'une droite par une symétrie centrale ou une translation est une droite qui lui est ...(7)... .

2 Sur la figure ci-contre, on considère le losange ABCD de centre O. F est le symétrique de C par rapport à B.



Recopie le numéro de chaque affirmation suivi de V si l'affirmation est vraie ou de F si l'affirmation est fausse.

1. $S_O([DB]) = [DB]$.
2. $S_O((AD)) = (DC)$.
3. L'image de ABCD par S_O est ABCD.
4. $t_{\overrightarrow{AC}}(C) = A$.
5. $t_{\overrightarrow{OB}}(A) = F$.
6. $t_{\overrightarrow{CD}}((AB)) = (AB)$.
7. $S_{(AC)}(B) = D$.
8. $S_{(AC)}((DC)) = (BF)$.
9. ABCD et son image par $S_{(BC)}$ sont confondus.

Utilisation d'une symétrie et d'une translation pour démontrer une propriété

3 ABC est un triangle.

1. Construis le point A' tel que $A' = t_{\overrightarrow{CB}}(A)$.
2. Construis le point B' tel que $B' = S_{(AC)}(B)$.
3. Construis le point C' tel que $C' = S_B(C)$.
4. Justifie que le quadrilatère ABC'A' est un parallélogramme.

Exercices de renforcement/approfondissement

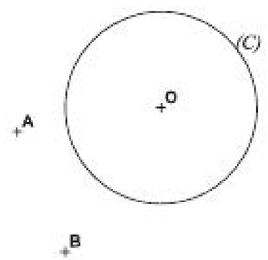
Utilisation d'une symétrie ou d'une translation pour construire

4 Soit (C) un cercle de centre O, A un point de (C), B le point défini par $\overrightarrow{OB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OA}$ et (D) la perpendiculaire à (OB) passant par le point B.

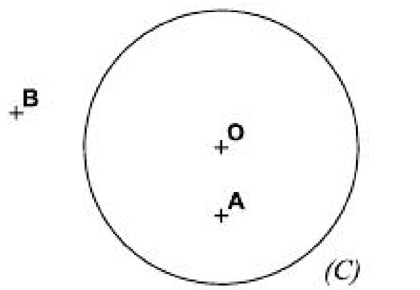
Construis un point M sur (D) et un point N sur (C) tels que le quadrilatère OAMN soit un parallélogramme.

5 Sur la figure ci-dessous (C) est un cercle de centre O, A et B sont deux points extérieurs à (C).

Reproduis la figure et construis deux points P et Q appartenant à (C) tels que le quadrilatère ABQP soit un parallélogramme.

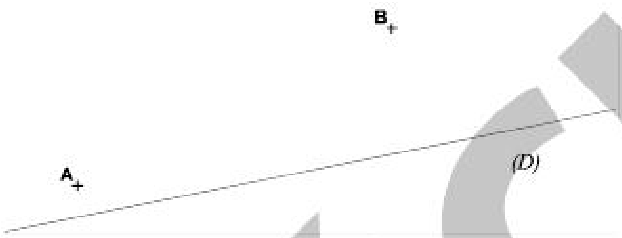


6 Sur la figure ci-dessous (C) est un cercle de centre O, A et B sont deux points tels que A est intérieur à (C) et B est extérieur à (C).



Reproduis la figure et construis deux points P et Q appartenant à (C) tels que le quadrilatère APBQ soit un parallélogramme.

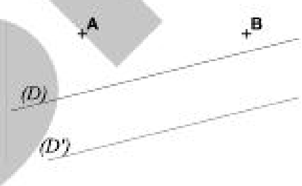
7 On donne une droite (D) et deux points A et B comme indiqué ci-dessous.



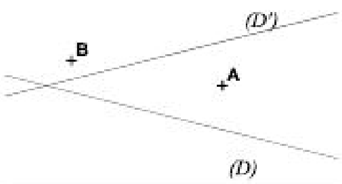
Trouve un point M de (D) pour que AM + BM soit la plus petite possible.

8 On donne deux droites (D) et (D') et deux points A et B.
Trouve un point M de la droite (D) et le point N de la droite (D') tels que AM + MN + NB soit la plus petite possible.

1er cas :



2e cas :



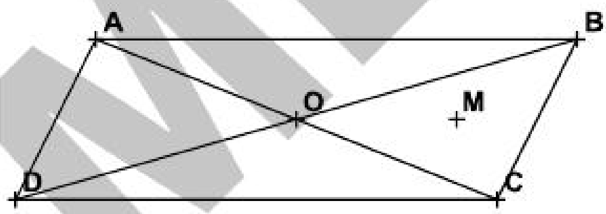
9 ABC est un triangle et M est un point appartenant au segment [BC].

Construis le point P de la droite (AB) et le point Q de la droite (AC) tels que MP + MQ + PQ soit la plus petite possible.

10 MNPQ est un parallélogramme qui n'est pas un losange, (D_1) est la droite qui passe par le point M et qui est perpendiculaire à la droite (NQ).

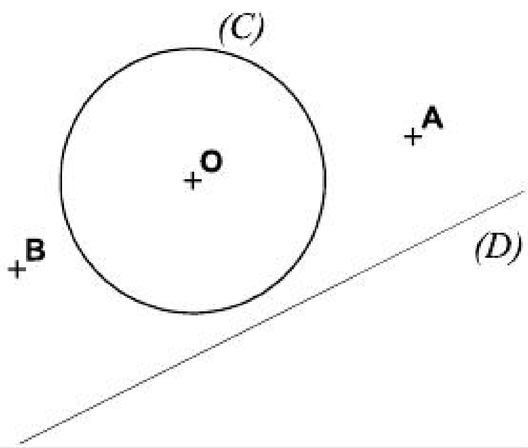
Construis à l'aide de la règle non graduée la droite (D_2) perpendiculaire à (NQ) en P.

11 Sur la figure ci-dessous, ABCD est un parallélogramme de centre O et M est un point du plan.



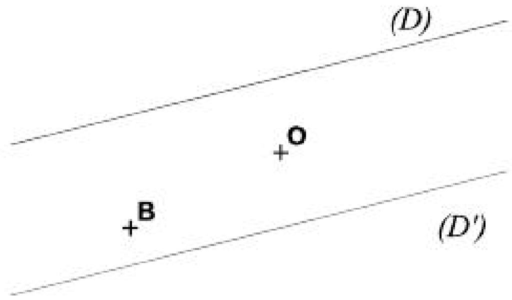
1. Construis l'image M' de M par la symétrie centrale de centre O en utilisant seulement la règle non graduée.
2. Donne un programme de construction.

12 Sur la figure ci-dessous, (C) est un cercle de centre O, A et B sont deux points extérieures à (C), (D) est une droite n'ayant aucun point commun avec (C).



1. Reproduis la figure et construis un point E sur la droite (D) et un point F sur le cercle (C) tels que le quadrilatère ABTK soit un parallélogramme.
2. Donne un programme de construction.

13 La figure ci-dessous est constituée de deux droites (D) et (D'), d'un point O tel que (D') soit le symétrique de (D) par rapport au point O et d'un point B qui se trouve dans la bande formée par (D) et (D').



Construis à la règle non graduée uniquement le symétrique du point B par rapport à O.

Utilisation d'une symétrie ou d'une translation pour démontrer une propriété

14 (D) est une droite.
A, B, C et D sont quatre points de (D) tels que : AB = BC = CD. (C) est le cercle de diamètre [BD] et T est le point de contact d'une tangente à (C) menée par A.

1. Fais une figure.
2. Démontre que le triangle BTC est équilatéral.
3. Démontre que : TA = TD.

15 On donne un triangle ABC. Soit I le milieu du segment [BC], E et F les points de la droite (AI) tels que les droites (BE) et (CF) soient perpendiculaires à la droite (AI).

Démontrer que : BE = CF.

16 ABC est un triangle.
I, J et K sont les milieu respectifs des côtés [BC], [AB] et [AC], D est le projeté orthogonal de A sur la droite (BC). On note (Δ) la médiatrice du segment [JK].

1. Fais une figure.
2. Démontre que la droite (Δ) est la médiatrice du segment [DI].
3. Démontre que : $mes\widehat{DJI} = mes\widehat{DKI}$.

Utilisation des symétries et translations pour trouver un ensemble de points

17 (C) est un cercle ; A et B sont deux points distincts extérieurs à (C) tels que la droite (AB) et le cercle (C) n'aient aucun point commun.

Soit M un point du cercle (C) et N le point du plan tel que ABMN soit un parallélogramme.

Détermine l'ensemble des points N lorsque M parcourt le cercle (C).

18 On donne une droite (D) et un vecteur $\vec{u}$ qui n'est pas un vecteur directeur de (D) et A un point de (D). Lorsque A parcourt la droite (D), détermine l'ensemble des points B, extrémités des représentants d'origine A du vecteur $\vec{u}$.

19 (D_1) et (D_2) sont deux droites sécantes en O.
A et B sont deux points distincts donnés dans un même secteur angulaire.

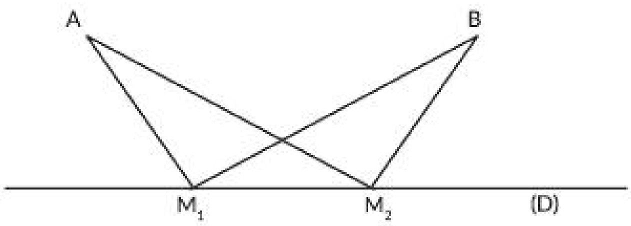
1.a) Construis un point M sur (D_1) et un point N sur (D_2) tels que le quadrilatère ABMN soit un parallélogramme.

b) Donne un programme de construction.

2. Détermine le lieu géométrique des points M lorsque N décrit la droite (D_2).

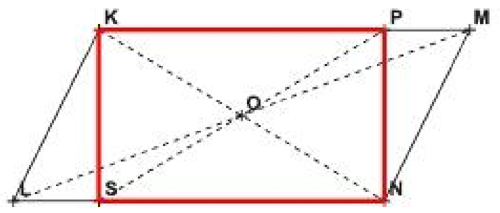
20 Soit (D) une droite et A et B deux points distincts non situés sur (D). (Voir figure)

Reproduis la figure ci-dessous pour construis le point M de la droite (D) qui minimise la somme AM + MB.



Situations complexes

21 La parcelle d'un riche cultivateur a la forme d'un parallélogramme KMNL de centre O qui n'est pas un losange. Dans le souci de l'éclairer, il décide d'y placer des lampadaires. Mais, pour plus d'esthétique, il souhaiterait que les lampadaires soient sur la parcelle et disposés de façon parallèles à partir de deux sommets opposés.



Il sollicite un technicien qui lui propose le plan ci-dessus avec les détails suivants :

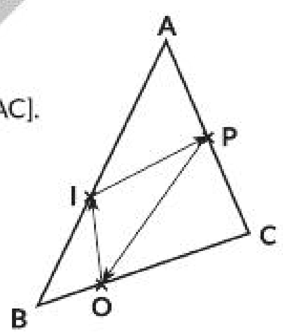
- P est le projeté orthogonal de N sur la droite (KM) ;
- S est le symétrique de P par rapport au point O ;
- [KS] et [PN] sont les segments sur lesquels doivent être déposés les lampadaires.

Rentré à la maison, le riche cultivateur présente le plan à son fils qui lui dit que ce plan ne répond pas à ses aspirations car les droites (KS) et (PN) ne sont pas parallèles. Découragé, il sollicite ton aide pour comprendre si son fils a raison.

En utilisant une application du plan convenable, étudie la question afin d'en donner ton point de vue.

22 Une compétition consiste à parcourir un circuit OIPO comme l'indique la figure ci-dessous.

ABC est un triangle.
O ∈ [BC] , I ∈ [AB] et P ∈ [AC].

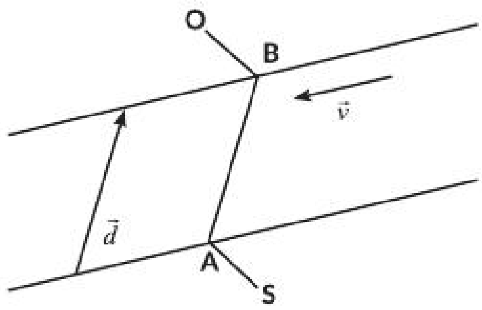


Le compétiteur part d'un point O fixé sur la piste matérialisée par le segment [BC]. Il se dirige en ligne droite vers un point I de la piste [AB]. En I, il part en ligne droite vers un point P de la piste [AC] avant de revenir en ligne droite vers le points O. (Point de départ de la course). Le vainqueur de la course est celui qui aura mis un temps minimum pour parcourir le circuit OIPO.

Un participant à la compétition veux maximiser ses chances de gagner. Pour cela, il veut déterminer la position des points I et P de telle sorte que le circuit OIPO soit le plus court possible.

Donne un programme de construction de ces deux points en basant ton raisonnement sur tes connaissances mathématiques.

23 Partant du village **S**, Youssouf veux rejoindre à la nage son amie Gabelaud habitant le village **O** situé de l'autre côté de la rive d'un fleuve (F). (voir figure). Le courant $\vec{v}$ du fleuve est tel que Youssouf ne peut nager que suivant la direction $\vec{d}$.



Informé, tu décides de déterminer deux points A et B appartenant respectivement aux rives (D_1) et (D_2) du fleuve (F) de telle sorte que la distances SA + AB + BO soit minimum.

Reproduis la figure ci-dessus et détermine les points A et B. Tu justifieras les étapes de ton raisonnement.

4 GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS

Commentaire de la Leçon

La notion de fonction apparait au XIVᵉ siècle dans les écrits de Nicolas Oresme (1320 – 1382). Grâce à la théorie grecque des oppositions, il met au point la représentation graphique de fonctions affines. Mais repères et coordonnées ne seront inventés que trois siècles plus tard.

Les élèves ont étudié les polynômes, les applications affines, les fractions rationnelles. Même si ces notions évoquent l'idée de fonction, les apprenants qui arrivent en classe de seconde n'ont véritablement aucune connaissance des fonctions. L'enseignant devra donc la présenter avec délicatesse en prenant appui sur des phénomènes connus (courbe de température, exemple tiré de l'économie, de la géographie etc.) ; il veillera à équilibrer chez l'apprenant sa capacité à exploiter une courbe et son aisance au niveau du calcul algébrique.

L'étude des fonctions sera approfondie en classe de première grâce à l'utilisation de l'outil « dérivation » et en classe de terminale par l'étude de nouvelles fonctions : la fonction logarithme et la fonction exponentielle.

Les fonctions sont utilisées pour modéliser la plupart des phénomènes sociaux, physiques, économiques etc.

Habiletés et Contenus

- **Connaître** la définition d'une fonction ; les diverses déterminations d'une fonction ; la définition de l'ensemble de définition d'une fonction ; la définition de l'image directe d'un ensemble ; la définition de l'image réciproque d'un ensemble ; la définition du maximum d'une fonction ; la définition du minimum d'une fonction ; la définition du sens de variation d'une fonction ; la définition de deux fonctions égales sur un intervalle ; la définition de la représentation graphique d'une fonction.
- **Reconnaître** une fonction ; qu'une courbe peut être la représentation graphique d'une fonction ; graphiquement sur un intervalle qu'une fonction admet un maximum, un minimum ; graphiquement qu'une fonction est croissante sur un intervalle ; graphiquement qu'une fonction est décroissante sur un intervalle ; graphiquement qu'une fonction est constante sur un intervalle.
- **Lire** graphiquement l'image d'un nombre réel par une fonction ; graphiquement les antécédents ; l'image directe puis l'image réciproque d'un intervalle.
- **Déterminer** l'ensemble de définition d'une fonction ; graphiquement l'image directe puis l'image réciproque d'un intervalle par une fonction.
- **Calculer** algébriquement l'image puis les antécédents d'un nombre réel par une fonction.
- **Démontrer** que deux fonctions sont égales sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}$; algébriquement qu'un nombre donné est un maximum ou un minimum d'une fonction.
- **Traiter une situation** faisant appel aux fonctions.

Situation d'Apprentissage

Pour subvenir aux besoins de ses enfants pour la fête de Noël, Monsieur Koffi se rend à Abidjan où il fait toutes ses courses en taxi compteur.

Le prix d'une course en taxi compteur est constitué d'une partie fixe ou prise en charge (100 FCFA) et d'une partie proportionnelle à la distance parcourue (50 FCFA par Km).

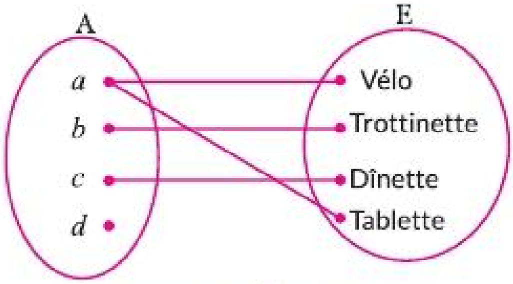
Monsieur Koffi, voulant évaluer le budget de ses déplacements à Abidjan, demande à son fils en classe de 2^{de} C de l'aider à déterminer la somme prévisionnelle à dépenser en taxi en fonction de la distance à parcourir (exprimée en Km).

Une fois en classe, celui-ci soumet la préoccupation de son père à ses camarades.

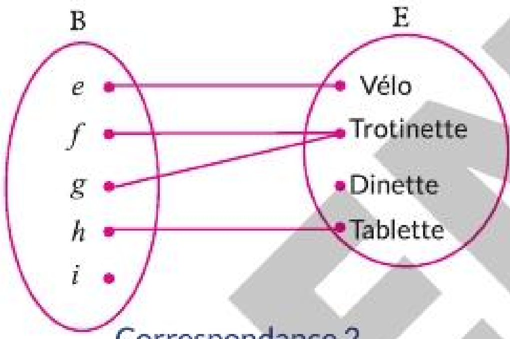
Ces derniers, sous la conduite de leur professeur de mathématiques, font des recherches sur la notion de fonction.

Activité 1 Notion de fonction

On considère la correspondance qui à chaque enfant associe sont jouet ou ses jouets préférés. On a interrogé des enfants de deux familles A et B et on a les correspondances suivantes.



Correspondance 1



Correspondance 2

En observant ces deux correspondances, indique celle dans laquelle chaque enfant préfère 0 ou 1 jouet.

Récapitulons

Dans la correspondance 2, chaque enfant de l'ensemble B préfère 0 ou 1 jouet dans l'ensemble E. Cette correspondance est une fonction de B vers E.

Exercice de fixation

1 Écris dans ton cahier le numéro de l'affirmation suivi de vrai si l'affirmation est vraie ou de faux si l'affirmation est fausse.

1. Toute correspondance d'un ensemble B vers un ensemble C qui à chaque élément de B associe un et un seul élément de C est une fonction.
2. Une correspondance d'un ensemble A vers un ensemble B qui à chaque élément de A associe un, ou deux éléments de B est une fonction.
3. Toute correspondance d'un ensemble B vers un ensemble C qui à chaque élément de B associe au plus un élément de C est une fonction.
4. Toute correspondance d'un ensemble E vers un ensemble F qui à chaque élément de E associe au moins un élément de F est une fonction.

Activité 2 Fonction définie par une formule explicite

x est un nombre réel, soit la fonction f définie par : $f(x)=(x+1)^2-3$.

a. Donne les étapes de calcul de $f(x)$ à partir d'un nombre réel x donné.

a. Calcule la valeur de $f(x)$ pour $x = 4$.

Récapitulons

- Les étapes de calcul de $f(x)$ permettent de déterminer la valeur de $f(x)$ pour un nombre x donné.
- L'expression $(x + 1)^2 -3$ est appelée la formule explicite de la fonction f.
- Une fonction peut être définie par une formule explicite.

Exercice de fixation

2 Pour chacune des fonctions définies ci-dessous, donne le programme de calcul et calcule la valeur de $f(x)$ pour la valeur de x_0 donnée.

a) $f(x)=2x^2+4$, $x_0=3$; b) $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+4}$, $x_0=2$.

Activité 3 Ensemble de définition d'une fonction

On considère la fonction définie par la correspondance 2 de l'activité 1.

Détermine l'ensemble des éléments de B qui ont une image dans l'ensemble E par cette fonction.

Récapitulons

- L'ensemble des éléments de l'ensemble de départ B qui ont une image dans l'ensemble d'arrivée E par la fonction est appelé ensemble de définition de la fonction.
- Pour une fonction f, on le note Df.

Exercice de fixation

6 Détermine l'ensemble de définition des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ ci-dessous définies par :

1) $f(x)=1-2x$; 2) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$; 3) $f(x)=\sqrt{2}-x$; 4) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$.

Activité 4 Fonction définie par un tableau de valeurs

Dis si chacun des tableaux suivants, caractérisé par deux relations R_1 et R_2 définissent une fonction. Justifie ta réponse.

Tableau 1

	−3	1	3,5	1	5
R_1	2	3,4	5	−2	2

Tableau 2

	−3	1,5	3	6,5	7
R_2	2,5	3,4	5	−2	2,5

Récapitulons

Un tableau de valeurs ne définit pas une fonction lorsqu'à un élément de la première ligne, on lui associe plus d'un élément de la deuxième ligne.

Un tableau de valeurs définit une fonction, lorsqu'à tout élément de la première ligne, on lui associe un unique élément ou aucun élément de la deuxième ligne.

Exercice de fixation

3 Parmi les tableaux ci-dessous, indique celui qui définit une fonction tout en justifiant ta réponse.

Tableau 1

x	−3	−2	0	−3	1
$f(x)$	−5	1	5	−1	3

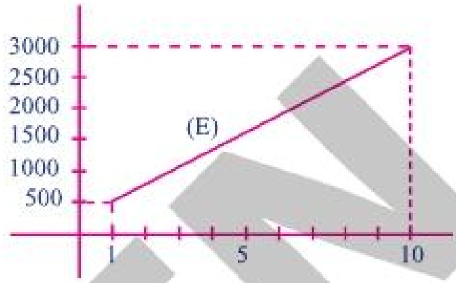
Tableau 2

x	−3	−1	0	−2	1
$f(x)$	−1	1	4	−2	0

Activité 5 Représentation graphique d'une fonction

Le graphique ci-contre représente le prix d'une course en taxi en fonction de la distance parcourue.

1. Détermine le prix d'une course de 5 km.
2. Détermine la distance parcourue d'une course qui a coûté 3 000 Frs.
3. On désigne par x la distance parcourue et y le prix de la course. Caractérise l'ensemble des points M de coordonnées $(x ; y)$ tel que $x \in [1 ; 10]$.



Récapitulons

- On note (E) la représentation graphique de f.

  $M(x;y) \in (E) \Leftrightarrow x \in D_f \;\; et \;\; y = f(x).$
- Quand f est définie par une formule explicite, on dit que $y = f(x)$ est l'équation de la courbe (E).
- Une fonction peut-être définie par sa représentation graphique.

Exercice de fixation

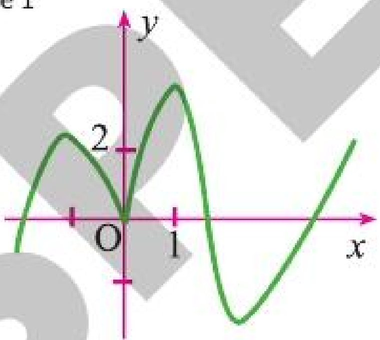
4 Détermine la représentation graphique de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} \text{si } x \in]-\infty, 0], \text{ alors } f(x) = 2 \\ \text{si } x \in]0, +\infty[, \text{ alors } f(x) = x - 1 \end{cases}$$

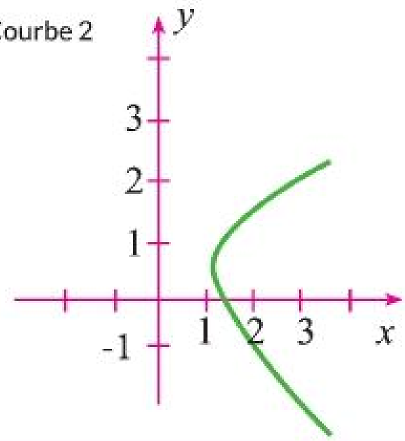
Activité 6 Fonction définie par une courbe

Dis si les courbes suivantes représentent des fonctions. Justifie ta réponse.

Courbe 1



Courbe 2

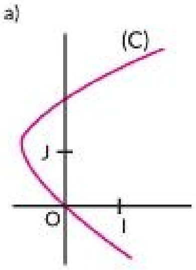


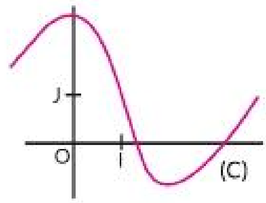
Récapitulons

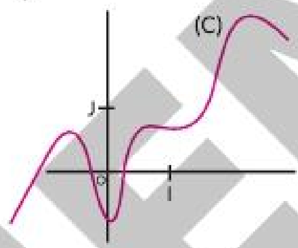
- Une courbe est représentative d'une fonction, lorsque tout nombre réel de l'axe des abscisses a zéro ou une image unique.
- Une courbe n'est pas représentative d'une fonction, lorsque certains points de la courbe ayant la même abscisse ont des ordonnées différentes.

Exercice de fixation

5 Dans chacun des cas suivants, dis si la représentation graphique (C) est celle d'une fonction. Justifie ta réponse.

a)


b)


C)


Activité 7 Image et antécédents d'un nombre par une fonction f définie par une formule explicite

On considère la fonction suivante :

$f : [-4\,;3] \rightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto x^3 - 4x$

a. Calcule $f(0)$, $f(-3)$ et $f(1)$.

b. Détermine les nombres réels x tels que $f(x) = 0$.

Récapitulons

- $f(-3)$ est appelé l'image de -3 par f.
- Les solutions de l'équation $x^3 - 4x = 0$ sont appelées les antécédents de 0 par f.
- Calculer l'image d'un élément a de l'ensemble de définition revient à remplacer x par a dans la formule et faire un calcul direct.
- Déterminer les antécédents éventuels de b revient à résoudre l'équation $f(x) = b$ en ne gardant que les solutions qui sont dans l'ensemble de définition de f.

Exercice de fixation

7 Écris le numéro de chaque affirmation suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

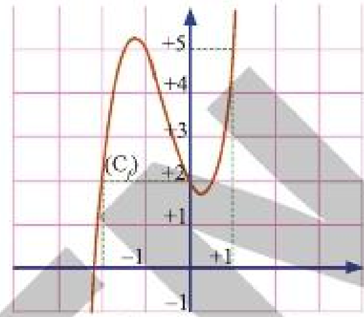
N°	AFFIRMATIONS		RÉPONSES			
			a	b	c	d
1	Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3x$.	L'image de 1 par f est :	1	$\frac{1}{3}$	3	Pas d'image
2		L'antécédent de 1 par f est :	0	-3	$\frac{1}{3}$	Pas d'antécédent
3	Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^2$. L'image de -4 par g est :		-16	16	8	-8
4	On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $h(x) = \frac{1}{x}$. L'antécédent de -2 par h est :		$\frac{1}{2}$	2	-2	$-\frac{1}{2}$

Activité 8 Image et antécédent d'un nombre par une fonction à partir de la représentation graphique de cette fonction

On donne ci-contre la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-4 ; 3]$.

a. Détermine l'image de -2 par f, puis celle de 1 par f.

b. Détermine les éventuels antécédents de 2 par f.



Récapitulons

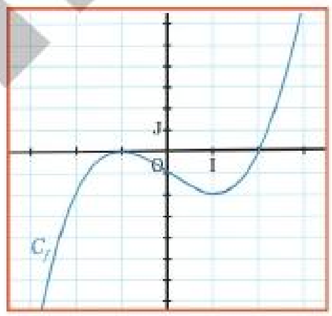
- L'image de -2 est l'ordonnée du point d'intersection de la courbe et de la droite d'équation $x = -2$, parallèle à l'axe des ordonnées.
- Déterminer les antécédents de 2 par f revient à déterminer l'abscisse des points éventuels de la courbe qui ont pour ordonnée le nombre 2. Ce sont les éventuels points d'intersection de la courbe et de la droite d'équation $y = 2$, parallèle à l'axe des abscisses.

Exercice de fixation

8 La courbe ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

Reproduis et complète le tableau de valeurs suivants : (si plusieurs valeurs sont possibles, écris les toutes).

x	-2		0		2
$f(x)$		0		-2	



Activité 9 Fonctions égales

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x+2$ et la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{x^2-4}{x-2}$

a. Détermine l'ensemble de définition de f et celui de g.

b. Donne une écriture simplifiée de g sur Dg.

c. Justifie que : $\forall x \in]2 ; +\infty[, f(x) = g(x)$.

Récapitulons

$\forall x \in]2 ; +\infty[, f(x) = g(x)$.

On dit que f et g coïncident (ou sont égales) sur l'intervalle $]2 ; +\infty[$.

Exercice de fixation

9 Soient les fonctions :

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{x+2}{\sqrt{x+2}}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x+2}$.

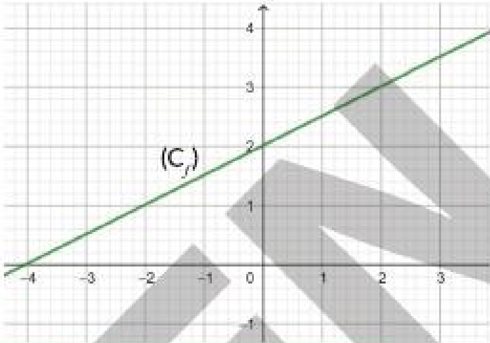
Démontre que les fonctions f et g sont égales sur $]-2 ; +\infty[$.

Activité 10 Exemple d'utilisation de la représentation graphique d'une fonction pour résoudre une équation ou une inéquation

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

f est la fonction affine définie pour tout nombre réel x par :

$f(x)=\frac{x}{2}+2$.



a. Calcule $f(-3)$ et $f(4)$.

b. Détermine graphiquement, puis par le calcul, le nombre x tel que : $f(x) = 1$.

c. Détermine graphiquement, puis par le calcul, l'ensemble des nombres réels x tels que : $f(x) \geq 1$.

Récapitulons

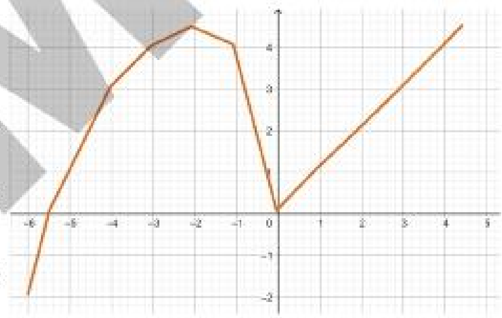
La représentation graphique d'une fonction permet de résoudre graphiquement des équations ou des inéquations.

Exercice de fixation

10 À chacune des propositions ci-dessous, correspond une seule réponse correcte.

Pour chacune d'elle, écris le numéro de la proposition suivi de la lettre correspondant à la réponse correcte.

Soit la fonction f représentée par la courbe dans le repère ci-contre.

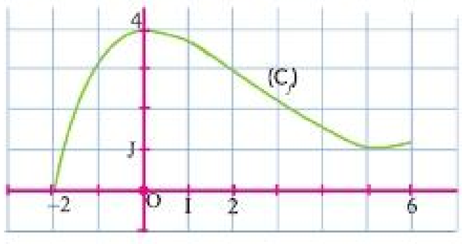


N°	PROPOSITIONS	RÉPONSES		
		a	b	c
1	L'ensemble de définition de f est :	$[-2,5\,;4,5]$	$]-6\,;+\infty[$	$[-6\,;4,5]$
2	Une solution de l'équation : $f(x) = 3$ est ...	-4	-1	4
3	Sont solutions de l'inéquation $f(x) \geq 4$, tous les nombres réels appartenant à ...	$]-3\,;+\infty[$	$]4\,;+\infty[$	$[-3\,;-1]\cup[4\,;4,5]$

Activité 11 Image directe d'un intervalle par une fonction à partir de sa représentation graphique

La courbe (C_f) ci-contre est celle d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-2\,;6]$.

Détermine graphiquement l'ensemble des images des éléments de chacun des intervalles suivants : $[-2\,;0]$, $[2\,;5]$.



Récapitulons

- L'ensemble des images des éléments de l'intervalle $[-2\,;0]$ est appelé l'image directe de cet intervalle par la fonction f. On note $f([-2\,;0]) = [0\,;4]$.
- Déterminer graphiquement l'image directe de l'intervalle $[-2\,;0]$ par f revient à déterminer toutes les images des éléments de l'intervalle $[-2\,;0]$ par f.

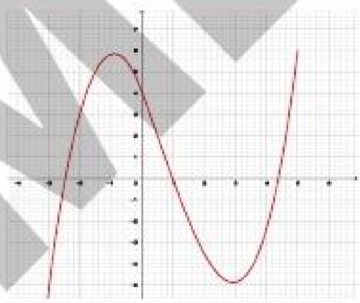
Méthode

Soit (C) la représentation graphique d'une fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé.
Pour déterminer l'image directe d'un intervalle $[a;b]$ par f, on peut procéder comme suit :

1. On représente sur l'axe des abscisses l'intervalle $[a;b]$.
2. On hachure l'ensemble (F) de points M du plan dont les couples de coordonnées (x, y) sont tels que $x \in [a;b]$.
3. Détermine l'intersection K de la représentation graphique (C) avec l'ensemble (F).
4. L'ensemble des ordonnées des points de K est l'image directe de l'intervalle $[a;b]$.

Exercice de fixation

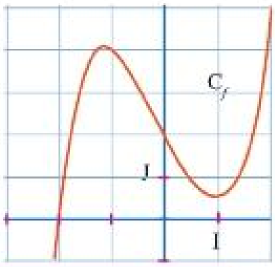
11 Sur la figure ci-contre, (C) désigne la courbe représentative d'une fonction f. Détermine l'image directe par f de chacun des intervalles suivants : $I_1 = [0\,;1]$; $I_2 = [4\,;5]$ et $I_3 = [-2\,;2]$.



Activité 12 Image réciproque d'un intervalle par une fonction à partir de sa représentation graphique

Soit la courbe représentative de la fonction f définie sur $[-3\,;2]$ et donnée par la figure ci-contre :

Détermine graphiquement l'ensemble des antécédents par f de tous les éléments de l'intervalle $[0\,;4]$.



Récapitulons

- L'ensemble des antécédents des éléments de l'intervalle $[0\,;4]$ est appelé l'image réciproque de cet intervalle par la fonction f.
- Déterminer graphiquement l'image réciproque de l'intervalle $[0\,;4]$ par f revient à déterminer l'ensemble des antécédents des éléments de l'intervalle $[0\,;4]$ par f.

Méthode

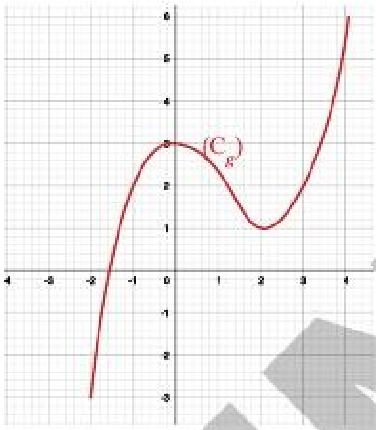
Soit (C) la représentation graphique d'une fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé.
Pour déterminer l'image réciproque d'un intervalle $[c\,;d]$ par f, on peut procéder comme suit :

1. On représente sur l'axe des ordonnées l'intervalle $[c\,;d]$.
2. On hachure l'ensemble (T) de points M du plan dont les couples de coordonnées (x, y) sont tels que $y \in [c\,;d]$.
3. Détermine l'ensemble (S), intersection de la représentation graphique (C) avec l'ensemble (T).
4. L'ensemble des abscisses des points de l'ensemble (S) est l'image réciproque de l'intervalle $[c\,;d]$ par la fonction f.

Exercice de fixation

12 Sur la figure ci-contre (C) désigne la courbe représentative de la fonction f.

Détermine graphiquement les images réciproques par f de chacun des intervalles suivants : $I_1 = [-3\,;0]$; $I_2 = [0\,;3]$ et $I_3 = [2\,;3]$.



Activité 13 Variations d'une fonction- Extrema d'une fonction

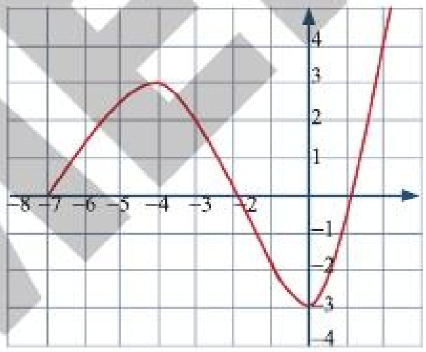
Soit f la fonction définie par la représentation graphique (C_f) ci-contre :

a) Détermine les images de -7 ; -4 ; 0 et 2 par f.

b) Compare $f(-4)$ et $f(-7)$ puis $f(0)$ et $f(2)$.

c) On considère l'intervalle I tel que : I = $[-7\,;-2]$.
Détermine un réel a de l'intervalle I tel que : $\forall\, x \in I, f(x) \leq f(a)$.

d) On considère l'intervalle J tel que : J = $[-2\,;1]$.
Détermine un réel b de l'intervalle J tel que : $\forall\, x \in I, f(x) \geq f(b)$.



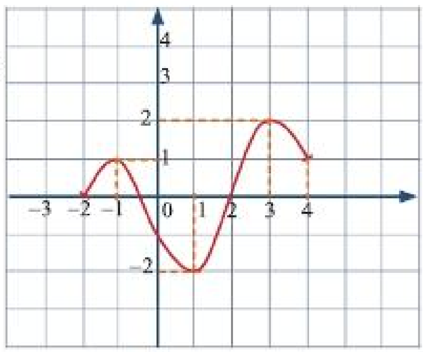
Récapitulons

- On dit que f est croissante sur un intervalle lorsque : $\forall\, a, b \in D_f, a < b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$.
- On dit que f est décroissante sur un intervalle lorsque : $\forall\, a, b \in D_f, a < b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$.
- Étudier les variations d'une fonction, c'est chercher sur quels intervalles elle est croissante ou décroissante. On résume ces résultats dans le tableau de variation de la fonction.
- L'ordonnée du point de (Cf) d'abscisse 2 est 4, c'est la plus grande valeur des images $f(x)$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[-7\,;2]$. On l'appelle le maximum de f sur l'intervalle $[-7\,;2]$.
- L'ordonnée du point de (Cf) d'abscisse 0 est -3, c'est la plus petite valeur des images $f(x)$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[-2\,;1]$. On l'appelle le minimum de f sur l'intervalle $[-2\,;1]$.

Exercice de fixation

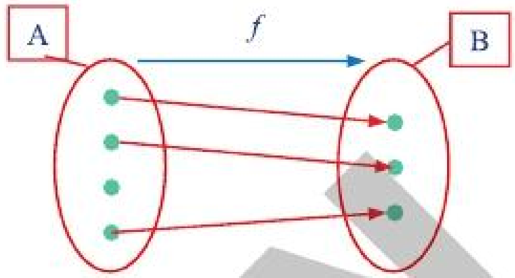
13 Soit la fonction g définie sur l'intervalle $[-2\,;4]$ par la courbe ci-contre :

1. a) Décris les variations de la fonction g.
   b) Déduis-en le tableau de variation de la fonction g.
2. Lis graphiquement le maximum et le minimum de la fonction sur chacun des intervalles : $[-2\,;4]$; $[-2\,;0]$ et $[0\,;4]$.



Résumé de la leçon

1. Notion de fonction



Définition

A et B sont des ensembles non vides.
On appelle fonction de A vers B toute correspondance qui,
À chaque élément de A, associe un ou zéro élément de B.

Vocabulaire et notations

On dit que :

- f est la fonction de A vers B qui, à x, associe $f(x)$;
- A est l'ensemble de départ, B est l'ensemble d'arrivée de f ;
- x est la variable, $f(x)$ est l'image de x par f.
- Lorsque l'ensemble d'arrivée d'une fonction f est un ensemble de nombres réels, on dit que f est une fonction numérique.
- Lorsque l'ensemble de départ d'une fonction numérique f est un ensemble de nombres réels, on dit que f est une fonction numérique d'une variable réelle.

On note : $f : A \to B$

$$x \mapsto f(x)$$

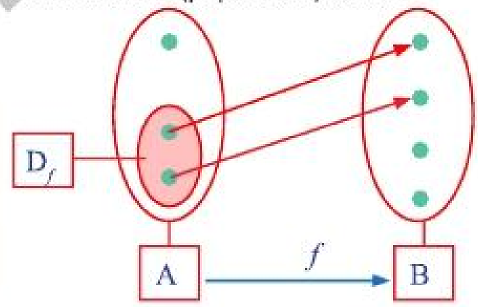
Pour s'entraîner : Exercices 1 ; 2

Remarques

Une application d'un ensemble A dans un ensemble B est une fonction de A vers B.
Ainsi :

- Une symétrie, une translation sont des fonctions du plan vers le plan ;
- Les applications affines vues en troisième sont des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$;
- En statistique, un caractère quantitatif est une fonction d'un ensemble (population) vers $\mathbb{R}$.

2. Ensemble de définition



Définition

f est une fonction d'un ensemble A vers un ensemble B.
On appelle ensemble de définition de f, l'ensemble des éléments de A qui ont une image par f dans B.
On note habituellement D_f l'ensemble de définition de f.

Exemples

Recherchons l'ensemble de définition D_f de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-1} + \sqrt{x+2}.$$

Contraintes d'exécution du programme de calcul de $f(x)$.

$x \in D_f \Leftrightarrow x-1 \neq 0$ et $x+2 \geq 0$

$x-1=0 \Leftrightarrow x=1$ (1)

$x+2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$ (2)

Par conséquent : $x \in D_f \Leftrightarrow x \geq -2$ et $x \neq 1$

donc $D_f = [-2 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$.

Méthode

Pour déterminer l'ensemble de définition D_f d'une fonction f, on peut procéder de la façon suivante :

- On écrit toutes les conditions d'exécution du programme de calcul de $f(x)$;
- On précise les ensembles que déterminent les contraintes ;
- On écrit D_f à l'aide d'intervalles.

Pour s'entraîner : Exercices 3 ; 4

3. Diverses déterminations d'une fonction

Plusieurs procédés permettent de présenter une fonction : une formule explicite, un tableau des valeurs ou une courbe.

a) Fonction définie par une formule explicite

Une formule explicite est un programme de calcul qui permet de calculer l'image d'un élément de l'ensemble de définition

Exemple

- On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3x^2 - 4$.

$f(x)$ est l'image de x par f.
x est l'antécédent de $f(x)$ par f.

L'association antécédent image se fait ici grâce à un programme de calcul :

« On considère un nombre x, on élève au carré, on multiplie par 3 et enfin on retranche 4 ».
Le nombre $f(x)$ obtenu est l'image de x par f.

- Si on veut calculer l'image de −5, on applique le programme de calcul : $3\times(-5)^2 - 4 = 75 - 4 = 71$

On peut donc écrire : $f(-5) = 71$ et on dit que 71 est l'image de −5 par f.

b) Fonction définie par un tableau de valeurs

Un tableau de valeurs comporte deux lignes ; il associe à chaque membre de la première ligne, son image dans la seconde ligne.

Exemple

Ce tableau associe au nombre −4 le nombre −3.

a	−12	−4	1,4	3	25
$g(a)$	−5,5	−3	5	2	−2

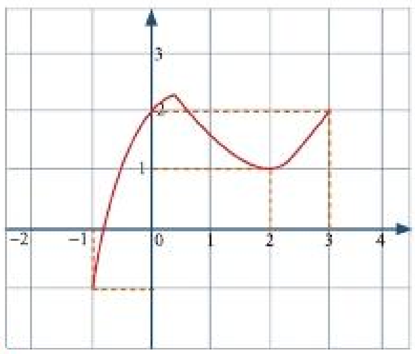
On écrit $g(-4) = -3$ lorsque g est la fonction définie par le tableau .
On dit aussi que −4 a pour image −3 par g.

c) Fonction définie par une courbe

Une courbe tracée dans un repère du plan (par exemple la trajectoire d'un mobile) peut représenter une fonction.

Exemples

- On considère la courbe ci-contre, tracée dans un repère. Cette courbe est constituée de points repérés par leur couple de coordonnées $(x\ ;\ y)$ où x désigne l'abscisse du point et y son ordonnée.
- On définit la fonction h en associant à chaque nombre réel a de l'axe des abscisses, l'ordonnée b de l'unique point d'intersection de la courbe et de la droite d'équation $x = a$.



d) Définition de la représentation graphique d'une fonction

Soit une fonction f d'ensemble de définition D_f .
Le plan est muni d'un repère.
La courbe représentative (C_f) de la fonction f est l'ensemble des points M de coordonnées $(x\ ;\ y)$ où : $x \in D_f$ et $y = f(x)$.

4. Image et antécédents d'un nombre par une fonction f.

a) Image ou antécédents d'un nombre déterminé par une fonction définie par une formule explicite

Soit une fonction f et un nombre x appartenant à l'ensemble de définition de f.
L'image de x par la fonction f est le nombre $f(x)$.
Le nombre x est un antécédent du nombre $f(x)$.

Exemple

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto 2x^3 + 4x^2 - x + 1$.

$f(-2) = 2\times(-2)^3 + 4\times(-2)^2 - (-2) + 1 = 3$.
3 est l'image de −2 par f.
−2 est un antécédent de 3 par f.

Remarques

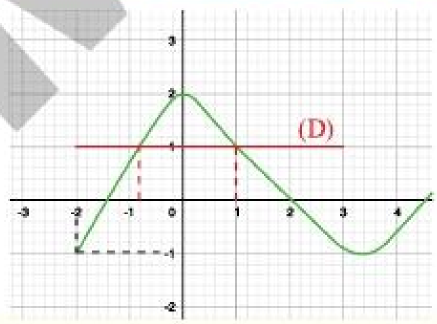
- Pour calculer l'image d'un nombre par une fonction f définie par une formule explicite, on remplace x par ce nombre dans l'expression de $f(x)$.
- Pour déterminer l'antécédent d'un nombre k par une fonction f définie par une formule explicite, on résout l'équation $f(x) = k$. Les solutions de cette équation sont les antécédents de k par f.

Pour s'entraîner : Exercices 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 11 ; 12

b) Image ou antécédents d'un nombre déterminé par une fonction définie par une courbe représentative

Exemple

Soit, ci-contre, la courbe d'une fonction f définie sur [−2 ; 5].
On a : $f(1) = 1$; $f(-1) = 1$.



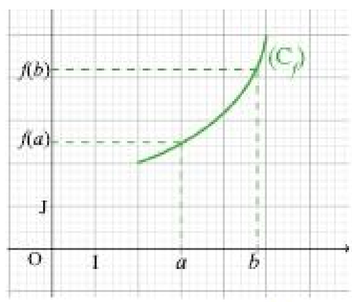
Méthodes

a. Pour trouver l'image du nombre 2 par f, on trace la parallèle à l'axe des ordonnées passant par le point (2 ;0) ; elle coupe (C_f) en A.
On trace ensuite la parallèle à l'axe des abscisses passant par A ; elle coupe l'axe des ordonnées en un point B d'ordonné $f(2)$.
b. Pour trouver le(s) antécédent(s) de 1, on trace la droite (Δ), parallèle à l'axe des abscisses et passant par le point de coordonnées (0 ;1).
L'abscisse de chaque point intersection de cette droite (Δ) avec la courbe (C_f) permet de déterminer un antécédent de 1.

Pour s'entraîner : Exercice 13 ; 14 ; 15 ; 16

5. Variations d'une fonction

a) Fonction croissante, fonction décroissante, fonction constante



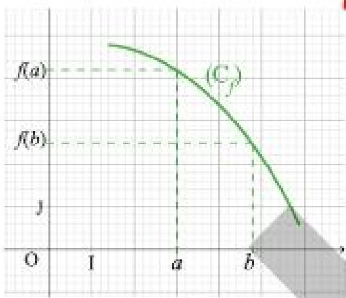
Définition 1
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Dire que f est croissante sur I signifie que pour tous réels a et b de I :
Si $a < b$, alors $f(a) \leq f(b)$.

■ Définition 2

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

Dire que f est décroissante sur I signifie que pour tous réels a et b de I :

Si $a < b$, alors $f(a) \geq f(b)$.

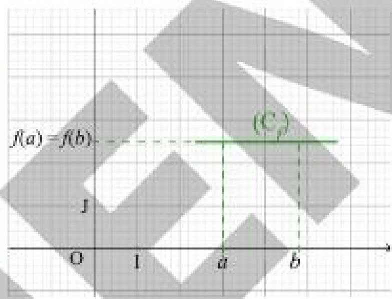


■ Définition 3

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

Dire que f est constante sur I signifie que pour tous réels a et b de I :

$f(a) = f(b)$.



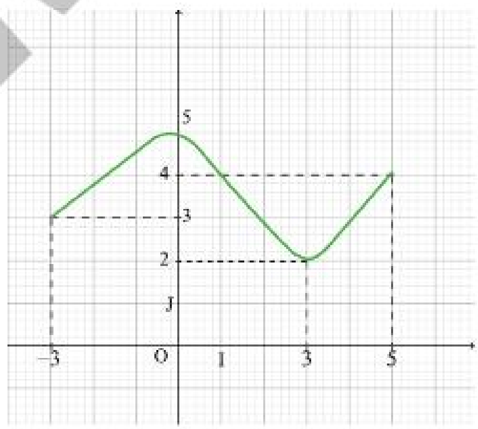
b) Tableau de variation

Un tableau de variation résume les variations d'une fonction en faisant apparaître les intervalles où elle est monotone ; c'est-à-dire soit croissante, soit décroissante, soit constante.

Exemples

On considère la fonction f représentée ci-contre.
Dressons son tableau de variation.
La fonction f est définie sur l'intervalle $[-3 ; 5]$.
f est croissante sur $[-3 ; 0]$, décroissante sur $[0 ; 3]$ et croissante sur $[3 ; 5]$. On obtient le tableau ci-dessous.

x	-3		0		3		5
$f(x)$	3	$\nearrow$	5	$\searrow$	2	$\nearrow$	4



› Remarques

Dans un tel tableau, on écrit les valeurs des images aux extrémités des flèches.

Pour s'entraîner : Exercices 17 ; 18 ; 19 ; 20 ; 21 ; 22 ; 23

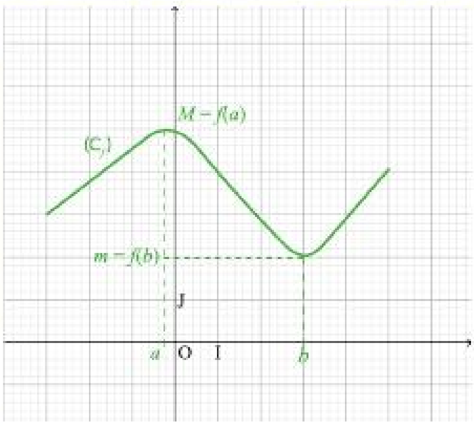
6. Maximum et Minimum d'une fonction.

■ Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I ; a et b deux nombres réels de I.

Dire que f admet un **maximum** en a sur I signifie que pour tout nombre x de I, $f(x) \leq f(a)$.

Dire que f admet un **minimum** en b sur I signifie que pour tout nombre x de I, $f(x) \geq f(b)$.



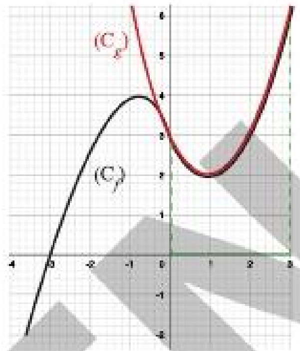
Pour s'entraîner : Exercices 24 ; 25 ; 26 ; 27 ; 28

7. Fonctions égales

Définition

f et g sont deux fonctions définies sur un ensemble E.

On dit que les fonctions f et g sont égales sur E (ou qu'elles coïncident sur E) lorsque, pour tout élément x de E, $f(x) = g(x)$.



› Remarques

Les représentations graphiques des fonctions égales sur un ensemble coïncident sur cet ensemble.

Ci-contre, les fonctions f et g sont égales sur [0 ;3].

Pour s'entraîner : Exercices 29 ; 30 ; 31 ; 32

8. Image directe, Image réciproque d'un intervalle par une fonction

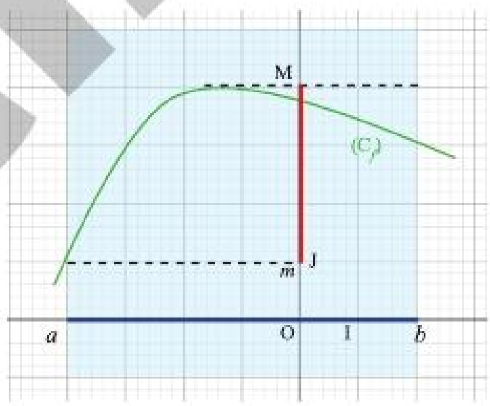
a) Image directe d'un intervalle par une fonction définie par sa représentation graphique

f est une fonction d'un ensemble E vers un ensemble F.

On appelle image directe d'un intervalle I de E par f, l'ensemble des images par f de tous les éléments de I. On le note f(I).

Exemple

L'image directe de l'intervalle $[a\ ;\ b]$ est l'intervalle $[m\ ;\ \mathrm{M}]$.



b) Image réciproque d'un intervalle par une fonction définie par sa représentation graphique

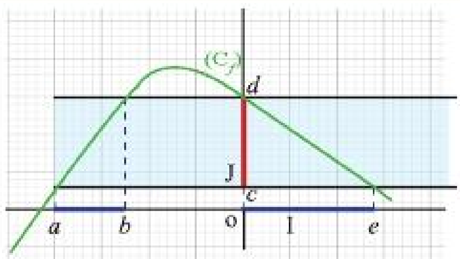
Définition

f est une fonction d'un ensemble E vers un ensemble F.

On appelle image réciproque d'un intervalle K de F par f, l'ensemble des antécédents par f de tous les éléments de K.

Exemples

Sur la figure ci-contre, l'image réciproque de l'intervalle $[c\ ;\ d]$ par f est : $[a\ ;\ b] \cup [0\ ;\ e]$.



Pour s'entraîner : Exercice 33

QUESTION 1

Comment déterminer l'ensemble de définition de certains types de fonction ?

Méthode

P(x) et Q(x) étant des polynômes, pour déterminer l'ensemble de définition d'une fonction f telle que :

$f(x)=\sqrt{P(x)}$, On pose la condition : $f(x)$ existe si et seulement si P(x) ≥ 0

$f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, On pose la condition $f(x)$ existe et seulement si $Q(x)\neq 0$.

$f(x)=\dfrac{P(x)}{\sqrt{Q(x)}}$, On pose la condition $f(x)$ existe si et seulement si $Q(x)>0$.

Exercice

Dans chaque cas, détermine l'ensemble de définition des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par :

$a)\ f(x)=\sqrt{-2x+5}$; $b)\ g(x)=\dfrac{1-x}{x^2-9}$; $c)\ h(x)=\dfrac{x+2}{\sqrt{x-1}}$.

Solution commentée

Soit D_f l'ensemble de définition de la fonction f.

- $f(x)$ existe si et seulement si $-2x+5\geq 0$
- Je résous dans $\mathbb{R}$, l'inéquation : $-2x+5\geq 0$

On a : $-2x+5\geq 0 \Leftrightarrow -2x\geq -5$

$\Leftrightarrow x\leq \dfrac{5}{2}$,

donc $D_f = \left]-\infty;\dfrac{5}{2}\right]$

a. Soit D_g l'ensemble de définition de la fonction g.

- $x\in D_g \Leftrightarrow x^2-9\neq 0$
- Je résous dans $\mathbb{R}$, l'équation : $x^2-9=0$

On a : $x^2-9=0 \Leftrightarrow (x-3)(x+3)=0$

$\Leftrightarrow x-3=0$ ou $x+3=0$

$\Leftrightarrow x=3$ ou $x=-3$

Alors $x\in D_g \Leftrightarrow x\neq 3$ et $x\neq -3$,

donc $D_g=\mathbb{R}\backslash\{-3\,;3\}$.

Soit D_h l'ensemble de définition de la fonction h.

- $D_h=\{x\in\mathbb{R}, x+1>0\}$
- Je résous dans $\mathbb{R}$, l'inéquation : $x+1>0$

On a : $x+1>0 \Leftrightarrow x>-1$, par suite, $D_h=\left]-1;+\infty\right[$.

Exercice non corrigé

Détermine l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

$f:]-\infty\,;0]\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\sqrt{x+3}$; $g:[0\,;\infty[\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\dfrac{x^2+1}{(x+1)(x-2)}$; $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\dfrac{3x-2}{x^2-4}+\sqrt{x+3}$; $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\dfrac{x^2+1}{|x|}$.

QUESTION 2 — Comment démontrer algébriquement qu'un nombre donné est le maximum ou le minimum d'une fonction sur un intervalle I ?

Méthode

Pour démontrer qu'un nombre réel donné a est le maximum ou le minimum d'une fonction f sur un intervalle I, on peut justifier que :

- $\forall x \in \mathrm{I}$, $f(x) \leq a$ ou $(f(x) \geq a)$;
- le nombre réel a possède un antécédent par f, c'est-à-dire qu'il existe un nombre réel b tel que : $a = f(b)$

Exercice

Soit la fonction f définie sur $[3;+\infty[$ par : $f(x)=2-\sqrt{x-3}$

Démontre que 2 est le maximum de f sur : $[3;+\infty[$

Solution commentée

✓ On démontre que $\forall x \in [3;+\infty[$, $f(x) \leq 2$.

Pour tout $x \in [3;+\infty[$, on a : $x-3 \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-3} \geq 0$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{x-3} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 2-\sqrt{x-3} \leq 2$$

D'où pour tout $x \in [3;+\infty[$, $f(x) \leq 2$ donc 2 est un majorant de f sur $[3;+\infty[$.

✓ On démontre que 2 admet un antécédent par f.

On a : $f(3)=2-\sqrt{3-3}=2$, donc 2 admet un antécédent par f.

Conclusion.

Donc 2 est le maximum de f sur $[3;+\infty[$ et ce maximum est atteint en 3.

Exercice non corrigé

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par : $g(x) = 3 + (x-1)^2$

Justifie que 3 est le minimum de la fonction g sur $\mathbb{R}$

QUESTION 3 — Comment justifier que deux fonctions sont égales sur un sous ensemble de $\mathbb{R}$?

Méthode

Pour justifier que deux fonctions f et g sont égales sous un sous ensemble D de $\mathbb{R}$, on peut justifier que :

1. f et g sont définies sur D.
2. $\forall x \in \mathrm{D}$, $f(x) = g(x)$.

Exercice

Soit $k : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ et $l : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

Soit $x \mapsto \sqrt{(x-3)^2}$ Soit $x \mapsto |x-3|$

Justifie que les fonctions k et l sont égales.

Solution commentée

On détermine l'ensemble de définition de chacune des fonctions.

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $(x - 3)^2 \geq 0$, donc la fonction k est définie sur $\mathbb{R}$.

La fonction valeur absolue est définie sur $\mathbb{R}$, donc la fonction l est définie sur $\mathbb{R}$.

On a donc $D_k = D_l$

2. On sait que $\forall$ A $\in$ R, $\sqrt{A^2} = |A|$, donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $k(x) = l(x)$

Les fonctions l et k sont donc égales.

Exercice non corrigé 1

On donne les fonctions :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \; ; \quad et \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto |x^2 + x| \qquad x \mapsto |x^2| + x$$

1. Démontre que f et g coïncident sur $[0;+\infty[$.
2. Démontre que f et g ne sont pas égales sur $\mathbb{R}$.

Exercice non corrigé 2

On donne les fonctions :

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \; ; \quad \text{et} \quad k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{2(x-1)}{|x^2-1|} \qquad x \mapsto \frac{-2}{x+1}$$

Démontre que les fonctions h et k ne sont pas égales sur $]1 ; +\infty[$.

Exercices de fixation

Notion de fonction

1 « A tout nombre réel x positif, on associe le nombre y égal au double de la racine carrée de la somme de x et de 3 ».

a) Dis si la phrase précédente définit une fonction. Si oui, donne son ensemble de définition.

b) Donne la formule explicite traduisant la phrase ci-dessus.

2 Dans chacun des cas suivants, démontre que la phrase donnée définit une fonction f sur un ensemble E que l'on précisera. Donne la formule explicite de f et calcule $f(100)$.

a) « à tout nombre réel, on associe son carré divisé par 3 »

b) « à tout nombre réel, on associe la racine carrée de son double augmenté de 3 ».

Ensemble de définition

3 Recopie le numéro de chaque affirmation suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

N°	AFFIRMATIONS	RÉPONSES a	RÉPONSES b	RÉPONSES c
1	L'ensemble de définition de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$ est :	$\mathbb{R}$	$]-2;+\infty[$	$]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[$
2	Soit la fonction : $\begin{array}{l} f:[0;+\infty[\to\mathbb{R} \\ \quad x\mapsto\sqrt{4-x}\end{array}$, son ensemble de définition est :	$[4;+\infty[$	$]-\infty;4]$	$[0;4]$
3	Soit la fonction $\begin{array}{l} g:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ \quad x\mapsto\dfrac{1}{\lvert x\rvert-1}\end{array}$, son ensemble de définition est :	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$	$\mathbb{R}\setminus\{1\}$

4 Dans chacun des cas ci-dessous, f désigne une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

Détermine dans chaque cas l'ensemble de définition de la fonction f.

a) $f(x)=\dfrac{2}{x+3}$; b) $f(x)=\dfrac{5}{x^2-4}$; c) $f(x)=\dfrac{x+3}{4-(x+1)^2}$; d) $f(x)=\dfrac{2x+1}{\lvert x\rvert-2}$; e) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{1-x^2}}$

f) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x}$; g) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$; h) $f(x)=\sqrt{x+1}\times\sqrt{1-x}$; i) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2+2}{1+x^2}}$.

Image et antécédents d'un nombre par une fonction définie par une formule explicite

5 Par une fonction f on a : $f(4) = 7$.

Recopie et complète chacune des phrases suivantes :

a) .... est l'image de .... par f.

b) ....est l'antécédent de ....par f.

c) ....a pour image ....par f.

d) ....a pour antécédent ....par f.

6 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = x^2 - 4x + 3$
Calcule les images par f des nombres réels :
$3 ; -1 ; 1$ et $\sqrt{2}$.

7 Soit la fonction f définie par : $f(x) = 3 + \dfrac{2}{x+1}$.

a) Calcule les images par f des nombres réels 2 ; 1 et −2.

b) Dis s'il est possible de calculer l'image de −1 par f, Justifie ta réponse.

8 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = |x^2 - 4x| + 3$.
Calcule les images par f des nombres réels : 0 ; −1 ; 1 et 4.

9 Soit g la fonction définie par : $g(x) = 1 - \dfrac{2}{x}$.

a) Calcule les images par g des nombres réels 2 ; 1 ;−2.

b) Dis s'il est possible de calculer l'image de 0 par g. Justifie ta réponse.

10 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 4$.

a) Détermine les éventuels antécédents de 5 par f.

b) Détermine les éventuels antécédents de −4 par f.

11 Soit la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{2x+2}{x-2}$.

a) Détermine l'éventuel antécédent de 0 par f.

b) Détermine l'éventuel antécédent de 3 par f.

c) Dis s'il est possible de déterminer l'antécédent de 2 par f, justifie ta réponse.

12 On considère la fonction f définie par :

$$f : [-5;4] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto 2x^2 - 7$$

a) Calcule l'image de −2 par f et celle de 4 par f.

b) Calcule les éventuels antécédents de −5 et de −7 par f.

Image et antécédents d'un nombre par une fonction à partir de la représentation graphique de cette fonction

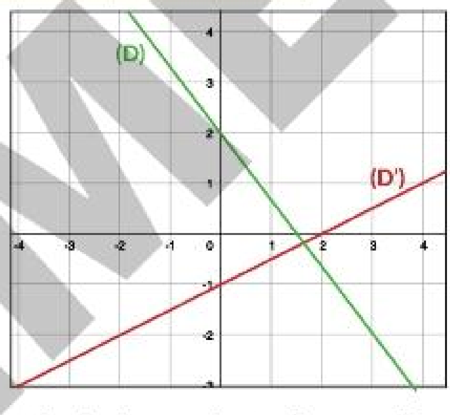
13 Associe à chacune des droites (D) et (D') du graphique ci-dessous, l'un des tableaux de valeurs suivants, puis complète ce tableau.

x	0		3,75
$f(x)$	2	−2	

Tableau 1

x	−2	0	
$f(x)$	−2		0

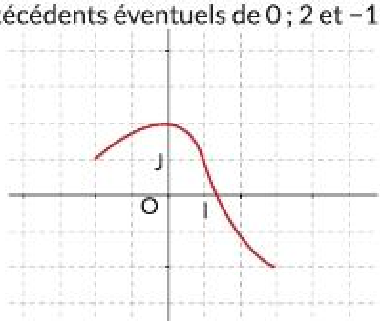
Tableau 2



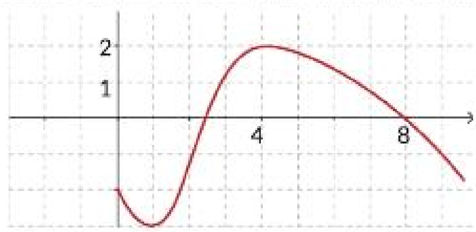
14 À partir de la représentation graphique de la fonction f ci-dessous définie sur l'intervalle [−2 ;3], détermine les valeurs :

a) des images de −2 ; 3 et 0 par f,

b) des antécédents éventuels de 0 ; 2 et −1 par f.



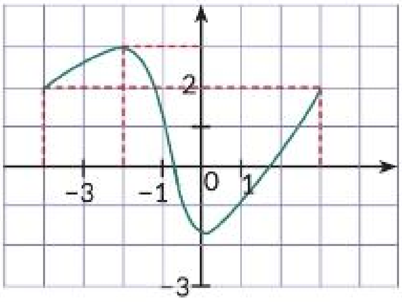
15 La courbe ci-dessous est celle d'une fonction f.



1. a) Propose une valeur de x pour laquelle $f(x) = 1$.
   b) Dis s'il en existe d'autres.

2. Donne toutes les valeurs de x pour lesquelles :
   a) $f(x) = 2$; b) $f(x) = -2$; $f(x) = 0$.
3. Détermine les réels qui n'ont qu'un seul antécédent par f.

16 La courbe ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f.
Détermine l'intervalle sur lequel f est définie.
Précise les images par f des nombres réels suivants : -4 ; -2 ; 1 et 3.



Variations d'une fonction

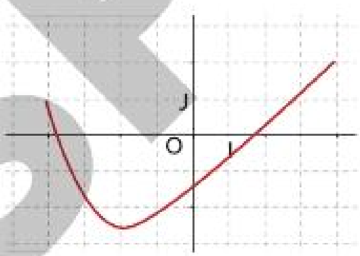
17 Une fonction f admet le tableau de variation suivant :

x	0		2		6		10
$f(x)$	2	↘	−5	↗	4	↘	0

a) Détermine l'ensemble de définition de f.
b) Détermine les variations de f.

18 La fonction f est représentée ci-dessous.

a) Détermine les variations de f.
b) Dresse le tableau de variation de f.



19
1. La fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Compare
   a) g(2) et g(4) ; b) g(-2) et g(1).
2. Reprends la même question en supposant que g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

20 La fonction f est définie sur $[-3 ; 3]$ et $f(-3) = 2$, $f(3) = 4$.

Coche la bonne réponse :

a) f peut être strictement croissante sur $[-3 ; 3]$.
b) f peut être strictement décroissante sur $[-3 ; 3]$.

21 Sachant que la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty ; 3]$ et strictement croissante sur $[3 ; 7]$, peux - tu comparer.
a) $f(-4)$ et $f(1)$? ; b) $f(0)$ et $f(4)$? ; c) $f(3)$ et $f(4)$? ; d) $f(-20)$ et $f(-3)$?
Justifie chaque fois ta réponse.

22 Soit f la fonction définie par $f(x) = x(1 - x)$.

1. Vérifie qu'il existe un réel a tel que :
   $$f(x) = a - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2.$$
2. Déduis-en les variations de f sur $\left]-\infty ; \frac{1}{2}\right]$ et sur $\left[\frac{1}{2} ; +\infty\right[$.

23 Soit g la fonction définie par : $g(x) = \dfrac{2x+1}{x+1}$.

1. Vérifie l'égalité : $g(x) = 2 - \dfrac{1}{x+1}$.
2. Déduis-en le sens de variation de g sur $]-\infty ; -1[$ et sur $]-1 ; +\infty[$.

Maximum et minimum d'une fonction

24 On donne ci-dessous le tableau de variation d'une fonction de f.

x	−5		2		6
$f(x)$	2	↘	−2	↗	6

1. À l'aide de ce tableau, justifie si on peut comparer les nombres suivants dans chaque cas :
   a) $f(-5)$ et $f(3)$; b) $f(-5)$ et $f(1)$;
   c) $f(3)$ et $f(4)$; d) $f(-2)$ et $f(3)$.
2. Donne le minimum de f sur $[-5 ; 6]$.

25 La fonction f admet le tableau de variation ci-dessous :

x	−4		−2		0		10
$f(x)$	3	↘	−5	↗	2	↘	−1

Donne le maximum et le minimum de la fonction f sur chacun des intervalles suivants:

a) $[-4;3]$; b) $[-2;3]$; c) $[-4;0]$.

26 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^2-6$.

1. Démontre que pour tout réel x, $f(x)\geq -6$.
2. Donne un éventuel antécédent de -6 par f.
3. Déduis-en le minimum de f sur $\mathbb{R}$.

27 On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par ; $g(x)=x^2-6x+10$.

a) Justifie que : $g(x)=(x-3)^2+1$.

b) Démontre que : $\forall x\in\mathbb{R}, g(x)\geq 1$.

Déduis-en le minimum de g sur $\mathbb{R}$.

28 Détermine le maximum de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, par : $f(x)=2-(1+x)^2$.

Fonctions égales

29 Soit f et g deux fonctions définies par :

$f(x)=x-3$ et $g(x)=\dfrac{x^2-9}{x+3}$.

a) Détermine les ensembles de définition des fonctions f et g.

b) Détermine le plus grand ensemble sur lequel $f(x)=g(x)$.

30 On donne les fonctions f et g définies de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\sqrt{(x+3)^2}-1$ *et* $g(x)=x+2$.

Détermine le plus grand ensemble sur lequel f et g sont égales.

31 Dans chacun des cas suivants, les fonctions f et g sont définies de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

Détermine :

1. Les ensembles de définition respectifs D_f et D_g des fonctions f et g.
2. Le plus grand ensemble sur lequel f et g coïncident.

a) $f(x)=x+1$ et $g(x)=\left(\sqrt{x+1}\right)^2$;

b) $f(x)=\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x-2}$ et $g(x)=\dfrac{-4}{x^2-4}$;

c) $f(x)=\dfrac{(x-3)^2}{|x-3|}$ et $g(x)=|x-3|$.

32 Dans chacun des cas suivants, dis si les fonctions g et h coïncident ou non sur l'ensemble I. Justifie ta réponse.

a) $g(x)=x+2,\ h(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2},\ I=]2;+\infty[$.

b) $g(x)=\sqrt{(x+1)^2},\ h(x)=x+1,\ I=]-\infty;-2]$.

c) $g(x)=|x|+2,\ h(x)=|x+2|,\ I=[0;+\infty[$.

d) $g(x)=x,\ h(x)=\dfrac{x^3+2x}{x^2+2},\ I=\mathbb{R}$.

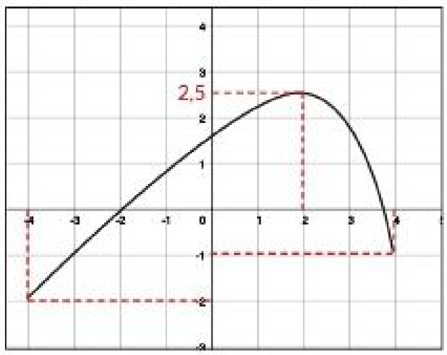
e) $g(x)=x|x|,\ h(x)=x^2,\ I=[0;+\infty[$.

f) $g(x)=|x-1|,\ h(x)=1-x,\ I=[1;2]$.

Image directe - image réciproque d'un intervalle

33 La fonction f est représentée ci-dessous.

1. Détermine graphiquement un encadrement de $f(x)$ sachant que :
   a) $-4<x<2$
   b) $2<x<4$
2. Détermine graphiquement :
   a) L'image directe par f de chacun des intervalles : $[-4;2]$; $[2;4]$.
   b) L'image réciproque par f de l'intervalle $[0;2{,}5]$.



Exercices de renforcement/approfondissement

34 Soit (C) la courbe représentative de la fonction : $x \mapsto \frac{x}{x+1}$.

1. Détermine parmi les points suivants ceux qui appartiennent à (C) :
$A\left(\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right)$, $B(-2;2)$, $C\left(\frac{1}{4};\frac{1}{3}\right)$, $D(-0{,}6;-1{,}5)$.
2. Détermine l'abscisse du point de (C)
   a) d'ordonnée 2.
   b) d'ordonnée 5.

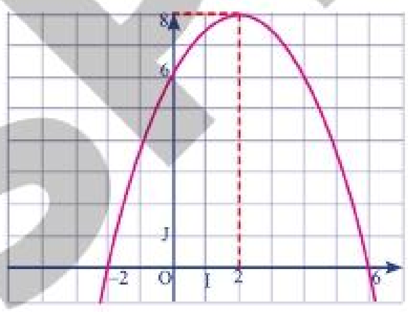
35 Soit la fonction f définie par : $f(x)=\frac{x}{x-3}$.

1. Détermine l'ensemble de définition de f.
2. Détermine les images, si elles existent, de −4 et 3 par f.
3. Détermine les éventuels antécédents de −3 et 1 par f.

36 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^2 - x + 1$.

1. Soient x et x' deux réels. Factorise $f(x') - f(x)$.
2. a) Démontre que si $x' > x \geq \frac{1}{4}$, alors $f(x') > f(x)$.
   b) Démontre que si $x' < x \leq \frac{1}{4}$, alors $f(x') > f(x)$
   c) Déduis-en le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
3. a) Démontre que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq \frac{7}{8}$.
   b) Déduis-en que f admet un minimum que tu préciseras.
4. Calcule $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ et donne une allure de la courbe représentative de f.

37 La figure ci-dessous représente la courbe de la fonction f.



1. A partir de la courbe ;
   a) Détermine l'ensemble de définition de f.
   b) Dresse le tableau de variation de f.
   c) Détermine le maximum de f sur $\mathbb{R}$.
2. En fait, f est l'une des trois fonctions suivantes :
   a) $f(x)=\frac{1}{2}x^2+2x+6$
   b) $f(x)=\frac{1}{2}x^2+2x-2$
   c) $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x+6$

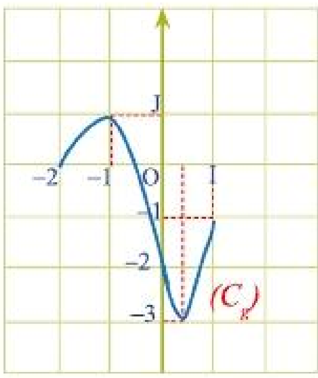
Détermine-la. Justifie ta réponse.

38 On considère la fonction f définie sur [0 ; 4] par : $f(x)=\frac{2}{x+2}$.

1. Détermine les coordonnées des points A, B et C appartenant à la courbe représentative de la fonction f dont les abscisses respectives sont 0 ; 2 et 4.
2. Dis si les points K(1 ; 0,6) et L(3 ; 0,4) appartiennent à la courbe représentative de la fonction f.

39 Soit g la fonction définie par la représentation graphique ci-dessous.
Lis graphiquement les réponses aux questions suivantes :

1. Détermine l'ensemble de définition de g.
2. Détermine l'image des réels 1 ; −0,5 et −1 par g.
3. Donne, s'ils existent, les antécédents de −2 ; −1 et 2 par g.
4. Donne l'ordonnée du point de la courbe (C_g) d'abscisse 0.
5. Dis si le point de coordonnées (−1 ; −2) est sur la courbe (C_g). Justifie ta réponse.
6. Dresse le tableau de variation de g sur son ensemble de définition.



40 Soit une fonction f définie sur l'intervalle $[-2 ; 5]$.

On sait que ;

- f est croissante sur l'intervalle $[-2 ; 0]$;
- f est décroissante sur l'intervalle $[0 ; 2]$;
- f est constante sur l'intervalle $[2 ; 5]$;
- L'image par f de 1 est 3 ;
- -2 et 5 sont des antécédents de 2 ;
- Le maximum de la fonction f sur $[-2 ; 5]$ est 5.

a) Dresse le tableau de variations de f sur $[-2 ; 5]$.

b) Trace l'allure d'une courbe correspondant à f.

41 Le tableau ci-dessous est le tableau de variation d'une fonction f.

x	-4		-1		0		3
$f(x)$	3	↘	-1	↗	2	↘	-4

Pour chacune des propositions ci-dessous, recopie le numéro de la proposition suivi de V si elle est vraie ou de F si elle est fausse.

1. f est croissante sur l'intervalle $[-1 ; 0]$.
2. f possède deux maximums.
3. le minimum de f est atteint pour $x = -4$.
4. $f(-3) > f(-2)$.
5. $f(0{,}5) > -1$.
6. $f(-0{,}5) = 0$.
7. $f(-0{,}5) > f(2{,}5)$.

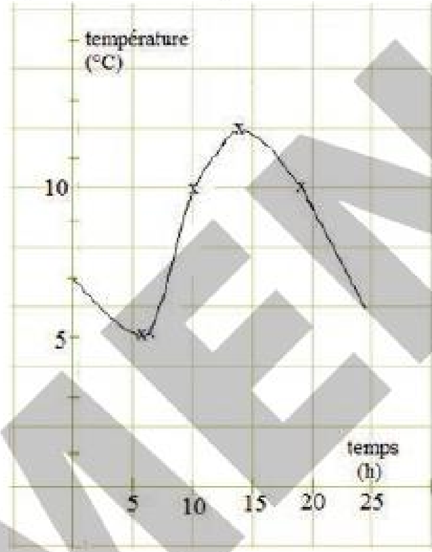
42 Voici le tableau de variation d'une fonction f.

x	-1		0		1		2
$f(x)$	1	↘	0	↗	1	↘	-2

Pour chacune des propositions ci-dessous, recopie le numéro de la proposition suivi de V si elle est vraie ou de F si elle est fausse.

1. Si $x < 0$, alors $f(x) > 0$.
2. Si $-2 < f(x) < 1$, alors $1 < x < 2$.
3. Si $0 < f(x) < 1$, alors $-1 < x < 1$.
4. Si $f(x) = 0$, alors $x = 0$.

43 Un appareil a mesuré la température en un lieu de façon continue. On a obtenu le graphique suivant, où les croix indiquent une mesure précise à une heure « pleine ».



1. a) Donne la variation de température suivant les intervalles de temps.

   b) On appelle f la fonction et t la variable temps.

   Dresse le tableau de variations de la fonction f.

2. Donne le maximum et le minimum de f et leur interprétation.

3. a) Détermine l'heure(s) à laquelle la température est 10°C.

   b) Donne les valeurs, arrondies au demi-degré, de la température à 3 heures, à 11 heures et à 17 heures.

   c) Détermine les intervalles de temps sur lequel(s) la température est inférieure ou égale à 7°C, strictement supérieure à 10°C.

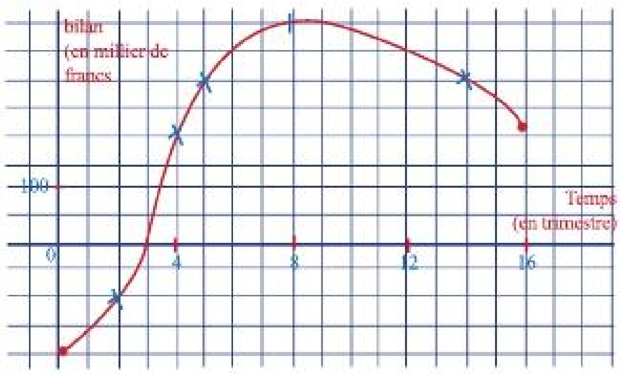
4. a) Entre 6 heures et 14 heures, calcule le rapport :

   $$\frac{\textit{différence de température}}{\textit{différence de temps}}$$, entre ces deux instants.

   Ce rapport indique la variation moyenne de température par heure.

   b) Calcule la variation moyenne de température par heure de 14 heures à 24 heures.

44



Pour un certain produit, le service comptable d'une entreprise étudie le bilan recettes-coûts sur quatre années de production. Ce bilan est représenté par le graphique ci-dessus.

1. a) Détermine le bilan au $5^{ème}$ trimestre, à la fin de la $3^{ème}$ année et au $3^{ème}$ trimestre.

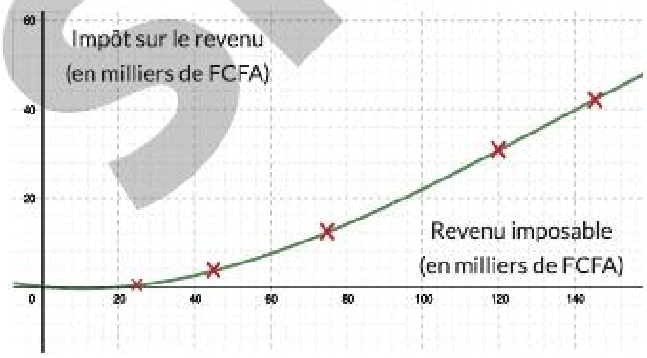
   b) Détermine le (s) trimestre (s) où ce bilan est de 200 000 F ; −100 000 F.

   c) Détermine l'intervalle sur lequel le bilan est négatif ou nul.

   d) Détermine l'intervalle sur lequel le bilan est supérieur ou égal à 300 000 F.

2. On appelle f la fonction correspondant à ce bilan et x la variable temps.
   Modélise les questions précédentes à l'aide de la fonction f.

45 Le graphique suivant représente l'impôt sur le revenu en fonction du revenu imposable pour une famille de deux enfants, dans un pays.



1. Commente le dialogue suivant :

   M. Yao : «Plus ton revenu est important et plus tu dois payer des impôts.»

   M. Séka : «Ce qui veut dire que l'impôt est proportionnel au revenu.»

2. À l'aide du graphique, réponds aux questions suivantes :

   a) Détermine le montant des impôts de M. et Mme Kouamé dont le revenu imposable est de 60 000 FCFA.

   b) M. et Mme Koné ont payé 25 000 FCFA d'impôts.

   Détermine leur revenu imposable correspondant.

3. Dans la suite, on propose « d'approcher » la représentation graphique précédente par la courbe de la fonction f que l'on définit sur l'intervalle [0 ;150] par :
   $f(x)=\dfrac{1}{100000}\left(-x^3+400x^2-8000x\right)$.

   a) Reproduis et complète le tableau des valeurs suivant (on donnera un arrondi au dixième près).

x	0	25	45	75	120	145
$f(x)$						

   b) Calcule $f(10)$. Dis si ce résultat donne le montant des impôts à payer pour un revenu imposable de 10 000 FCFA. Explique.

46 La puissance (en watts par m² ; $W.m^{-2}$) d'un générateur photovoltaïque dépend de la résistance de charge (en ohms, Ω) qu'il est nécessaire d'utiliser. Il existe une formule qui lie ces deux grandeurs mais que l'on ne connait pas. Ce tableau donne la puissance d'un panneau solaire pour certaines résistances.

R(Ω)	14	31,5	45	70,2	89,7	100	131	147	167	187	205	219	242	281
P($W.m^{-2}$)	3	5,9	8	11,3	14,2	15,3	17,3	17,7	17,8	17,1	16,3	15,8	15	13,3

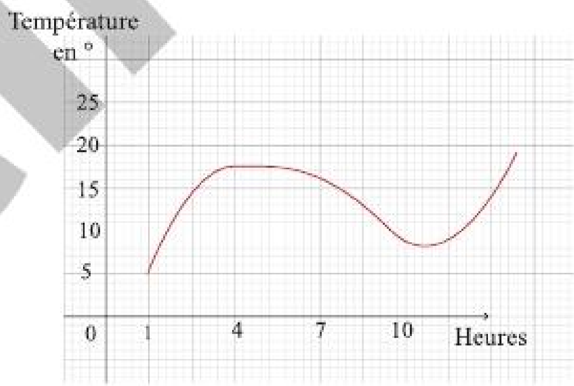
1. Réalise un graphique avec les données ci-dessus.
2. À l'aide du graphique :
   a) Évalue la résistance pour laquelle la puissance est maximale.
   b) Indique la puissance obtenue pour une résistance de 45 ohms.
   c) Indique à quelle(s) résistance(s) correspond une puissance de 15,3 $W.m^{-2}$.
   d) Détermine les résistances pour lesquelles la puissance est supérieure à 14 $W.m^{-2}$.

Situations complexes

47 Lors du partage d'un héritage, ton ami Kouadio à droit à un terrain rectangulaire de 400 m² à extraire d'un vaste domaine familial.
Afin de minimiser le coût de la clôture de ce terrain, Kouadio veux choisir les dimensions du terrain de telle sorte que son périmètre soit le plus petit possible.
Le chef de famille lui demande de choisir un terrain de 25 m de longueur et de 16 m de largeur. N'étant pas convaincu par cette proposition, il te sollicite.
À l'aide d'un argumentaire basé sur tes connaissances mathématiques, réponds à la préoccupation de Monsieur Kouadio.

48 En prélude à un voyage dans une ville, ton père décide de s'informer sur la météo le jour de son arrivée le 23 mai 2022. Ne supportant pas le grand froid, il décide de reporter son voyage si la température dans la ville se situe en dessous de 15° dans l'intervalle de temps $[t - 1{,}5 \,;\, t + 1{,}5]$ où t désigne l'heure de son arrivée dans la ville. En quête d'informations relatives à son voyage, il s'adresse à une agence qui lui fournit les documents suivants :

Document 1
Courbe de température prévisionnelle dans la ville entre 1h et 10h le 23 mai 2022.



Document 2
Informations relatives au voyage :
- Date de départ 23 mai 2022 à 1h du matin.
- Distance à parcourir : 14 000 km.
- Vitesse moyenne de l'avion : 4000 km/h.
- Durée des escales : 1 h.

Ne comprenant pas ces documents, ton papa te sollicite.
À partir de l'exploitation de ces documents et de tes connaissances mathématiques, dis si papa doit oui ou non reporter son voyage.

5 DROITES ET PLANS DE L'ESPACE

Commentaire de la Leçon

Dans l'antiquité, le célèbre philosophe Platon (- 428. -348) évoque dans le Timée les cinq polyèdres réguliers : le tétraèdre, le cube, l'octaèdre, le dodécaèdre et l'icosaèdre. En mathématiques, ces solides sont appelés des polyèdres réguliers. Il faudra attendre Kepler pour voir ajouter à ces cinq solides quatre autres solides réguliers. L'étude de l'espace n'est pas nouvelle pour l'apprenant de la classe de seconde.

À la fin du premier cycle de l'enseignement secondaire, l'élève connait déjà les règles pour représenter un solide en perspective cavalière. Il a étudié les solides usuels et sait calculer des aires latérales et des volumes de certains solides usuels. En classe de seconde C, il s'agira d'amorcer la théorisation de l'étude de l'espace grâce aux définitions et propriétés relatives aux plans et droites de l'espace. Cette étude sera complétée en classe de première C, par l'orthogonalité dans l'espace, les vecteurs de l'espace et en terminale C par l'étude de la géométrie analytique de l'espace.

La géométrie de l'espace est utilisée dans plusieurs domaines, dont l'architecture et la réalisation des plans d'ouvrage.

Habiletés et Contenus

- **Connaitre** les positions relatives d'une droite et d'un plan ; les positions relatives de deux plans ; la propriété sur les positions relatives d'une droite et d'un plan ; les propriétés sur les positions relatives de deux plans ; la propriété sur les positions relatives de deux droites ; les propriétés relatives à la détermination d'un plan ; les propriétés relatives au parallélisme de deux droites ; les propriétés relatives au parallélisme d'une droite et d'un plan ; les propriétés relatives au parallélisme de deux plans.
- **Construire** une section plane d'un solide.
- **Démontrer** que : deux droites sont coplanaires ; deux droites ne sont pas coplanaires ; une droite est sécante à un plan ; une droite est parallèle à un plan ; deux plans sont parallèles ; deux plans sont sécants.
- **Traiter une situation** faisant appel à la géométrie de l'espace.

Situation d'Apprentissage

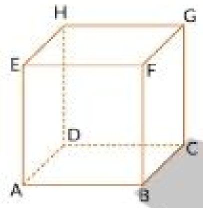
Sur la route du lycée se trouve une maison futuriste ayant la forme d'une pyramide sectionnée par un plan.

Les élèves de seconde, émerveillés par cette beauté architecturale, veulent reproduire cette maison sur leur cahier.

Pour cela, ils décident d'étudier les positions relatives des droites et des plans de l'espace et de construire des sections planes de solides.

1. DROITES ET PLANS DE L'ESPACE

Activité 1 Notion de droite de l'espace



1. Reproduis le cube ABCDEFGH ci-contre.
2. Trace une ligne droite passant par les points H et F puis une autre passant par les points A et G et une dernière passant par les points A et C.

Récapitulons

Une droite de l'espace est une ligne droite sans épaisseur et illimitée des deux côtés.

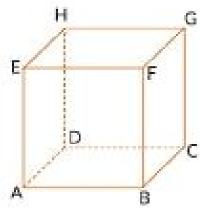
Notation

La droite passant par les points A et G est notée : (AG) ou encore par une lettre entre parenthèses, par exemple (Δ).

Représentation

(Δ) est une droite de l'espace.

Activité 2 Détermination d'une droite de l'espace



1. Reproduis le cube ABCDEFGH ci-contre.
2. Trace autant de droites possibles passant par le point A.
3. Trace une droite passant par les points H et F puis une autre passant par les points A et G et une dernière droite passant par les points A et C.
4. Détermine le nombre de droites passant par deux points distincts que l'on peut tracer.

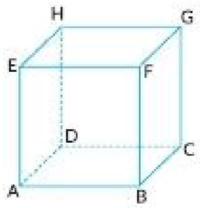
Récapitulons

Il existe une infinité de droites passant par un point donné.

Dans l'espace, il existe une et une seule droite passant par deux points distincts donnés.

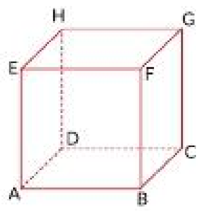
On dit que deux points de l'espace déterminent une droite et une seule.

Exercice de fixation



1 Soit le cube ci-contre.
Reproduis et trace les droites (BD) ; (AF) et (CE) .

Activité 3 Notion de plan de l'espace



1. Reproduis le cube ABCDEFGH ci-contre.
2. Dessine une surface plane contenant les points E, F et G.
3. Dis si oui ou non le point H appartient à cette surface plane.

Récapitulons

Un plan est une surface plane sans épaisseur illimitée de tous les côtés.

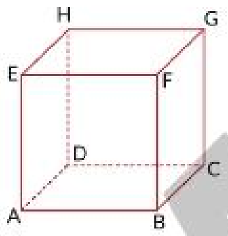
Notation
Pour noter un plan, on utilise une lettre majuscule entre parenthèses.

Exemple
Le plan (P).

Représentation

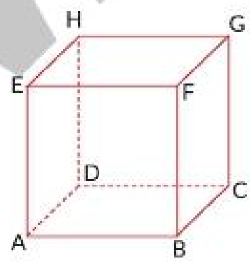
Exercice de fixation

2 Soit ABCDEFGH le cube ci-contre.
Reproduis le cube et représente le plan (BEG) .



Activité 4 Plan passant par des points de l'espace

1. Reproduis le cube ABCDEFGH ci-contre.
2. a) Détermine le nombre de plans qui contiennent la droite (BF).
   b) Cite deux plans contenant les points A et C.
   c) Cite deux plans contenant les points E, B et G puis deux autres contenant les points B, C et G.
3. Détermine le nombre de plans qui passent par trois points non alignés donnés de l'espace.



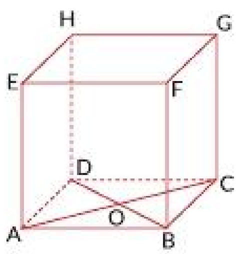
Récapitulons

Il existe une infinité de plans contenant une droite donnée.
Par trois points non alignés de l'espace, il passe un plan et un seul.

Notation
Le plan passant par les points non alignés E, B et G se note (EBG).

Exercice de fixation

3 Soit ABCDEFGH le cube ci-contre.
Recopie le numéro de chaque proposition suivi de V si la proposition est vraie ou de F si la proposition est fausse.



N°	Propositions
1	Le plan (ABC) se nomme aussi le plan (BEF).
2	Le plan (AEG) contient le point C.
3	Les points A, O et C forment un plan .
4	Les points F, O et H déterminent un plan.

Activité 5 Droite contenue dans un plan

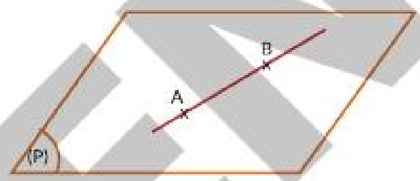
1. Trace un plan (P) et marque deux points A et B de (P).
2. Trace la droite (AB).
3. Donne la position de la droite (AB) par rapport au plan (P).

Récapitulons

Si A et B sont deux points distincts d'un plan (P), alors la droite (AB) est contenue dans le plan (P).

On dit aussi que la droite (AB) est incluse dans le plan (P).

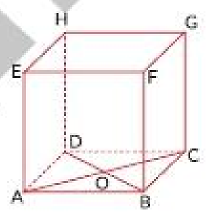
On note : $(AB) \subset (P)$.



Exercice de fixation

4 Soit ABCDEFGH le cube ci-contre.

Recopie le numéro de chaque proposition suivi de V si la proposition est vraie ou de F si la proposition est fausse.

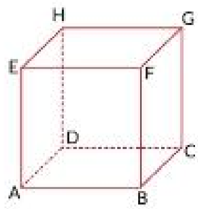


N°	Propositions
1	Le plan (ABC) contient la droite (DG).
2	Le plan (AEG) contient la droite (CE).
3	La droite (AO) est contenue dans le plan (BCD).
4	La droite (FH) est incluse dans le plan (ABC).

2. POSITIONS RELATIVES DANS L'ESPACE

Activité 6 Position relative de deux plans de l'espace

On considère le cube ABCDEFGH et le plan (ABC).



1. a) Justifie que la droite (BC) est contenue dans chacun des plans (ABC) et (EBC).
   b) Justifie que les plans (ABC) et (EBC) ne sont pas confondus.
2. Justifie que les plans (ABC) et (EFH) n'ont aucun point en commun.
3. Fais une synthèse des consignes 1 et 2.
4. Détermine la position relative d'un plan quelconque avec le plan (ABC).

Récapitulons

- Les plans (ABC) et (EBC) se coupent suivant la droite (BC). On dit que les plans (ABC) et (EBC) sont sécants suivant la droite (BC).

On écrit : $(ABC) \cap (EBC) = (BC)$.

- Les plans (EFH) et (ABC) n'ont aucun point commun. On dit que les plans (EFH) et (ABC) sont disjoints.

On écrit : $(EFH) \cap (ABC) = \varnothing$.

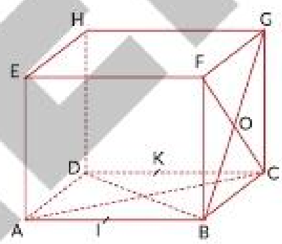
- Tout plan (P) est soit :
  - ✓ confondu avec le plan (ABC) ;
  - ✓ disjoint au plan (ABC).
  - ✓ sécant à (ABC) suivant une droite ;
- Lorsque le plan (P) est confondu avec le plan (ABC) ou disjoint au plan (ABC), on dit que le plan (P) est parallèle au plan (ABC).

On note : (P)//(ABC) ou (ABC) // (P).

› Remarques

Une droite peut être déterminée par la donnée de deux plans sécants.

Exercice de fixation



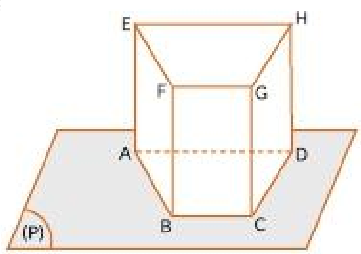
5 Recopie le numéro de chaque proposition suivi de V si la proposition est vraie ou de F si la proposition est fausse. Soit ABCDEFGH le parallélépipède rectangle ci-contre.

I et K sont respectivement des points des arêtes [AB] et [CD].

Les droites (BG) et (CF) se coupent en O.

N°	Propositions
1	Les plans (AIE) et (BIG) sont sécants suivant la droite (AB).
2	Les plans (HEF) et (BIC) sont sécants.
3	Les plans (ADI) et (BKC) sont confondus.
4	Les plans (ABG) et (CFA) sont sécants suivant la droite (AC).

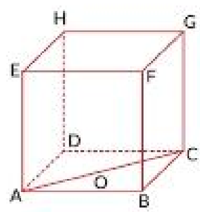
Activité 7 Position relative d'une droite et d'un plan de l'espace



Soit le prisme droit ABCDEFGH ci-contre posé sur un plan (P) et dont les bases sont des trapèzes.

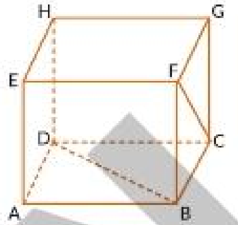
1. Cite trois droites qui rencontrent chacune le plan (ABC) en un seul point.
2. a) Cite une droite contenue dans le plan (ABC).
   b) Cite une droite qui est disjointe du plan (ABC)
3. Fais une synthèse des consignes 1 et 2.
4. Détermine la position relative d'une droite quelconque de l'espace avec le plan (ABC).

Récapitulons



- La droite(AE) a un seul point d'intersection avec le plan (ABC). On dit que la droite (AE) est sécante au plan (ABC).
- La droite (BC) est incluse dans le plan (ABC) et la droite (FG) n'a aucun point commun avec le plan (ABC). On dit que chacune des droites (BC) et (FG) est parallèle au plan (ABC).
- On note : (BC)//(ABC) et (FG)//(ABC).
- Toute droite (D) est soit :
  - ✓ sécante au plan (ABC).
  - ✓ parallèle au plan (ABC).

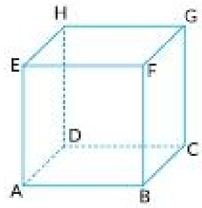
Exercice de fixation



6 Chacune des propositions ci-dessous correspond à une seule réponse correcte.
Pour chacune d'elle, écris le numéro de la proposition suivi de la lettre de la réponse correcte.
Soit ABCDEFGH le pavé ci-contre.

N°	Propositions	Réponses		
		a	b	c
1	La droite (DB) est sécante au plan	(EFG)	(ABC)	(FCG)
2	La droite (DB) est incluse dans le plan	(EFG)	(ABC)	(FCG)
3	La droite (FC) est parallèle au plan	(ADH)	(ABC)	(EFG)
4	La droite (DB) est parallèle au plan	(ADH)	(ABC)	(EFG)

Activité 8 Position relative de deux droites de l'espace



1. Reproduis le cube ABCDEFGH ci-contre.
2. a) Cite deux droites qui sont contenues dans le plan (ABC).
   b) Justifie que les droites (BF) et (HG) ne peuvent pas être contenues dans un même plan.
3. a) Cite deux droites qui sont contenues dans le plan (BCG) dont l'intersection est réduite à un point.
   b) Cite deux droites qui sont contenues dans le plan (EFG) dont l'intersection n'est pas un singleton.

Récapitulons

- Les droites (AB) et (BC) sont contenues dans le plan (ABC). On dit que les droites (AB) et (BC) sont coplanaires.
- Les droites (BF) et (HG) ne peuvent pas être incluses dans un même plan. On dit qu'elles ne sont pas coplanaires ou sont non coplanaires.
- Les droites (BG) et (FC) ont une intersection réduite à un point. On dit que les droites (BG) et (FC) sont sécantes.
- Les droites (EF) et (HG) sont coplanaires et disjointes. On dit que les droites (EF) et (HG) sont parallèles.

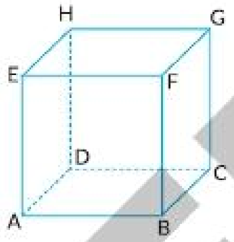
On note : (EF)//(HG).

- L'intersection de la droite (EF) avec elle-même n'est pas un singleton. On dit aussi que la droite (EF) est parallèle à elle –même.
- Deux droites de l'espace sont parallèles si et seulement si :
  - ✓ elles sont confondues ;
  - ✓ ou coplanaires disjointes.

Exercice de fixation

7 Recopie le numéro de chaque proposition suivi de V si la proposition est vraie ou de F si la proposition est fausse. Soit ABCDEFGH le cube ci-contre.

N°	Propositions
1	Les droites (BC) et (BH) ne sont pas sécantes.
2	Les droites (EG) et (BC) ne sont pas coplanaires.
3	Les droites (EG) et (AC) sont strictement parallèles.
4	Les droites (AG) et (CE) sont sécantes .

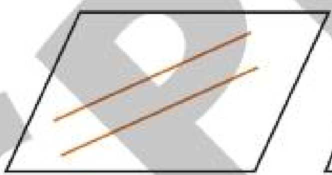


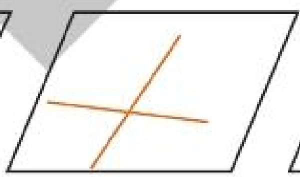
Activité 9 Diverses déterminations d'un plan

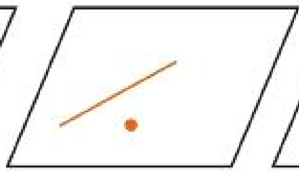
1. Soit (D) une droite et un point A n'appartenant pas à (D).
   Démontre qu'il existe un plan et un seul contenant A et (D).
2. Soient (D_1) et (D_2) deux droites parallèles disjointes.
   Démontre qu'il existe un plan et un seul contenant (D_1) et (D_2).
3. Soient (D_1) et (D_2) deux droites sécantes.
   Démontre qu'il existe un plan et un seul contenant (D_1) et (D_2).

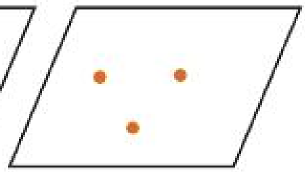
Récapitulons

- Dans l'espace, un plan peut être déterminé par :
  - ✓ trois points non alignés ;
  - ✓ une droite et un point n'appartenant pas à la droite ;
  - ✓ deux droites sécantes ;
  - ✓ deux droites parallèles disjointes ;
- Dans l'espace, on peut appliquer les propriétés de la géométrie plane.


Deux droites parallèles


Deux droites sécantes


Une droite et un point n'appartenant pas à la droite


Trois points non alignés

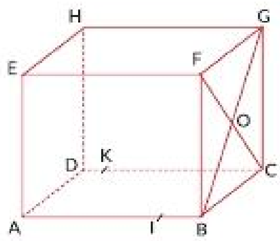
Exercice de fixation

8 Recopie le numéro de chaque proposition suivi de V si la proposition est vraie ou de F si la proposition est fausse.

Soit ABCDEFGH le parallélépipède rectangle ci-contre.

I et K sont respectivement des points des arêtes [AB] et [CD].

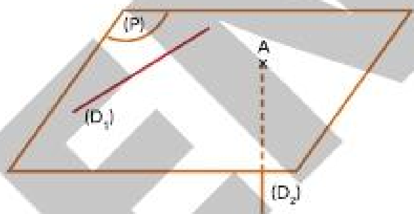
Les droites (BG) et (CF) se coupent en O .



N°	Propositions
1	Les droites (BF) et (HG) déterminent un plan.
2	Les points A, I et B déterminent un plan.
3	La droite (AD) et H déterminent un plan.
4	Les droites (EG) et (AC) déterminent un plan.

Activité 10 Reconnaitre deux droites non coplanaires

Soient (P) un plan et (D_1) une droite contenue dans le plan (P). Une droite (D_2) est sécante au plan (P) en un point A qui n'appartient pas à (D_1).
Démontre que (D_1) et (D_2) sont non coplanaires. *(On fera un raisonnement par l'absurde).*

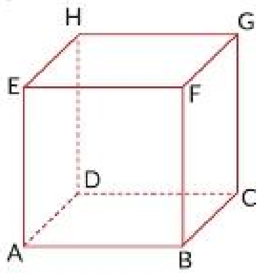


Récapitulons

Pour démontrer que deux droites (D_1) et (D_2) sont non coplanaires, il suffit de trouver un plan (P) contenant la droite (D_1) tel que la droite (D_2) soit sécante au plan (P) en un point A qui n'appartient pas à (D_1).

Exercice de fixation

10 Recopie le numéro de chaque proposition suivi de V si la proposition est vraie ou de F si la proposition est fausse.
Soit ABCDEFGH le cube ci-contre.



N°	Proposition
1	Les droites (BC) et (BH) ne sont pas coplanaires.
2	Les droites (EG) et (BC) ne sont pas coplanaires.
3	Les droites (EG) et (AC) sont coplanaires.
4	Les droites (AG) et (CE) ne sont pas coplanaires.

3. PARALLÉLISME DANS L'ESPACE

1. Droites parallèles

Activité 11 Droite passant par un point et parallèle à une droite donnée.

Soient (D) une droite et A un point de l'espace.
Démontre qu'il existe une seule droite passant par A et parallèle à (D).

Récapitulons

Il existe une droite et une seule passant par un point A et parallèle à (D).

Exercice de fixation

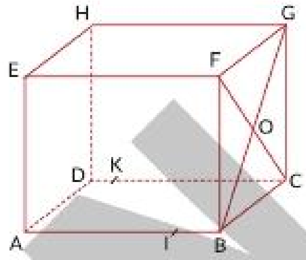
11 À chacune des propositions du tableau ci-dessous, correspond trois informations a, b et c dont une seule permet d'avoir une proposition juste.

Écris le numéro de la proposition suivi de la lettre correspondant à la proposition juste.

Soit ABCDEFGH le parallélépipède rectangle ci-contre.

I et K sont respectivement des points des arêtes [AB] et [CD].

Les droites (BG) et (CF) se coupent en O .



N°	Propositions	informations		
		a	b	c
1	La droite (AE) est parallèle à la droite…	(BF)	(BC)	(BG)
2	La droite (AH) est parallèle à la droite…	(BF)	(BC)	(BG)
3	La droite (FG) est parallèle à la droite…	(AK)	(AI)	(AD)

Activité 12 Plan qui coupe deux droites parallèles

(D_1) et (D_2) sont deux droites parallèles de l'espace.

(P) est un plan qui coupe la droite (D_1) en A.

1. On suppose que (D_1) et (D_2) sont confondues. Justifie que (D_2) est sécante à (P).
2. On suppose que (D_1) et (D_2) sont disjointes. Soit (Q) le plan déterminé par (D_1) et (D_2).
   - **a)** Justifie que (P) et (Q) sont sécants suivant une droite (Δ) passant par A.
   - **b)** Justifie que (Δ) est sécante à (D_2) en un point B.
   - **c)** Justifie que (D_2) est sécante à (P) au point B.

Récapitulons

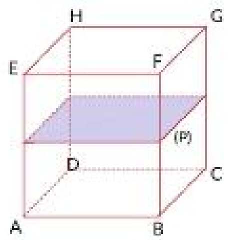
Si deux droites (D_1) et (D_2) sont parallèles, tout plan (P) qui coupe (D_1) coupe (D_2).

Exercice de fixation

11 On considère un cube ABCDEFGH, I est le milieu du segment [AE].

On trace le plan (P) parallèle au plan (ABC) passant par I .

Démontre que (P) coupe la droite (GC).



Activité 13 Droites parallèles à une même droite

(D_1) et (D_2) sont deux droites parallèles à une droite (D).

1. On suppose que deux des trois droites (D_1), (D_2) et (D) sont confondues. Justifie que (D_1) est parallèle à (D_2).
2. On suppose que les trois droites (D_1), (D_2) et (D) sont deux à deux distinctes.

Soit A un point de la droite (D_2) qui n'appartient pas à la droite (D_1) et (P) le plan déterminé par A et (D_1).

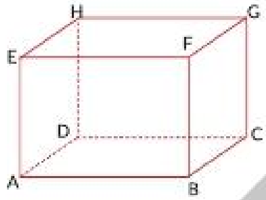
- **a)** Démontre que les droites (D_1) et (D_2) sont coplanaires.
- **b)** Démontre par l'absurde que les droites (D_1) et (D_2) sont parallèles.

Récapitulons

Deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles entre elles.

Exercice de fixation

12 ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle.
Cite des droites parallèles à la droite (CG).



2. Droite parallèle à un plan

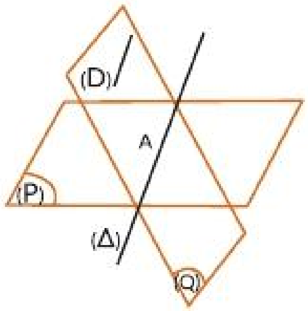
Activité 14 Caractérisation d'une droite parallèle à un plan

(D) est une droite et (P) un plan de l'espace.

1. On suppose que (D) est incluse dans (P).
   Démontre que (D) est parallèle au plan (P).

On suppose dans la suite que (D) n'est pas incluse dans (P).

2. On suppose que (D) est parallèle au plan (P).
Soit A un point de (P).
   - **a)** Justifie que A et (D) déterminent un plan (Q).
   - **b)** Justifie que (P) et (Q) sont sécants suivant une droite (Δ).
   - **c)** Démontre par l'absurde que (D) est parallèle à (Δ).
   - **d)** Déduis de ce qui précède que si (D) est parallèle à (P), alors (D) est parallèle à une droite de (P).



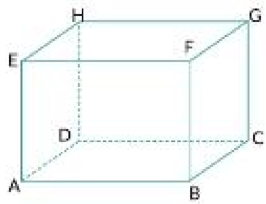
3. **On suppose que (P) contient une droite (Δ) parallèle à (D).**
   - **a)** Justifie que (Δ) et (D) déterminent un plan (R).
   - **b)** Justifie que (P) et (R) sont sécants suivant la droite (Δ).
   - **c)** Déduis de ce qui précède que (D) est parallèle à (P).

Récapitulons

Une droite (D) est parallèle à un plan (P) si et seulement si elle est parallèle à une droite incluse dans (P).

Exercice de fixation

13 ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle.
Cite des droites passant par E et parallèles au plan (BGC).



Activité 15 Conséquence relative au parallélisme d'une droite et d'un plan

(D) est une droite et (P) un plan de l'espace tel que (D) soit parallèle à (P).
Soit (L) une droite parallèle à (D).
Démontre que (L) est parallèle à (P).

Récapitulons

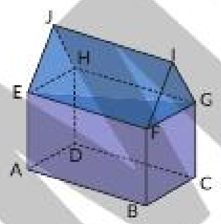
Si une droite (D) est parallèle à un plan (P), alors toute droite (L) parallèle à (D) est parallèle à (P).

Remarque :
Deux droites parallèles à un même plan ne sont pas nécessairement parallèles.

Exercice de fixation

14 On considère le prisme ci-contre.

1. Cite les droites strictement parallèles au plan (EJF).
2. Cite les droites strictement parallèles au plan (EJH).



Activité 16 Théorème du toit

(D) est une droite, (P_1) et (P_2) sont deux plans sécants suivant une droite (Δ) tel que (D) soit parallèle à (P_1) et parallèle à (P_2)

Soit A un point commun à (P_1) et (P_2).

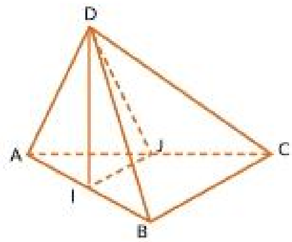
1. Justifie qu'il existe une droite (D_1) inclus dans (P_1) et une droite (D_2) incluse dans (P_2) tel que (D_1) soit parallèle à (D_2)
2. Justifie que toute parallèle à (D_1) et à (D_2) passant par un point A de (Δ) est confondue avec (Δ).
3. Déduis de ce qui précède que (D) est parallèle à (Δ).

Récapitulons

Si une droite (D) est parallèle à deux plans sécants (P_1) et (P_2) suivant une droite (Δ), alors (D) est parallèle à (Δ).

Exercice de fixation

15 On considère la figure ci-contre.
ABCD est un tétraèdre, I est le milieu de [AB] et J le milieu de [AC].
Détermine l'intersection des plans (BCD) et (IJD).



3. Plans parallèles

Activité 17 Caractérisation de deux plans parallèles

(P_1) et (P_2) sont deux plans de l'espace.

On se propose de démontrer que (P_1) et (P_2) sont parallèles si et seulement si (P_1) contient deux droites (D) et (L) sécantes et parallèles à (P_2).

1. Examine cette situation lorsque (P_1) et (P_2) sont confondus.

   Supposons dans la suite que (P_1) et (P_2) ne sont pas confondus.

2. a) Supposons que (P_1) et (P_2) sont parallèles, A un point de (P_1), (D) et (L) deux droites sécantes en A incluses dans le plan (P_1). Justifie que les droites (D) et (L) sont parallèles au plan (P_2).

   b) Supposons qu'il existe deux droites (D) et (L) sécantes, contenues dans (P_1) et parallèles à (P_2).

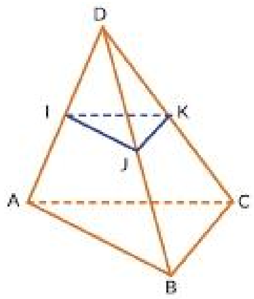
Démontre par l'absurde que (P_1) et (P_2) sont parallèles en utilisant le théorème du toit.

Récapitulons

Deux plans (P_1) et (P_2) sont parallèles si et seulement si (P_1) contient deux droites (D) et (L) sécantes et parallèles à (P_2).

Remarque :
Deux droites parallèles à un même plan ne sont pas nécessairement parallèles.

Exercice de fixation



16 ABCD est un tétraèdre. Les points I,J et K sont respectivement situés à la moitié des arêtes [DA], [DB] et [DC] (voir figure).

Démontre que les plans (KIJ) et (ABC) sont parallèles.

Activité 18 Des plans parallèles à un même plan donné

(P_1) et (P_2) sont deux plans parallèles à un plan (P).

On se propose de démontrer que (P_1) et (P_2) sont deux plans parallèles

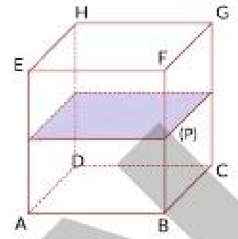
Soit (D) et (L) deux droites de (P), sécantes en un point A.

1. On suppose que (P_1) et (P_2) sont sécants suivant une droite (Δ).
   Démontre que (D) et (L) sont parallèles à (Δ).
2. Déduis de ce qui précède que (P_1) et (P_2) sont deux plans parallèles.

Récapitulons

Deux plans parallèles à une même troisième sont parallèles entre eux.

Exercice de fixation



17 On considère un cube ABCDEFGH, I est le milieu du segment [AE].
On trace le plan (P) parallèle au plan (ABC) passant par I.
Démontre que (P) et (EFG) sont parallèles.

Activité 19 Plan passant par un point donné et parallèle à un plan donné

Soit A un point et (P) un plan de l'espace.
On se propose de démontrer que par le point A, il passe un plan et un seul parallèle à (P).

1. On suppose que A est un point de (P). Démontre la propriété ci-dessus.
2. On suppose que le point A n'appartient pas à (P).

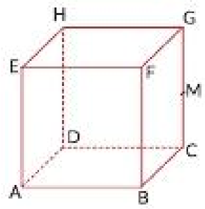
Soit (D) et (L) deux droites de (P) sécantes en B.
Soit (D') la parallèle à (D) passant par A.
Soit (L') la parallèle à (L) passant par A.

   a) Justifie que (Q) est un plan passant par A et parallèle à (P).
   b) Justifie que (Q) est unique.

Récapitulons

Par un point A de l'espace, il passe un plan et un seul passant par A et parallèle à (P).

Exercice de fixation



18 On considère un cube ABCDEFGH, M est le milieu du segment [GC].
Trace le plan (P) parallèle au plan (EFG) passant par M.

Activité 20 Plan sécant à deux plans parallèles

(P_1) et (P_2) sont des plans parallèles et (P) un plan de l'espace.

On suppose que (P) est sécant à (P_1) suivant une droite (D_1).

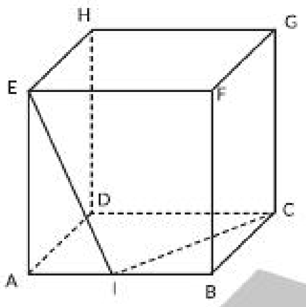
1. Démontre par l'absurde que (P) est sécante à (P_2).
2. Soit (D_2) la droite d'intersection de (P) et (P_2).

Démontre que (D_1) et (D_2) sont parallèles. (On envisagera le cas où (P_1) et (P_2) sont confondus et le cas où (P_1) et (P_2) sont strictement parallèles).

Récapitulons

Si deux plans (P_1) et (P_2) sont parallèles, alors tout plan (P) sécant à (P_1) est sécant à (P_2) et les droites d'intersection sont parallèles.

Exercice de fixation



19 Soient ABCDEFGH un cube et I le milieu de [AB].
Détermine l'intersection des plans (EIC) et (EFG).

Activité 21 Droite parallèle à deux plans parallèles

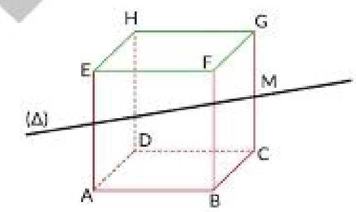
(P_1) et (P_2) sont des plans parallèles et (D) une droite de l'espace.

1. Démontre que si (D) est parallèle à (P_1), alors (D) est parallèle à (P_2).
2. Démontre que si (D) est sécante à (P_1), alors (D) est sécante à (P_2).

Récapitulons

Si deux plans sont parallèles, alors :
- Toute droite parallèle à l'un est parallèle à l'autre.
- Toute droite sécante à l'un est sécante à l'autre.

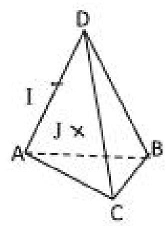
Exercice de fixation



19 On considère un cube ABCDEFGH, M est le milieu du segment [GC] .
On trace la droite (Δ) parallèle à la droite (AC) passant par M.
Démontre que la droite (Δ) est parallèle au plan (EFG).

4. Section plane d'un solide de l'espace

Activité 22 Section plane d'un solide



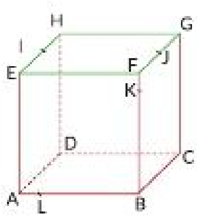
On considère le tétraèdre ABCD ci-contre.
Le point I est sur le segment [AD], et J appartient à la face (ACD).
On cherche à déterminer la section du tétraèdre ABCD par le plan (BIJ).

1. a) Construis l'intersection de la droite (IJ) avec le plan (BCD).
   b) Construis, si elle existe, l'intersection de chaque face du tétraèdre avec le plan (BIJ).
2. Déduis de la question précédente la section du tétraèdre par le plan (BIJ).

Récapitulons

- L'intersection de la droite (IJ) avec le plan (BCD) est l'intersection de la droite (IJ) avec la droite (DC).
- Pour obtenir la section du tétraèdre par le plan (BIJ);
  ✓ on détermine les droites d'intersection du plan donné avec le plan de chaque face du solide ;
  ✓ on conserve le tracé des segments inclus dans ces faces.

Exercice de fixation



20 ABCDEFGH est le cube ci-contre.
I et J sont les milieux de [EH] et [FG].
L et K sont des points de [EH] et [BF].
Construis la section du cube par le plan (IJK).

1. DROITES ET PLANS DE L'ESPACE

1. Notion de droite

Présentation
Une droite de l'espace est une ligne droite sans épaisseur et illimitée des deux côtés.

Notation
La droite passant par les points A et B est notée : (AB) ou encore (D).

Représentation
(D) est une droite de l'espace.

2. Détermination d'une droite

Propriété
Deux points de l'espace déterminent une droite.

3. Notion de plan

Présentation
Un plan est une surface plane sans épaisseur et illimitée de tous les côtés.

Notation
Pour noter un plan, on utilise une lettre majuscule entre parenthèse.

Exemple le plan (P).

Représentation
(P) est un plan de l'espace.

4. Plan passant par des points de l'espace

Propriété
Par trois points non alignés de l'espace, il passe un plan et un seul.

Notation

Le plan passant par les points non alignés E, B et G se note (EBG).

5. Droite contenue dans un plan

Propriété
Si A et B sont deux points distincts d'un plan (P), alors la droite (AB) est contenue dans le plan (P).

Vocabulaire

Lorsque la droite (AB) est contenue dans un plan (P), on dit que la droite (AB) est incluse dans le plan (P) et on note : $(AB) \subset (P)$.

Pour s'entraîner : Exercices 1 ; 2 ; 3

2. POSITIONS RELATIVES DANS L'ESPACE

1. Position relative de deux plans de l'espace

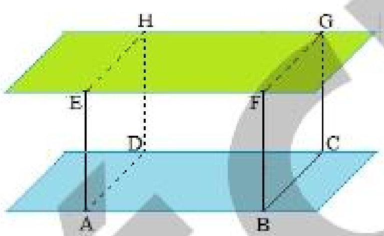
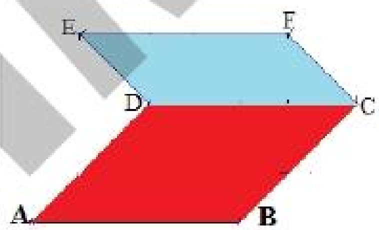
Définitions

- Deux plans confondus ou disjoints sont dits parallèles.
- Deux plans qui ne sont pas parallèles sont dits sécants.

Propriétés

- Deux plans de l'espace sont soit parallèles, soit sécants.
- Deux plans qui ont un point en commun sont :
  - ✓ soit confondus ;
  - ✓ soit ils sont sécants et leur droite d'intersection passe par le point commun.

Remarque :
Pour deux plans de l'espace, on a les configurations suivantes :

Plans parallèles	Plans sécants
Ils sont confondus ou ils n'ont aucun point en commun.  Les plans (ABC) et (EFG) sont parallèles.	Ce sont deux plans non parallèles. Leur intersection est une droite.  Les plans (ABC) et (EFC) sont sécants. Leur intersection est la droite (CD).

2. Position relative d'une droite et d'un plan de l'espace

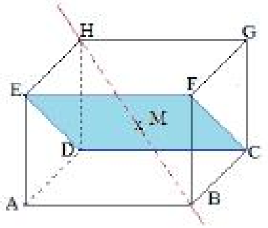
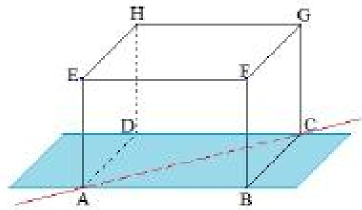
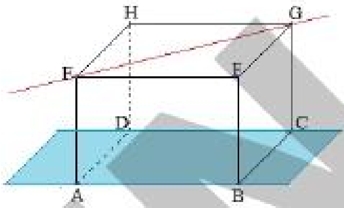
Définitions

- Une droite est parallèle à un plan lorsqu'elle est incluse dans ce plan ou lorsqu'elle est disjointe à ce plan.
- Une droite est sécante à un plan lorsqu'elle n'est pas parallèle à ce plan.

Propriété

Une droite de l'espace est soit sécante à un plan, soit parallèle à ce plan.

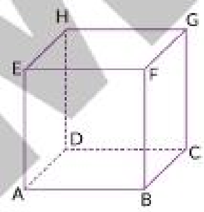
Remarque :
Pour une droite et un plan de l'espace, on a les configurations suivantes :

Droite sécante à un plan	Droite parallèle à un plan	
La droite et le plan ont un seul point en commun.	La droite est contenue dans le plan.	La droite n'a aucun point commun avec le plan.
		
La droite (BH) et le plan (EFC) sont sécants en M.	La droite (AC) est contenue dans le plan (ABC).	La droite (EG) est parallèle au plan (ABC).

3. Position relative de deux droites de l'espace

■ Définition
Deux droites de l'espace sont coplanaires lorsqu'elles sont contenues dans un même plan.

Exemples



Dans le cube ABCDEFGH ci-contre,
- les droites (AB) et (BC) sont coplanaires ;
- les droites (AD) et (HG) ne sont pas coplanaires.

■ Définition
Deux droites de l'espace sont parallèles lorsqu'elles sont coplanaires et qu'elles sont parallèles dans le plan qui les contient.

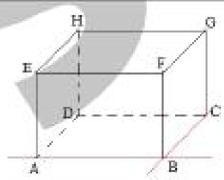
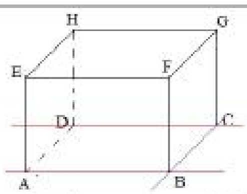
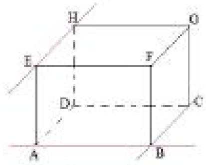
Exemples

Dans le parallélépipède ABCDEFGH ci-dessus, les droites (EF) et (HG) sont parallèles ; les droites (EF) et (DC) sont parallèles.

■ Attention !

Deux droites qui n'ont pas de point commun sont :
- soit parallèles disjointes.
- soit non coplanaires.

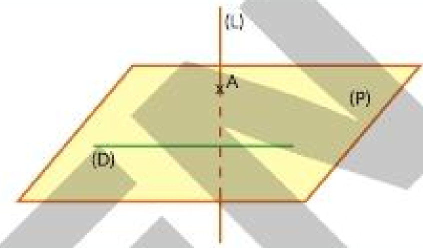
Remarque :
Pour une droite et un plan de l'espace, on a les configurations suivantes :

Droites coplanaires		Droites non coplanaires
Droites sécantes	Droites parallèles	Il n'existe pas de plan contenant les deux droites (EH) et (AB).
		
(AB) et (BC) sont sécantes en B.	(AB) et (CD) sont parallèles et disjointes.	• (AB) et (EH) ne sont ni parallèles, ni sécantes. • (AB) est incluse dans le plan (ABC) et (DH) est sécante au plan (ABC) en D et D n'appartient pas à (AB).

Remarque :
Dans tout plan de l'espace, on peut appliquer les propriétés de la géométrie plane.

Propriété
Deux droites de l'espace sont non coplanaires si et seulement si elles sont ni parallèles ni sécantes.

Point Méthode
Pour démontrer que deux droites (D) et (L) ne sont pas coplanaires, il suffit de trouver un plan (P) contenant (D) tel que (L) soit sécante à (P) en un point qui n'appartient pas à (D).



4. Déterminations d'un plan

Propriétés
Un plan peut être déterminé par :
- Une droite (D) et un point A n'appartenant pas à (D) ;
- Deux droites sécantes ;
- Deux droites parallèles non confondues ;
- Trois points non alignés.

Pour s'entraîner : Exercices 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 11

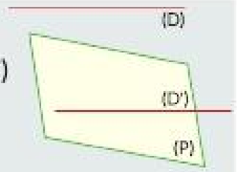
3. PARALLÉLISME DANS L'ESPACE

1. Droites parallèles

Propriété
Si deux droites sont parallèles à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elles.

2. Droite parallèle à un plan

Propriété 1
Une droite (D) est parallèle à un plan (P) si et seulement si elle est parallèle à une droite (D') contenue dans (P).



Propriété 2
Si une droite est parallèle à un plan, alors toute droite parallèle à cette droite est parallèle à ce plan.

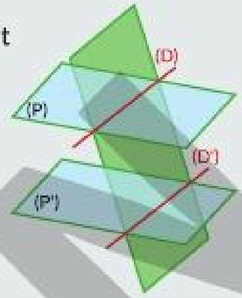
Propriété 3 *Théorème du toit*
Si une droite est parallèle à deux plans sécants, alors elle est parallèle à leur intersection.

Propriété 4
Par un point de l'espace, il passe une et une seule droite parallèle à une droite donnée.

3. Plans parallèles

Propriété 1

Deux plans sont parallèles si et seulement si l'un contient deux droites sécantes et parallèles à l'autre.



Propriété 2

Deux plans parallèles à un même troisième sont parallèles entre eux.

Propriété 3

Par un point de l'espace, il passe un plan et un seul parallèle à un plan donné.

Propriété 4

Si deux plans sont parallèles, alors tout plan sécant à l'un est sécant à l'autre et les droites d'intersection sont parallèles.

Propriété 5

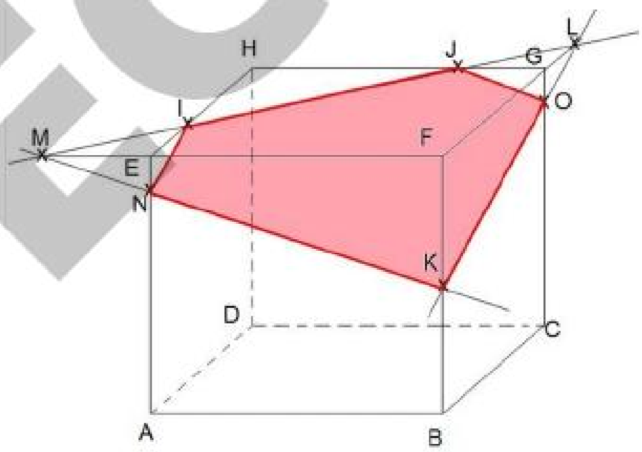
Si deux plans sont parallèles :

- Toute droite parallèle à l'un est parallèle à l'autre ;
- Toute droite sécante à l'un est sécante à l'autre.

Pour s'entraîner : Exercices 10 ; 11

➲ Section plane d'un solide

Exemple de construction d'une section plane d'un solide



Pour s'entraîner : Exercices 12 ; 13

QUESTION 1 — Comment justifier qu'une droite est parallèle à un plan ?

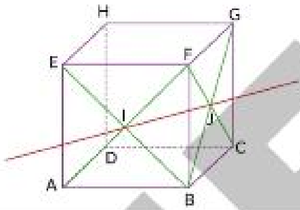
Méthode

Pour justifier qu'une droite (IJ) est parallèle à un plan (ABC), on prouve l'existence d'une droite du plan (ABC) parallèle à la droite (IJ) et on conclut que : (IJ) // (ABC).

Exercice

Dans le cube, on appelle I et J les centres des faces ABFE et BCGF.

Démontre que : (IJ) // (ABC).



Solution commentée

On se place dans le plan (AFC). I et J sont les milieux respectifs de [AF] et [FC].

Donc d'après le théorème de la droite des milieux, on a : (IJ) // (AC).

Or (AC) est incluse dans le plan (ABC), on a donc : (IJ) // (ABC).

Exercice non corrigé

Reprends la figure ci-dessus.

Démontre que la droite (HG) est parallèle au plan (EAB).

QUESTION 2 — Comment justifier que deux plans sont parallèles ?

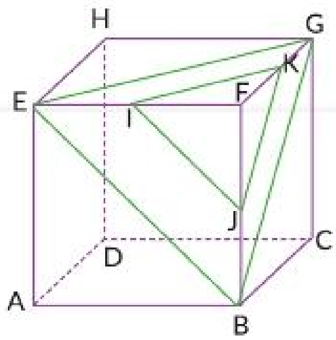
Méthode

Pour justifier que deux plans sont parallèles, on peut prouver l'existence de deux droites secantes de l'un des plans qui sont chacune parallèle à l'autre plan.

Exercice

Dans le cube ABCDEFGH, on considère I le milieu de [EF], J celui de [BF] et K celui de [FG].

Démontre que les plans (EBG) et (IJK) sont parallèles.



Solution commentée

Considérons le triangle EFG. I et K sont les milieux respectifs des côtés [EF] et [FG].

On a donc : (IK) // (EG) d'après le théorème de la droite des milieux. Or (EG) est incluse dans le plan (EBG).

On en déduit : (IK) // (EBG).

De la même façon, on démontre que : (IJ) // (EBG).

(IK) et (IJ) étant deux droites sécantes du plan (IJK). On a donc : (IJK) // (EBG).

Exercice non corrigé

Reprends la figure ci-dessus

Justifie que les plans (BGE) et (AHC) sont parallèles.

QUESTION 3

Comment déterminer l'intersection de deux plans sécants (P) et (P') selon une droite (D) ?

Méthodes

Pour déterminer l'intersection de 2 plans (P) et (P') sécants selon une droite (D), on peut utiliser l'une des méthodes suivantes :

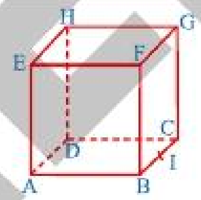
1. Si on trouve 2 points A et B distincts appartenant tous deux à (P) et (P'), alors (D) = (AB).
2. Si on trouve un point A commun aux deux plans et une droite (Δ) de l'un parallèle à l'autre, alors (D) est la parallèle à (Δ) passant par A : théorème du toit.
3. Si on trouve un point A commun aux deux plans et une droite (Δ) intersection de et d'un plan parallèle à (P'), alors (D) est la parallèle à (Δ) passant par A.

Exercice

Dans le cube ci-contre, I appartient à l'arête [BC].

Détermine l'intersection :

1. Des plans (ABC) et (HGI).
2. Des plans (EFI) et (HGI) .



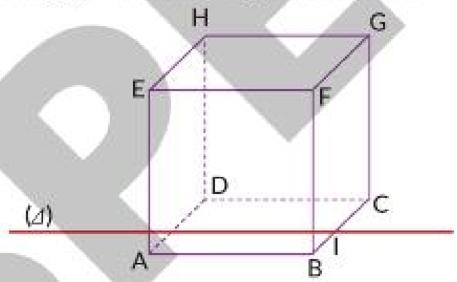
Solution commentée

1. Intersection des plans (ABC) et (HGI)

En utilisant la méthode 3) , on obtient :

- ✓ I est un point commun aux deux plans (ABC) et (HGI).
- ✓ Les plans (EFG) et (ABC) sont parallèles.
- ✓ De plus, l'intersection des plans (EFG) et (HGI) est la droite (HG).

Donc l'intersection des plans (ABC) et (HGI) est la droite (Δ) parallèle à (HG) passant par I.



2. Intersection des plans (EFI) et (HGI)

En utilisant la méthode 2), on obtient :

On reconnait les hypothèses du « théorème du toit ». On a :

- ✓ I est un point commun aux deux plans (EFI) et (HGI).
- ✓ Les droites (EF) et (HG) sont parallèles.
- ✓ De plus, la droite (EF) est incluse dans le plan (EFI) et la droite (HG) est incluse dans le plan (HGI).

D'où les plans (EFI) et (HGI) sont sécants selon une droite (Δ') passant par le point I.

Ainsi, d'après le théorème du toit, les trois droites (Δ'), (EF) et (HG) sont parallèles.

(Δ') est donc la parallèle à (EF) passant par I

(Δ') = (Δ).

Exercice non corrigé

ABCD est un tétraèdre. I est un point de l'arête [AB] et J est un point de l'arête [CD].

Justifie que chacun des points I et J appartient à la fois aux plans (AJB) et (CID).

Déduis-en l'intersection des plans (AJB) et (CID).

QUESTION 4

Comment déterminer l'intersection d'une droite (D) et d'un plan (P) ?

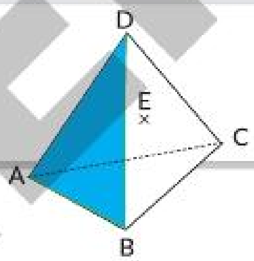
Méthode

Pour déterminer l'intersection d'une droite (D) et d'un plan (P), on peut utiliser l'une des méthodes suivantes :

1. On trouve une droite (Δ) de (P) coplanaire et sécante avec (D).
   Alors : $(D) \cap (P) = (D) \cap (\Delta)$.
2. (Méthode du plan auxiliaire) : On trouve un plan (P') contenant (D) puis on détermine l'intersection (c'est une droite (Δ)) des plans (P) et (P'). Alors : $(D) \cap (P) = (D) \cap (\Delta)$.

Exercice

ABCD est un tétraèdre. E est un point de la face (BCD).
Détermine l'intersection de la droite (CE) et du plan (ABD).



Solution commentée

En utilisant la méthode du plan auxiliaire, on obtient :

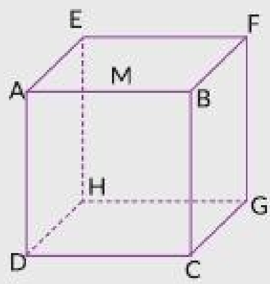
- La droite (CE) est incluse dans le plan (BCD) .
- On a : $(ABD) \cap (BCD) = (BD)$.
- ✓ Donc $(CE) \cap (ABD) = (CE) \cap (BD) = \{M\}$.

Exercice non corrigé 1

Sur la figure ci-contre, ABCDEFGH est un cube, M est un point de l'arête [AB]. Le plan (FHM) coupe la droite (DA) en P.

Démontre que les droites (FH) et (MP) sont parallèles.

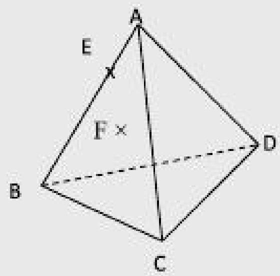
Construis le point P.



Exercice non corrigé 2

On considère le tétraèdre ci-contre. E est un point de l'arête [AB], et F est un point de la face (ABC).On suppose que la droite (EF) n'est pas parallèle au plan (BCD).

Construis l'intersection I de la droite (EF) et du plan (BCD).

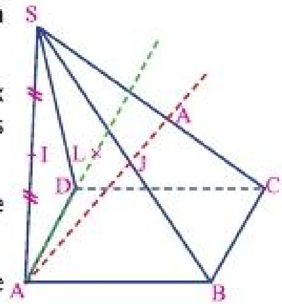


Exercices de fixation

Notions de droite et de plan

1 SABCD est une pyramide à base rectangulaire.

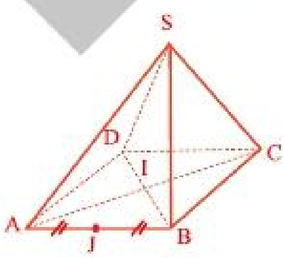
- I et J sont les milieux respectifs des segments [SA] et [SB].
- L est un point de la droite (AD).
- K est un point de la droite (AJ).



Recopie le numéro de l'affirmation suivi de (V) si elle est vraie ou ou de (F) si elle est fausse.

N°	Affirmations
1	Le point K appartient à l'arête [SC].
2	Le point I appartient au plan (SAB).
3	Les points L, I et J sont alignés.
4	Le point L appartient au plan (SAB).
5	Le point L appartient au plan (ABC).
6	Les points I, J, K et B sont coplanaires.
7	Les droites (LB) et (AC) sont coplanaires.
8	Les droites (IJ) et (DC) sont coplanaires.
9	Les droites (IJ) et (AB) sont parallèles.
10	Les droites (JK) et (BC) sont parallèles.
17	Les droites (AJ) et (CJ) sont sécantes.

2 La figure ci-contre SABCD est une pyramide régulière. I est le centre du carré ABCD et J est le milieu du segment [AB].



Dans chacun des cas suivants, dis si les éléments donnés déterminent un plan. Si oui, indique d'autres points de la figure qui appartiennent à ce plan.

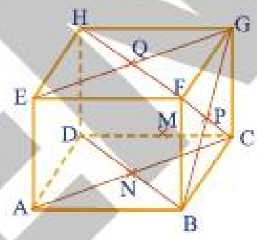
a. (AD) et (BC) ; b. (AJ) et (SB) ; c. I, B et D ; d) J, D et S

e). (SD) et I ; f) (AD) et (BS) ; g. (AJ) et C ; h) (AC) et I.

3 Le parallélépipède rectangle ABCDEFGH a été représenté en perspective cavalière.

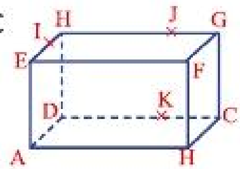
N,P et Q sont les centres respectifs des faces ABCD, BCGF et EFGH. M est le milieu de [DC].

Dis si les objets proposés définissent ou non un plan, et si oui, nomme-le.



1. Le point A et la droite (CD).
2. Le point E et la droite (EF).
3. Les points N, M et P.
4. Les points E, Q et G.
5. Les droites (HF) et (BN).
6. Les droites (DM) et (BN).

4 Soit A et B deux points d'un plan (P) et C un point extérieur à (P).



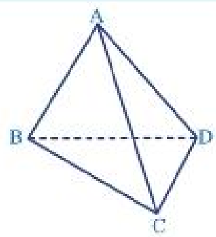
a) Justifie que les points A, B et C définissent un plan.

b) Soit D, un point du plan (ABC) tel que la droite (DC) coupe le plan (P) en I.

Dis si les points A, B et I définissent un plan. Justifie ta réponse.

Positions relatives

5 La figure ci-contre est un tétraèdre.



a) Nomme deux droites coplanaires.

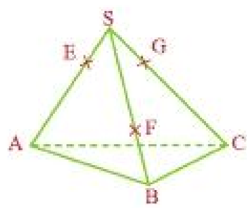
b) Nomme deux droites non coplanaires.

c) Cite deux droites sécantes.

6 Écris le numéro de l'affirmation suivi de V si l'affirmation est vraie ou de F, si l'affirmation est fausse.

1. Deux points distincts sont toujours coplanaires.
2. Si les droites (D) et (Δ) ne sont pas parallèles dans l'espace, alors elles sont sécantes.

7 On considère le tétraèdre SABC ci-contre. Les points E, F et G sont respectivement sur les arêtes [SA], [SB] et [SC]. Recopie le numéro de chaque affirmation suivi de (V) si l'affirmation est vraie ou de (F) si l'affirmation est fausse.

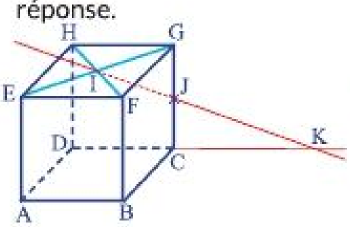


1. Les droites (EF) et (FG) sont coplanaires.
2. Les points E, F et G sont alignés.
3. Les droites (FG) et (BC) sont coplanaires.
4. Les droites (EF) et (SC) sont coplanaires.

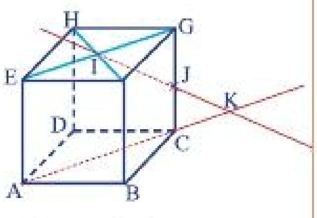
8 ABCDEFGH est un cube, I est le centre de la face EFGH et J le milieu de [GC]. On cherche à déterminer K, point d'intersection de la droite (IJ) et du plan (ABD).

L'une de ces deux constructions est correcte.

Recopie le numéro de celle qui est correcte et justifie ta réponse.



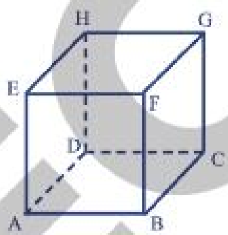
Construction 1



Construction 2

9 La figure ABCDEFGH ci-dessous est un cube.

En dehors des arêtes du cube et en utilisant les points de la figure, cite :



a) Deux droites coplanaires,

b) Deux droites non coplanaires,

c) Deux droites parallèles,

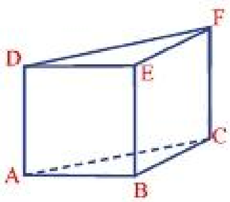
d) Deux plans parallèles,

e) Deux plans sécants,

f) Une droite sécante à un plan,

g) Une droite parallèle à un plan.

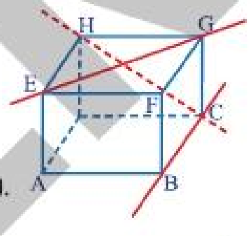
10 (D), (D') et (D'') désignent des droites ; (P), (P') et (P'') désignent des plans. Pour des éventuels contre-exemples, on s'appuiera sur le prisme droit ABCDEF ci-contre.



Reproduis le tableau suivant et, pour chacune des affirmations, réponds par (V) si elle est vraie ou par (F) si elle est fausse.

N°	Affirmations
1	Si (D)//(D') et (D') // (D'') alors (D), (D') et (D'') sont coplanaires.
2	Si (D) // (P) et (P) // (D') alors (D) // (D').
3	Si (D) // (P) et (D) // (P') alors (P) // (P').
4	Si (D) et (D') sont coplanaires et (D') et (D'') sont coplanaires alors (D) et (D'') sont coplanaires.

11 Dans le pavé droit ABCDEFGH ci-dessous, donne la position relative :



a) des droites (EG) et (BC).

b) des plans (ABF) et (BCG).

c) de la droite (CH) et du plan (ABD).

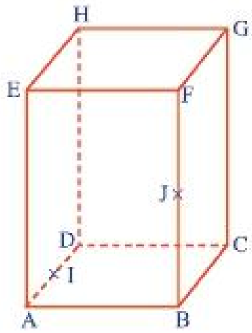
Section plane

12 ABCDEFGH est un pavé droit.

I est un point de l'arête [EH], J un point de l'arête [HG] et K un point de l'arête [DC].

1. Construit l'intersection du plan (IJK) avec chaque face du pavé ABCDEFGH.
2. Déduis de la question précédente la section du plan (IJK) avec le pavé ABCDEFGH.

13 La figure ABCDEFGH ci-dessous est un cube. I est le milieu de [AD] et J est le milieu de [FB].



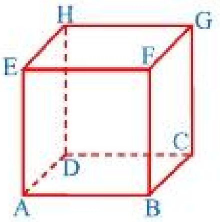
a) Reproduis la figure et construis la droite (D), intersection des plans (HIJ) et (BCG).

b) On note N le point d'intersection de la droite (D) avec l'arête [FG]. Construis le point M, intersection du plan (HIJ) et de l'arête [AB].

c) Termine la trace de la section du cube par le plan (HIJ).

Exercices de renforcement / approfondissement

14 La figure ci-contre ABCDEFGH est un cube. En dehors des arêtes du cube et en utilisant les points de la figure, cite :

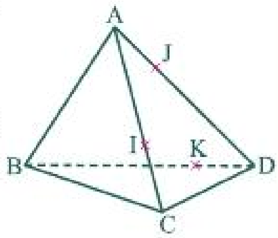


a) Deux droites coplanaires.

b) Deux droites non coplanaires.

15 Dans le tétraèdre ABCD ci-contre, on donne les points

I, J et K placés respectivement sur les arêtes [AC], [AD] et [BD].



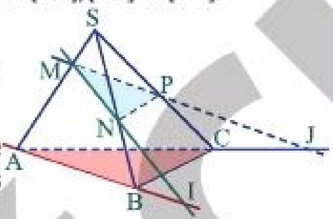
Complète chacune des phrases suivantes par sécante ou parallèle.

a) La droite (AK) est ... au plan (BIJ).

b) La droite (IJ) est ... au plan (ADC).

16 SABC est tétraèdre. Les points M, N et P sont respectivement sur les arêtes [SA], [SB] et [SC].

On suppose que les plans (ABC) et (MNP) ne sont pas parallèles.



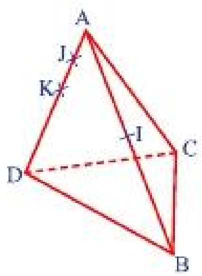
Représente la droite d'intersection des plans (ABC) et (MNP).

17 Soit (P) et (P') deux plans parallèles.

Reproduis le tableau suivant et, pour chacune des affirmations, réponds par (V) si elle est vraie ou par (F) si elle est fausse.

N°	Affirmations
1	Toute droite de (P) est parallèle à (P').
2	Toute droite de (P) est parallèle à toute droite de (P').
3	Toute droite de (P) et toute droite de (P') sont coplanaires.

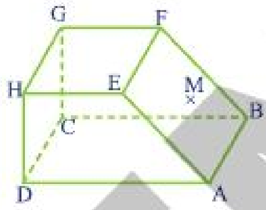
18 Soit ABCD un tétraèdre.
I est le milieu de [AB], K est le milieu de [AD] et J est le milieu de [AK].
Dis si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en justifiant.



a. La droite (IJ) est sécante au plan (DBC).

b. Les plans (IKC) et (ABD) sont sécants.

19 La figure ci-dessous ABCDEFGH est un prisme droit dont la base est un trapèze.
M est un point de la face ABFE.



a) Reproduis la figure et construis la droite d'intersection des plans (DCM) et (ABE).

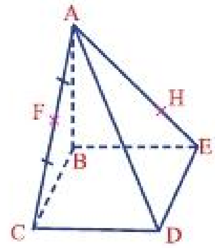
b) Déduis de la question précédente la trace de la section du prisme par le plan (DCM).

c) Construis la droite (Δ), intersection des plans (HAB) et (DCM).

d) Précise la position relative de la droite (Δ) par rapport aux droites (DC) et (AB).

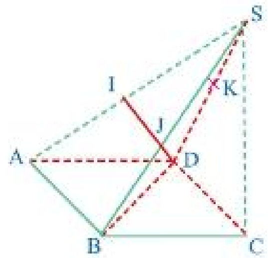
20 ABCDE est une pyramide régulière à base carrée.

F est le milieu de [AC] et H est le point de [AE] tel que : $AH = \frac{3}{4}AE$.



Démontre que les droites (FH) et (CE) sont sécantes.

21 SABCD est une pyramide dont la base est un quadrilatère.



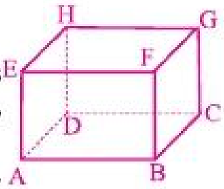
Les points I, J et K sont respectivement sur les arêtes [SA], [SB] et [SD] tels que les droites (IJ) et (KJ) coupent le plan (ABC).

1. Reproduis la figure ci-dessus.
2. Détermine le point M, intersection de la droite (IJ) et du plan (ABC).
3. Détermine le point N, intersection de la droite (JK) et du plan (ABC).

22 On considère le cube ABCDEFGH ci-contre. Les points I et J sont les milieux respectifs des arêtes [AE] et [BF].

Démontre que les droites (IH) et (JG) sont parallèles.

23 ABCD est un tétraèdre.



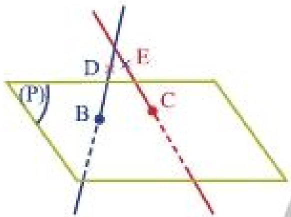
Les points M, P et Q sont trois points respectivement des arêtes [AB], [AC] et [AD].

Les droites (MP) et (BC) sont parallèles.

Les droites (PQ) et (CD) sont parallèles.

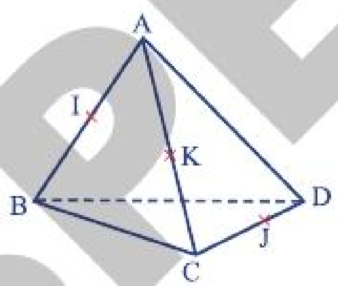
1. Fais une figure.
2. Démontre que la droite (MQ) est parallèle au plan (BCD).

24 On donne la figure ci-dessous où seuls les points B et C sont dans le plan (P).



1. En utilisant les points de la figure, désigne un plan qui contient la droite (DE).
2. Détermine l'intersection de la droite (DE) et du plan (P).

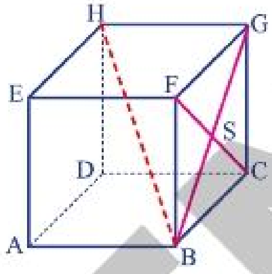
25 On considère le tétraèdre ABCD ci-dessous.



Les points I, J et K sont respectivement les milieux des arêtes [AB], [CD] et [AC].

1. Démontre que les droites (IJ) et (AD) ne sont pas parallèles.
2. Démontre que les points I, J et K ne sont pas alignés.

26 ABCDEFGH est un cube comme l'indique la figure ci-dessous.



S est le centre du carré BCGF.

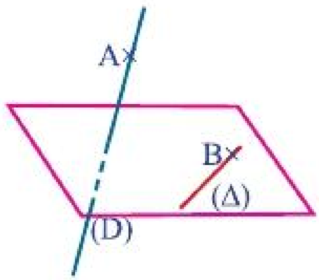
Détermine le point d'intersection de la droite parallèle à la droite (BH) passant par le point S et du plan (FEH).

27 Soit un tétraèdre SABC. I et J sont les milieux respectifs des arêtes [SB] et [SC].

1. Fais une figure.
2. Détermine la droite d'intersection des plans (AJB) et (AIC).

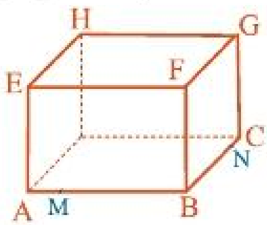
28 Soit (D) et (Δ) deux droites non coplanaires.

A est un point de (D) et B un point de (Δ) comme l'indique la figure ci-dessous.



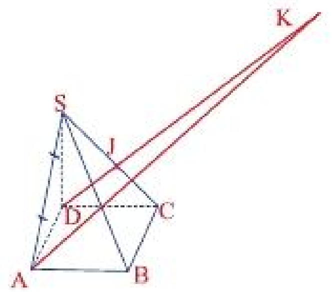
Détermine l'intersection des plans définis par A et (Δ) d'une part, B et (D) d'autre part.

29 Dans le pavé droit ABCDEFGH ci-dessous, M est un point de l'arête [AB] et N un point de l'arête [BC].



Détermine la droite d'intersection des plans (FMN) et (BEG).

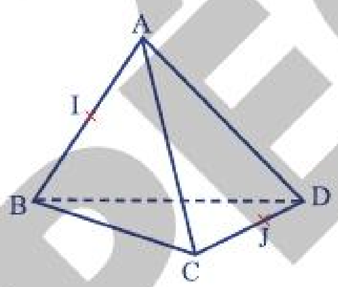
30 SABCD est une pyramide de sommet S et de base carrée.



I et J sont les milieux respectifs des arêtes [SB] et [SC].

1. Démontre que les droites (AD) et (IJ) sont parallèles.
2. Dans le plan (ADI), les droites (AI) et (DJ) se coupent au point K.
   a) Démontre que le point K appartient aux plans (SAB) et (SDC).
   b) Détermine la droite d'intersection des plans (SAB) et (SDC).
   c) Déduis-en que la droite (SK) est parallèle aux droites (AB) et (DC).

31 On considère le tétraèdre ABCD comme l'indique la figure ci-dessous.

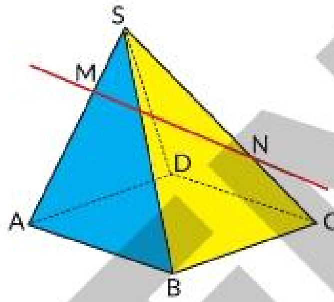


Les points I et J sont respectivement sur les arêtes [AB] et [CD].

1. Donne, sans démonstration, les positions relatives de la droite (IJ) par rapport à (AC), puis par rapport à (CD).
2. a) Trouve deux points communs aux plans (ABJ) et (CDI).

   b) Déduis-en l'intersection de ces deux plans.
3. Détermine l'intersection des plans (ABJ) et (ACD).

32 SABCD est une pyramide. M est un point de l'arête [SA] et N un point de l'arête [SC].



Représente l'intersection de la droite (MN) avec le plan (ABC). (On pourra utiliser le plan (SAC)).

33 ABCDE est une pyramide, dont la base BCDE est un quadrilatère tel que les droites (BC) et (DE) ne sont pas parallèles.

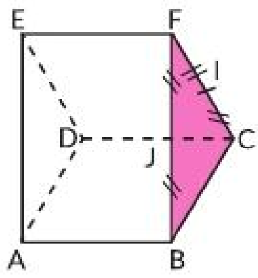
I est le milieu de [AB] et J celui de [AC], K est un point du segment [AD] tel que : $AK = \frac{3}{4}AD$.

1. a) Détermine la position relative des droites (IJ) et (BC).

   b) Détermine la position relative des droites (JK) et (CD).
2. a) Détermine l'intersection de la droite (JK) et du plan (BCD).

   b) Détermine l'intersection des plans (ABC) et (ADE).

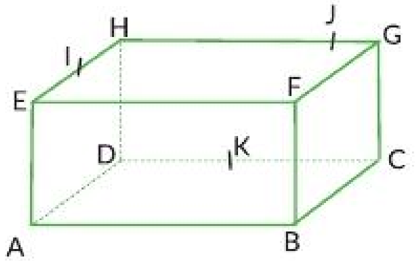
34 Soit ABCDEF un prisme droit à base triangulaire représenté ci-dessous.



Soient I et J les milieux respectifs de [CF] et [BF].

a. Construis la droite (Δ), intersection du plan (EIJ) et du plan (ABCD).
b. Justifie que (BC) est parallèle à (Δ).

35 ABCDEFGH est le pavé droit représenté ci-dessous.



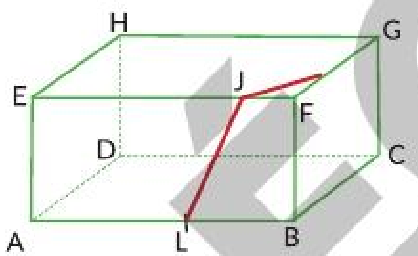
I est un point de l'arête [EH], J un point de l'arête [HG] et K un point de l'arête [DC].

Construis l'intersection du plan (IJK) avec chaque face du pavé ABCDEFGH. Déduis-en la section du plan (IJK) et du pavé ABCDEFGH.

36 ABCDEFGH est le parallélépipède rectangle représenté ci-dessous.

J, K, L appartiennent à [EF], [FG] et [AB].

Construis la section de ABCDEFGH par le plan (JKL).



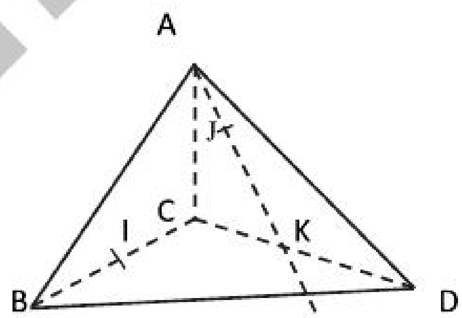
37 SABCD est une pyramide de sommet S dont la base ABCD est un parallélogramme. M et N sont des points respectifs des arêtes [SC] et [SB] tels que les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

1. Fais une figure.
2. Démontre que les droites (AD) et (MN) sont parallèles.
3. Dans le plan (ADM), les droites (AN) et (DM) se coupent en un point noté P.
   a) Démontre que P appartient à chacun des plans (SAB) et (SDC).
   b) Détermine la droite d'intersection des plans (SAB) et (SDC).
   c) Déduis-en que (SP) est parallèle à (AB).

38 ABCD est un tétraèdre. M, N et P sont respectivement des points des arêtes [DB], [DC] et [AC] tels que M, N et P ne sont pas les milieux de ces arêtes.

1. Fais une figure.
2. a) Construis l'intersection des plans (MNP) et (BCD).
   b) Construis l'intersection des plans (MNP) et (ACD).
3. a) Construis dans le plan (BCD), l'intersection R des droites (BC) et (MN).
   b) Déduis-en l'intersection des plans (MNP) et (ABC).
4. Détermine et trace l'intersection des plans (MNP) et (ABD).
5. Construis alors la section plane du tétraèdre ABCD par le plan (MNP).

39 Sur la figure ci-dessous, ABDC est un tétraèdre.

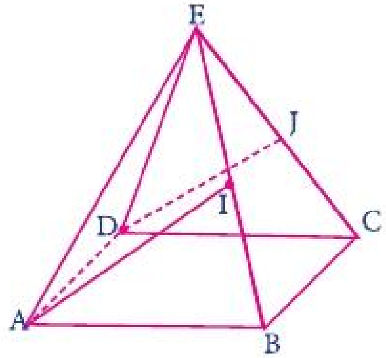


I est le milieu de [BC], J est un point de la face (ACD) autre que A . K est le point d'intersection des droites (AJ) et (CD).

Construis la section du tétraèdre ABCD par le plan (AIJ).

Situations complexes

40 Lors d'une sortie d'étude, les élèves d'une classe de seconde C observent une case en forme pyramidale de base carrée.



Le propriétaire a soutenu la case avec deux planches [AI] et [DJ] comme l'indique la figure ci-dessus. (I et J sont les milieux respectifs des cotés [EB] et [EC]).

Koffi, un élève de la classe, affirme que :

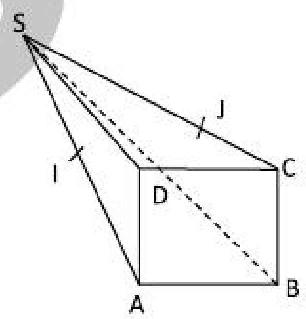
Les points A,D ,I et J sont coplanaires et que les plans (AEB) et (DEC) sont sécants. Revenus en classe, les camarades de KOFFI décident de vérifier ces affirmations. Ayant des difficultés, ils s'adressent à toi.

Propose leur une solution argumentée.

41 Lors d'une excursion à la plage, des élèves de la promotion Seconde d'un établissement découvrent le filet de pêche d'un pêcheur traditionnel.

Ce filet se présente sous la forme d'une pyramide SABCD régulière à base carrée comme l'indique la figure ci-dessous où I est le milieu de [SA] et J est tel que :

$SJ = \frac{3}{4} SC$.

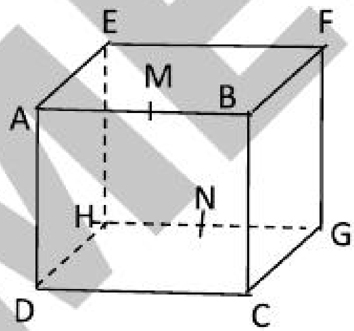


Constatant que c'est une figure de l'espace, ils décident d'agrémenter leur sortie en réfléchissant sur cette figure.

Tu es donc associé à cette réflexion.

Démontre que les plans (SIJ) et (ABC) sont sécants.

42 Lors d'une visite au port autonome de San-Pedro, les élèves d'une classe de 2de C observent un conteneur en forme d'un cube comme l'indique la figure ci-dessous.



(M est le milieu de [AB] et N est le milieu de [GH]).

Le propriétaire du conteneur voulant l'ouvrir se rend compte qu'il a égaré la clé.

Vu le contenu du conteneur, le propriétaire précise qu'il faut le sectionner suivant le plan (DFM) pour ne pas endommager des marchandises.

Safi, une élève présente sur les lieux, affirme que le point N appartient à la fois aux plans (EFG) et (DFM).

Les autres élèves se proposent de vérifier l'affirmation de leur camarade et de proposer une figure au propriétaire pour la section du conteneur.

1. Vérifie l'affirmation de Safi, puis construis l'intersection des plans (DFM) et (EFG).

2. Propose en argumentant, une figure de cette section.

6 FONCTIONS POLYNÔMES ET FONCTIONS RATIONNELLES

Commentaire de la Leçon

L'histoire des polynômes se confond avec celle de l'algèbre et celle de la résolution d'équations. Ils sont les outils privilégiés utilisés pour résoudre des problèmes tels que la résolubilité des équations, la constructibilité des nombres à la règle et au compas et le dernier théorème de Fermat.

En Europe, la recherche d'une symbolique se développe. Michael Stifel (1487-1567) utilise une inconnue privilégiée qu'il répète autant de fois qu'il le faut pour indiquer le degré. Cohabitent à cette époque, plusieurs symboles pour le plus (p ou +) et le - (m ou -) et le = (=, [, S). En 1484, Nicolas Chuquet invente l'exposant : l'inconnue à la puissance 5 s'écrira I5. Cette notation sera reprise par Bombelli, Simon Stevin et Descartes.

Viète (1540-1603) développe le calcul littéral, représente les inconnues par des voyelles et les paramètres par des consonnes et introduit les notations de la somme, du produit, du quotient, et de la puissance : B in A quadratum, plus D in A, aequari C se traduit ensuite par Descartes par : $bx^2 + dx = c$.

Tout est alors en place pour que se développe l'étude générale des polynômes.

La notion de polynômes et de fractions rationnelles n'est pas nouvelle pour l'élève qui arrive en classe de seconde. En effet, ces notions sont déjà connues en classe de troisième dans la leçon « calcul littéral ». L'enseignant profitera de ces pré-acquis pour renforcer les techniques opératoires sur les polynômes et les fractions rationnelles.

On ne distinguera pas, au niveau de la seconde, polynôme, fonction polynôme et expression algébrique du polynôme. Il en sera de même pour fonction rationnelle et fraction rationnelle.

Au niveau des fractions rationnelles $\frac{f(x)}{g(x)}$, on se limitera aux cas où les fonctions f et g sont deux polynômes de degré inférieur ou égal à 2. Les polynômes du second degré seront étudiés. Toutefois, l'utilisation du discriminant pour factoriser ou résoudre des équations est réservée pour la classe de première.

Habiletés et Contenus

- **Connaître** la définition d'un polynôme ; la définition du degré d'un polynôme ; la définition d'une fraction rationnelle ; la définition du zéro d'un polynôme ; la propriété relative au produit de polynômes ; la propriété relative à la somme de polynômes ; la propriété relative à l'égalité de deux polynômes ; les produits remarquables ; le théorème fondamental relatif à la factorisation par $x-\alpha$; les différentes écritures d'une fraction rationnelle.
- **Reconnaître** le coefficient d'un polynôme ; la forme factorisée d'un polynôme.
- **Vérifier** qu'un nombre réel donné est zéro d'un polynôme.
- **Effectuer** la somme de deux polynômes ; le produit de deux polynômes.
- **Ecrire** la forme canonique d'un polynôme du second degré.
- **Factoriser** un polynôme en utilisant les égalités remarquables ; un polynôme du second degré en utilisant la forme canonique ; par $x - a$ (a étant un zéro) en utilisant la méthode coefficients indéterminés ou la méthode de la division euclidienne.
- **Étudier** le signe d'un polynôme du second degré (en utilisant une expression déjà factorisée).
- **Transformer** les fractions rationnelles par la méthode d'identification.
- **Traiter une situation** faisant appel aux polynômes ou aux fractions rationnelles.

Situation d'Apprentissage

Pour être sélectionné à participer à un tour cycliste, des coureurs doivent parcourir un circuit avec une vitesse moyenne (aller-retour) supérieure ou égale à 28 km/h.

Un coureur parcourt ce circuit à la vitesse de 35 km/h à l'aller. Fatigué, il te demande à quelle vitesse minimale il doit faire le trajet retour pour qu'il soit sélectionné. Tu décides d'effectuer avec tes camarades de classe des recherches sur la question.

Activité 1 Notion de polynôme

On donne les expressions suivantes dans lesquelles x est un nombre réel :

$P(x) = 5x$; $Q(x) = -9x^2$;

$R(x) = 2x^3$;

$S(x) = 5$ et $T(x) = 7x^4$.

On pose :

$A(x) = P(x) + R(x)$;

$B(x) = S(x) + Q(x) + R(x)$ et

$C(x) = T(x) + P(x) + S(x)$.

1. Calcule : $A(x)$.
2. Calcule : $B(x)$.
3. Calcule : $C(x)$.

Récapitulons

$Q(x) = -9x^2$ est un monôme. -9 est le coefficient du monôme $Q(x)$ et 2 est son degré.

$P(x)$, $R(x)$, $S(x)$ et $T(x)$ sont des monômes.

$A(x)$ est un polynôme. C'est la somme de plusieurs monômes.

$B(x)$ et $C(x)$ sont aussi des polynômes.

Exercice de fixation

1 Écris dans ton cahier la lettre de chaque affirmation suivie de V si l'affirmation est vraie ou de F si l'affirmation est fausse.

a) $-4x^3$ est un polynôme.

b) $\dfrac{4}{x^2}$ est un monôme.

c) $2 - x$ est un monôme.

d) $x^6 - 5 + \dfrac{5}{3}x$ est un polynôme.

e) $\dfrac{4}{3x} - 5 + x^2$ n'est pas un polynôme.

Activité 2 Propriété

On donne les polynômes P et Q définis par :

$P(x) = 2x + 3x^2 + 7x - 15x - x^2 + 6x^3$ et

$Q(x) = 3x^2 - 8x + 4 - 23x^2 + 12x + 5x^3$.

1. Mets $P(x)$ et $Q(x)$ sous la forme $a + bx + cx^2 + dx^3$, $(d \neq 0)$.
2. Trouve une autre écriture de $P(x)$ et $Q(x)$ sous la forme : $dx^3 + cx^2 + bx + a$.
3. Dis ce que tu remarques.

Récapitulons

Les polynômes P et Q s'écrivent de façon unique sous la forme $a + bx + cx^2 + dx^3$ $(d \neq 0)$.

3 est appelé le degré du polynôme P et on note: $d°P = 3$.

Cette écriture unique $a + bx + cx^2 + dx^3$ est appelée la forme réduite du polynôme suivant les puissances croissantes de x.

Lorsque les polynômes P et Q sont écrits sous la forme $dx^3 + cx^2 + bx + a$. On parle de la forme réduite suivant les puissances décroissantes de x.

a est le terme contant ;

bx est le terme de degré 1 (si b est non nul) ;

cx^2 est le terme de degré 2 (si c est non nul) ;

dx^3 est le terme de degré 3 (si d est non nul).

Exercices de fixation

2 Développe, réduis et ordonne suivant les puissances décroissantes de x.

a) $2x^3 - 3x^2 - x(1 - x + x^2)$.

b) $(2x - 1)(x^2 - 5) - 4x$.

c) $(2x^2 + x - 1)^2$.

3

1. On donne les polynômes f et g telles que :

$f(x) = (2x^2 - 3)^2$ et $g(x) = (2x^2 + 3)^2$.

Développe, réduis et ordonne suivant les puissances croissantes de x, $f(x) + g(x)$ et $f(x) - g(x)$.

2. Développe, réduis et ordonne suivant les puissances croissantes de x les polynômes A, B et C tels que :

$A(x) = 4x^3 + 5x^2 - 7 + (3x^3 + x^2 - 5x - 1)$;

$B(x) = x\sqrt{2}\,(2x + 1)(2 - x)$;

$C(x) = x(2x^2 - 6) - 3(x - 3)$.

3. Développe, réduis et ordonne suivant les puissances croissantes de x les polynômes Q et R tels que : $Q(x) = x^2(3 - x) + (-x + 2)(x - 5)$;

$R(x) = (x - 1)^3 + (x - 1)^2$.

Activité 3 Égalité de deux polynômes

On donne les polynômes R et S tel que :
$R(x) = x^3 - 4x + 7$ et $S(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 - 4x + d$.

1. Détermine les nombres réels a, b, c et d pour que $R(x)$ soit égal à $S(x)$.
2. Conjecture les conditions pour que deux polynômes quelconques soient égaux.

Récapitulons

$R(x)$ et $S(x)$ sont égaux si et seulement si ils ont le même degré et les coefficients des termes de même degré sont égaux.

Exercice de fixation

4 On considère les polynômes P et Q tels que : $P(x) = ax^2 + bx + c$ et $Q(x) = 2x^2 + 5x - 3$.

1. Détermine les trois nombres réels a, b et c tels que : $P(x) = Q(x)$.
2. Justifie qu'il existe trois nombres réels a, b et c tels que : $3x^2 - 5x + 1 = a(x+1)(x+2) + b(x+1) + c$.

Activité 4 Somme et produit de polynômes

On donne les polynômes P, Q et R tels que : $P(x) = -3 + 2x^2 + 7x^3$; $Q(x) = 25 + x + 8x^2 - 5x^3$ et $R(x) = 4 + 5x^3$.
On pose : $A(x) = P(x) + Q(x)$; $B(x) = Q(x) + R(x)$; $C(x) = P(x) \times R(x)$.
1. Calcule $A(x)$, $B(x)$ et $C(x)$.
2. a) Justifie que $A(x)$, $B(x)$ et $C(x)$ sont des polynômes. b) Précise le degré de chacun de ces polynômes.
   c) Compare d°C et d°P + d°R.
3. On considère le polynôme : $5 - 2x^2 + 4x^3 - 4x^3 - 5 + 2x^2$.
Dis si oui ou non tu peux donner un degré à ce polynôme.

Récapitulons

- La somme de polynômes est un polynôme.
- Le degré de la somme de deux polynômes est toujours inférieur ou égal au plus grand degré parmi les deux polynômes lorsque cette somme est non nulle.
- Le produit de polynômes est un polynôme.
- Le degré du produit de deux polynômes est égal à la somme des degrés des polynômes.
- Le polynôme nul n'a pas de degré.

Exercice de fixation

5 On pose : $H(x) = -2x^2 + 5x - 2$ et $G(x) = x^3 - 2x$.

1. Détermine la forme réduite et ordonnée du polynôme $H(x) + G(x)$ suivant les puissances croissantes de x.
2. Détermine la forme réduite et ordonnée du polynôme $H(x) \times G(x)$ suivant les puissances décroissantes de x.

Activité 5 Égalités remarquables

a et b sont des nombres réels.

Développe :

1. $(a+b)^2$
2. $(a-b)^2$
3. $(a+b)(a-b)$
4. $(a+b)^3$
5. $(a-b)^3$
6. $(a-b)(a^2+ab+b^2)$
7. $(a+b)(a^2-ab+b^2)$

Récapitulons

$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$; $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;
$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$;
$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 + b^3$;
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;
$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

Exercice de fixation

6 Développe et ordonne les polynômes ci-dessous, suivant les puissances décroissantes de x.
$(x+3)^3$; $(2x-1)^3$; $(x-2)(x^2+2x+4)$.

Activité 6 Zéro d'un polynôme

On donne le polynôme P défini par :
$P(x) = 2x^3 + 5x^2 - 4x - 3$

1. Calcule : $P(-3)$; $P(0)$; $P(1)$; $P(3)$ et $P\left(-\dfrac{1}{2}\right)$.
2. Identifie des nombres réels a pour lesquels $P(a) = 0$.

Récapitulons

- $P(-3) = 0$; -3 est appelé zéro du polynôme P. 1 est aussi un zéro du polynôme P.
- Tout nombre réel a tel que $P(a) = 0$ est un zéro du polynôme P.

Exercice de fixation

7 Justifie que 1 est un zéro du polynôme P tel que $P(x) = 4x^3 - 5x^2 + 3x - 2$.

Activité 7 Théorème fondamental de la factorisation

On donne le polynôme P défini par :
$P(x) = 2x^3 + 5x^2 - 4x - 3$ et a un nombre réel.

1. Démontre l'existence d'un polynôme Q tel que : $P(x) - P(a) = (x-a)Q(x)$
2. On suppose que a est un zéro de $P(x)$
   a) Démontre que le polynôme Q est tel que : $P(x) = (x-a)Q(x)$.
   b) Détermine le degré de Q en fonction du degré de P.
3. On suppose qu'il existe un polynôme Q tel que $P(x) = (x-a)Q(x)$
   Démontre que a est un zéro de P.
4. Énonce une propriété à partir de cette activité.

Récapitulons

a est un zéro de $P(x)$ si et seulement si il existe un polynôme $Q(x)$ tel que : $P(x) = (x-a)Q(x)$.

Exercice de fixation

8 Justifie que le polynôme P tel que $P(x) = -3x^4 - 6x^3 - x - 2$ est factorisable par : $x + 2$.

Activité 8 Méthode des coefficients indéterminés

On donne le polynôme P tel que :
$P(x) = 2x^3 + 5x^2 - 4x - 3$.

1. Justifie que 1 est un zéro de P.
2. Soit le polynôme Q tel que : $Q(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des nombres réels et $P(x) = (x-1)Q(x)$.
   a) Développe $(x-1)Q(x)$.
   b) En utilisant la consigne a), détermine a, b et c.

Récapitulons

La méthode utilisée pour déterminer le polynôme Q est appelée la méthode des coefficients indéterminés.

Exercice de fixation

9 Justifie qu'il existe un polynôme Q tel $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$, puis détermine le polynôme $Q(x)$ dans chacun des cas suivants :

1. $P(x) = 2x^3 + x^2 - 7x + 4$ et $\alpha = 1$;
2. $P(x) = x^5 + 32$ et $\alpha = -2$.

Activité 9 Méthode de la division euclidienne

On te propose de diviser le polynôme $2x^3 + 5x^2 - 4x - 3$ par le polynôme $(x - 1)$.

1. En te basant sur la méthode de la division connue, recopie et remplace les points de suspensions par les expressions algébriques qui conviennent.

$$
\begin{array}{r|l}
2x^3 + 5x^2 - 4x - 3 & x - 1 \\
\cline{2-2}
-(2x^3 - 2x^2) & 2x^2 + \ldots + 3 \\
\cline{1-1}
\ldots \quad & \\
-(\ldots) \quad & \\
\cline{1-1}
3x - 3 & \\
-(3x - 3) & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

2. Propose une méthode pour diviser un polynôme $P(x)$ par un polynôme $Q(x)$.

Récapitulons

Pour diviser deux polynômes, on peut suivre les étapes suivantes :

1. Écrire les termes du dividende et du diviseur suivant les puissances décroissantes de la variable.
2. Diviser les premiers termes du dividende et du diviseur.
3. Placer le résultat de cette division sous le diviseur.
4. Multiplier ce résultat par tous les termes du diviseur.
5. Faire la différence entre le dividende et la nouvelle expression algébrique obtenue.
6. Abaisser les termes restants du dividende à la même hauteur que le résultat de la soustraction.
7. Répéter les étapes 2) à 6), jusqu'à ce que le degré du dividende soit plus petit que celui du diviseur.

Exercice de fixation

10 On considère le polynôme H tel que $H(x) = x^3 - 3x^2 + x + 2$.

Justifie l'existence d'un polynôme K tel que : $H(x) = (x + 2)\,K(x)$.

En utilisant la méthode de la division euclidienne, détermine le polynôme K.

Activité 10 Signe du polynôme : $ax + b$, $(a \neq 0)$

1. Résous l'inéquation $ax + b > 0$.
2. Déduis-en le signe de $ax + b$ sur $\mathbb{R}$.

Récapitulons

Le tableau ci-dessous donne le signe de $ax + b$ sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	Signe de $-a$	0	Signe de a

Exercice de fixation

11 Détermine le signe du polynôme f tel que : $f(x) = -3x + 4$.

Activité 11 Forme canonique d'un polynôme du second degré

On considère le polynôme P défini par :
$P(x) = ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$.

Vérifie que : $P(x) = a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$.

Récapitulons

$a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$ est la forme canonique du polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$.

Exercice de fixation

12 Écris sous sa forme canonique chacun des polynômes P et Q tels que :
$P(x) = x^2 + x - 1$; $Q(x) = 2x^2 + x + 1$.

Activité 12 Factorisation d'un polynôme du second degré

1. On considère le polynôme P défini par : $P(x) = 3x^2 - 15x + 18$.
   a) Écris $P(x)$ sous sa forme canonique.
   b) Factorise si possible $P(x)$.
2. On considère le polynôme T défini par : $T(x) = 2x^2 + 3x + 2$.
   a) Écris $T(x)$ sous sa forme canonique.
   b) Factorise si possible $T(x)$.

Récapitulons

- Certains polynômes ne sont pas factorisables dans $\mathbb{R}$.
- Pour factoriser un polynôme du second degré, on peut utiliser les égalités remarquables ou sa forme canonique.

Exercice de fixation

13 En utilisant la forme canonique, factorise si possible chacun des polynômes f, g et h tels que :

$f(x) = 18x^2 - 12x + 2$; $g(x) = -4x^2 + x + 1$; $h(x) = 2x^2 + 2x\sqrt{2} - 3$.

Activité 13 Signe d'un polynôme du second degré

On donne le polynôme P tel que : $P(x) = -2x^2 + 5x - 2$.

1. Justifie que : $P(x) = -2\,(x-2)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$.
2. Recopie et complète le tableau de signes ci-contre :
3. Déduis de ce tableau, le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de x.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$x-2$		...		...	0	+	
$x-\frac{1}{2}$		...	0	+		...	
$P(x)$		...	0	+	0	...	

Récapitulons

Pour étudier le signe d'un polynôme du second degré, on le factorise (si possible) et on utilise un tableau de signes.

Exercice de fixation

14 Étudie le signe de chacun des polynômes du second degré définis par :
$f(x) = 2x^2 + x - 1$; $g(x) = x^2 + 2x + 2$; $h(x) = x - x^2$.

Activité 14 Fractions rationnelles

On considère les polynômes P et R tels que : $P(x) = 3x^2 + 5x + 7$ et $R(x) = x + 2$.

On pose : $Q(x) = \dfrac{P(x)}{R(x)}$.

Détermine les nombres réels a, b et c tels que : $Q(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+2}$.

Récapitulons

- Le quotient de deux polynômes est une fraction rationnelle.
- $\dfrac{3x^2 + 5x + 7}{x+2} = 3x - 1 + \dfrac{9}{x+2}$.

Exercices de fixation

15 Écris dans ton cahier le numéro de chaque proposition suivi de V si la proposition est vraie ou de F si la proposition est fausse.

1. $-4x^5$ est une fraction rationnelle.
2. $\dfrac{7}{x^2}$ n'est pas une fraction rationnelle.
3. $\sqrt{x^3 - 5x + 1}$ est une fraction rationnelle.
4. $\dfrac{x^2 - x + 3}{4x - 1}$ est une fraction rationnelle.

16 Une fonction rationnelle Q est telle que :

$Q(x) = \dfrac{-2(x+1)}{x^2 + 8x + 15}$.

1. Détermine l'ensemble de définition de la fonction Q.
2. Détermine deux nombres réels a et b tels que :

$Q(x) = \dfrac{a}{x+3} + \dfrac{b}{x+5}$.

17

1. Détermine les réels a et b tels que pour tout x distinct de −2 et 2, on ait : $\dfrac{2}{x^2 - 4} = \dfrac{a}{x-2} + \dfrac{b}{x+2}$.

2. Détermine les réels m et n tels que pour tout réel x distinct de 3 et −3, on ait : $\dfrac{5x - 3}{x^2 - 9} = \dfrac{m}{x-3} + \dfrac{n}{x+3}$.

18 Détermine les réels a, b et c tels que pour tout nombre réel x distinct de 1, on ait :

$$\frac{x^2 + x - 6}{x - 1} = ax + b + \frac{c}{x-1}.$$

1. POLYNÔMES

a) Définitions

- Soient a un nombre réel et p un nombre entier naturel.
  L'expression ax^p est appelée monôme à variable réelle x.
- Si a est non nul, alors le monôme ax^p est de degré p et de coefficient a.
- On appelle polynôme toute expression pouvant s'écrire comme somme de monômes.

Exemple

$3x^6$ est un monôme ; $-2x^2 + x + 1$ est un polynôme ; 5 est un monôme de degré 0.

Propriété et définition

Tout polynôme P non nul possède une unique écriture de la forme :

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ où $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ sont des nombres réels tels que a_n soit différent de zéro.

Le nombre entier naturel n est appelé le degré de P et noté d°P.

Les nombres réels $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ sont appelés les coefficients du polynôme P.

$a_k x^k$ est appelé terme de degré k si le nombre réel a_k est non nul.

Le polynôme nul n'a pas de degré.

Exemple

$2x^3 + 5x^2 - 4x - 3$ est un polynôme de degré 3.

$5x^2$ est le terme de degré 2 de ce polynôme.

Pour s'entraîner : Exercice 2

Propriété

Deux polynômes sont égaux si et seulement si ils vérifient les deux conditions suivantes :

- Ils ont le même degré ;
- Les coefficients des monômes de même degré sont égaux.

Exemple d'application

Posons : $K(x) = -4x^3 + 5x^2 - 4x - 7$ et $Q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

$K(x) = Q(x)$ si et seulement si $a = -4$; $b = 5$; $c = -4$ et $d = -7$.

Pour s'entraîner : Exercices 2 ; 3 ; 4

Propriété

La somme de deux polynômes est un polynôme.

Le produit de deux polynômes Pet Q est un polynôme et d°[PQ] = d°P + d°Q.

Exemple d'application On considère les polynômes P et Q tels que :

$P(x) = -4x^6 + 5x^2 - 4x - 7$ et $Q(x) = 4x^3 + 5x^2 - 4x - 7$

Déterminons le degré de PQ

d°P = 6 ; d°Q = 3

d°[PQ] = d°P + d°Q donc d°[PQ] = 9.

Pour s'entraîner : Exercice 5

b) Égalités remarquables

Soient a et b deux nombres réels.

- $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
- $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$
- $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
- $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
- $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$
- $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$

Exemple

$(x + 5)^3 = x^3 + 3x^2 \times 5 + 3 \times 5^2 \times x + 5^3 = x^3 + 15x^2 + 75x + 125.$

Pour s'entraîner : Exercices 6 ; 7 ; 8

c) Zéro d'un polynôme

Définition

On appelle zéro d'un polynôme P, tout nombre réel α tel que : $P(\alpha) = 0$.

Exemple

Posons : $P(x) = 4x^3 - 5x^2 + 3x - 2$, $P(1) = 0$, donc 1 est un zéro du polynôme P.

Remarque

Déterminer les zéros d'un polynôme P, c'est résoudre l'équation : $P(x) = 0$.

Pour s'entraîner : Exercices 9 ; 10 ; 11 ; 12

Théorème fondamental de la factorisation

α est un zéro de P si et seulement si il existe un polynôme Q tel que : pour tout nombre réel x, $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$.

Exemple

Posons $P(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 3x - 2$.

$P(2) = 0$, donc il existe un polynôme Q tel que $P(x) = (x - 2)\,Q(x)$.

Pour s'entraîner : Exercices 13 ; 14

Méthode des coefficients indéterminés

Soit un polynôme P défini par : $P(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ (les coefficients A, B, C et D sont connus avec A non nul) admettant le nombre réel α comme zéro. Il s'écrit : $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$ où Q est un polynôme du second degré à déterminer. Déterminer Q, c'est trouver ces coefficients. Cela peut se faire par la méthode dite des coefficients indéterminés. En voici une description :

- On écrit Q(x) sous la forme générale des polynômes du second degré : $Q(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$
- On développe et on réduit l'expression :$(x - \alpha)(ax^2 + bx + c)$. On obtient : $ax^3 + (b - \alpha a)x^2 + (c - \alpha b)x - \alpha c$
- Ensuite on identifie les polynômes $ax^3 + (b - \alpha a)x^2 + (c - \alpha b)x - \alpha c$ et $Ax^2 + Bx + C$.
- Cette identification se traduit par le système d'équations suivant : $\begin{cases} a = A \\ b - \alpha c = B \\ c - \alpha b = C \\ \alpha c = D \end{cases}$
- On résout le système ci-dessus pour déterminer les nombres a, b et c.

Exemple d'application

Dans l'exemple précédent, $P(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 3x - 2$ et $P(2) = 0$, donc il existe un polynôme Q tel que :

$P(x) = (x - 2)\,Q(x)$.

d°P = 4, donc d°Q = 3, donc, $Q(x) = ax^3 + b\,x^2 + cx + d$

$(x - 2)\,Q(x) = (x - 2)(ax^3 + b\,x^2 + cx + d)$

$(x - 2)(ax^3 + b\,x^2 + cx + d) = ax^4 + x^3(b - 2a) + x^2(c - 2b) + x(d - 2c) - 2d$, donc :

$x^4 - 2x^3 - x^2 + 3x - 2 = ax^4 + x^3(b - 2a) + x^2(c - 2b) + x(d - 2c) - 2d$.

En utilisant la propriété relative à l'égalité de deux polynômes, on obtient le système : $\begin{cases} a = 1 \\ b - 2a = -2 \\ c - 2b = -1 \\ d - 2c = 3 \\ -2d = -2 \end{cases}$ donc,

$\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -1 \\ d = 1 \end{cases}$ d'où le polynôme : $Q(x) = x^3 - x + 1$. On a donc : $x^4 - 2x^3 - x^2 + 3x - 2 = (x - 2)(x^3 - x + 1)$

Pour s'entraîner : Exercice 15

Méthode de la division euclidienne

Soit $P(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ (les coefficients A, B, C et D sont connus avec A non nul) admettant le nombre réel α comme zéro. Il s'écrit : $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$ où Q est un polynôme du second degré à déterminer.

Déterminer Q, c'est trouver ces coefficients.

Cela peut se faire par une division euclidienne. En voici une description :

- On effectue la division euclidienne de $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ par $x - \alpha$.

$$\begin{array}{r|l} Ax^3 + Bx^2 + Cx + D & x - \alpha \\ \cline{2-2} \vdots & Q(x) \\ 0 & \end{array}$$

- Le quotient de cette division nous donne $Q(x)$.
- Remarquons que le reste est nul car α est un zéro de P.

Exemple d'application

Détermine par la méthode de la division euclidienne, le polynôme $Q(x)$ tel que :

$x^4 - 2x^3 - x^2 + 3x - 2 = (x - 2)\,Q(x)$

$$\begin{array}{r|l} x^4 - 2x^3 - x^2 + 3x - 2 & x - 2 \\ \cline{2-2} -x^4 + 2x^3 \qquad\qquad\quad & x^3 - x + 1 \\ \hline -x^2 + 3x - 2 & \\ x^2 - 2x \quad\; & \\ \hline x - 2 & \\ -x + 2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

donc : $Q(x) = x^3 - x + 1$

Pour s'entraîner : : Exercice 16

2. POLYNÔME DU SECOND DEGRÉ

a) Définition

Un polynôme du second degré est un polynôme de la forme : $P(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b, c sont des nombres réels et a est non nul.

Exemples

Le polynôme Q tel que : $Q(x) = x^2 - x + 1$ est un polynôme du second degré avec $a = 1$, $b = -1$ et $c = 1$.

La fonction polynôme f telle que : $f(x) = 5x^2 - 8x - 2$ est un polynôme du second degré.

b) Forme canonique d'un polynôme du second degré

Propriété et définition

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$, ($a \neq 0$), un polynôme du second degré.

$P(x)$ peut se mettre sous la forme $a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$.

$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$ est appelé la forme canonique de P.

Exemple d'application

Mettons le polynôme du second degré : $P(x) = 3x^2 + 3x - \frac{9}{4}$ sous sa forme canonique.

$3x^2 + 3x - \frac{9}{4} = 3(x^2 + x - \frac{3}{4})$, donc $P(x) = 3[(x + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} - \frac{3}{4}]$ soit $P(x) = 3[(x + \frac{1}{2})^2 - 1]$.

Pour s'entraîner : Exercices 17 ; 18

c) Factorisation d'un polynôme du second degré

- Pour factoriser un polynôme du second degré, on peut utiliser la forme canonique ou une égalité remarquable.
- Certains polynômes du second degré ne sont pas factorisable dans $\mathbb{R}$.

Exemple d'application

Dans l'exemple précédent, on a mis le polynôme P sous sa forme canonique. Il suffit de le factoriser en utilisant les produits remarquables. Ici, on utilisera $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

$P(x) = 3[(x + \frac{1}{2})^2 - 1]$, donc $P(x) = 3[(x + \frac{1}{2} + 1)(x + \frac{1}{2} - 1)]$, soit : $P(x) = 3(x + \frac{3}{2})(x - \frac{1}{2})$.

Pour s'entraîner : Exercices 19 ; 20 ; 21

d) Signe d'un polynôme du second degré

Pour étudier le signe d'un polynôme de second degré, on peut le mettre si possible sous la forme d'un produit de deux ou de plusieurs polynômes du premier degré et utiliser un tableau de signes.

Exemple d'application

Dans l'exemple précédent, $P(x) = 3(x + \frac{3}{2})(x - \frac{1}{2})$.

$a = 3$ donc $a > 0$, on obtient le tableau ci-dessous :

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$x + \frac{3}{2}$	$-$	0	+	+	+
$x - \frac{1}{2}$	$-$	$-$	$-$	0	+
$P(x)$	+	0	$-$	0	+

Donc, $\forall x \in \left]-\infty ; -\frac{3}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2} ; +\infty\right[$, $P(x) > 0$.

$\forall x \in \left]-\frac{3}{2} ; \frac{1}{2}\right[$, $P(x) < 0$.

$\forall x \in \{-\frac{3}{2} ; \frac{1}{2}\}$, $P(x) = 0$.

Pour s'entraîner : Exercice 22 ; 23

3. FRACTIONS RATIONNELLES

Définition

On appelle fraction rationnelle, le quotient de deux polynômes0

Remarques

- Un polynôme est une fraction rationnelle particulière.
- Il est possible de transformer l'écriture d'une fraction rationnelle grâce à la méthode d'identification ou par la méthode de la division euclidienne.

Exemple

$h(x) = \dfrac{-2x^2+11x-2}{x-5}$.

$h(x)$ est une fraction rationnelle.

Grâce à la méthode d'identification, on peut écrire : $h(x) = -2x+1+\dfrac{3}{x-5}$.

Disposition pratique : cas de la division euclidienne

$$
\begin{array}{r|l}
-2x^2+11x-2 & x-5 \\
\cline{2-2}
2x^2-10x & -2x+1 \\
\cline{1-1}
x-2 & \\
-x+5 & \\
\cline{1-1}
3 &
\end{array}
$$

On peut écrire : $h(x) = -2x+1+\dfrac{3}{x-5}$.

Pour s'entraîner : Exercices 24 ; 25 ; 26

QUESTION 1

Comment factoriser un polynôme dont on connait un zéro α ?

Méthode

Pour factoriser un polynôme P dont on connait un zéro, on peut procéder comme suit :

- Prévoir le degré du polynôme Q tel que : $P(x) = (x - \alpha)\,Q(x)$.
- Ecrire sous la forme adéquate, par exemple, $Q(x) = ax^2 + bx + c$.
- Déterminer les coefficients du polynôme Q en procédant par identification ou en utilisant la méthode de la division euclidienne du polynôme $P(x)$ par : $(x - \alpha)$.

Exercice

On pose : $P(x) = 2x^3 + 5x^2 + x - 2$.

Vérifie que : $P(-1) = 0$.

Déduis-en une factorisation du polynôme P.

Solution commentée

$P(-1) = -2 + 5 - 1 - 2 = 0$, donc -1 est un zéro du polynôme P.

Le polynôme est de degré 3, donc le polynôme Q tel que : $P(x) = (x+1)\,Q(x)$ est de degré 2.

$Q(x)$ peut se mettre sous la forme : $ax^2 + bx + c$.

Déterminons à présent les coefficients du polynôme Q.

$(x+1)\,Q(x) = (x+1)(ax^2 + bx + c)$, donc $P(x) = ax^3 + x^2(b+c) + x(c+b) + c$.

En procédant par identification, on obtient : $\begin{cases} a = 2 \\ b + a = 5 \\ c + b = 1 \\ c = -2 \end{cases}$

Dans ce système, trois équations suffisent pour déterminer les nombres réels a, b et c, mais il faut s'assurer que la quatrième équation est vérifiée pour les valeurs trouvées avec trois équations.

On a donc : $\begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \\ c = -2 \end{cases}$ d'où $Q(x) = 2x^2 + 3x - 2$ et donc $P(x) = (x+1)(2x^2 + 3x - 2)$.

Si on le souhaite, on peut factoriser de nouveau le polynôme du second degré Q en utilisant sa forme canonique ou la méthode de la division euclidienne si l'on cannait un de ses zéros.

Exercice non corrigé 1

On considère le polynôme h tel que : $h(x) = 2x^3 + 5x^2 + x - 2$.

Sachant que $h(-2) = 0$, écris le polynôme $h(x)$, comme produit de trois polynôme du premier degré.

Exercice non corrigé 2

Détermine les nombres réels a, b et c sachant que : $x^3 - x^2 + 2x - 2 = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$.

QUESTION 2

Comment étudier le signe d'un polynôme ?

Méthode

Pour déterminer le signe d'un polynôme, on peut :

- Déterminer un zéro évident (on pourra essayer les réels, -2 ; -1 ; 0 ; 1 et éventuellement 2).
- Factoriser le polynôme en utilisant ce zéro évident, grâce à la méthode des coefficients indéterminés ou à la division euclidienne.
- Étudier si possible, le signe de chaque facteur.
- Consigner le résultat de cette étude dans un tableau.
- Appliquer la règle des signes.
- Conclure.

Exercice

Étudions le signe du polynôme P tel que : $P(x) = 2x^3 + 5x^2 + x - 2$, sachant que $P(-1) = 0$.

Solution commentée

Dans la question 1, nous avons montré que : $P(x) = (x+1)(2x^2 + 3x - 2)$.

Écrivons le polynôme du second degré $2x^2 + 3x - 2$ sous sa forme canonique :
$2x^2 + 3x - 2 = 2(x^2 + \frac{3}{2}x - 1)$.

$x^2 + \frac{3}{2}x - 1 = (x + \frac{3}{4})^2 - \frac{9}{16} - 1$, donc : $x^2 + 3x - 2 = 2(x+2)(x - \frac{1}{2})$,

donc : $P(x) = 2(x+1)(x+2)(x - \frac{1}{2})$. (forme factorisée de P)

x	$-\infty$		-2		-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x - \frac{1}{2}$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Le tableau indique que :

$\forall x \in]-\infty ; -2[\cup]-1 ; \frac{1}{2}[$, $P(x) < 0$;

$\forall x \in]-2 ; -1[\cup]\frac{1}{2} ; +\infty[$, $P(x) > 0$;

$\forall x \in \{-2 ; -1 ; \frac{1}{2}\}$, $P(x) = 0$.

Exercice non corrigé

Étudie le signe du polynôme K tel que : $K(x) = -x^3 + 2x^2 + 2x - 4$.

QUESTION 3

Comment transformer l'écriture d'une fraction rationnelle grâce à la méthode d'identification ?

Méthode

Pour transformer par exemple l'écriture d'une fraction rationnelle du type : $\frac{ax^2+bx+c}{ex+d}$ sous la forme $\alpha x+\beta+\frac{\delta}{ex+d}$, où a, b, c, d, e sont des nombres réels donnés tels que $ex + d \neq 0$ et α, β, δ des nombres réels à déterminer, on peut procéder comme suit :

- Réécrire l'expression $\alpha x+\beta+\frac{\delta}{ex+d}$ en prenant $ex + d$ comme dénominateur commun.
  On obtient une fraction rationnelle du type : $\frac{P(x)}{ex+d}$, où $P(x)$ est un polynôme du second degré réduit et ordonné suivant les puissances décroissantes de x.
- Poser que : $P(x) = ax^2 + bx + c$.
- Déterminer les nombres réels α, β, δ, grâce à la méthode des coefficients indéterminés.

Remarque : il est possible d'utiliser la méthode de la division euclidienne.

Exercice

Détermine trois nombres réels a, b et c tels que : pour $x \neq 2$, $\frac{-5x^2+9x-1}{2-x} = ax+b+\frac{c}{2-x}$.

Solution commentée

Réduisons l'expression $ax+b+\frac{c}{2-x}$ en prenant $(2 - x)$ comme dénominateur commun.

On obtient : pour $x \neq 2$, $ax+b+\frac{c}{2-x} = \frac{(ax+b)(2-x)+c}{2-x}$.

Développons et réduisons le polynôme $(ax + b)(2 - x) + c$, suivant les puissances décroissantes de x.
On obtient : $(ax + b)(2 - x) + c = -ax^2 + x(2a - b) + 2b + c$.

De l'égalité $-ax^2 + x(2a - b) + 2b - c = -5x^2 + 9x - 1$, on obtient : $\begin{cases} -a=-5 \\ 2a-b=9 \\ 2b+c=-1 \end{cases}$.

soit : $\begin{cases} a=5 \\ b=1 \\ c=-3 \end{cases}$, donc pour tout nombre réel différent de 2, $\frac{-5x^2+9x-1}{2-x} = 5x+1-\frac{3}{2-x}$.

Exercice non corrigé

Pour tout nombre réel x différent de 1 et de 2, on considère la fraction rationnelle définie par :

$f(x) = \frac{2x+13}{(x-1)(x+2)}$.

Détermine deux nombres réels a et b tels que : pour $x \neq 1$ et $x \neq -2$, $f(x) = \frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+2}$.

Exercices de fixation

Polynômes

1 Recopie le numéro de chaque affirmation suivi de V si elle vraie ou de F si elle fausse.

1. L'expression $ax + b$ (avec a et b deux nombres réels) est un polynôme.
2. L'expression $\dfrac{1}{4x^2}$ est un monôme de degré 5.
3. Comme $\dfrac{3x^4+5x^2+12x}{x} = 3x^3+5x+12$, pour $x \neq 0$, donc $\dfrac{3x^4+5x^2+12x}{x}$ est un polynôme de degré 3.
4. Le polynôme $x^4 - 5x + x^6 - 1$ est de degré 4.
5. La somme de deux polynômes de degré 3 est un polynôme de degré 3.

Égalité de deux polynômes

2 On donne les deux polynômes P et Q tels que :
$P(x) = -3x^4 + 5x^3 - 2x - 1$ et
$Q(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$.
Détermine les nombres réels a, b, c, d, e et f pour que les polynômes P et Q soient égaux.

3 Soit le polynôme P tel que : $P(x) = 6x^3 - 7x^2 + 1$.

1. Vérifie que $P(x) = x[x(6x - 7)] + 1$.
2. À l'aide de l'égalité ci-dessus, calcule :
$P\left(-\dfrac{1}{3}\right)$; $P\left(\dfrac{1}{2}\right)$; $P\left(\dfrac{7}{3}\right)$.

4 Soient P et Q deux polynômes quelconques.
« Si $P(-2) = Q(-2) = 0$ et si $P(5) = Q(5) = 0$ alors les polynômes P et Q sont égaux. »
À travers un contre-exemple, prouve que la proposition ci-dessus est fausse.

Produit et somme de deux polynômes

5 On donne : $P(x) = 4x^2 - 3x + 2$ et
$Q(x) = -5x^4 - 4x^2 + 12x + 5$.

1. Calcule : $P(x) + Q(x)$; $Q(x) - P(x)$.
2. Calcule : $P(x)Q(x)$.

Égalités remarquables

6 Recopie la bonne réponse :

1. $(x - 3)(x^2 + 3x + 9)$ est égal à :
a) $x^3 + 27$; **b)** $x^3 - 27$; **c)** $(x - 3)(x + 9)$.
2. $x^3 + 8$ est égal à :
a) $(x + 2)(x^2 + 4)$; **b)** $(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$;
c) $(x + 2)(x^2 + 2x + 4)$.

7 Factorise les polynômes suivants :

1. $(2x + 1)^2 - 16$; 2. $9x^2 + 6x + 1$;
3. $25x^2 - 20x + 4$; 4. $(x + 4)^3 - (2x + 5)^3$;
5. $27x^3 + 216$; 6. $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$;
7. $x^3 + 9x^2 + 27x + 27$.

8 Développe les expressions suivantes :

1. $(\sqrt{2}\,x - 4)^3$; 2. $(2x + 1)^3$;
3. $\left(\dfrac{1}{2}x - 6\right)^2$; 4. $\left(\dfrac{x}{7} + 7\right)^2$.

Zéro d'un polynôme

9 Relie chaque polynôme à son zéro.

$x^2 + x - 12$	
$(2x - 1)^2 - 1$	-1
$x^3 + 3x^2 - x - 3$	$\sqrt{2}$
$x^2 - 1$	-5
$3x^2 + 16x + 5$	0
$x^2 - 2$	-4

10 Recopie le numéro de chaque affirmation suivi de V si l'affirmation est vraie ou de F si l'affirmation est fausse.

1. 0 peut-être le zéro d'un polynôme.
2. 0 est un zéro de $x^5 - x^3 + 2x + 5$.
3. -2 est un zéro de $(x-2)(x^2 + 3x + 2)$.
4. Si -3 est zéro d'un polynôme P alors $P(x) = (x + 3)^2$.
5. $x^2 + 2x + 1$ n'a pas de zéro.

11

1. Parmi les nombres ci-dessous, identifie un zéro du polynôme F défini par : $F(x) = -3x^2 - 5x + 2$.
0 ; 1 ; −2 ; −1
2. Parmi les nombres ci-dessous, identifie les zéros du polynôme P tel que : $P(x) = (2x - 3)(x + 1)(x - 5)$.
1 ; −3 ; −1 ; 2 ; 5 ; −7 ; 0 ; $\dfrac{2}{3}$; $\dfrac{3}{2}$.

12

1. Détermine les zéros éventuels des polynômes P et Q tels que :
a) $P(x) = x^2 + 6x + 5$.
b) $Q(x) = 16x^2 - 8x - 3$.
2. Détermine tous les zéros du polynôme
$G(x) = (x + 2)(x^2 + 8x + 15)$.

Propriété fondamentale

13 Recopie le numéro de chaque affirmation suivi de V si l'affirmation est vraie ou de F si l'affirmation est fausse.

1. Si α est un zéro d'un polynôme P alors $P(x)$ est divisible par $x-\alpha$.
2. Si $P(x)$ est divisible par $x-\alpha$ alors α est un zéro de P.
3. Le polynôme $x^2-2x-15$ est divisible par $x+3$.
4. $7x^4-3x^2-2x+2$ n'est pas divisible par $x-1$.

14 Soit le polynôme H tel que :
$H(x) = -3x^3 - x^2 - 4x + 4$.

1. Justifie que : $H(x) = x[x(-3x-1)-4]+4$.
2. Calcule : $H\left(\frac{2}{3}\right)$.
3. Justifie qu'il existe un polynôme du second degré G tel que : $H(x) = (-3x+2)G(x)$.
4. Recopie la bonne réponse puis justifie : le polynôme G est égal à :
   a) $-3x^2+4$
   b) x^2-4
   c) x^2+x+2

Méthode des coefficients indéterminés

15 Détermine par la méthode des coefficients indéterminés, les nombres réels a et b tels :
$x^3+4x^2-11x-30 = (x+5)(x^2+ax+b)$.

Division euclidienne

16 Détermine par la division euclidienne les nombres réels a, b, c et d tels que :
$-3x^4-11x^3-4x^2+20x+16 = (x+2)(ax^3+bx^2+cx+d)$.

Forme canonique

17 Recopie le numéro de chaque affirmation suivi de V si l'affirmation est vraie ou de F si l'affirmation est fausse.

1. Tout polynôme du second degré admet une forme canonique.
2. Tout polynôme du second degré écrit sous forme canonique est factorisable.
3. La forme canonique d'un polynôme du second degré permet de déterminer (s'ils existent) les zéros de ce polynôme.
4. La forme canonique d'un polynôme du second degré permet (si possible) de factoriser ce polynôme.
5. Tout polynôme du second degré écrit sous forme canonique est positif.
6. La forme canonique d'un polynôme du second degré permet d'étudier le signe de ce polynôme.
7. On peut trouver les zéros d'un polynôme du second degré sans utiliser la forme canonique.

18 Parmi les polynômes suivants, recopie ceux qui sont écris sous forme canonique.

a) x^2-1 ; b) $2x^2+5x$; c) $44x^2-5x+12$;
d) $(x-1)^2-4$; e) $3-4x^2$ f) $2[(x-\frac{1}{2})^2+1]$.

Factorisation d'un polynômes du second degré

19 Relie chaque polynôme à sa forme factorisée si possible.

x^2-25 •	• $(x+8)(x-8)$
x^2+4x-5 •	• $(1-3x)(1-x)$
$2x^2+5x+3$ •	• $(x-4)(x+4)$
x^2-16 •	• $(x+5)(x-5)$
$3x^2-4x+1$ •	• $(x-1)(x+5)$
x^2-64 •	• $2\left(x+\frac{3}{2}\right)(x+1)$

20 Recopie le numéro de chaque affirmation suivi de V si l'affirmation est vraie ou de F si l'affirmation est fausse.

1. x^2+16 n'est pas factorisable.
2. $(1-3x)^2-36$ est factorisable.
3. La forme factorisée de x^2+2^2 est $(x+2)(x-2)$.
4. $15x(x+15)$ est une forme factorisée.
5. Le polynôme $-2x^2-5x+3$ a deux zéros que sont : $\frac{1}{2}$ et -3. Sa forme factorisée est donc $(x-\frac{1}{2})(x+3)$.

21 Détermine si possible la forme factorisée de chacun des polynômes suivants :

a) x^2-x-6 ; b) x^2-4x+7 ; c) $-2x^2-5x+3$
d) $1-4(x+5)^2$; e) $-x^2+9x+10$

Signe d'un polynôme du second degré

22 Recopie le numéro de chaque affirmation suivi de V si l'affirmation est vraie ou de F si l'affirmation est fausse.

1. Le polynôme $-x^2-7x-12$ est négatif quelque soit x dans $\mathbb{R}$.
2. Le polynôme $(x+3)^2+9$ est positif quelque soit x dans $\mathbb{R}$.
3. Tout polynôme du second degré qui n'a pas de zéro est positif.
4. Le polynôme $-x^2-1$ est strictement négatif quelque soit x dans $\mathbb{R}$.

5. Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$) un polynôme du second degré admettant x_0 et x_1 pour zéros avec $x_0 < x_1$. $P(x) \geq 0$ si et seulement si $x \in]x_0 ; x_1[$.

23 Étudie suivants les valeurs de x le signe des polynômes suivants.

1. $P(x) = -4(x-1)^2$
2. $Q(x) = 3(-x+1)^2$
3. $R(x) = 2(-x-7)^2 + 5$
4. $S(x) = -(x+10)^2 - 13$
5. $U(x) = -2x^2 - 7x + 4$

Fration rationnelle

24 Recopie le numéro de chaque affirmation suivi de V si l'affirmation est vraie ou de F si l'affirmation est fausse.

1. Tout polynôme est une fraction rationnelle.
2. Toute fraction rationnelle est un polynôme.
3. L'expression $\dfrac{\sqrt{x}+5x^2-x-1}{2x-1}$ est une fraction rationnelle.
4. L'expression $\dfrac{1}{1-5x}$ est une fraction rationnelle.

25

1. Effectue la division euclidienne de $3x^2 + 2x - 1$ par $3x - 1$.
2. Simplifie la fraction rationnelle : $\dfrac{3x-1}{3x^2+2x-1}$.

26

1. Détermine les nombres réels a et b tels que pour tout x différent de 0 et 1, $\dfrac{x-4}{x(x-1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x-1}$.
2. Détermine les nombres réels a, b et c tels que pour tout x différent de -1, $\dfrac{2x^2-x+1}{x+1} = ax + b + \dfrac{c}{x+1}$.

Exercices de renforcement / approfondissement

27 On donne le polynôme P tel que :
$P(x) = -4x^3 - 7x^2 + 142x - 35$.

1. Vérifie que $P(5) = 0$.
2. Détermine le polynôme Q tel que $P(x) = (x-5)Q(x)$.
3. Écris $P(x)$ sous la forme d'un produit de polynômes du premier degré.
4. Étudie le signe de $P(x)$.
5. a) Sans calculer $P(-2019)$, détermine son signe.
   b) Justifie ta réponse.

28 On donne la fraction rationnelle suivante :
$E(x) = \dfrac{x^3+7x^2+7x-15}{x^3+9x^2+23x+15}$.

1. Vérifie que 1 est un zéro de $x^3 + 7x^2 + 7x - 15$ et que -1 est un zéro de $x^3 + 9x^2 + 23x + 15$.
2. Détermine les conditions d'existence de $E(x)$.
3. Simplifie $E(x)$.
4. Démontre que : $E\left(\sqrt{5}\right) = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

29 Détermine la forme canonique puis les zéros éventuels de chacun des polynômes du second degré suivants :

a) $x^2 + 4x - 5$; b) $x^2 + 10x + 120$;
c) $16x^2 + 8x + 1$; d) $x^2 + 6x + 4$.

30 Étudie le signe de chacun des polynômes suivants :

a) $(x-3)^2 - 16$; b) $-(2x-5)^2 - 81$;
c) $1 - (5x+3)^2$; d) $4x^2 + 4x + 7$.

31 À l'aide de produits remarquables, factorise chacun des polynômes suivants :

a) $x^3 - 8$; b) $27x^3 + 1$;
c) $9x^2 - 12x + 4$; d) $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$.

32 Recopie le numéro de chaque affirmation suivi de V si l'affirmation est vraie ou de F si l'affirmation est fausse.

1. 2 est un zéro de $x^3 - 5x^2 - 4x + 4$.
2. Si -5 est un zéro du polynôme P, alors P est divisible par : $x + 5$.
3. Tout polynôme de degré 2 est strictement positif.
4. L'écriture $(2x+5)^2$ est une forme canonique.
5. L'expression $\dfrac{1}{14}x^5$ est un monôme.
6. L'expression $(2x+5)^2 - 1$ est factorisable.
7. L'expression $\dfrac{1}{2x^2+2x-1}$ est une fraction rationnelle.
8. L'expression $12x^4 - 2x^3 - 5x + 3$ est une fraction rationnelle.
9. Le polynôme $4x^2 - 2x + 1$ est divisible par : $x + 1$.
10. Le polynôme $2x^3 + 3x^2 - 8x + 3$ est divisible par : $x - 1$.

33 On considère le polynôme F tel que : $F(x) = x^{4n} - 1$ où n est un nombre entier naturel non nul.

1. Démontre que $F(x)$ est divisible par $x - 1$ et par $x + 1$.
2. Démontre que $F(x)$ est divisible par $x^4 - 1$.

34 On donne $P(x) = -2x^3 + 3x^2 + 20x + 75$.

1. Calcule : **a)** $P(-10)$; **b)** $P(-8)$; **c)** $P(5)$.
2. Écris $P(x)$ sous la forme d'un produit de deux polynômes dont l'un est de degré 2.

35

1. Justifie que : $x^2 + 6x - 7 = (x + 3)^2 - 16$.
2. Déduis-en que $x^2 + 6x - 7 = (x - 1)(x + 7)$, puis déduis les zéros du polynôme $x^2 + 6x - 7$.
3. À l'aide de la question **2**, détermine l'ensemble de définition de la fraction rationnelle $f(x) = \dfrac{15x^2 + 8x - 2}{x^2 + 6x - 7}$.
4. Détermine l'ensemble de définition de $g(x) = \dfrac{x - 2}{9x^2 + 6x + 5}$.

36 Soit la fonction rationnelle telle que :
$f(x) = \dfrac{2x^2 + 11x + 15}{-2x^2 - x + 10}$.

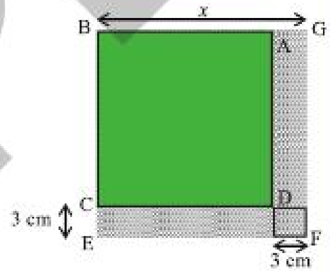
1. Factorise : $2x^2 + 11x + 15$.
2. Factorise : $-2x^2 - x + 10$.
3. Déduis de la question **2** l'ensemble de définition de f.
4. Déduis des questions précédentes, une simplification de f.

37

1. Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x - 1}$.
   a) Détermine l'ensemble de définition de f.
   b) Effectue la division euclidienne de $x^2 + 2x + 1$ par $x - 1$.
   c) Déduis-en que $x^2 + 2x + 1 = (x - 1)(x + 3) + 4$.
   d) Déduis de c) que : $f(x) = x + 3 + \dfrac{4}{x - 1}$.
2. On considère la fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = \dfrac{-2x^2 - 3x + 32}{x + 5}$.
   À l'aide d'une division euclidienne, détermine trois nombres réels a, b et c tels que : $g(x) = ax + b + \dfrac{c}{x + 5}$.

Situations complexes

38 Pour initier les élèves à l'agriculture, une ONG qui opère dans le domaine du vivrier à offert aux élèves de seconde un terrain de forme carré comme l'indique la figure ci-dessous.



La partie grise est une allée et la partie verte est la partie cultivable.

Cette année, les élèves veulent y planter de la tomate uniquement. Les grains de la variété de tomate choisie sont vendus à 1 000 F le mètre carré. Mais les élèves ont oublié l'aire de la partie cultivable.

Le président de la coopérative sait que l'aire de la partie grise est de 63 m². Il te demande d'utiliser tes connaissances en mathématiques pour déterminer l'aire de la partie cultivable.

Donne une solution argumentée au président de la coopérative.

39 Une entreprise dispose d'une chaine de production de jouets pour enfants.

Le coût de production C en francs pour x jouets fabriqués est donné par la relation :

$C(x) = -0{,}02x^2 + 148x + 7762{,}5$.

Le prix de vente d'un jouet est de 150 francs.

L'entreprise a remarqué que pour un certain nombre de jouets fabriqués et vendus par jour, elle réalise des pertes. L'entreprise décide de déterminer le nombre minimum de jouets à produire et à vendre pour ne plus subir de perte.

Réponds à la préoccupation de l'entreprise.

7 ANGLES INSCRITS

Commentaire de la Leçon

Les astronomes, arpenteurs et géomètres ont, très tôt, cherché à mesurer des angles et à les comparer entre eux. C'est ainsi que l'angle au centre et son double, l'angle inscrit, sont entrés dans l'histoire des mathématiques.

Le théorème de l'angle inscrit est l'un des résultats importants de géométrie euclidienne élémentaire.

Il demande peu d'outils pour être énoncé, et même démontré, ses conséquences sont nombreuses.

Le mot angle dérive du latin **angulus,** mot qui signifie « le coin ».
En géométrie, la notion générale d'angle se décline en plusieurs concepts.
Dans son sens ancien, l'angle est une figure plane, portion de plan délimitée par deux demi-droites.
L'apprenant a déjà étudié les angles inscrits en classe de troisième ; il connait la propriété relative à un angle inscrit et à l'angle au centre associé, ainsi que la propriété relative à la mesure de deux angles inscrits qui interceptent le même arc.
En classe de seconde C, il s'agira de renforcer ces notions et les étendre aux angles inscrits obtus, aux angles inscrits définis par une corde et une tangente, la notion d'arcs capables, la propriété relative à l'aire d'un triangle, le théorème des sinus etc.

En classe de première, cette étude sur les angles inscrits sera approfondie à travers par exemple la leçon « angles orientés et trigonométrie ». La notion d'arc capable sera réinvestie par exemple dans la recherche de certains types de lieu géométrique, du centre d'une rotation déterminée par la donnée de son angle orienté, un point et son image, etc.
Les angles sont utilisés dans plusieurs domaines, notamment en navigation maritime, spaciale et dans l'optique.

Habiletés et Contenus

- ✓ **Identifier** deux arcs capables d'un angle donné.
- ✓ **Connaître** la relation entre un angle inscrit et l'angle au centre associé ; la propriété relative aux mesures d'un angle inscrit défini par une corde et une demi-tangente et de l'angle au centre associé; la propriété relative aux mesures de deux angles inscrits interceptant le même arc ou deux arcs de même longueur ; la propriété relative aux mesures de deux angles inscrits interceptant deux arcs de mêmes extrémités ; la propriété relative à la bissectrice d'un angle inscrit et l'arc que cet angle intercepte ; la propriété relative à l'aire d'un triangle ; le théorème des sinus.
- ✓ **Calculer** des aires, des longueurs et des mesures d'angle en utilisant les formules d'aire ou le théorème des sinus.
- ✓ **Déterminer** la mesure d'un angle en utilisant les propriétés des angles inscrits.
- ✓ **Construire** un arc capable de mesure donnée.
- ✓ **Justifier** une égalité angulaire en utilisant les propriétés des angles inscrits.
- ✓ **Traiter une situation** faisant appel aux angles inscrits non orientés.

Situation d'Apprentissage

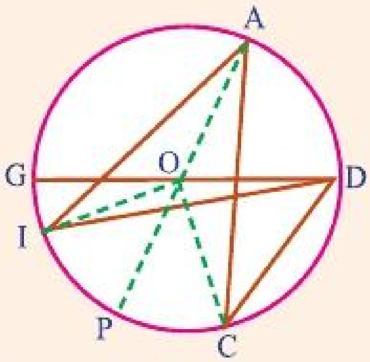
Lors de la préparations d'un exposé sur les angles , les élèves d'une classe de 2^{de} C découvrent les informations suivantes : «Les astronomes, arpenteurs et géomètres ont, très tôt, cherché à mesurer des angles et à les comparer entre eux. C'est ainsi que l'angle inscrit et son double sont entrés dans l'histoire des mathématiques.

Le théorème de l'angle inscrit est l'un des résultats importants de géométrie euclidienne élémentaire.

Il demande peu d'outils pour être énoncé, et même démontré, et ses conséquences sont nombreuses.

La figure ci-contre est tirée de l'édition Louis de 1804 des Éléments d'Euclide (traduction de François Peyrard).

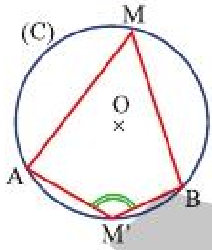
Fiers de cette découverte, ces élèves décident de justifier des égalités angulaires entre les angles inscrits et les angles au centre.



Activité 1 Arc intercepté par un angle donné

Sur la figure ci-contre, (C) est un cercle de centre O et A, B, M et M' sont des points de (C).

1. Reproduis cette figure sur ton cahier.
2. Trace en bleu l'arc intercepté par l'angle $\widehat{AMB}$.
3. Trace en rouge l'arc intercepté par l'angle $\widehat{AM'B}$.



Récapitulons

L'angle inscrit $\widehat{AMB}$ intercepte :

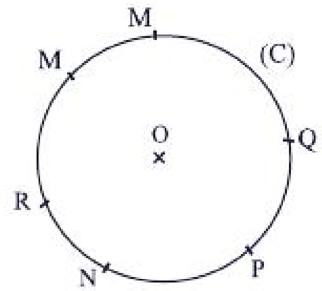
- L'arc $\overset{\frown}{AB}$ lorsqu'il est aigu.
- L'arc $\overset{\smile}{AB}$ lorsqu'il est obtus.

Exercices de fixation

1 Sur la figure ci-contre, (C) est un cercle de centre O.
M, N, P, Q, R et S sont des points du cercle (C).

Pour chacune des propositions ci-dessous, réponds par vrai (V) si la proposition est vraie ou par faux (F) si elle est fausse.

1. L'angle $\widehat{RMS}$ intercepte l'arc $\overset{\frown}{RS}$.
2. L'angle $\widehat{RSP}$ intercepte l'arc $\overset{\smile}{RP}$.
3. L'angle $\widehat{NPQ}$ intercepte l'arc $\overset{\smile}{NQ}$.
4. L'angle $\widehat{MPS}$ intercepte l'arc $\overset{\frown}{MS}$.
5. L'angle $\widehat{SRQ}$ intercepte l'arc $\overset{\smile}{SQ}$.
6. L'angle $\widehat{PQS}$ intercepte l'arc $\overset{\smile}{PS}$.



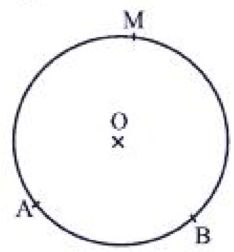
2 K, L et M sont trois points d'un cercle (C) tels que: mes $\widehat{MKL}$ = 86°.
Dis lequel des arcs $\overset{\frown}{ML}$ ou $\overset{\smile}{ML}$ est intercepté par l'angle $\widehat{MKL}$.
Justifie ta réponse.

Activité 2 Angle inscrit aigu et angle au centre associé

Sur la figure ci-contre, (C) est un cercle de centre O ; A, B et M sont des points de (C) tels que l'angle $\widehat{AMB}$ soit aigu.

1. À l'aide du rapporteur, donne les mesures des angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{AOB}$.
2. Conjecture la mesure de l'angle $\widehat{AMB}$ en fonction de celle de l'angle $\widehat{AOB}$.
3. Démontre que : $mes\,\widehat{AMB} = \frac{1}{2} mes\,\widehat{AOB}$.

(On pourra tracer le diamètre [MM']).



Récapitulons

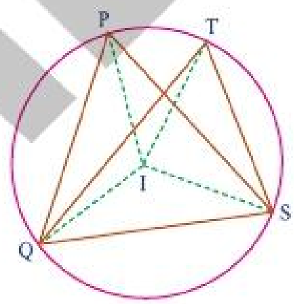
La mesure de l'angle inscrit aigu $\widehat{AMB}$ est la moitié de celle de l'angle au centre $\widehat{AOB}$ associé.

Exercices de fixation

3 Réordonne les groupes de mots suivants pour obtenir une propriété des angles inscrits.
au centre associé / la moitié / inscrit aigu / un angle /dans un cercle / a pour mesure / de l'angle / de la mesure.

4 Observe bien la figure ci-dessous.

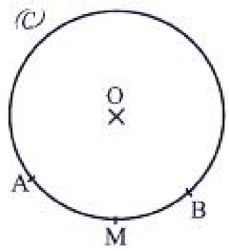
Pour chacune des lignes du tableau ci-dessous, une seule des trois réponses est exacte. Recopie dans ton cahier le numéro de la ligne suivi de la lettre qui correspond à la bonne réponse.



	A	B	C
Mes $\widehat{QPS}$ =	$\frac{1}{2}$ Mes $\widehat{TIQ}$	$\frac{1}{2}$ mes $\widehat{QIS}$	$\frac{1}{2}$ mes $\widehat{TIS}$
Mes $\widehat{TQS}$ =	$\frac{1}{2}$ mes $\widehat{TIQ}$	$\frac{1}{2}$ mes $\widehat{QIS}$	$\frac{1}{2}$ mes $\widehat{TIS}$
Mes $\widehat{PSQ}$ =	$\frac{1}{2}$ mes $\widehat{PIQ}$	$\frac{1}{2}$ mes $\widehat{PIS}$	$\frac{1}{2}$ mes $\widehat{QIS}$
Mes $\widehat{TSQ}$ =	$\frac{1}{2}$ mes $\widehat{PIQ}$	$\frac{1}{2}$ mes $\widehat{TIQ}$	$\frac{1}{2}$ mes $\widehat{QIS}$

Activité 3 Angle inscrit obtus et angle au centre associé

Sur la figure ci-contre, (C) est un cercle de centre O ; A, B et M sont des points de (C) tels que l'angle $\widehat{AMB}$ soit obtus.



1. À l'aide du rapporteur, donne la mesure des angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{AOB}$.
2. Conjecture la mesure de l'angle $\widehat{AMB}$ en fonction de celle de l'angle $\widehat{AOB}$.
3. Trace la droite (OM) et note E le point d'intersection de (OM) et (C).

a) Justifie que : $mes\,\widehat{AMB} = \frac{1}{2}\left(mes\,\widehat{AOE} + mes\,\widehat{EOB}\right)$.

b) Déduis que : $mes\,\widehat{AMB} = 180° - \frac{1}{2}\,mes\,\widehat{AOB}$.

Récapitulons

La mesure de l'angle inscrit obtus $\widehat{AMB}$ est égale à 180° diminué de la moitié de la mesure de l'angle au centre $\widehat{AOB}$.

Exercices de fixation

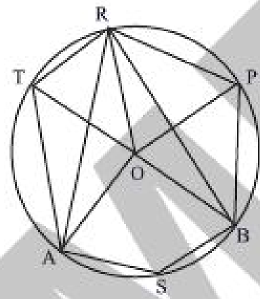
5 Réordonne les groupes de mots suivants pour obtenir une propriété des angles inscrits.

et de la moitié / au centre associé /un angle / a pour mesure / dans un cercle / la différence de 180° / de l'angle / inscrit obtus / de la mesure.

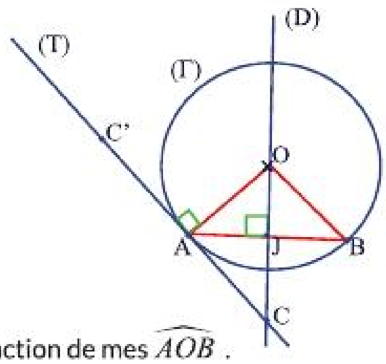
6 Observe la figure ci-contre.

Pour chacune des affirmations ci-dessous, réponds par vrai (V) si l'affirmation est vraie ou par faux (F) si elle est fausse.

1. Mes $\widehat{ASB} = \frac{1}{2}$ mes $\widehat{AOB}$.
2. Mes $\widehat{KTA} = 180° - \frac{1}{2}$ mes $\widehat{KOA}$.
3. Mes $\widehat{KPB} = \frac{1}{2}$ mes $\widehat{KOB}$-180°.
4. Mes $\widehat{TKP} = 180° - \frac{1}{2}$ mes $\widehat{TOP}$.



Activité 4 Angle inscrit défini par une corde et une demi-tangente



Sur la figure ci-contre :

- (Γ) est un cercle de centre O ;
- A et B sont deux points de (Γ) ;
- (T) est la tangente à (Γ) au point A, J est le milieu du segment [AB] ;
- (D) est la bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$;
- C est le point d'intersection de (T) et (D) ;
- C' est un point de (T) n'appartenant pas à la demi-droite [AC).

1. **a)** En considérant le triangle rectangle AOC, exprime mes $\widehat{ACO}$ en fonction de mes $\widehat{AOB}$.

   b) En considérant le triangle AJC, exprime mes $\widehat{CAJ}$ en fonction de mes $\widehat{AOB}$.

2. **a)** Justifie que les angles $\widehat{C'AB}$ et $\widehat{CAB}$ sont supplémentaires.

   b) Exprime mes $\widehat{C'AB}$ en fonction de mes $\widehat{AOB}$.

Récapitulons

L'angle $\widehat{CAB}$ est appelé un angle inscrit aigu.

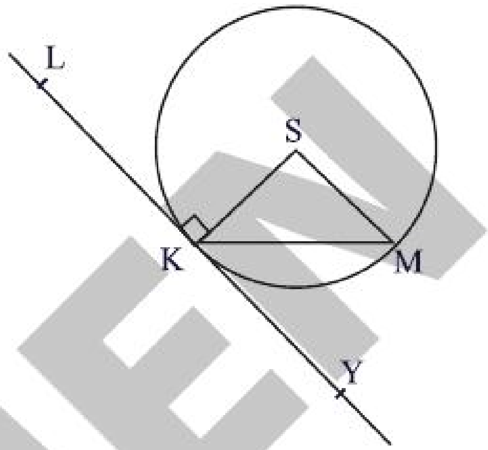
L'angle $\widehat{C'AB}$ est appelé un angle inscrit obtus.

La mesure d'un angle inscrit défini par une corde et une demi-tangente est égale à :

- la moitié de la mesure de l'angle au centre si l'angle inscrit est aigu.
- 180° diminué de la moitié de l'angle au centre si l'angle inscrit est obtus.

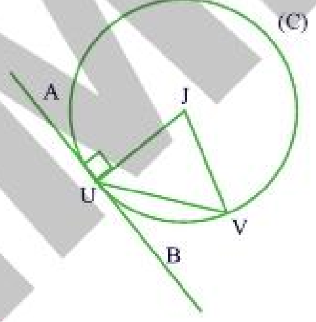
Exercices de fixation

7 Observe bien la figure codée ci-contre.
Recopie le numéro de chaque affirmation suivi de V si l'affirmation est vraie ou de F si l'affirmation est fausse.



1. Mes $\widehat{LKM} = \frac{1}{2}$ mes $\widehat{KSM}$.
2. Mes $\widehat{LKM} = 180° - \frac{1}{2}$ mes $\widehat{KSM}$.
3. Mes $\widehat{LKM} = \frac{1}{2}$ mes $\widehat{KSM} - 180°$.
4. Mes $\widehat{YKM} = \frac{1}{2}$ mes $\widehat{KSM}$.
5. Mes $\widehat{YKM} = 180° - \frac{1}{2}$ mes $\widehat{KSM}$.
6. Mes $\widehat{YKM} = \frac{1}{2}$ mes $\widehat{KSM} - 180°$.

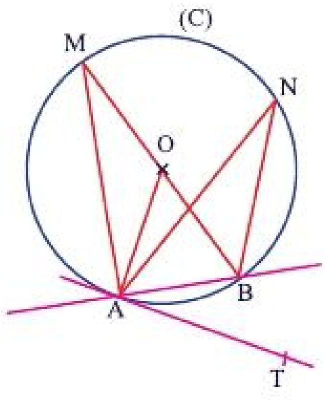
8 Sur la figure ci-contre, (C) est un cercle de centre J,
U et V sont des points de (C) tels que : mes $\widehat{UJV} = 75°$.
(T) est la tangente à (C) en U et A et B sont des points de (T).



1. Détermine la mesure de l'angle $\widehat{BUV}$.
2. Détermine la mesure de l'angle $\widehat{AUV}$.

Activité 5 Angles inscrits interceptant le même arc.

Sur la figure ci-dessous, (C) est un cercle de centre O. A, B, M et N sont des points de (C).



1. Détermine l'arc de cercle intercepté par les angles inscrits $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$.
2. Exprime la mesure de chacun des angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ en fonction de celle de l'angle $\widehat{AOB}$.
3. Justifie que : mes $\widehat{AMB}$ = mes $\widehat{ANB}$.

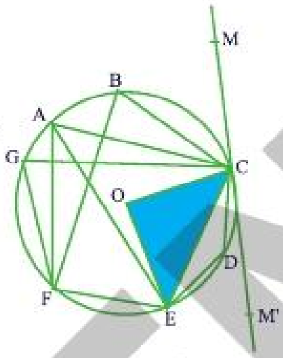
Soit [AT) la demi-tangente en A à (C) contenue dans le demi-plan de frontière (AB) ne contenant pas le point O.

Justifie que : mes $\widehat{TAB}$ = mes $\widehat{ANB}$.

Récapitulons

Des angles inscrits dans un cercle qui interceptent le même arc ont la même mesure.

Exercice de fixation

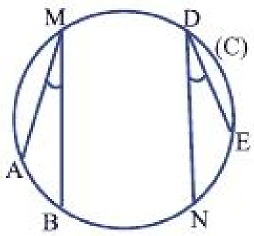


9 Observe la figure ci-contre.
Recopie le numéro de chaque affirmation suivi de V si l'affirmation est vraie ou de F si l'affirmation est fausse.

1. Les angles $\widehat{FGC}$ et $\widehat{EAC}$ ont la même mesure.
2. Les angles $\widehat{M'CE}$ et $\widehat{EAC}$ ont la même mesure.
3. Les angles $\widehat{FAC}$ et $\widehat{FBC}$ ont la même mesure.
4. Les angles $\widehat{FED}$ et $\widehat{EDC}$ ont la même mesure.
5. Les angles $\widehat{ECD}$ et $\widehat{EAC}$ ont la même mesure.

Activité 6 Angles inscrits interceptant des arcs de même longueur

Sur la figure ci-dessous, (C) est un cercle de centre O.



A, B, M, E, D et N sont des points de (C) tels que les arcs $\overset{\frown}{AB}$ et $\overset{\frown}{EN}$ ont la même longueur.

En utilisant le resultat de l'activité 5, justifie que : mes $\widehat{AMB}$ = mes $\widehat{EDN}$.

Récapitulons

On admet :
des angles inscrits qui interceptent des arcs de même longueur ont la même mesure.

Exercices de fixation

10 Réordonne les groupes de mots suivants pour trouver une propriété des angles inscrits.

ont la même mesure / qui interceptent / de même longueur / dans un cercle /des arcs / des angles.

11 (C) est un cercle. A, B et C sont des points de (C) tels que :

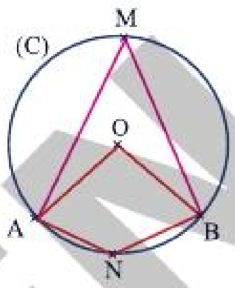
Longueur de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ = Longueur de l'arc $\overset{\frown}{BC}$= Longueur de l'arc $\overset{\frown}{AC}$.

Justifie que les angles $\widehat{ABC}$, $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ACB}$ ont la même mesure.

Activité 7 Angles inscrits interceptant deux arcs de même extrémités

Sur la figure ci-dessous, (C) est un cercle de centre O.

A, B, M et N sont des points de (C) tels que l'angle $\widehat{AMB}$ est aigu et l'angle $\widehat{ANB}$ est obtus.



1. a) Exprime la mesure de l'angle $\widehat{AMB}$ en fonction de celle de l'angle $\widehat{AOB}$.

   b) Exprime la mesure de l'angle $\widehat{ANB}$ en fonction de celle de l'angle $\widehat{AOB}$.
2. a) Calcule la somme des mesures des angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$.

   b) Conclus.

Récapitulons

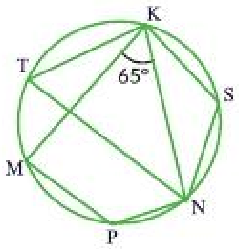
Deux angles inscrits qui interceptent deux arcs de mêmes extrémités sont supplémentaires.

Exercices de fixation

12 Pour chacune des affirmations ci-dessous, réponds par vrai (V) si l'affirmation est vraie ou par faux (F) si elle est fausse.

1. Deux angles inscrits qui interceptent deux arcs de mêmes extrémités sont complémentaires.
2. Deux angles inscrits qui interceptent deux arcs de mêmes extrémités sont adjacents.
3. Deux angles inscrits qui interceptent deux arcs de mêmes extrémités sont supplémentaires.
4. Deux angles inscrits qui interceptent deux arcs de mêmes extrémités sont correspondants.

13 Observe la figure ci-dessous où les points T, M, P, N, S et K appartiennent au même cercle.

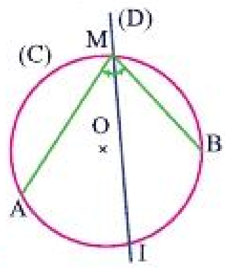


1. Justifie que les angles $\widehat{KTN}$ et $\widehat{KSN}$ sont supplémentaires.
2. Calcule mes $\widehat{MPN}$.

Activité 8 Bissectrice d'un angle inscrit et arc de cercle intercepté par cet angle

Sur la figure ci-contre, (C) est un cercle de centre O.

A, B et M sont des points de (C) ; (D) est la bissectrice de l'angle $\widehat{AMB}$ et I est le deuxième point d'interception de (D) et de (C).



1. Justifie que les arcs $\overset{\frown}{AI}$ et $\overset{\frown}{IB}$ ont la même longueur.
2. Énonce la propriété ainsi démontrée.

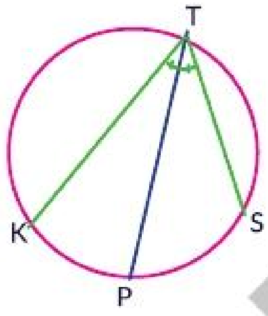
Récapitulons

La bissectrice d'un angle inscrit partage l'arc qu'il intercepte en deux arcs de même longueur.

Exercice de fixation

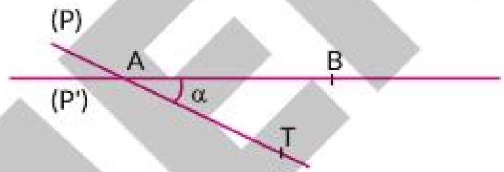
14 On considère la figure codée ci-dessous où les points T, S, P et K appartiennent au même cercle.

Justifie que les arcs de cercles $\overset{\frown}{KP}$ et $\overset{\frown}{PS}$ ont la même longueur.

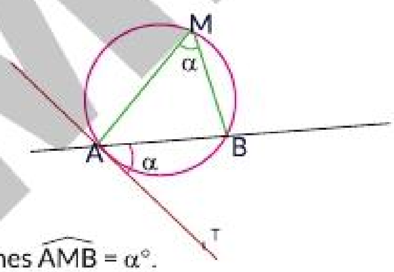


Activité 9 Arcs capables de mesure donnée

Soit A et B, deux points distincts du plan, (P) et(P') les deux demi-plans de frontière (AB) et T un point de (P') tel que : mes $\widehat{TAB} = \alpha°$ $(0 < \alpha < 180)$. ***Voir figure ci-contre.***



1. Justifie qu'il existe un cercle (C) et un seul passant par les points A et B et tangent à la droite (AT).
2. On se propose de déterminer l'ensemble des points M de (P) tel que : mes $\widehat{AMB} = \alpha°$.
   a) Justifie que le cercle circonscrit au triangle AMB admet (AT) pour tangente en A.
   b) Déduis du 1) que M appartient à un cercle fixe (C).
   c) Émet une conclusion.



3. Réciproquement, justifie que pour tout point de $(P) \cap (C)$, vérifie mes $\widehat{AMB} = \alpha°$.

On démontre de même que l'ensemble des points M de (P') est un autre arc de cercle.

4. Si on pose : $(\Gamma) = (P) \cap (C)$ et $(\Gamma') = (P') \cap (C')$ où (C') est le symétrique de (C) par rapport à la droite (AB).
   a) Vérifie que (Γ) et (Γ') sont symétriques par rapport à la droite (AB).
   b) Construis (Γ) et (Γ') pour $\alpha = 45°$.

Récapitulons

Le lieu géométrique des points M tels que mes $\widehat{AMB} = \theta°$, $0 < \theta < 180$, est la réunion des deux grands arcs de cercles symétriques par rapport à (AB). Ils sont appelés arcs capables de mesure $\theta°$ d'extrémités A et B.

Exercice de fixation

15 B et C sont deux points du plan et θ est un nombre réel tel que : $0 < \theta < 180$.

Pour chacune des affirmations ci-dessous, réponds par vrai (V) si l'affirmation est vraie ou par faux (F) si elle est fausse.

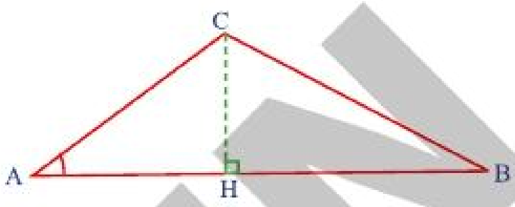
1. L'ensemble des points M du plan tels que mes $\widehat{BMC} = \theta°$ est une droite.
2. L'ensemble des points M du plan tels que mes $\widehat{BMC} = \theta°$ est un segment.
3. L'ensemble des points M du plan tels que mes $\widehat{BMC} = \theta°$ est la réunion de deux grands arcs de cercle symétriques par rapport à la droite (BC).
4. L'ensemble des points M du plan tels que mes $\widehat{BMC} = \theta°$ est une demi-droite.

Activité 10 Aire d'un triangle

Sur la figure ci-contre, ABC est un triangle et H le projeté orthogonal de C sur (AB).

On note $\mathcal{A}$, l'aire du triangle ABC.

1. Exprime $\mathcal{A}$ en fonction de CH et AB.
2. En considérant le triangle ACH rectangle en H, exprime CH en fonction de sin $\hat{A}$ et AC.
3. En posant : a = BC, b = AC et c = AB, déduis que : $\mathcal{A} = \frac{1}{2} bc \sin\hat{A}$.
4. En intervertissant successivement les rôles de $\hat{A}$ et $\hat{B}$ puis ceux de $\hat{B}$ et $\hat{C}$, donne deux autres formules de $\mathcal{A}$.



Récapitulons

L'aire d'un triangle peut être déduite d'un angle et de ses côtés adjacents. Si les deux côtés adjacents au sommet A d'un triangle ABC ont pour longueurs b et c, alors l'aire est donnée par : $\mathcal{A} = \frac{1}{2} bc \sin\hat{A}$.

Exercices de fixation

16 KST est un triangle tel que : k = TS ; t = KS et s = KT.

Écris les numéros des formules qui permettent de calculer l'aire $\mathcal{A}$ du triangle KST.

1. $\mathcal{A} = \frac{1}{2} sk \sin\hat{S}$; 2. $\mathcal{A} = \frac{1}{2} st \sin\hat{K}$; 3. $\mathcal{A} = \frac{1}{2} kt \sin\hat{T}$.

4. $\mathcal{A} = \frac{1}{2} sk \sin\hat{T}$; 5. $\mathcal{A} = \frac{1}{2} kt \sin\hat{S}$; 6. $\mathcal{A} = \frac{1}{2} sk \sin\hat{K}$.

17 ABC est un triangle tel que : AB = 7, AC = 5 et mes $\widehat{BAC}$=45°.

Détermine l'aire du triangle ABC.

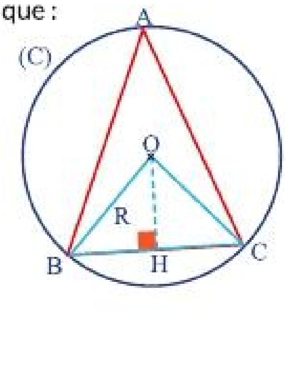
Activité 11 Théorème des sinus

Sur la figure ci-dessous, (C) est un cercle de centre O et de rayon R.

A, B et C sont des points de (C). H est le projeté orthogonal de O sur (BC).

On pose : a = BC, b = AC et c = AB.

1. Écris les trois formules de l'aire $\mathcal{A}$ du triangle ABC déduite d'un angle et de ses côtés adjacents.
2. En multipliant chacune des trois égalités obtenues ci-dessus par $\frac{2}{abc}$, démontre que : $\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}} = \frac{abc}{2\mathcal{A}}$.
3. En considérant le triangle rectangle BOH, démontre que : $a = 2R \sin\widehat{BOH}$.
4. Compare les mesures des angles BOH et Â.
5. Déduis-en que : $\frac{a}{\sin\hat{A}} = 2R$.



Récapitulons

ABC est un triangle, $\mathcal{A}$ son aire, R le rayon du cercle circonscrit à ABC.

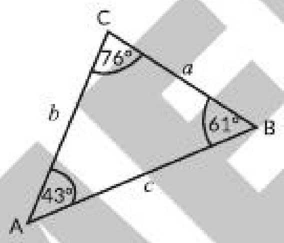
En posant : a = BC, b = AC et c = AB, on obtient : $\dfrac{a}{\sin\hat{A}} = \dfrac{b}{\sin\hat{B}} = \dfrac{c}{\sin\hat{C}} = \dfrac{abc}{2\mathcal{A}} = 2R$.

Ces égalités définissent le théorème des sinus.

Exercices de fixation

18 Observe la figure ci-contre et complète les pointillés par l'angle qui convient.

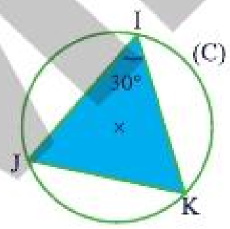
$$\frac{\sin \ldots\ldots}{b} = \frac{\sin \ldots\ldots}{c} = \frac{\sin \ldots\ldots}{a}$$



19 Sur la figure ci-contre, (C) est un cercle circonscrit au triangle IJK.

Le triangle IJK est tel que : JK = 4 cm et mes $\widehat{JIK}$ =30°.

Détermine le rayon du cercle (C).



20 PQR est un triangle inscrit dans un cercle (C) de rayon 4 cm.

PQR est tel que : PQ = 5 cm , QR = 10 cm et PR = 8 cm.

Détermine l'aire du triangle PQR.

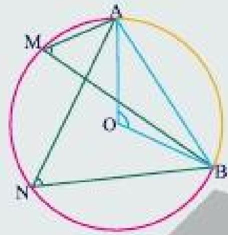
1. ANGLE INSCRIT ET ANGLE AU CENTRE ASSOCIÉ

Propriété 1

Un angle inscrit aigu dans un cercle a pour mesure la moitié de la mesure de l'angle au centre associé.

$$\text{mes } \widehat{AMB} = \frac{1}{2} \text{ mes } \widehat{AOB}.$$

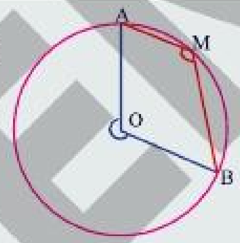
$$\text{mes } \widehat{ANB} = \frac{1}{2} \text{ mes } \widehat{AOB}.$$



Propriété 2

Un angle inscrit obtus dans un cercle a pour mesure la différence de 180° et de la moitié de la mesure de l'angle au centre associé.

On a : $mes\,\widehat{AMB} = 180° - \frac{1}{2} mes\,\widehat{AOB}$.



> Remarque

Le cas d'un angle inscrit dans un demi-cercle est le cas particulier pour lequel l'angle au centre est un angle plat, et donc l'angle inscrit est un angle droit.

Pour s'entraîner : Exercices 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5

2. ANGLE INSCRIT DÉFINI PAR UNE CORDE ET UNE DEMI-TANGENTE

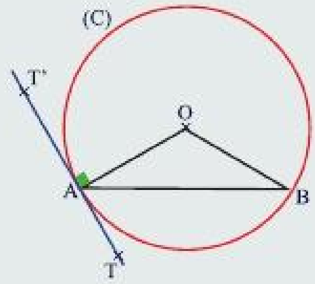
La propriété des angles inscrits se généralise aux angles que fait la corde qui sous-tend l'arc avec une tangente.

Propriété

Soit [AB] une corde d'un cercle (C) qui n'est pas un diamètre. [AT) la demi-tangente en A à (C) contenue dans le demi-plan de frontière (AB) ne contenant pas le point O, [AT') l'autre demi-tangente en A.

On a :

- mes $\widehat{TAB} = \frac{1}{2}$ mes $\widehat{AOB}$.
- mes $\widehat{T'AB} = 180° - \frac{1}{2}$ mes $\widehat{AOB}$.



Pour s'entraîner : Exercices 6 ; 7 ; 8

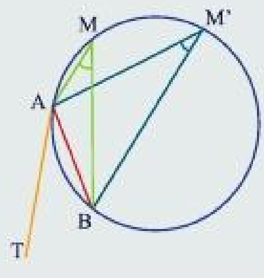
3. ANGLES INSCRITS INTERCEPTANT LE MÊME ARC

Propriété

Dans un cercle, des angles inscrits qui interceptent le même arc ont la même mesure.

Les angles $\widehat{AMB}$, $\widehat{AM'B}$ et $\widehat{TAB}$ interceptent l'arc $\overset{\frown}{AB}$ donc :

$mes\,\widehat{AMB} = mes\,\widehat{AM'B} = mes\,\widehat{TAB}$.



Pour s'entraîner : Exercices 9 ; 10

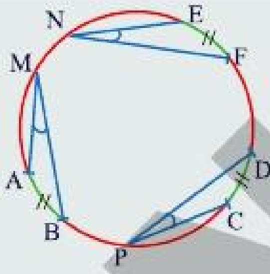
4. ANGLES INSCRITS INTERCEPTANT DES ARCS DE MÊME LONGUEUR

Propriété

Dans un cercle, des angles inscrits qui interceptent des arcs de même longueur ont la même mesure.

Les arcs $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{CD}$ et $\overset{\frown}{EF}$ ont la même longueur.

Donc : $mes\widehat{AMB} = mes\widehat{FNE} = mes\widehat{CPD}$.



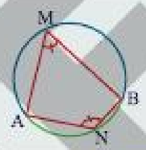
Pour s'entraîner : Exercices 11 ; 12 ; 13 ; 14

5. ANGLES INSCRITS INTERCEPTANT DEUX ARCS DE MÊME EXTRÉMITÉS

Propriété

Si M est un point de l'arc $\overset{\smile}{AB}$ et N un point de l'arc $\overset{\frown}{AB}$, alors les angles inscrits $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ sont supplémentaires.

On a : mes $\widehat{AMB}$ + mes $\widehat{ANB}$ = 180°.

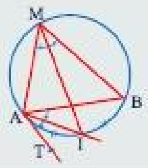


Pour s'entraîner : Exercice 15

6. BISSECTRICE D'UN ANGLE INSCRIT ET ARC DE CERCLE INTERCEPTÉ PAR CET ANGLE

Propriété

La bissectrice d'un angle inscrit partage l'arc intercepté en deux arcs de même longueur.



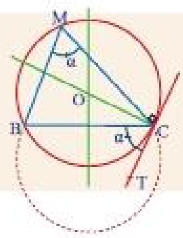
(MI) est la bissectrice de l'angle $\widehat{AMB}$; donc la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AI}$ est égale à la longueur de l'arc $\overset{\frown}{IB}$.
(AI) est la bissectrice de l'angle $\widehat{TAB}$; donc la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AI}$ est égale à la longueur de l'arc $\overset{\frown}{IB}$.

Pour s'entraîner : Exercice 16

7. ARC CAPABLE D'UN ANGLE DONNÉ

Définition

L'ensemble des points M du plan d'où l'on voit un segment [BC] sous un même angle, c'est à dire tel que l'angle $\widehat{BMC}$ garde une même mesure α, est un arc de cercle, appelé arc capable de l'angle α construit sur [BC].



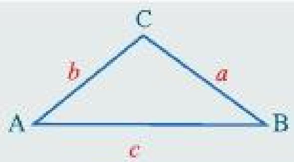
Pour s'entraîner : Exercices 17 ; 18 ; 19

8. AIRE D'UN TRIANGLE

Propriété

Soit ABC un triangle et $\mathcal{A}$ son aire. On pose :
BC = a, AC = b et AB = c.

On a : $\mathcal{A} = \frac{1}{2} bc \sin\hat{A} = \frac{1}{2} ac \sin\hat{B} = \frac{1}{2} ab \sin\hat{C}$.



Pour s'entraîner : Exercices 20 ; 21 ; 22

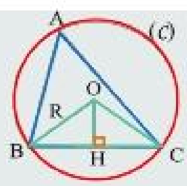
9. THÉORÈME DES SINUS

Propriété

Soit ABC un triangle, $\mathcal{A}$ son aire, (C) son cercle circonscrit et R le rayon de (C).

On pose : BC = a, AC = b et AB = c.

On a : $\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}} = \frac{abc}{2\mathcal{A}} = 2R$.



Pour s'entraîner : Exercices 23 ; 24 ; 25

QUESTION 1

Comment justifier que deux angles inscrits dans un cercle ont la même mesure ?

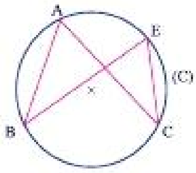
Méthode

Pour justifier que deux angles inscrits dans un cercle ont la même mesure, on peut utiliser l'une des méthodes suivantes :

- On justifie que les deux angles inscrits interceptent le même arc ;
  Ou
- On justifie que les deux angles inscrits interceptent des arcs de même longueur.

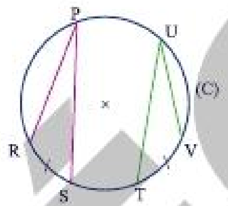
Exercice

1. On considère la figure ci-dessous.



Justifie que les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BEC}$ ont la même mesure.

2. On considère la figure ci-dessous.



Justifie que les angles $\widehat{RPS}$ et $\widehat{TUV}$ ont la même mesure.

Solution commentée

1. Les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BEC}$ sont deux angles inscrits dans le cercle (C).

Les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BEC}$ interceptent le même arc $\overset{\frown}{BC}$, donc : mes $\widehat{BAC}$ = mes $\widehat{BEC}$.

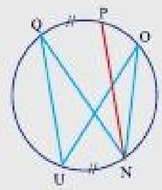
2. Les angles $\widehat{RPS}$ et $\widehat{TUV}$ sont deux angles inscrits dans le cercle (C').

L'angle $\widehat{RPS}$ intercepte l'arc $\overset{\frown}{RS}$ et l'angle $\widehat{TUV}$ intercepte l'arc $\overset{\frown}{TV}$.

Comme les arcs $\overset{\frown}{RS}$ et $\overset{\frown}{RS}$ ont la même longueur, donc : mes $\widehat{RPS}$ = mes $\widehat{TUV}$.

Exercice non corrigé

Observe bien la figure codée ci-dessous.
Justifie que les angles $\widehat{MQN}$, $\widehat{QNP}$ et $\widehat{MON}$ ont la même mesure.



QUESTION 2

Comment déterminer l'aire d'un triangle connaissant les longueurs de deux côtés et la mesure de l'angle formé par ces deux côtés ?

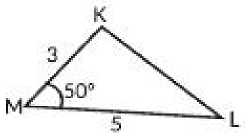
Méthode

Pour déterminer l'aire d'un triangle connaissant les longueurs de deux côtés et la mesure de l'angle formé par ces deux côtés, on peut utiliser la formule suivante :

- $A = \frac{1}{2} ab \sin \alpha$ où a et b sont les longueurs respectives de ces côtés et α la mesure de l'angle formé par ces côtés.

■ **Exercice**

On considère la figure codée suivante.



Détermine l'aire du triangle KML.

■ **Solution commentée**

$A_{KML} = \frac{1}{2} \times 3 \times 5 \sin 50°$.

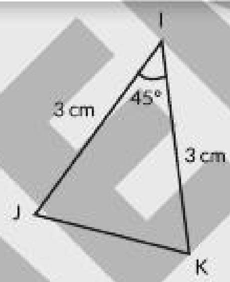
(On applique la formule : $A = \frac{1}{2} ab \sin \alpha$)

$A_{KML} = 5{,}74$.

■ **Exercice non corrigé**

IJK est un triangle tel que IJ = 3 cm, IK = 3 cm et mes $\widehat{JIK} = 45°$.

Détermine l'aire du triangle IJK.



QUESTION 3

Comment déterminer le rayon du cercle circonscrit à un triangle connaissant les longueurs des côtés de ce triangle et l'aire de ce triangle ?

Méthode

Pour déterminer le rayon du cercle circonscrit à un triangle connaissant les longueurs des côtés de ce triangle et l'aire de ce triangle, on peut utiliser la formule suivante :

- $R = \frac{abc}{4A}$ où a, b et c sont les longueurs respectives des côtés du triangle et A son aire.

■ **Exercice**

L'unité de longueur est le centimètre.
PQR est un triangle d'aire 10 cm^2 tel que :
PQ = 5 ; QR = 7 et PR = 8.
Détermine le rayon du cercle circonscrit au triangle PQR.

■ **Solution commentée**

On a : $R = \frac{PQ x QR x PR}{4 x A}$

(on applique la formule : $R = \frac{abc}{4A}$).

$R = \frac{5x7x8}{4x10} = 7$ *cm.*

■ **Exercice non corrigé**

L'unité de longueur est le centimètre.
SAB est un triangle d'aire 6 cm^2 tel que : SA = 4, AB = 3 et SB = 5.
Détermine le rayon du cercle circonscrit au triangle SAB.

QUESTION 4

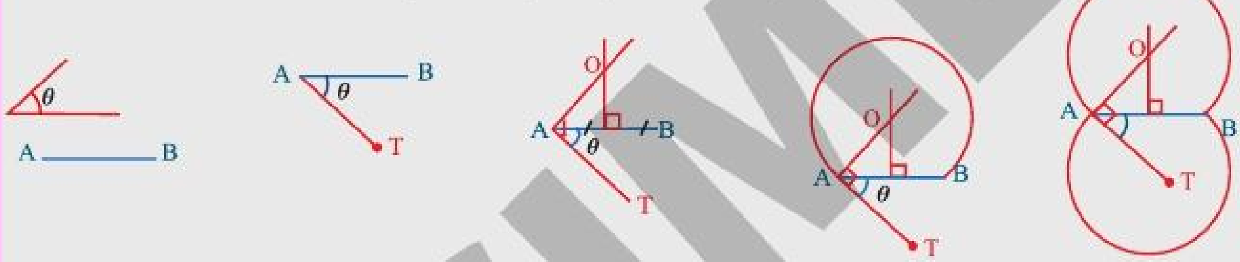
Comment construire un arc capable de mesure $\alpha°$?

Méthode

Pour construire un arc capable de mesure α , on peut procéder comme suit :

- On trace un segment [AB] ;
- On place un point T tel que mes $\widehat{BAT} = \alpha$;
- On trace la médiatrice du segment [AB] ;
- On trace la perpendiculaire à (AT) passant par C. Elle coupe la médiatrice de [AB] en O ;
- On construit le grand arc de cercle de centre O et rayon OB ;
- On construit le symétrique de cet arc de cercle par rapport à la droite (AB).

Film de construction du lieu géométrique des points M tels que mes $\widehat{AMB} = \theta°$



La réunion des deux arcs de cercles symétriques par rapport à (AB) donne deux arcs capables de mesure $\theta°$.

Exercice

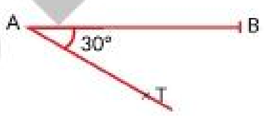
Soit un segment [AB] de longueur 3 cm.

Construis l'arc capable d'extrémités A et B de mesure 30°.

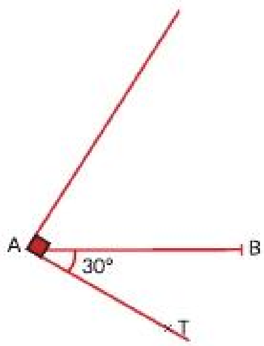
Solution commentée

✓ Je trace le segment [AB].

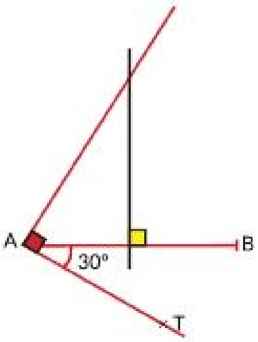
✓ Je construis un point T tel que : mes $\widehat{TAB} = 30°$.



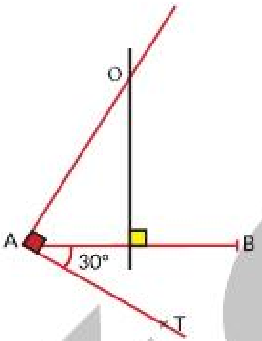
✓ Je trace la perpendiculaire à (AT) passant par A.



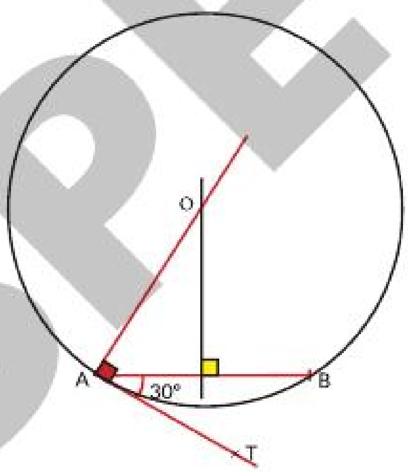
✓ Je trace la médiatrice du segment [AB].



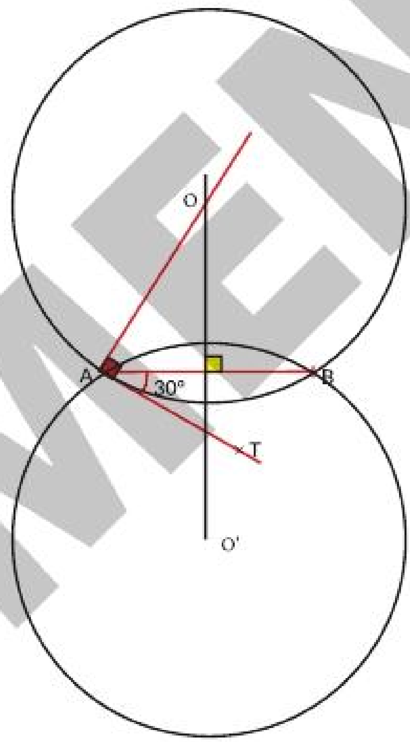
✓ Je marque le point d'intersection O de la perpendiculaire à (AT) et de la médiatrice du segment [AB].



✓ Je construis le grand arc de cercle (C) de centre O et d'extrémités A et B.



✓ Je construis le symétrique (C') de (C) par rapport à (AB).



■ **Exercice non corrigé**

Soit P et Q deux points du plan tels que : PQ = 6 cm.

Construis l'arc capable d'extrémités P et Q de mesure 60°.

Exercices de fixation

Angle inscrit et angle au centre associé

1 Dans chaque cas, O est le centre du cercle (C).

a. Pour chaque cas de figure, dis si l'angle marqué est un angle au centre. Si oui, trace en rouge l'arc qu'il intercepte après avoir reproduit la figure.

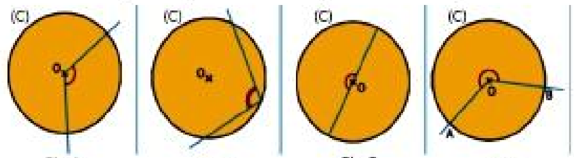


Fig 1 Fig 2 Fig 3 Fig 4

b. Pour chaque cas de figure, dis si l'angle marqué est un angle inscrit. Si oui, trace en vert l'arc qu'il intercepte après avoir reproduit la figure.

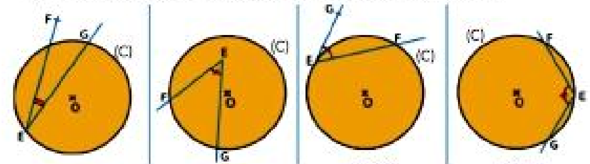
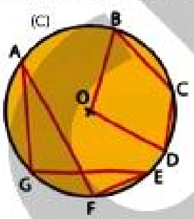


Fig 1 Fig 2 Fig 3 Fig 4

2 La figure ci-contre est un cercle de centre O. A, B, C, D, E, F et G sont des points de (C).

Recopie le numéro de chaque ligne du tableau suivi de V si l'affirmation est vraie ou de F si l'affirmation est fausse.

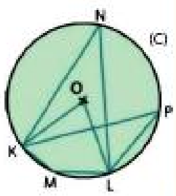


N°	Affirmations
1	$\widehat{EFA}$ est à la fois un angle inscrit et un angle au centre.
2	$\widehat{BOD}$ est un angle au centre du cercle (C).
3	$\widehat{OCD}$ est un angle au centre du cercle (C).
4	$\widehat{GAF}$ est un angle inscrit dans le cercle (C).
5	$\widehat{BCD}$ est un angle inscrit obtus dans le cercle (C).
6	$\widehat{AGE}$ est un angle inscrit associé à l'angle au centre $\widehat{AOE}$.

3 La figure ci-dessous est un cercle de centre O. K, L, M, N et P sont des points de (C).

a. Parmi les angles ci-dessous, écris celui ou ceux qui interceptent le petit arc d'extrémités K et L.
$\widehat{KML}$; $\widehat{KNL}$; $\widehat{KLM}$; $\widehat{KOL}$; $\widehat{KPL}$ et $\widehat{LKO}$.

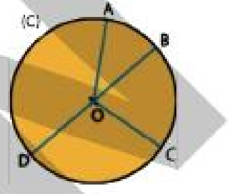
b. Parmi les angles ci-dessous, écris celui ou ceux qui interceptent le grand arc d'extrémités K et L.
$\widehat{KML}$; $\widehat{KNL}$; $\widehat{KLM}$; $\widehat{KOL}$; $\widehat{KPL}$ et LKO.



4 Sur la figure ci-dessous (C) est un cercle de centre O.

Les points A, B, C et D appartiennent à (C) et B et D sont diamétralement opposés.
Relie chaque angle inscrit à l'angle au centre qui intercepte le même arc.

Angle inscrit	Angle au centre
$\widehat{ACB}$ •	• $\widehat{BOC}$
$\widehat{BDC}$ •	• $\widehat{AOB}$
$\widehat{CBD}$ •	• $\widehat{COD}$
$\widehat{ABD}$ •	• $\widehat{AOD}$



5 Recopie le numéro de chaque ligne du tableau suivi de V si l'affirmation est vraie ou de F si l'affirmation est fausse.

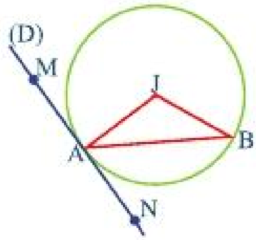
N°	Affirmations
1	La mesure d'un angle aigu inscrit dans un cercle est le double de la mesure de l'angle au centre associé.
2	Si $\widehat{AIB}$ est un angle obtus inscrit dans un cercle et $\widehat{AOB}$ son angle au centre associé alors Mes $\widehat{AIB} = 90° - \frac{1}{2}$ mes $\widehat{AOB}$.
3	Dans un cercle, si deux angles inscrits interceptent le même arc alors ils ont la même mesure.
4	Des angles inscrits dans un cercle qui interceptent des arcs de même longueur ont des mesures différentes.
5	Soit (C) un cercle et A et B deux points de (C). Si I est un point de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ et J un point de l'arc AB, alors les angles inscrits $\widehat{AIB}$ et $\widehat{AJB}$ sont supplémentaires.

Angles défini par une corde et une demi-tangente

6 La figure ci-contre représente un cercle (C) de centre J.

[AB] est une corde de (C), (D) est la tangente à (C) au point A et M et N sont deux points de (D).

Associe chaque élément de la colonne A à sa formule correspondante dans la colonne B.

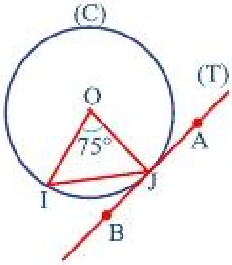


A	B
1. $mes\ \widehat{MAB}$	a. $\frac{1}{2}\ mes\ \widehat{AJB}$
2. $mes\ \widehat{NAB}$	b. $180° - \frac{1}{2} mes\ \widehat{AJB}$

Mes séances d'exercices

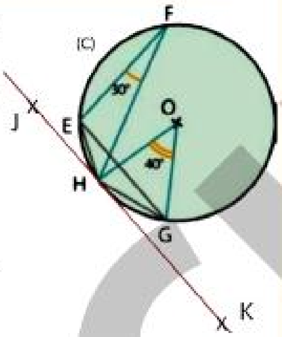
7 (C) est un cercle de centre O.

I et J sont des points de (C) tels que : *mes* $\widehat{IOJ} = 75°$.
(T) est la tangente à (C) en J. A et B sont deux points de (T).
Recopie le numéro de chaque ligne du tableau suivi de V si l'affirmation est vraie ou de F si l'affirmation est fausse.



N°	Affirmations
1	La mesure de l'angle $\widehat{AJI}$ est 37,5°.
2	La mesure de l'angle $\widehat{AJI}$ est 142,5°.
3	La mesure de l'angle $\widehat{BJI}$ est 37,5°.
4	La mesure de l'angle $\widehat{BJI}$ est 142,5°.

8 (Sur la figure ci-contre, les points E, F, G et H appartiennent au cercle (C) de centre O. (JK) est la tangente à (C) au point H.



Coche la bonne réponse.

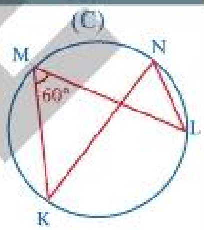
a. L'angle $\widehat{EHJ}$ mesure :
□ 30° □ 40° □ 15° □ 20°

b. L'angle $\widehat{GHK}$ mesure :
□ 30° □ 40° □ 15° □ 20°

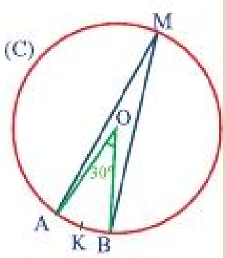
c. L'angle $\widehat{EHK}$ mesure :
□ 30° □ 150° □ 165° □ 160°

Angles inscrits interceptent le même arc

9 Sur la figure ci-contre, (C) est un cercle de centre I. K, M, L et N sont des points de (C) tels que :
mes $\widehat{KML} = 60°$. Donne la mesure de l'angle $\widehat{KNL}$. Justifie ta réponse.



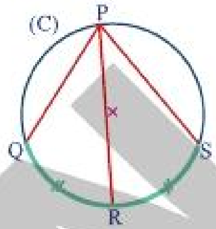
10 (C) est un cercle de centre O.
A et B sont deux points de (C) tels que mes $\widehat{AOB} = 30°$.
K est un point de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ et M un point de l'arc $\overset{\frown}{AB}$.
Pour chacune des propositions ci-dessous, trois réponses sont données, entoure la bonne réponse.



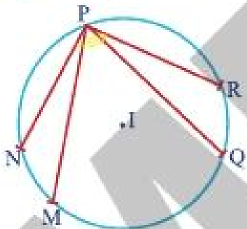
1. La mesure de l'angle $\widehat{AMB}$ est :
   a) 60° b) 90° c) 15°
2. La mesure de l'angle $\widehat{AKB}$ est :
   a) 165° b) 60° c) 15°

Angles inscrits interceptent des arcs de même longueur

11 (C) est un cercle.
P, Q, R et S sont des points de (C) tels que les arcs $\overset{\frown}{RS}$ et $\overset{\frown}{QR}$ ont la même longueur.
Justifie que la droite (PR) est la bissectrice de l'angle QPS .



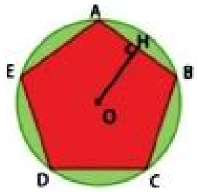
12 Sur la figure ci-dessous, (C) est un cercle de centre I.



M, P, N, Q et R sont des points de (C) tels que les arcs $\overset{\frown}{MN}$ et $\overset{\frown}{QR}$ ont la même longueur.

Parmi les angles représentés sur la figure, cite ceux qui ont la même mesure.
Justifie ta réponse.

13 La figure ci-contre représente un pentagone régulier ABCDE inscrit dans un cercle de centre O et de rayon 3.

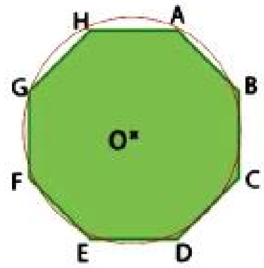


Pour chaque ligne du tableau, une seule affirmation est juste.

Recopie le numéro de la ligne suivi de la lettre qui correspondant à l'affirmation juste.

N°	Affirmation	a	b	c
1	L'angle $\widehat{AOB}$ mesure	36°	40°	72°
2	L'angle AEB mesure	15°	36°	72°
3	L'angle $\widehat{ABC}$ mesure	54°	108°	72°
4	La distance AB est égale à	3sin72°	6sin36°	6cos36°

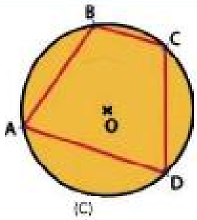
14 Le polygone ABCDEFGH ci-dessous est un octogone régulier inscrit dans un cercle de centre O. Justifie que les angles $\widehat{GAD}$ et $\widehat{ECH}$ ont la même mesure.



Angles inscrits interceptent deux arcs de même extrémités

15 On considère la figure ci-contre.

Justifie que les angles inscrits $\widehat{ADC}$ et ABC sont supplémentaires.



Bissectrice d'un angle inscrit et arc de cercle intercepté

16 (C) est un cercle. K, M et L sont des points de (C).
(D) est la bissectrice de l'angle $\widehat{KML}$ et O l'intersection de (C) et de (D).
Recopie le numéro de chaque ligne du tableau puis réponds par vrai (V) ou par Faux (F) à chacune des affirmations suivantes :

N	Affirmation
1	Les arcs $\widehat{KO}$ et $\widehat{OL}$ ont des longueurs différentes.
2	La longueur de l'arc $\widehat{KO}$ est le double de celle de l'arc $\widehat{OL}$.
3	Les arcs $\widehat{KO}$ et $\widehat{OL}$ ont la même longueur.
4	La longueur de l'arc $\widehat{OL}$ est le double de celle de l'arc $\widehat{KO}$.

Arc capable d'un angle donné

17 Réordonne les étapes suivantes de façon à donner une méthode de construction d'un arc capable de mesure θ° donnée.

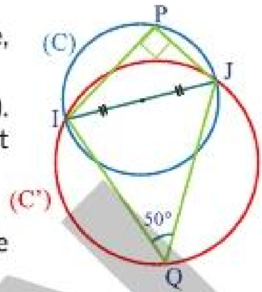
1. Construis le symétrique de cet arc de cercle par rapport à (AB).
2. Place un point P tel que mes $\widehat{PAB} = \theta°$.
3. Construis l'arc de cercle de centre O et de rayon OA situé dans le demi-plan de bord (AB) ne contenant pas P.
4. Trace un segment [AB].
5. Construis le point O, intersection de la perpendiculaire à (AP) en A et de la droite (D) médiatrice du segment [AB].

18 Soit [AB] un segment de longueur 6 cm. Construis, dans chacun des cas ci-dessous, l'ensemble des points M tels que :

a. Mes $\widehat{AMB} = 120°$;
b. Mes $\widehat{AMB} = 37°$;
c. Mes $\widehat{AMB} = 90°$.

(On donnera un programme de construction)

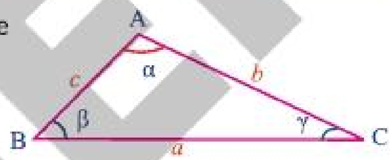
19 Sur la figure codée ci-contre, (C) et (C') sont deux cercles.
I et J sont deux points de (C) et (C').
P est un point de (C) et Q un point de (C').
Reproduis la figure puis :



1. Trace en rouge un arc capable de mesure 50°.
2. Trace en bleu un arc capable de mesure 90°.
3. Trace en vert un arc capable de mesure 130°.

Arc capable d'un angle donné

20 Observe le triangle ci-contre.



Pour chaque ligne du tableau, une seule affirmation est juste.
Recopie le numéro de la ligne suivi de la lettre qui correspond à l'affirmation juste.

N°	Affirmation	a	b	c
1	L'aire du triangle ABC est	$bc \sin\gamma$	$\frac{1}{2}ac\sin\gamma$	$\frac{1}{2}ab\sin\gamma$
2	L'aire du triangle ABC est	$\frac{1}{2}ac\sin\beta$	$\frac{1}{2}ac\cos\beta$	$\frac{1}{2}\frac{ac}{\tan\beta}$
3	L'aire du triangle ABC est	$\frac{1}{2}bc\sin\alpha$	$\frac{1}{2}bc\sin\beta$	$\frac{1}{2}bc\sin\gamma$

21 L'unité de longueur est le centimètre.
EFG est un triangle tel que : EF = 5, FG = 7, EG = 8 et mes $\widehat{FEG} = 30°$.
Indique la bonne réponse.
L'aire, en cm², du triangle EFG est :

a) 20 ; b) 10 ; c) 8,75 ; d) 14.

22 KML est un triangle tel que KL = 3 cm, KM = 8 cm et mes $\widehat{K} = 60°$.
Calcule l'aire $\mathcal{A}$ du triangle ABC.

Théorème des signes

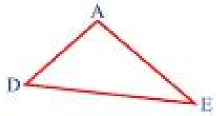
23 Soit PQS un triangle, $\mathcal{A}$ son aire, (C) son cercle circonscrit et R le rayon de (C).

On pose : PQ = s, PS = q et QS = p.

Recopie le numéro de chaque ligne du tableau puis réponds par vrai (V) ou par Faux (F) à chacune des affirmations suivantes :

N°	Affirmations
1	On a : $\frac{\sin\hat{P}}{p} = \frac{\sin\hat{Q}}{q} = \frac{\sin\hat{s}}{s}$
2	On a : $\frac{q}{\sin\hat{Q}} = \frac{pqs}{A}$
3	On a : $\frac{s}{\sin\hat{S}} = R$
4	On a : $pqs = 4\mathcal{A} \times R$
5	On a : $p = 2R\sin\widehat{P}$

24 L'unité de longueur est le centimètre.
Sur la figure ci-contre qui n'est pas en grandeurs réelles, ADE est un triangle tel que : AD = 10, AE = 11, mes $\widehat{ADE}$ =51° et l'angle $\widehat{E}$ est aigu.

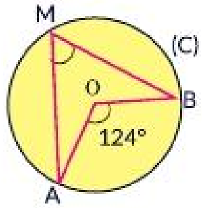


Calcule la mesure en degré de l'angle $\widehat{E}$.
(On donnera l'arrondi au degré près).

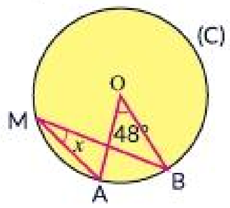
25 L'unité de longueur est le centimètre.
EFG est un triangle tel que : EG = 5, mes $\widehat{EFG}$ = 33° et mes $\widehat{EGF}$ = 67°.
Calcule l'arrondi au dixième de la distance EF.

Exercices de renforcement / approfondissement

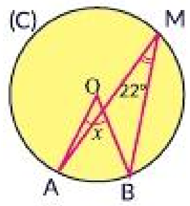
26 A, B et M sont trois points d'un cercle (C) de centre O. Dans chacun des cas suivants, détermine x.



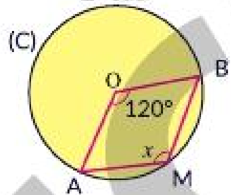
1er cas



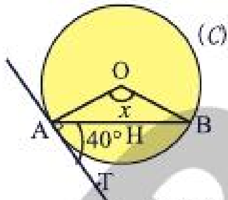
2e cas



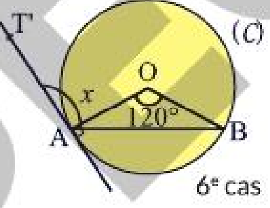
3e cas



4e cas

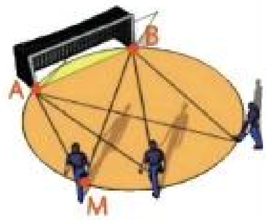


5e cas



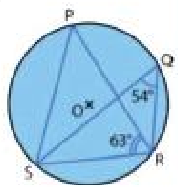
6e cas

27 Au cours d'une séance d'entraînement, on a noté des positions d'un footballeur sur la partie de cercle ci-contre. Il est représenté par le point M.



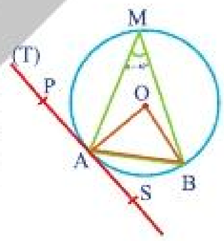
Ce footballeur essaie de marquer un but.
Après observation, Amine affirme qu'il existe un point de ce cercle où l'angle de tir $\widehat{AMB}$ est le plus grand.
Dis si Amine a raison. Justifie la réponse.

28 Sur la figure ci-contre, P, Q, R et S sont quatre points du cercle (C) de centre O.



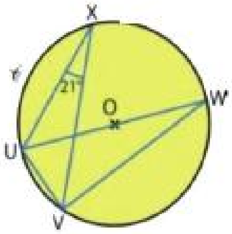
Kadio affirme que le triangle PSR est isocèle. Affoua ne partage pas cet avis. Départage-les.

29 (C) est un cercle de centre O. [AB] est une corde de (C), (T) est la tangente à (C) en A. P et S sont des points de (T). M est un point de (C) tel que mes $\widehat{AMB}$ = 40°.

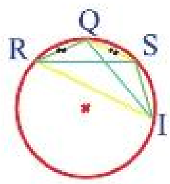


1. Détermine mes $\widehat{PAB}$.
2. Indique sur cette figure un arc capable d'un angle de 140°.

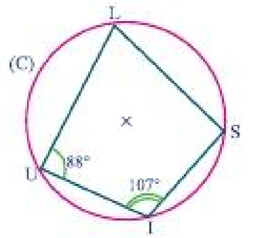
30 On considère la figure ci-contre.
U, V, W et X sont quatre points du cercle (C) de centre O. [UW] est un diamètre de ce cercle.
Détermine la mesure de chacun des angles du triangle UVW.



31 Sur la figure ci-contre,
Le triangle QRS est isocèle en Q et inscrit dans le cercle (C).
I est un point de l'arc $\overset{\frown}{RS}$ ne contenant pas Q.
Démontre que la droite (IQ) est la bissectrice de l'angle $\widehat{RIS}$.



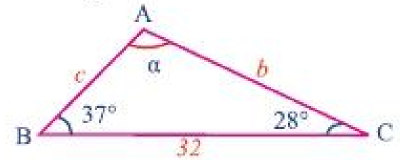
32 (C) est un cercle.
L, U, I et S sont des points de (C) tels que : mes $\widehat{LUI}$ = 88° et mes $\widehat{UIS}$ =107°.



1. Détermine mes $\widehat{LSI}$.
2. Détermine mes $\widehat{ULS}$.

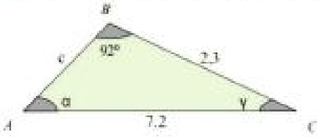
33 L'unité de longueur est le centimètre.

On considère la figure ci-dessous.



1. Justifie que l'arrondi d'ordre 1 de la distance AC est 21,2.
2. Calcule la distance AB. On donnera l'arrondi d'ordre 1.

34 L'unité de longueur est le centimètre.



On considère la figure ci-dessus.

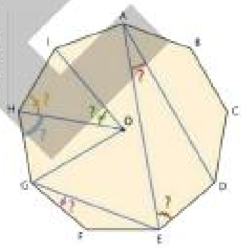
1. Détermine la valeur exacte de α.
2. Détermine la valeur exacte de c.

35 ABC est un triangle tel que mes Â = 45° et mes B= 60°.

Sachant que le cercle circonscrit à ABC a pour rayon 1 cm, calcule la longueur de chacun des côtés du triangle ABC.

36 1. On considère un polygone régulier à n sommets.
   a) Détermine la somme des mesures de ses n angles au centre.
   b) Détermine la mesure de chacun de ces angles au centre.
2. Construis un octogone régulier de centre K. Donne un programme de construction.

37 La figure ci-contre représente un polygone régulier à 9 côtés (ennéagone) de centre O.

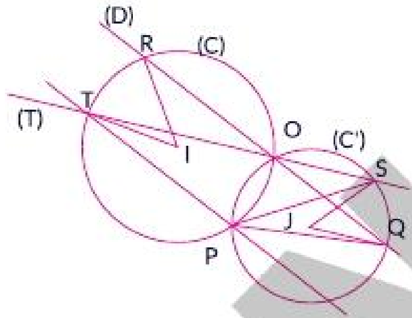


1. Détermine la mesure de ses angles au centre.
2. Détermine la mesure des angles marqués d'un point d'interrogation.
3. Détermine la mesure des angles de l'ennéagone régulier ABCDEFGHI.

38 Les cercles (C) et (C') de centres respectifs I et J son sécants en O et P.

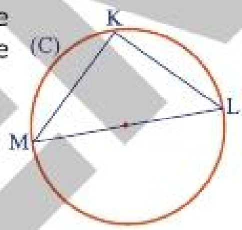
Les droites (D) et (L) passent par O. La droite (D) coupe (C) en R et (C') en Q ; la droite (L) coupe (C) en T et (C') en S. (voir figure)

a. Exprime mes $\widehat{RIT}$ en fonction de mes $\widehat{ROT}$.
b. Exprime mes $\widehat{SJQ}$ en fonction de mes $\widehat{SOQ}$.
c. Déduis que : mes $\widehat{RIT}$ = mes $\widehat{SJQ}$.



39 KML est un triangle isocèle rectangle en K et (C) son cercle circonscrit.

On pose : ML = a.



1. Justifie que : KM = $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
2. Exprime en fonction de a l'aire du triangle KML.

40 L'unité de longueur est le centimètre.

EFG est un triangle isocèle en E tel que : FG = 21 et mes $\widehat{EFG}$ =50°.

1. Calcule EF.
2. Justifie que le périmètre du triangle EFG est d'environ 53,68 cm.
3. Calcule l'aire du triangle EFG.

41 Depuis sa pirogue, Moulo (M) détecte deux autres pirogues à proximité.

La première pirogue P_1 se trouve à 360 m, la seconde P_2 à 250 m, et l'angle entre les deux pirogues mesure 34°. De plus l'angle $\widehat{MP_1P_2}$ mesure 84°.

1. Fais une figure.
2. Détermine l'aire du triangle MP_1P_2.
3. Détermine l'arrondi, à l'unité près, de la distance qui sépare ces deux pirogues

(On n'arrondira pas les calculs intermédiaires).

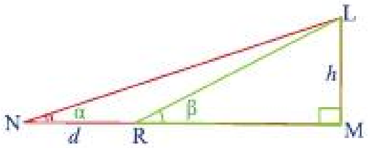
42 L'unité de longueur est le centimètre.

MNP est un triangle tel que : MN = $\widehat{7}$,

MP = 15, mes $\widehat{MPN}$ = 27° et l'angle N est obtus.

1. Justifie que l'arrondi au degré près de la mesure de l'angle $\widehat{N}$ est égale à 103°.
2. Calcule l'aire du triangle MNP.
3. Calcule le rayon du cercle circonscrit au triangle MNP.
4. On note I le centre du cercle circonscrit au triangle MNP. Calcule : mes $\widehat{MIN}$.

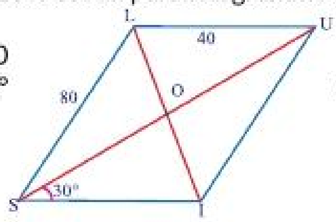
43 Observe la figure codée ci-dessous qui n'est pas en dimensions réelles.



On donne : d = 5 cm, $\hat{\alpha}$ = 40° et $\hat{\beta}$ = 45°.

Calcule h.

44 L'unité de longueur est le centimètre.
Sur la figure ci-dessous, LUIS est un parallélogramme de centre O tel que :
LU = 40 cm, LS = 80 cm, mes USI =30° et mes SOI =70°.

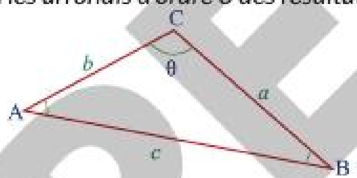


1. Détermine SU.
2. Détermine LI.
3. Détermine le rayon du cercle circonscrit au triangle SOI.

45 L'unité de longueur est le centimètre.
Sur la figure codée ci-dessous, ABC est un triangle tel que : BC = 5, AB = 8 et mes ABC =50°.
On pose : a = BC, b = AC, c = AB, α = mes $\widehat{BAC}$,
θ = mes $\widehat{BCA}$ et β = mes $\widehat{ABC}$.

1. En admettant que : $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$, calcule l'arrondi d'ordre 1 de b.
2. a) Détermine sin α (On donnera le résultat à 0,1 près).
   b) Déduis la valeur de α puis détermine θ.

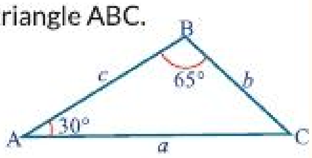
(On donnera les arrondis d'ordre 0 des résultats).



46 L'unité de longueur est le centimètre. Sur la figure codée ci-dessous, ABC est un triangle tel que :
a = 3, mes Â = 30° et mes B = 65.

1. a) Soit P le périmètre du triangle ABC.
Justifie que :

$$P = a\left(1+\frac{\sin\hat{B}+\sin\hat{C}}{\sin\hat{A}}\right)$$

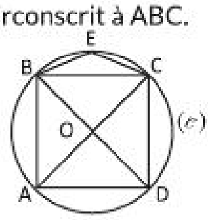


2. a) Déduis-en l'arrondi d'ordre 1 de P.
   b) Détermine l'aire A du triangle ABC.
   c) Déduis le rayon R du cercle circonscrit à ABC.

47 Sur la figure ci-contre :

- ABCD est un carré de centre O ;

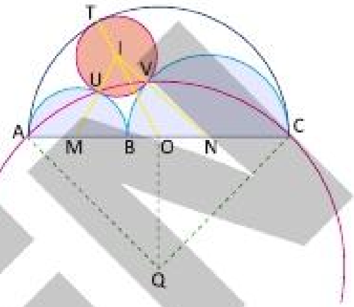
($\mathscr{C}$) est le cercle circonscrit au carré ABCD ;



- E est un point du cercle ($\mathscr{C}$).

1. Justifie que la mesure de l'angle $\widehat{BEC}$ est 135°.
2. Cite deux angles inscrits supplémentaires à l'angle $\widehat{BEC}$.

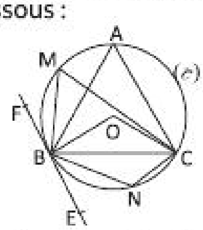
48 Sur la figure ci-contre, on a tracé trois demi-cercles formant la traditionnelle figure de l'arbelos.
C'est à dire un demi-cercle de diamètre [AC], un point B quelconque sur le diamètre et deux demi-cercles de diamètres [AB]et [BC].



1. Justifie que le quart de cercle de corde [AC] est l'arc capable de 135° d'extrémités A et C.
2. Cet arc capable recoupe les deux cercles de diamètres [AB]et [BC] en U et V. Justifie que le cercle tangent en U et V à ces cercles est tangent au cercle de diamètre [AB].

49 Soit ABC un triangle de périmètre $\mathscr{P}$ et r le rayon du cercle circonscrit à ce triangle .
Démontre que : $\mathscr{P} = 2r(\sin\hat{A}+\sin\hat{B}+\sin\hat{C})$.

50 L'unité de longueur est le centimètre.
Sur la figure ci-dessous :



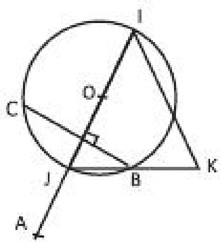
- ($\mathscr{C}$)est le cercle de centre O et de rayon 2 ;
- ABC est un triangle équilatéral ;
- (EF) est la tangente à ($\mathscr{C}$) au point B.

Détermine en degrés :
mes $\widehat{BMC}$; mes $\widehat{BOC}$; mes $\widehat{BNC}$; mes $\widehat{CBE}$ et mes $\widehat{CBF}$.

a) Calcule la distance AB.
b) Calcule l'aire $\mathscr{A}$ du triangle ABC.

On rappelle que : $\sin 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

51 Sur la figure ci-contre :



- (C) est le cercle de centre O et de diamètre [IJ] ;
- Le triangle IJK est équilatéral ;
- Le cercle (C) coupe [JK] en B ;
- Le point A est le symétrique de O par rapport à J ;

- Le point C est le symétrique de B par rapport à la droite (IJ).

1. Démontre que B est le milieu de [JK].
2. Démontre que la droite (AB) est la tangente à (C) au point B.
3. Détermine la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$.
4. Détermine la mesure de l'angle $\widehat{JBC}$.

52 L'unité de longueur est le centimètre .

$(\mathscr{C})$ est un cercle de rayon 3 et OPQ un triangle équilatéral inscrit dans le cercle $(\mathscr{C})$

1. Calcule le périmètre du triangle OPQ.
2. Calcule l'aire du triangle OPQ.

53 Un dodécagone est un polygone à 12 côtés.

1. Détermine la mesure des angles au centre d'un dodécagone régulier.
2. Construis un dodécagone régulier de centre O et de longueur de côté 3 cm.

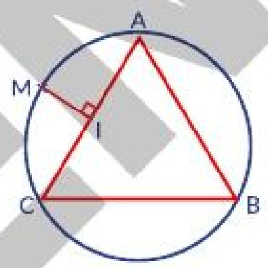
54 ABCDEFGH est un octogone inscrit dans un cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$ cm. I est le pied de la hauteur du triangle BOA issue de B.

1. Fais une figure.
2. Calcule la valeur exacte de OI.
3. Déduis-en la valeur exacte de AI.
4. Calcule la valeur exacte de IB.
5. Calcule l'aire de l'octogone ABCDEFGH.

55 La figure ci-contre est un cercle $(\mathscr{C})$ circonscrit à un triangle ABC. M est un point de l'arc $\overset{\frown}{AC}$ distinct de A et C.

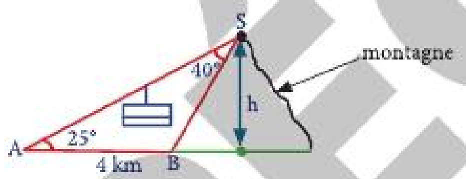
I est le milieu de [AC] et (MI)⊥(AC).

Démontre que la droite (MB) est bissectrice de l'angle $\widehat{AMC}$.



Situations complexes

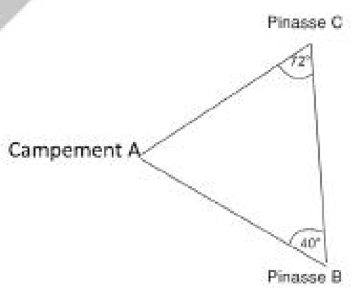
56 Pendant les vacances, un touriste observe un téléphérique transportant des passagers d'un point A qui se trouve à 4 km d'un point B de la montagne à un point S au sommet de la montagne. Les angles d'élévation aux points A et S sont respectivement de 25° et 40° comme l'indique la figure ci-dessous :



Il désire connaître la distance entre A et S puis, la hauteur h de cette montagne.

En utilisant tes connaissances sur les angles inscrits et en argumentant, aide le à déterminer ces différentes valeurs.

57 Un groupe d'élèves est en vacances dans un campement chez le père de l'un des leurs, dans une zone balnéaire. Une nuit, deux pinasses tombent en panne aux larges des côtes du campement.



Le père aperçoit les deux signaux de détresse.

Il veut déterminer la distance qui le sépare de chacune des pinasses afin d'informer les secouristes.

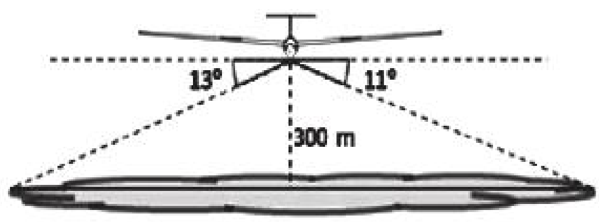
Il sait seulement que :

- les deux pinasses sont séparées de 1250 m ;
- mes $\widehat{ACB}$ = 72° et mes $\widehat{ABC}$ = 40°.

Faisant partie de ce groupe d'élèves, réponds à la préoccupation du père.

58 Lors d'une sortie à la plage, les élèves d'une classe de 2de C ont vu un planeur survolé un plan d'eau à une altitude de 300 m.

L'encadreur qui les a accompagnés, a affirmé par expérience que les angles de dénivellation des rives du plan d'eau sont de 11° d'une part et de 13° d'autre part comme l'indique la figure ci-contre.



Après quelques calculs, l'un des élèves affirme que la largeur du plan d'eau, à cent mètres près, est comprise entre 2850 m et 3000 m. Un autre prétend qu'elle est plutôt inférieure à 2850 m.

Départage les deux élèves.

8 ANGLES ORIENTÉS ET TRIGONOMÉTRIE

Commentaire de la Leçon

Le mot angle dérive du latin angulus, mot qui signifie « le coin ». L'angle orienté remonte à la plus haute antiquité et a été inventé par Isocèle. L'apprenant manipule les angles depuis l'école primaire et le premier cycle de l'enseignement secondaire général. En classe de troisième, les angles inscrits, le cosinus et la tangente d'un angle ont été étudiés.

En classe de seconde C, il s'agira d'aborder les notions d'angles orientés, de cercle trigonométrique et de mesure principale d'un angle orienté.

On confondra volontiers angles égaux et angles de mesures égales ainsi que angles opposés et angles de mesure opposées en vocabulaire et en écriture.

Les opérations sur les angles orientés ne sont pas au programme ainsi que la recherche de la mesure principale d'un angle orienté à partir d'une de ses mesures.

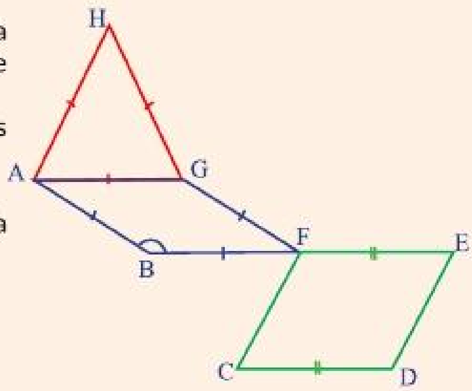
En classe de première C ou première D, l'étude des angles orientés et la trigonométrie sera approfondie par les formules d'addition, de duplication, de linéarisation et les équations ou inéquations trigonométriques. Les angles sont utilisés dans plusieurs domaines, notamment en optique.

Habiletés et Contenus

- **Connaître** la définition de la mesure d'un angle en radian ; la définition d'un angle orienté ; la définition de la mesure principale d'un angle orienté ; la définition du cercle trigonométrique ; les propriétés relatives au cosinus, au sinus et à la tangente d'un angle orienté ; la définition du cosinus d'un angle orienté ; la définition du sinus d'un angle orienté ; la définition de la tangente d'un angle orienté.
- **Reconnaître** deux angles orientés opposés.
- **Lire** la mesure principale d'un angle orienté.
- **Exprimer** la mesure d'un angle en radian.
- **Convertir** des mesures d'angles de degré en radian et inversement.
- **Déterminer** la mesure principale d'un angle orienté dans une configuration donnée ; les valeurs du sinus, du cosinus et de la tangente d'un angle orienté dont on connaît la mesure principale en utilisant le cercle trigonométrique.
- **Construire** un angle orienté connaissant la mesure principale.
- **Placer** sur le cercle trigonométrique le point-image d'un angle orienté connaissant la mesure principale.
- **Traiter une situation** faisant appel aux angles orientés et à la trigonométrie.

Situation d'Apprentissage

En prélude à la fête d'anniversaire de ton frère aîné, tu participes à la décoration. Tu découpes une feuille cartonnée à l'aide d'une paire de ciseaux. Tu obtiens la figure codée ci-contre.



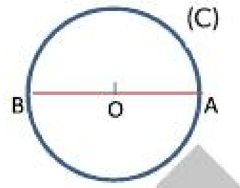
Après observation de la figure, ton frère aîné te donne les informations suivantes :

- AGH est un triangle équilatéral de sens direct ;
- ABFG et CDEF sont des parallélogrammes de sens direct tels que la mesure principale de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{BF}, \overrightarrow{BA}}\right)$ est égale à $\dfrac{5\pi}{6}$;
- L'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{FG}, \overrightarrow{FC}}\right)$ est un angle droit positif.

Il affirme que le sinus de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{DE}}\right)$ est nul.

Stupéfait, tu décides de vérifier cette affirmation en faisant des recherches sur les angles orientés et la trigonométrie.

Activité 1 Radian-Mesure en radian et mesure en degré



L'unité de longueur est le centimètre.
Sur la figure ci-contre qui n'est pas en grandeur réelle,
(C) est un cercle de centre O et de diamètre [AB] tel que le rayon OA= 1.
1. a) Reproduis cette figure sur ton cahier.

b) Place un point K sur le cercle (C) tel que la longueur de l'arc $\widehat{AK}$ soit égale au rayon de ce cercle.

2. Détermine la longueur de l'arc $\widehat{AB}$, la longueur du demi-périmètre du cercle (C), puis la longueur du quart de cercle (C).

3. a) Soit b la mesure d'un angle en degrés et c sa mesure en radian.
Exprime c en fonction de b.

b) Recopie et complète le tableau ci-dessous.

Mesures en degré	0°	15°		45°		90°	120°	150°	180°
Mesures en radian			$\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{12}$				π

Récapitulons

(C) est un cercle de centre O et A ∈ (C). K est un point de (C) tel que la longueur de l'arc $\widehat{AK}$ soit égale au rayon du cercle (C).

- La mesure en radian d'un angle $\widehat{AOK}$ est égale à la longueur de l'arc intercepté par cet angle sur le cercle de centre O et de rayon 1.
- On a : mes $\widehat{AOK}$ =1 radian = 1 rad.
- L'angle plat mesure π radian.
- La relation $c = \frac{\pi}{180} b$ (b en degré et c en radian) permet de convertir les degrés en radian et les radians en degré.

Exercices de fixation

1 Recopie dans ton cahier le numéro de chaque affirmation suivi de V si l'affirmation est vraie ou de F si l'affirmation est fausse.

1. La mesure en radian d'un angle $\widehat{AOB}$, où A et B sont deux points appartenant au cercle (C) de centre O de rayon 1, est égale à la moitié de la longueur de l'arc intercepté par l'angle $\widehat{AOB}$.

2. L'angle plat mesure π radian.

3. Si b et c sont les mesures respectives en degré et en radian d'un angle, alors $c = \frac{\pi}{180} b$.

4. Si b et c sont les mesures respectives en degré et en radian d'un angle, alors $b = \frac{180}{\pi} c$.

2 Recopie et complète le tableau ci-dessous.

Mesures en degré	30°	45°	127°	225°				
Mesures en radian					$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{12}$

Activité 2 Orientation du plan

Sur la figure ci-contre, (C) est un cercle de centre O. A et B sont deux points de (C). $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ sont deux vecteurs respectivement colinéaires à $\overrightarrow{OA}$ *et* $\overrightarrow{OB}$.

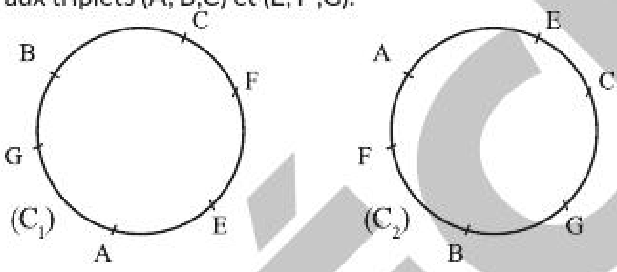
1. Donne le nombre de sens de parcours sur l'arc $\widehat{AB}$ du cercle (C).
2. Donne le nombre de sens de parcours sur le cercle (C).

Récapitulons

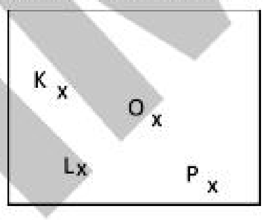
- Il y a deux sens de parcours sur l'arc $\widehat{AB}$ du cercle (C) : celui de A vers B et celui de B vers A.
- Il y a deux sens de parcours sur le cercle (C) : celui du sens des aiguilles d'une montre et celui du sens contraire des aiguilles d'une montre. Ce dernier est appelé sens trigonométrique ou sens direct.
- Orienter un cercle, c'est choisir un sens de parcours. Habituellement ce sens est le sens trigonométrique.
- Un cercle trigonométrique est un cercle de rayon 1 orienté dans le sens direct.
- Orienter un plan, c'est choisir tous les cercles qui ont le même sens.

Exercices de fixation

3 Sur les cercles (C_1) et (C_2) on a placé des points A, B, C, E, F et G.
Dans chaque cas, compare le sens de parcours associé aux triplets (A, B,C) et (E, F ,G).



4 Compare les sens de parcours des triplets (O,P,L) et (L,O,K) représentés ci-dessous.



Activité 3 Angle orienté de deux vecteurs

Soit $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires.

1. a) Place un point O dans le plan.
   b) Construis deux points A et B tels que : $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$.
   c) Trace un cercle (C) de centre O. On note M et N les points d'intersection respectifs de [OA) et [OB) avec (C).
2. a) Place un point O' dans le plan.
   b) Construis deux points A' et B' tels que : $\overrightarrow{O'A'} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{O'B'} = \vec{v}$.
   c) Trace un cercle (C') de centre O'. On note M' et N' les points d'intersection respectifs de [O'A') et [O'B') avec (C').
3. a) Justifie que les arcs $\widehat{MN}$ et $\widehat{M'N'}$ ont la même longueur.
   b) Compare le sens de parcours de M vers N et de M' vers N' sur les cercles (C) et (C').

Récapitulons

Les sens de parcours de M vers N est le même quelque soit le cercle. De plus les arcs $\widehat{MN}$ et $\widehat{M'N'}$ ont la même longueur.

On définit l'angle orienté de vecteur $\widehat{(\vec{u},\vec{v})}$ comme étant l'ensemble des couples $(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$ pour lesquels l'arc $\widehat{MN}$ garde la même mesure et est parcouru dans le même sens.

Exercice de fixation

5 ABC est un triangle équilatéral de sens direct, détermine le sens de parcours de chacun des angles orientés des vecteurs suivants : $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$; $(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}})$; $(\widehat{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}})$.

Activité 4 Mesure principale d'un angle orienté

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires.

1. a) Place un point O dans le plan.

b) Construis deux points A et B tels que : $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$.

c) Trace un cercle (C) de centre O. On note M et N les points d'intersection respectifs de [OA) et [OB) avec (C).

2. On pose : $mes\,\widehat{AOB}$ = θ° (0 < θ < 180).

On suppose que l'arc $\widehat{MN}$ est parcouru dans le sens direct.

On veut définir la mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ en fonction de la mesure θ de l'angle géométrique $\widehat{AOB}$.

Propose une définition.

Récapitulons

La mesure principale de l'angle orienté de vecteurs $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ est défini par :

- Mes $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ = $mes\,\widehat{AOB}$ si l'arc $\widehat{MN}$ est parcouru dans le sens direct ;
- Mes $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ = $-\,mes\,\widehat{AOB}$ si l'arc $\widehat{MN}$ est parcouru dans le sens indirect ;

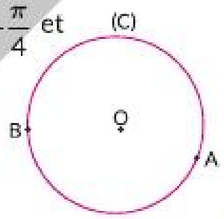
Exercices de fixation

6 Sur la figure ci-dessous, (C) est un cercle de centre O. A et B sont deux points de (C).

Place sur le cercle (C) les points E, F et G tels que :

$Mes(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OE}}) = \frac{\pi}{3}$; $Mes(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OF}}) = -\frac{\pi}{4}$ et

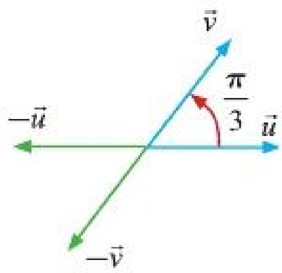
$Mes(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG}}) = \frac{\pi}{6}$.



7 ABC est triangle équilatéral de sens direct. Détermine la mesure principale en radians de chacun des angles orientés suivants : $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$; $(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}})$.

Activité 5 Angles orientés égaux, angles orientés opposés

On donne la figure codée ci-contre.



1. Détermine la mesure en radian des angles orientés suivants :

Mes $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$; Mes$(\widehat{\vec{v}, \vec{u}})$; Mes $(\widehat{\vec{u}, -\vec{v}})$; Mes $(\widehat{-\vec{u}, -\vec{v}})$; Mes $(\widehat{-\vec{u}, \vec{u}})$;
Mes $(\widehat{\vec{u}, -\vec{u}})$ et Mes $(\widehat{\vec{u}, \vec{u}})$.

2. Déduis en une relation entre

a) $(\widehat{-\vec{u}, -\vec{v}})$ et $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$; b) $(\widehat{-\vec{u}, \vec{u}})$ et $(\widehat{\vec{u}, -\vec{u}})$; c) $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ et $(\widehat{\vec{v}, \vec{u}})$;
d) $(\widehat{\vec{u}, -\vec{v}})$ et $(\widehat{\vec{v}, -\vec{u}})$.

3. Justifie que les angles orientés $(\widehat{\vec{u}, -\vec{v}})$ et $(\widehat{-\vec{u}, \vec{v}})$ sont égaux.

Récapitulons

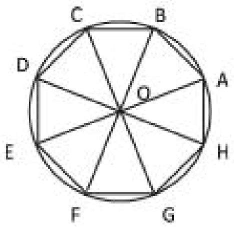
- Des angles orientés sont égaux si et seulement si leurs mesures principales sont égales.
- Des angles orientés sont opposés si et seulement si leurs mesures principales sont opposées.

Exercices de fixation

8 Sur la figure ci-contre, ABCDEFGH est un polygone régulier de centre O.

a) Détermine trois angles orientés égaux à $(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}})$.

b) Détermine trois angles orientés opposés à l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OF}})$.

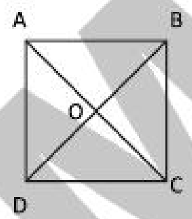


9 ABCD est un carré de centre O.
Parmi les angles orientés suivants

$(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}})$; $(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}})$; $(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}})$; $(\widehat{\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AD}})$.

1. Détermine un angle orienté opposé à $(\widehat{\overrightarrow{CO};\overrightarrow{CD}})$.

2. Détermine les angles orientés opposés à $(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}})$.



Activité 6 Angles orientés et transformations du plan

Soit O, M et N trois points non alignés du plan ;
(On fera trois figures différentes).
1. Soit $\vec{u}$ un vecteur quelconque et t la translation de vecteur $\vec{u}$. On désigne par O', M' et N' les images respectives des points O, M et N par t.
a) Construis les points O', M' et N'.
b) Exprime la mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{O'M'},\overrightarrow{O'N'}})$ en fonction de celle de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}})$.
c) Conclus.
2. Soit s la symétrie de centre O. On désigne par O', M' et N' les images respectives des points O, M et N par s.
a) Construis les points O', M' et N'.
b) Exprime la mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{O'M'},\overrightarrow{O'N'}})$ en fonction de celle de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}})$.
c) Conclus.
3. Soit f la symétrie orthogonale d'axe .On désigne par O', M' et N' les images respectives des points O, M et N par f.
a) Construis les points O', M' et N'.
b) Exprime la mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{O'M'},\overrightarrow{O'N'}})$ en fonction de celle de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}})$.
c) Conclus.

Récapitulons

- Les translations et les symétries centrales conservent les mesures des angles orientés.
- Les symétries orthogonales transforment les mesures des angles orientés en leurs opposés.

Exercices de fixation

10 Recopie dans ton cahier le numéro de chaque affirmation suivi de V si l'affirmation est vraie ou de F si l'affirmation est fausse.

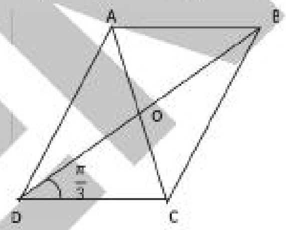
1. L'image d'un angle orienté par une symétrie orthogonale est un angle orienté de même mesure.
2. L'image d'un angle orienté par une translation est un angle orienté de mesure opposée à celle de l'angle orienté.
3. Les translations et les symétries centrales conservent les mesures des angles orientés.
4. Les symétries orthogonales conservent les mesures des angles orientés.

11 Sur la figure ci-dessous, ABCD est un parallélogramme de centre O tel que :

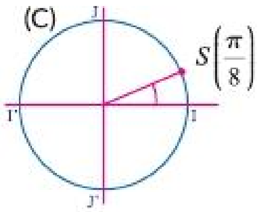
$$Mes(\widehat{\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DO}})=\frac{\pi}{3} \text{ et } Mes(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})=-\frac{3\pi}{7}.$$

En utilisant une transformation du plan, justifie que :

1. $Mes(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BO}})=\frac{\pi}{3}$.
2. $Mes(\widehat{\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}})=-\frac{3\pi}{7}$.



Activité 7 Cercle trigonométrique et point-image



Le repère (O, I, J) est orthonormé direct.
Sur la figure ci-contre, (C) est le cercle de centre O et de rayon 1.
Les points I et I' d'une part et les points J et J' d'autre part sont diamétralement opposés.
1. Place trois points N, P et Q appartenant à (C).
2. a) Donne une mesure à un degré près de $(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{ON}})$, $(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OP}})$, $(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OQ}})$.
   b) Convertis les mesures principales des angles orientés ci-dessus en radians.
   c) Vérifie que ces mesures appartiennent à $]-\pi; \pi]$.
3. a) Construis trois points R, S et T tels que : $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OS}}\right)=\frac{\pi}{8}$; $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OR}}\right)=\frac{3\pi}{4}$ et $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OT}}\right)=-\frac{\pi}{4}$.
b) Vérifie que les points R, S et T sont uniques.

Récapitulons

- Tout cercle de centre l'origine d'un repère orthonormé direct et de rayon l'unité est appelé cercle trigonométrique.
- À tout point du cercle trigonométrique, on associe un réel de $]-\pi, \pi]$. Réciproquement à tout nombre réel de $]-\pi, \pi]$, on associe un point- image du cercle trigonométrique.

Exercices de fixation

12 Voici des mots ou groupes de mots : rayon 1, centre O, trigonométrique.

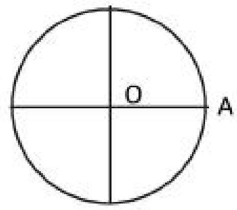
Recopie et écris à la place des pointillés, les mots ou groupes de mots qui conviennent.

Le cercle...est le cercle de ..

.... et de..

13 Reproduis et place sur le cercle trigonométrique ci-dessous, les points E, F, G et H associés à chacun des angles orientés de mesure principale respectives :

$\frac{\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{6}$; $-\frac{\pi}{12}$ et $\frac{\pi}{8}$.

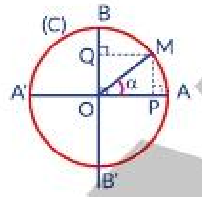


Activité 8 Cosinus, sinus et tangente d'un angle orienté

Sur la figure ci-contre, (C) est un cercle de centre O et de rayon 1.

M est un point du cercle trigonométrique (C) appartenant à l'arc $\widehat{AB}$.

P et Q sont les projetés orthogonaux de M respectivement sur les droites (A A') et (BB').



1. Justifie que : $\cos \widehat{AOM} = OP$ et $\sin \widehat{AOM} = OQ$.
2. Détermine l'abscisse et l'ordonnée du point M dans le repère (O, A, B) en fonction de $\cos \widehat{AOM} = OP$ et $\sin \widehat{AOM} = OQ$.
3. Déduis-en la valeur de $\tan \widehat{AOM}$, pour $M \neq B$.

Récapitulons

On admet :

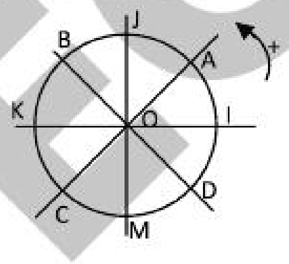
- Le cosinus de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM})$ est l'abscisse de M dans le repère orthonormé $(O ; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.
- Le sinus de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM})$ est l'ordonnée de M dans le repère orthonormé $(O ; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.
- La tangente de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM})$ est le rapport, quand il existe, de $\sin(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM})$ à $\cos(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM})$.
- Soit $(\widehat{\vec{u}\ ;\ \vec{v}})$ un angle orienté de mesure principale α, on a : $\cos(\widehat{\vec{u}\ ;\ \vec{v}}) = \cos\alpha = \overline{OP}$; $\sin(\widehat{\vec{u}\ ;\ \vec{v}}) = \sin\alpha = \overline{OQ}$.

Exercice de fixation

14 Les angles $\widehat{IOA}$, $\widehat{IOD}$, $\widehat{BOK}$ et $\widehat{KOC}$ ont la même mesure.

On désigne par α leur mesure principale. (C) est le cercle trigonométrique.

Observe la figure ci-contre.



Pour chaque ligne, une seule réponse est juste.

Écris le numéro de la ligne et la lettre de la colonne qui correspond à la bonne réponse.

		a	b	c	d
1	L'abscisse de A est	cosα	sinα	-sinα	-cosα
2	L'ordonnée de A est	cosα	sinα	-sinα	-cosα
3	L'abscisse de D est	cosα	sinα	-sinα	-cosα
4	L'ordonnée de D est	cosα	sinα	-sinα	-cosα
5	L'ordonnée de B est	cosα	sinα	-sinα	-cosα
6	L'abscisse de B est	cosα	sinα	-sinα	-cosα

15 On considère un nombre réel $a \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ tel que : $\sin a = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

1. Détermine la valeur exacte de $\cos a$.

2. Détermine le nombre réel a.

16 Soit x une mesure en radians d'un angle orienté tel que : $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ et $\sin x = 0{,}3$.

Calcule $\cos x$ et $\tan x$.

17 Soit x une mesure en radian d'un angle orienté tel que : $\cos x = -\frac{1}{2}$ et $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

1. Place le point-image M de x sur le cercle trigonométrique.
2. Indique la mesure principale de x en radians.

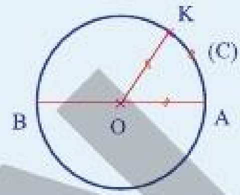
Résumé de la leçon

1. Présentation

La mesure en radians d'un angle est égale à la longueur de l'arc de cercle que cet angle intercepte sur le cercle de rayon 1.

(C) est un cercle de centre O et A un point de (C).

Lorsque K $\in$ (C) et l'angle au centre $\widehat{AOK}$ intercepte l'arc $\widehat{AK}$ de longueur égale à OA, on dit que la mesure de l'angle $\widehat{AOK}$ est égale à 1 radian.



Notation

Le radian est noté rad.

Remarques

- La longueur de l'arc intercepté par un angle au centre de mesure θ radians sur un cercle de rayon R est Rθ.
- L'angle plat mesure π radian.
- La longueur d'un cercle de rayon R est $2\pi R$.
- Soit b la mesure d'un angle en degrés et c sa mesure en radians ; on a : $c = \frac{\pi}{180} b$.

Pour s'entraîner : Exercices 1 ; 2

2. ANGLES ORIENTÉS DE VECTEURS

a) Orientation du plan

- **Orienter un cercle,** c'est choisir un sens de parcours sur ce cercle.

Il y'a deux orientations possibles : positive (directe) ou négative (indirecte).

- **Le sens direct** est le sens inverse des aiguilles d'une montre et le **sens indirect**, celui des aiguilles d'une montre.
- **Orienter un plan,** c'est orienter tous les cercles dans le même sens.
- **Un triangle ABC** est de sens direct si le cercle circonscrit au triangle ABC est parcouru dans le sens direct de A vers B.
- **Un carré ABCD** est de sens direct si le cercle circonscrit au carré ABCD est parcouru dans le sens direct de A vers B.

b) Angles orientés de deux vecteurs non nuls

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens, alors l'angle orienté $(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}})$ est appelé angle orienté nul.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraires, alors l'angle orienté $(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}})$ est appelé angle orienté plat.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires, on définit l'angle orienté de vecteur $(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}})$ comme suit :

O est un point du plan , A et B sont tels que : $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$, (C) est un cercle de centre O et M, N les points d'intersection respectifs de [OA) et [OB) avec (C).

L'angle orienté de vecteur $(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}})$ est l'ensemble des angles formés par les couples $(\vec{u}\,;\vec{v})$ pour lesquels l'arc $\widehat{MN}$ garde la même mesure et est parcouru dans le même sens M vers N.

Si les deux vecteurs $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ sont orthogonaux, alors $(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}})$ est appelé angle orienté droit positif si $\widehat{MN}$ est parcouru dans le sens positif et angle orienté droit négatif sinon.

Pour s'entraîner : Exercices 3 ; 4 ; 5 ; 6

c) Mesure principale d'un angle orienté

Soit $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right)$ un angle orienté.

Soit M et N les points d'intersection respectifs des demi-droites [OA) et [OB) avec un cercle de centre O.

La mesure principale en radian de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right)$, notée Mes$\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right)$, est définie par :

- Mes $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right) = 0$ si $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right)$ est l'angle nul ;
- Mes $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right) = \pi$ si $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right)$ est l'angle plat ;
- Mes $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right) = mes\,\widehat{AOB}$ si $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right)$ n'est ni l'angle nul, ni l'angle plat et le sens du déplacement de M vers N sur le petit arc $\overset{\frown}{MN}$ est le sens direct ;
- Mes $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right) = -\,mes\,\widehat{AOB}$ si $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right)$ n'est ni l'angle nul ni l'angle plat et le sens du déplacement de M et N sur le petit arc $\overset{\frown}{MN}$ est le sens indirect.

Pour s'entraîner : Exercices 7 ; 8 ; 9

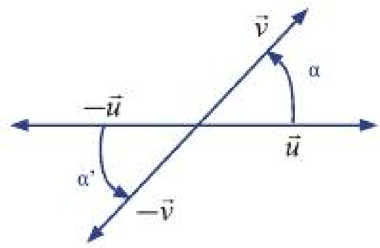
d) Angles orientés égaux, angles orientés opposés

- Les angles orientés $(\widehat{-\vec{u}, -\vec{v}})$ et $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ sont égaux.

De même, les angles orientés $(\widehat{-\vec{u}, \vec{v}})$ et $(\widehat{\vec{u}, -\vec{v}})$ sont égaux.

- Les angles orientés $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ et $(\widehat{\vec{v}, \vec{u}})$ sont opposés.

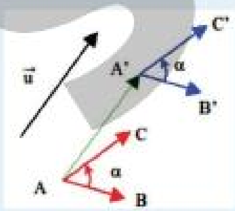
De même, les angles orientés $(\widehat{-\vec{u}, \vec{v}})$ et $(\widehat{-\vec{v}, \vec{u}})$ sont opposés.

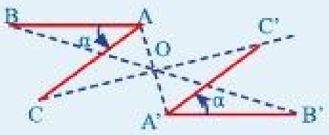


Pour s'entraîner : Exercices 10 ; 11 ; 12

e) Angles orientés et transformations du plan

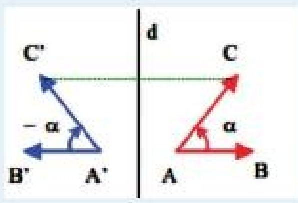
Une translation et une symétrie centrale transforment un angle orienté en un angle orienté égal.





$(\widehat{\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$ sont égaux.

Une symétrie orthogonale transforme un angle orienté en son opposé.



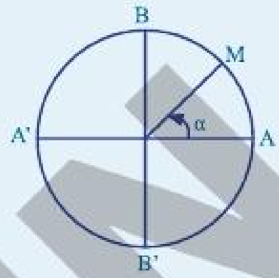
$(\widehat{\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$ sont opposés.

Pour s'entraîner : Exercices 13 ; 14

3. TRIGONOMÉTRIE

a) Cercle trigonométrique et points-images

On considère un repère orthonormé direct (O, A, B).
On appelle cercle trigonométrique, le cercle de centre O (origine du repère) et de rayon 1.
On considère le cercle trigonométrique ci-contre :



- À tout point M sur le cercle trigonométrique, on associe le nombre réel, mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OM}})$.
- Réciproquement, à tout nombre réel α de l'intervalle $]-\pi;\ \pi]$ est associé le point M du cercle trigonométrique tel que α soit la mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OM}})$.
- M est appelé image ou point image de α sur le cercle trigonométrique.

On note M (α).

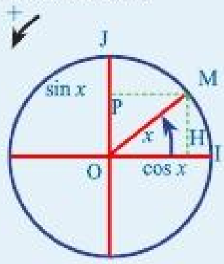
A est l'image de 0, A' est l'image de π, B est l'image de $\frac{\pi}{2}$, B' est l'image de $-\frac{\pi}{2}$.
On note : $A(0)$, $A'(\pi)$, $B(\frac{\pi}{2})$ et $B'(-\frac{\pi}{2})$.

Pour s'entraîner : Exercices 15 ; 16

b) Cosinus et sinus d'un angle orienté

Le plan orienté est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J).
On considère le cercle trigonométrique de centre O.

- Pour tout nombre réel x, il existe un unique point M du cercle trigonométrique tel que x soit une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{OI}\,;\,\overrightarrow{OM}})$.



- L'abscisse du point M est le cosinus de x, noté $\cos x$
- L'ordonnée du point M est le sinus de x, noté $\sin x$
- Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan orienté. Soit x la mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u}\,;\,\vec{v}})$.

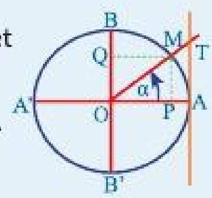
On a : $\cos(\widehat{\vec{u}\,;\,\vec{v}}) = \cos x$ et $\sin(\widehat{\vec{u}\,;\,\vec{v}}) = \sin x$.

Pour s'entraîner : Exercices 17 ; 18 ;19 ; 20 ; 21

c) Tangente d'un angle orienté

Le plan orienté est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J).
On considère le cercle trigonométrique de centre O.

- Soit un angle orienté $(\widehat{\vec{u}\,;\,\vec{v}})$ non droit. Soit x la mesure principale de $(\widehat{\vec{u}\,;\,\vec{v}})$ tel que : $x \neq \frac{\pi}{2}$ et $x \neq -\frac{\pi}{2}$. La tangente de $(\widehat{\vec{u}\,;\,\vec{v}})$ ou la tangente de x est définie par : $\tan(\widehat{\vec{u}\,;\,\vec{v}}) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.



- Pour tout angle orienté non droit de mesure principale α et M l'image de α sur le cercle trigonométrique. On a : $\tan(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}}) = \tan\alpha = \overline{AT}$.

Pour s'entraîner : Exercices 17 ; 18; 20

QUESTION 1

Comment convertir la mesure d'un angle exprimée en degré en radian et inversement ?

Méthode

- Pour convertir la mesure d'un angle exprimée en degré en radian, on peut procéder comme suit :
  - ✓ on multiplie cette mesure en degré par le nombre réel $\frac{\pi}{180°}$;
  - ✓ on fait les simplifications possibles.
- Pour convertir la mesure d'un angle exprimée en radian en degré, on peut procéder comme suit :
  - ✓ on multiplie cette mesure en radian par le nombre réel $\frac{180°}{\pi}$;
  - ✓ on fait les simplifications possibles.

Exercice

Convertis 36° en radian.

Convertis $\frac{5\pi}{6}$ en degré.

Solution commentée

Multiplions 36° par $\frac{\pi}{180°}$.

On a : $36 \times \frac{\pi}{180°} = \frac{36°\pi}{180°} = \frac{\pi}{5}$.

On conclut que : $36° = \frac{\pi}{5}$ rad.

Effectuons le produit de $\frac{5\pi}{6}$ par $\frac{180°}{\pi}$.

On a : $\frac{5\pi}{6} \times \frac{180}{\pi} = \frac{5 \times 180}{6} = 150$.

On conclut que : $\frac{5\pi}{6}$ rad = 150°.

Exercice non corrigé

Convertis 75° en radian.

Convertis $\frac{7\pi}{12}$ rad en degré.

QUESTION 2

Comment construire un angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}})$ de mesure *a*° ou *b* rad ?

Méthode

Pour construire un angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}})$ de mesure $a°$ ou b rad, on peut procéder comme suit :

-on trace la demi-droite [OA) d'origine O ;

-on place le point B tel que : Mes $\widehat{AOB} = a°$ ou Mes $\widehat{AOB} = b$ rad en tenant compte du signe de la mesure de l'angle :

- ✓ si la mesure de l'angle est positive, on place B tel que le sens de déplacement de A vers B soit le même que celui du sens contraire du déplacement des aiguilles d'une montre.
- ✓ si la mesure de l'angle est négative, on place B tel que le sens de déplacement de A vers B soit le même que celui du déplacement des aiguilles d'une montre.

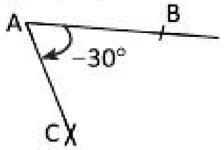
Exercice

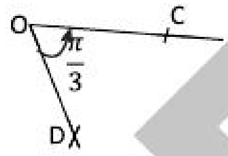
Construis les angles orientés $(\widehat{\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{OD}\,;\overrightarrow{OC}})$ tels que : $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}}) = -30°$ et

$\text{Mes}\,(\widehat{\overrightarrow{OD}\,;\overrightarrow{OC}}) = \frac{\pi}{3}$ rad.

Solution commentée

On applique les méthodes ci-dessus.

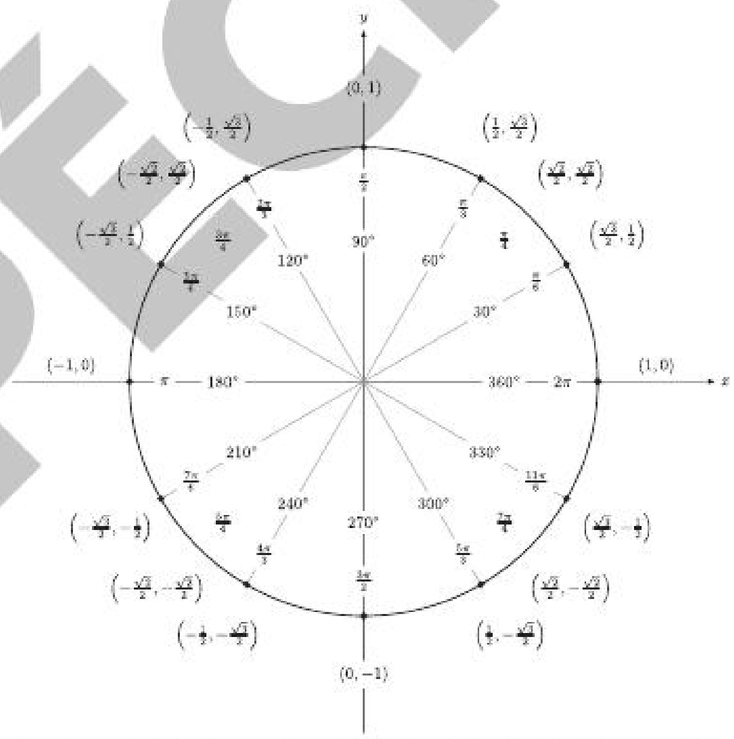




Exercice non corrigé

Place trois points M, P et S non alignés. Construis les angles orientés $(\widehat{\overrightarrow{MP}\,;\overrightarrow{MQ}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{PS}\,;\overrightarrow{PT}})$ tels que :
$\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{MP}\,;\overrightarrow{MQ}}) = -\frac{\pi}{2}$ et $\text{Mes}\,(\widehat{\overrightarrow{PS}\,;\overrightarrow{PT}}) = 75°$.

➲ Comprendre plus



Sur la figure précédente, l'abscisse de chaque point fourni la valeur du cosinus de l'angle correspondant et l'ordonnée la valeur du sinus. Par exemple, le point $M(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ permet de savoir que

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Exercices de fixation

Radian-Longueur d'un arc

1 Recopie le numéro de chaque affirmation suivi de V si l'affirmation est vraie ou de F si l'affirmation est fausse.

N°	Affirmations
1	Sur un cercle de rayon R, un angle de mesure α radians intercepte arc de longueur l = Rα
2	La longueur d'un cercle de rayon 1 est 2π.
3	Le radian est une unité de longueur.
4	Un angle droit mesure π rad .

2

1. Détermine la mesure en radians de chacun des angles ci-dessous :

a) 60° ; b) −30° ; c) 80° ; d) −135° ; e) −120°.

2. Détermine la mesure en degrés de chacun des angles ci-dessous :

a) $\frac{\pi}{3}$; b) $\frac{4\pi}{3}$; c) $-\frac{5\pi}{6}$; d) $1{,}5\,\pi$; c) $-\frac{\pi}{2}$.

Angle orienté de deux vecteurs

3 Le plan est orienté.

Recopie le numéro de chaque affirmation suivi de V si l'affirmation est vraie ou de F si l'affirmation est fausse.

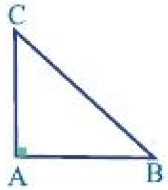
N°	Affirmations
1	Il existe deux angles orientés droits : l'un positif et l'autre négatif.
2	Si la mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ est différente de celle de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$, alors ces angles ne sont pas égaux.
3	Si la mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ est égale à celle de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$, alors ces angles sont égaux.
4	Si la mesure de l'angle géométrique $\widehat{AOB}$ est $\frac{\pi}{8}$ alors l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}})$ mesure toujours $\frac{\pi}{8}$.

4 Soit un carré ABCD de centre I tel que : $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Détermine une mesure de chacun des angles orientés suivants :

$\left(\widehat{\overrightarrow{IA},\overrightarrow{ID}}\right)$; $\left(\widehat{\overrightarrow{IB},\overrightarrow{ID}}\right)$; $\left(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}}\right)$; $\left(\widehat{\overrightarrow{BI},\overrightarrow{BA}}\right)$; $\left(\widehat{\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}}\right)$.

5 ABC est un triangle rectangle isocèle direct en A.



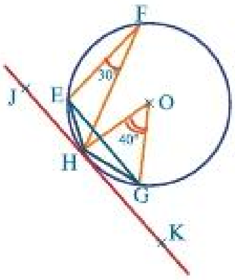
Détermine les mesures suivantes :

$Mes(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}})$, $Mes(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}})$ et $Mes(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$.

6

Sur la figure ci-contre, les points E, F, G et H appartiennent au cercle (C) de centre O. (JK) est la tangente à (C) au point H.

Recopie et coche la bonne réponse.



a) L'angle $(\overrightarrow{HE}, \overrightarrow{HJ})$ mesure :

☐ 30° ; ☐ 40° ; ☐ 15° ; ☐ 20°.

b) L'angle $(\overrightarrow{HG}, \overrightarrow{HK})$ mesure :

☐ −30° ; ☐ −40° ; ☐ −15° ; ☐ −20°.

c) L'angle $(\overrightarrow{HK}, \overrightarrow{HE})$ mesure :

☐ 140° ; ☐ 150° ; ☐ 165° ; ☐ 160°.

Mesure principale

7 Recopie le numéro de chaque affirmation suivi de V si l'affirmation est vraie ou de F si l'affirmation est fausse.

N°	Affirmations
1	La mesure principale d'un angle orienté est toujours positive.
2	Un angle orienté admet plusieurs mesures principales.
3	La mesure principale d'un angle orienté est un nombre de l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$.
4	La mesure principale d'un angle plat est $-\pi$.

8 Détermine les mesures principales parmi les mesures suivantes :

−180° ; π rad ; 35° ; 2π ; $-\pi$; 360° ; 175° ; −1,5 rad ; 90° ; 2,3rad .

9 ABCD est un losange de sens direct tel que BD = AD et I est le milieu de [AB].

On note O le centre de ce losange.

1. Détermine la mesure principale en radian des angles orientés suivants: $(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB})$ et $(\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{AD})$.
2. Justifie que la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BO})$ est $-\dfrac{2\pi}{3}$.

Angles orientés égaux- angles orientés opposés

10 ABCD est un carré de sens direct. Choisis la bonne réponse parmi les réponses suivantes :

1. La mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA})$ est égale à la mesure de l'angle orienté :

a) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$; b) $(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC})$;

c) $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$; d) $(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{BA})$.

2. La mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA})$ est l'opposé de la mesure de l'angle orienté :

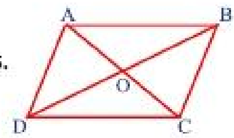
a) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$; b) $(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC})$;

c) $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$; d) $(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{BA})$.

11 La figure ci-contre est un parallélogramme ABCD de centre O.

Détermine :

a) deux angles orientés égaux.
b) deux angles orientés opposés.
c) deux angles orientés plats.
d) deux angles orientés nuls.



12 On considère un triangle ABC de sens direct isocèle en A. On note I le milieu de [BC] .

1. Cite des angles orientés égaux à l'angle orienté $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$.
2. Cite des angles orientés opposés à l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI})$.

Angles orientés et transformations du plan

13 Recopie le numéro de chaque affirmation suivi de V si l'affirmation est vraie ou de F si l'affirmation est fausse.

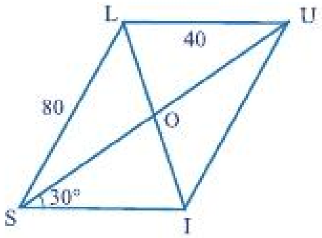
N°	Affirmations
1	Dans une symétrie centrale, un angle orienté se transforme en un angle orienté opposé.
2	Les translations conservent les mesures et l'orientation des angles.
3	Dans une symétrie orthogonale, un angle orienté se transforme en un angle orienté opposé.

14

Sur la figure ci-dessous, LUIS est un parallélogramme de centre O tel que :

$$Mes\left(\widehat{\overrightarrow{SI}, \overrightarrow{SU}}\right) = \frac{\pi}{6} \text{ et } Mes\left(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OS}}\right) = -\frac{7\pi}{18}.$$

En utilisant une transformation du plan, justifie que :



a) $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{UL}, \overrightarrow{UL}}\right) = \frac{\pi}{6}$;

b) $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{OU}, \overrightarrow{OL}}\right) = \frac{7\pi}{18}$.

Cercle trigonométrique – Points-images

15

Dessine le cercle trigonométrique sur la figure codée qui convient.

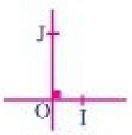


Figure 1

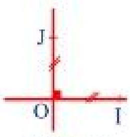


Figure 2

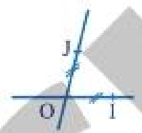


Figure 3

16

Dessine le cercle trigonométrique et place les points images des nombres réels suivants :

$\frac{\pi}{4}$; $-\frac{\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{6}$; $-\frac{5\pi}{4}$; $\frac{2\pi}{5}$.

Cosinus, sinus et tangente d'un angle orienté

17 Recopie le numéro de chaque affirmation suivi de V si l'affirmation est vraie ou de F si l'affirmation est fausse.

N°	Affirmations
1	Si $\cos a = 0{,}6$, alors $\sin a = 0{,}4$.
2	Si $\cos x = 1$, alors $x = \frac{\pi}{2}$.
3	Si deux angles orientés sont opposés, alors leurs sinus et leurs cosinus sont opposés.
4	Si deux angles orientés sont supplémentaires, alors leurs sinus sont opposés.
5	Si deux angles orientés sont opposés, alors leurs tangentes sont opposées.
6	Si deux angles orientés ont la même tangente, alors ils sont égaux ou supplémentaires.

18 Choisis la bonne réponse parmi les réponses proposées :

1. La valeur exacte de $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ est :

   a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; c) 0 ; d) π.

2. La valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ est :

   a) $\frac{1}{2}$; b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; d) 0.

3. La valeur exacte de $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ est :

   a) 0 ; b) $-\frac{1}{2}$; c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; d) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. La valeur exacte de $\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ est :

   a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; b) $-\frac{1}{2}$; c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; d) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

5. La valeur exacte de $\sin \pi$ est :

   a) 1 ; b) −1 ; c) 0 ; d) π.

6. La valeur exacte de $\tan \pi$ est :

   a) 1 ; b) −1 ; c) −2 ; d) 0.

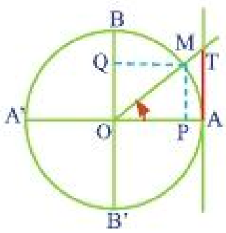
7. La valeur exacte de $\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ est :

   a) 1 ; b) −1 ; c) 0 ; d) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

19 Compare : $\cos\frac{3\pi}{4}$ et $\cos\frac{\pi}{4}$.

20 Soit le cercle trigonométrique de centre O et M le point image de α.

On pose : $\overline{OP} = \cos\alpha$, $\overline{OQ} = \sin\alpha$ et $AT = \tan\alpha$.



Recopie le numéro de chaque affirmation suivi de V si l'affirmation est vraie ou de F si l'affirmation est fausse.

N°	Affirmations
1	On a : $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.
2	On a : $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1$.
3	On a : $\lvert\sin\alpha\rvert \leq 1$.
4	On a : $T(1 ; \tan\alpha)$.
5	$\tan\alpha < 0$.

21 a est un nombre réel tel que : $\sin a = \frac{1}{4}$.
Détermine la valeur exacte de $\cos a$ dans chacun des cas suivants :

a) $0 \leq a \leq \frac{\pi}{2}$; b) $\frac{\pi}{2} \leq a \leq \pi$.

Exercices de renforcement/approfondissement

22 Recopie et complète le tableau suivant :

Degrés	60	75	135			
Radians				$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{12}$	2

23 Soit un carré ABCD de centre I tel que $Mes(\widehat{\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}}) = \frac{\pi}{2}$.

1. Justifie que : $Mes(\widehat{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CI}}) = \frac{3\pi}{4}$.
2. Détermine une mesure de chacun des angles orientés suivants :

$(\widehat{\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{CI}})$; $(\widehat{\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{BI}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB}})$.

24 Dans chacun des cas suivants, place un angle θ sur le cercle trigonométrique, puis donne les signes de $\cos\theta$, $\sin\theta$ et $\tan\theta$.

1^er^ cas : $\theta \in \left]0 ; \frac{\pi}{2}\right[$; 2^ème^ cas : $\theta \in \left]\frac{\pi}{2} ; \pi\right[$;

3^ème^ cas : $\theta \in \left]-\pi ; \frac{-\pi}{2}\right[$; 4^ème^ cas : $\theta \in \left]\frac{-\pi}{2} ; 0\right[$.

25 En utilisant le cercle trigonométrique, recopie et remplace les pointillés avec : $\cos x$, $\sin x$, $-\cos x$ ou $-\sin x$.

$\cos(-x) = ...$; $\cos(\pi - x) = ...$; $\cos(\pi + x)$ ... ;

$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = ...$; $\cos(\frac{\pi}{2} + x) = ...$;

$\sin(-x) = ...$; $\sin(\pi - x) = ...$; $\sin(\pi + x)$ ... ;

$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = ...$; $\sin(\frac{\pi}{2} + x) = ...$.

26

1. Soit x un nombre réel. Justifie que : $(\sin x - \cos x)^2 + (\sin x + \cos x)^2$ est un entier naturel.
2. Soit $x \in]-\pi ; \pi]$ tel que $x \neq \frac{\pi}{2}$ et $x \neq -\frac{\pi}{2}$.

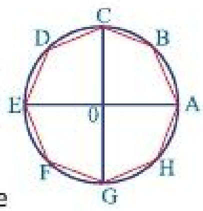
Justifie que : $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$.

27 a est un nombre réel tel que :

$\cos a = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$ *et* $0 \leq a \leq \frac{\pi}{2}$.

1. Détermine la valeur exacte de $\sin a$.
2. À l'aide d'une calculatrice, donne la valeur arrondie à 10^{-2} radian près de a.

28 Sur la figure ci-contre, ABCDEFGH est un octogone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique de centre O.



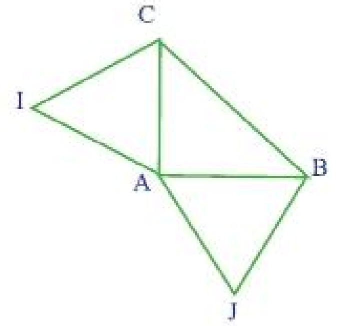
1. a) Détermine la mesure principale des angles orientés $(\widehat{\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OG}})$.

   b) Justifie que : $Mes(\widehat{\overrightarrow{GB}; \overrightarrow{GC}}) = \frac{\pi}{8}$.
2. Détermine la mesure principale des angles orientés suivants : $(\widehat{\overrightarrow{AF}; \overrightarrow{AB}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AH}})$.

29 ACE est un triangle isocèle direct de sommet principal A tel que : AC = 5 et $Mes(\widehat{\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AE}}) = \frac{2\pi}{5}$.

1. Construis le triangle équilatéral direct AEF et le triangle ABC isocèle rectangle direct en A.
2. Détermine la mesure principale de chacun des angles orientés suivants : $(\widehat{\overrightarrow{AF}; \overrightarrow{AB}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{EC}; \overrightarrow{BC}})$.

30 Le plan est muni d'un repère orthonormé direct.
Sur la figure ci-dessous :



- ABC est un triangle rectangle isocèle en A et de sens direct ;
- AIC et BJA sont deux triangles équilatéraux indirects.

1. a) Détermine la mesure principale de chacun des angles orientés suivants : $\widehat{(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})}$; $\widehat{(\overrightarrow{AJ};\overrightarrow{AB})}$ et $\widehat{(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AI})}$.

b) Déduis-en la mesure principale de l'angle orienté $\widehat{(\overrightarrow{AJ};\overrightarrow{AI})}$.

c) Détermine la nature du triangle AIJ. Déduis-en la mesure principale de l'angle orienté $\widehat{(\overrightarrow{JI};\overrightarrow{JA})}$.

2. a) Détermine la mesure principale de chacun des angles orientés suivants : $\widehat{(\overrightarrow{JA};\overrightarrow{JB})}$; $\widehat{(\overrightarrow{JB};\overrightarrow{BA})}$ et $\widehat{(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})}$.

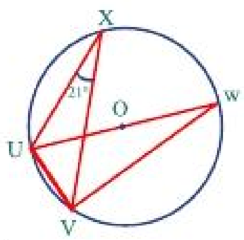
b) Déduis-en la mesure principale de l'angle orienté $\widehat{(\overrightarrow{JB};\overrightarrow{BC})}$.

3. a) Déduis des consignes **1 b** et **2 b** la mesure principale de l'angle orienté $\widehat{(\overrightarrow{JI};\overrightarrow{BC})}$.

b) Justifie que les droites (BC) et (IJ) sont parallèles.

(On admettra dans tout l'exercice que :
$\widehat{(\overrightarrow{MN};\overrightarrow{MP})}+\widehat{(\overrightarrow{MP};\overrightarrow{MQ})}=\widehat{(\overrightarrow{MN};\overrightarrow{MQ})}$.

31 On considère la figure ci-contre.
U, V, W et X sont quatre points du cercle (C) de centre O tel que [UW] soit un diamètre.

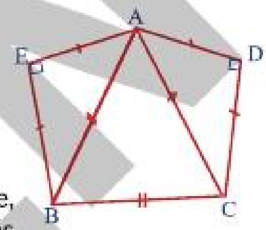


1. Détermine la mesure principale de chacun des angles orientés ci-dessous : $\widehat{(\overrightarrow{WU};\overrightarrow{WV})}$, $\widehat{(\overrightarrow{UW};\overrightarrow{UV})}$ et $\widehat{(\overrightarrow{VU};\overrightarrow{VW})}$.
2. Calcule :
mes $\widehat{(\overrightarrow{WU};\overrightarrow{WV})}$ + mes$\widehat{(\overrightarrow{UV};\overrightarrow{UW})}$ + mes$\widehat{(\overrightarrow{VW};\overrightarrow{VU})}$.

32 E et F sont deux points distincts du plan. Détermine et représente l'ensemble des points M du plan tels que :

1. Mes $\widehat{(\overrightarrow{ME},\overrightarrow{MF})}=0$.
2. Mes $\widehat{(\overrightarrow{ME},\overrightarrow{MF})}=\pi$.
3. Mes $\widehat{(\overrightarrow{ME},\overrightarrow{MF})}=-\frac{\pi}{2}$.

33 Sur la figure ci-contre, ABC est un triangle équilatéral ;
ADC et AEB sont des triangles rectangles isocèles.



1. Détermine la mesure principale, en radian, des angles orientés ci-dessous :

a) $\widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})}$ b) $\widehat{(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DA})}$ c) $\widehat{(\overrightarrow{EB},\overrightarrow{EA})}$

d) $\widehat{(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD})}$ e) $\widehat{(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD})}$ f) $\widehat{(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BE})}$

2. a) Donne trois angles orientés égaux à l'angle $\widehat{(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD})}$.

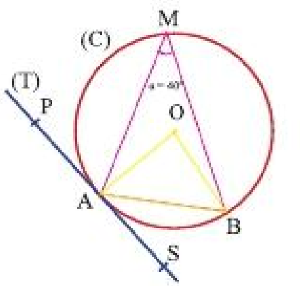
b) Donne trois angles orientés opposés à l'angle $\widehat{(\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BA})}$.

34 ABC est un triangle équilatéral de sens direct.
D est le symétrique de A par rapport à B.

1. Détermine la mesure principale en radian des angles orientés suivants : $\widehat{(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BC})}$; $\widehat{(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DB})}$ et $\widehat{(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD})}$.
2. Démontre que le triangle ACD est rectangle.

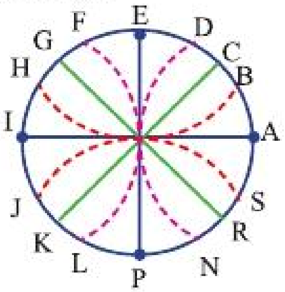
35 (C) est un cercle de centre O. [AB] est une corde de (C), (T) est la tangente à (C) en A. P et S sont des points de (T).
M est un point de (C) tel que : Mes $\widehat{(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB})}=40°$.

1. Détermine, en radians, Mes $\widehat{(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})}$.
2. Détermine, en radians, Mes $\widehat{(\overrightarrow{AP};\overrightarrow{AB})}$.



36

1. Sur la figure ci-dessous, (C) est le cercle trigonométrique et A, B, C, ...et S sont des points remarquables de (C).



Dans chacun des cas ci-dessous, cite les points M du cercle (C) correspondant à :

a) $\sin x = 0$; **b)** $\cos x = -1$; **c)** $\sin x = 1$

d) $|\cos x| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; **e)** $\sin^2 x = \dfrac{3}{4}$;

f) $\cos^2 x - \dfrac{1}{4} = 0$; **g)** $\sin x = \cos x$.

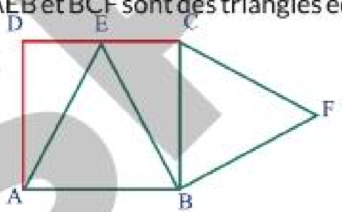
2. Dans chacun des cas ci-dessous, reproduis le cercle (C), puis colorie sur ce cercle le lieu des points M tel que la mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}})$ appartienne à l'intervalle donné :

a) $\left]-\dfrac{\pi}{6};\dfrac{5\pi}{4}\right[$; b) $\left[-\dfrac{5\pi}{6};-\dfrac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\dfrac{\pi}{4};\dfrac{3\pi}{4}\right]$;

c) $\left[\dfrac{3\pi}{2};3\pi\right[$; d) $\left[-\dfrac{7\pi}{6};-\dfrac{\pi}{4}\right] \cup \left[\dfrac{\pi}{4};\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

37 Sur la figure ci-dessous :

- ABCD est un carré de sens direct ;
- AEB et BCF sont des triangles équilatéraux.



1. Détermine la nature de chacun des triangles ADE et EBF.
2. Démontre que : Mes $(\widehat{\overrightarrow{ED}\,;\overrightarrow{EA}}) = \dfrac{5\pi}{12}$
3. **a)** Détermine une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{BE}\,;\overrightarrow{BF}})$.

   b) Déduis une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{EB}\,;\overrightarrow{EF}})$.
4. **a)** Détermine une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{ED}\,;\overrightarrow{EF}})$.

   b) Conclus quant à la position des points D, E et F.

38 x est un nombre réel tel que : $x \in \left[-\pi\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ et M est le point image de x.

1. Place le point M sur le cercle trigonométrique tel que : $\cos x = -\dfrac{3}{4}$.
2. a) Calcule $\sin x$.

   b) Déduis-en $\sin(-x)$.
3. Calcule $\tan x$, puis $\tan(-x)$.

39 x est un nombre réel tel que : $x \in [-\pi\,;0]$ et $\cos x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$.

1. Détermine la valeur exacte de $\sin x$
2. Sachant que x est l'un des réels de l'ensemble $\left\{-\dfrac{4\pi}{5};-\dfrac{\pi}{5};\dfrac{\pi}{5};\dfrac{4\pi}{5}\right\}$, détermine x.

Justifie ta réponse.

40 Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) direct.

1. **a)** Construis le cercle trigonométrique de centre O, puis place le point A associé à la valeur $\dfrac{\pi}{6}$.

   b) Place les points B et D associés aux valeurs $\dfrac{5\pi}{6}$ et $-\dfrac{\pi}{6}$.
2. a) Rappelle le cosinus, le sinus et la tangente de $\dfrac{\pi}{6}$.

   b) Déduis les valeurs du cosinus, du sinus et de la tangente de chacun des nombres suivants : $\dfrac{5\pi}{6}$, $\dfrac{4\pi}{6}$ et $-\dfrac{\pi}{6}$.

41 x est un nombre réel tel que : $x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ et M est le point du cercle trigonométrique associé à x.

1. a) Place le point M sur le cercle trigonométrique tel que : $\sin x = \frac{2}{5}$.
   b) Place les points N, P, Q et T associés respectivement aux réels $\frac{\pi}{2} - x$; $\frac{\pi}{2} + x$; $\pi - x$; $\pi + x$.
2. Calcule $\cos x$.
3. Détermine les valeurs exactes de : $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$; $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$; $\cos(\pi - x)$; $\sin(\pi - x)$ et $\sin(\pi + x)$.
4. Calcule, pour tout réel x différent de 0, $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ et $\tan(\pi - x)$.

42 Démontre que pour tout nombre x :

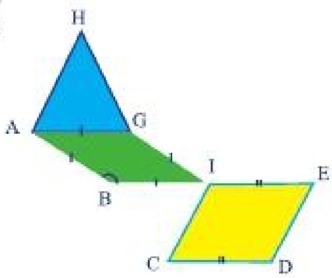
1. $(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 = 2$;
2. $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 x - \cos^2 x$;
3. $(\sin x \cos x)^2 = \frac{1}{2}(1 - \sin^4 x - \cos^4 x)$;
4. $\cos x - \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \sin x + \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Situations complexes

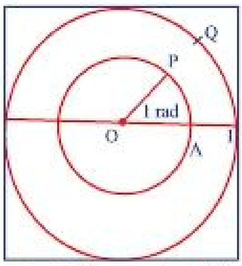
46 En prélude à la fête d'anniversaire de ton frère ainé, tu participes à la décoration. Tu découpes une feuille cartonnée à l'aide d'une paire de ciseaux. Tu obtiens la figure codée ci-dessous sur laquelle :

- AGH est un triangle équilatéral de sens direct ;
- ABFG et CDEF sont des parallélogrammes de sens directs tels que : Mes $(\overrightarrow{BF}, \overrightarrow{BA}) = \frac{5\pi}{6}$;
- L'angle orienté $(\overrightarrow{FG}, \overrightarrow{FC})$ est un angle droit positif ;

Très observateur, un de tes amis de classe affirme que les droites (AH) et (ED) sont parallèles. Certains élèves ne partagent pas cet avis.
Tu décides donc de vérifier ces propos.
En te basant sur tes connaissances mathématiques et en argumentant de façon cohérente, dis si les propos de ton ami sont vérifiés.



47 Lors d'une sortie détente dans un centre technologique, les élèves d'une classe de seconde C observent un radar terrestre déposé sur une table. Ce radar émet des signaux sous forme de cercles trigonométriques mouvants comme l'indique la figure ci-dessous :



Un guide du centre informe les élèves que :

- Les points P et Q sont des points matériels assimilés à deux positions ennemies.
- L'échelle du radar indique long $(\overset{\frown}{QI}) = 5$ km ;
- P est le milieu de [OQ].

Émerveillés, les élèves de cette classe veulent déterminer la distance de la première menace. Ils sollicitent ton aide. En utilisant les outils mathématiques au programme, détermine cette distance.

9 STATISTIQUES

Commentaire de la Leçon

On attribue à l'histoire des statistiques la date de commencement de 1749, bien que l'interprétation du terme « statistique » ait changé au cours du temps. Aux temps plus anciens, cette science ne consistait qu'à la collection d'informations sur les états, d'où l'étymologie du nom de l'allemand Staatskunde. Plus tard, cette définition s'est étendue à tout type d'information collectée et encore plus tard, les sciences statistiques incluent l'analyse et l'interprétation de ces données.

L'apprenant a déjà étudié la statistique dans les classes antérieures. En classe de troisième, il a étudié la notion de médiane, il sait dresser le tableau des effectifs et des fréquences cumulés croissantes, sait construire un polygone d'effectifs cumulés croissants et l'utilisation d'un diagramme circulaire pour représenter une série statistique. En classe de seconde C, l'enseignant rappellera et renforcera ces notions par l'étude des polygones des effectifs croissants et décroissants, la moyenne, la variance et l'écart type d'une série statistique. L'apprenant verra également comment déterminer la médiane d'une série statistique à partir des polygones des effectifs cumulés croissants et décroissants et aussi comment interpréter les différents paramètres de position et de dispersion.

En classe de première, cette étude de la statistique sera approfondie à travers les notions de quartiles, d'écart interquartile, d'histogramme, de polygone des effectifs ou des fréquences, et de courbes cumulatives.

La statistique à deux variables sera étudiée à partir de la classe de terminale

La statistique est utilisée dans presque tous les domaines de la vie, notamment le commerce, l'économie et la biologie.

Habiletés et Contenus

- **Connaître** la définition de l'effectif cumulé croissant ; la définition de l'effectif cumulé décroissant ; la définition de la fréquence cumulée croissante ; la définition de la fréquence cumulée décroissante; la médiane d'une série statistique à caractère continu ; les classes de même amplitude ; une classe modale ; la moyenne d'une série statistique à caractère continu ; la définition de la médiane ; la formule de l'écart moyen ; la formule de la variance ; la formule de l'écart type.
- **Dresser** le tableau des effectifs cumulés croissants ; le tableau des effectifs cumulés décroissants.
- **Construire** le polygone des effectifs cumulés croissants ; le polygone des effectifs cumulés décroissants.
- **Déterminer** la médiane d'une série statistique par lecture graphique.
- **Regrouper** les données d'une série statistique en classes de même amplitude.
- **Calculer** l'écart moyen ; la variance ; l'écart type ; la médiane.
- **Interpréter** les différents paramètres de position ; les différents paramètres de dispersion.
- **Traiter une situation** faisant appel à la statistique.

Situation d'Apprentissage

Au premier trimestre, le premier en Mathématiques de la 2^{nde} C_1 et celui de la 2^{nde} C_2 d'un lycée ont eu les notes suivantes (en Mathématiques).

2^{de} C_1	14	13	14	09	18	13	16	17
2^{de} C_2	07	08	17	16	19	10	20	17

Des élèves des deux classes veulent savoir qui des deux premiers est « le plus fort » en mathématiques. Sachant que les deux ont la même moyenne, ces élèves décident de comparer la répartition de chacune des séries de notes autour de cette moyenne.

Activité 1 Effectifs cumulés, fréquences cumulées

Un pêcheur a mesuré la taille des poissons pêchés dans une rivière à la fin d'une journée. Le tableau ci-contre présente les résultats obtenus.

Taille en cm, arrondie au centième près	17	18	20	22	23	24	25
Effectif	2	1	3	4	5	6	7

1. a) Détermine le nombre de poissons ayant 22 ou moins de 22 cm.
   b) Détermine le nombre de poissons ayant 18 ou plus de 18 cm.
2. a) Dresse le tableau des fréquences de la série statistique ci-dessus.
   b) Détermine la fréquence correspondant à une taille inférieure ou égale à 22 cm.
   c) Détermine la fréquence correspondant à une taille supérieure ou égale à 18 cm.

3. Soit la série statistique suivante :

Modalité	x_1	x_2	x_3	x_4	...	x_p
Effectif	n_1	n_2	n_3	n_4	...	n_p

où $x_1 < x_2 < x_3 < ... < x_p$.

a) Détermine la somme des effectifs des modalités inférieures ou égales à la modalité x_4.
b) Détermine la somme des effectifs des modalités supérieures ou égales à la modalité x_4.
c) Détermine la somme des fréquences inférieures ou égales à la modalité x_4.
d) Détermine le quotient de la somme des fréquences inférieures ou égales à la modalité x_4 par l'effectif total.
e) Détermine la somme des fréquences supérieures ou égales à la modalité x_4.
f) Détermine le quotient de la somme des fréquences supérieures ou égales à la modalité x_4 par l'effectif total.

Récapitulons

Soit une série statistique à caractère quantitatif dont les modalités sont rangées par ordre croissant.

- La somme des effectifs des modalités inférieures ou égales à la modalité x_k est l'effectif cumulé croissant (ECC) de la modalité x_k.
- La somme des effectifs des modalités supérieures ou égales à la modalité x_k est l'effectif cumulé décroissant (ECD) de la modalité x_k.
- Le quotient de l'effectif cumulé croissant de la modalité x_k par l'effectif total est la fréquence cumulée croissante de la modalité x_k.
- La somme des fréquences des modalités inférieures ou égales à la modalité x_k est la fréquence cumulée croissante de la modalité x_k.
- Le quotient de l'effectif cumulé décroissant de la modalité x_k par l'effectif total est la fréquence cumulée décroissante de la modalité x_k.
- La somme des fréquences des modalités supérieures ou égales à la modalité x_k est la fréquence cumulée décroissante de la modalité x_k.

Exercices de fixation

1 Le médecin d'un centre de formation de football a relevé le poids des 50 pensionnaires du club. Les résultats sont consignés dans le tableau suivant :

Poids (en Kg)	48	49	50	52	58
Nombre de pensionnaires	13	7	15	10	5

Dresse le tableau des effectifs cumulés croissants et celui des fréquences cumulés croissantes de cette série statistique.

2 Après une journée de vente, une restauratrice dresse le tableau suivant donnant la fréquence du nombre de repas pris par les différents clients.

Nombre de repas	1	2	3	4
Fréquence en %	40	37	10	13

Dresse le tableau des effectifs cumulés décroissant et celui des fréquences cumulés décroissantes de cette série statistique.

Activité 2 Regroupement des données par classes de même amplitude - classe modale

Voici les longueurs, en centimètres, prises par un couturier sur des écoliers pour coudre leurs chemises.

22,2 ; 23,9 ; 25,1 ; 22,9 ; 24,7 ; 25,2 ; 24,3 ; 23,8 ; 24,4 ; 18,5

17,1 ; 20,2 ; 22,8 ; 23,1 ; 25,2 ; 22,4 ; 17,2 ; 23,3 ; 24,8 ; 22,7

23,2 ; 18 ; 20,2 ; 22,4 ; 23,9 ; 25,1 ; 20,2 ; 22,7 ; 22 ; 24,8 ; 23

1. a) Regroupe ces valeurs en intervalles d'amplitude 3 cm et donne l'effectif de chaque classe.

b) Regroupe ces valeurs en intervalles d'amplitude 5 cm et donne l'effectif de chaque classe.

2. On considère les classes : [17 ; 19[, [19 ; 21[, [21 ; 23[et [23 ; 25[.

Calcule, pour chacune de ces classes, la différence entre la borne supérieure et la borne inférieure. Dis ce que tu remarques.

3. a) Reproduit et complète le tableau suivant :

Taille (cm)	[17 ; 19[	[19 ; 21[	[21 ; 23[	[23 ; 25[
Effectif				

b) Détermine la classe qui a le plus grand effectif.

4. Dis si une série statistique peut avoir plusieurs classes qui ont le plus grand effectif. Justifie ta réponse.

Récapitulons

- Il y a des formules pour déterminer le nombre de classes et l'amplitude des classes. Cependant à ce niveau, on peut opter pour un choix arbitraire.
- On détermine les classes en précisant leurs bornes.
- $b - a$ est l'amplitude de chacune des classes : $[a\ ;\ b]$, $[a\ ;\ b[$, $]a\ ;\ b]$ et $]a\ ;\ b[$.
- La classe qui a le plus grand effectif est la classe modale.
- Une série statistique peut avoir plusieurs classes modales.

Exercices de fixation

3 On considère la série statistique suivante :

Classes	[0 ; 5[	[5 ; 10[	[10 ; 15[	[15 ; 20[
Effectifs	3	17	29	11

Pour chacune des affirmations ci-dessous, réponds par vrai (V) si l'affirmation est vraie ou par faux (F) sinon.

1. La série statistique est regroupée en classes d'amplitudes différentes.
2. L'amplitude de chacune des classes de cette série statistique est 5.
3. La classe modale de cette série statistique est [10 ; 15[.
4. La classe modale de cette série statistique est 29.

4 Après avoir évalué ses 60 élèves d'une classe de seconde C sur la leçon statistique, un professeur de mathématiques a dressé la liste des notes obtenues. Elle se présente comme suit :

8	10	7	9	15	12	11	14	13	5
6	15	6	4	18	17	11	10	9	8
15	13	10	19	4	3	6	7	8	11
16	17	11	18	4	15	9	7	8	6
9	10	16	4	12	15	9	16	17	15
9	8	7	10	11	12	13	12	14	16

1. Regroupe ces valeurs dans des intervalles d'amplitude 4 dont le premier est [0 ; 4[.
2. Détermine la classe modale de cette série statistique.

Activité 3 Diagrammes cumulatifs (cas d'une variable quantitative discrète)

Lors d'une campagne de sensibilisation sur le planning familial dans un quartier, on a étudié le nombre d'enfants dans 200 familles. Les résultats sont regroupés dans le tableau ci-dessous :

Nombre d'enfants	0	1	2	3	4	5	6
Effectifs	48	62	35	26	15	9	5

1. a) Dresse le tableau des effectifs cumulés croissants.
   b) Représente dans un repère orthogonal la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 48 \text{ si } x \in [0;1[\\ f(x) = 110 \text{ si } x \in [1;2[\\ f(x) = 145 \text{ si } x \in [2;3[\\ f(x) = 171 \text{ si } x \in [3;4[\\ f(x) = 186 \text{ si } x \in [4;5[\\ f(x) = 195 \text{ si } x \in [5;6[\\ f(x) = 200 \text{ si } x \in [6;+\infty[\end{cases}$$

   c) Précise la nature de la fonction f.

2. a) Dresse le tableau des fréquences cumulées décroissantes.
   b) Représente dans un repère orthogonal la fonction g définie par :

$$\begin{cases} g(x) = 1 \text{ si } x \in [0;1[\\ g(x) = 0{,}76 \text{ si } x \in [1;2[\\ g(x) = 0{,}45 \text{ si } x \in [2;3[\\ g(x) = 0{,}275 \text{ si } x \in [3;4[\\ g(x) = 0{,}145 \text{ si } x \in [4;5[\\ g(x) = 0{,}07 \text{ si } x \in [5;6[\\ g(x) = 0{,}025 \text{ si } x \in [6;+\infty[\end{cases}$$

   c) Précise la nature de la fonction g.

Récapitulons

- La courbe représentative de la fonction f obtenue à partir des effectifs cumulés croissants (ou des effectifs cumulés décroissants) est appelée diagramme cumulatif des effectifs.
- La courbe représentative de la fonction g obtenue à partir des fréquences cumulées décroissantes (ou des fréquences cumulées croissantes) est appelée diagramme cumulatif des fréquences.
- Dans le cas d'une variable quantitative discrète, la courbe cumulative se présente comme une courbe en escalier (c'est le cas ici).

Exercice de fixation

5 Un coach a relevé le temps mis par ses athlètes pour parcourir 100 m lors d'une séance d'entraînement. Il a dressé les différents résultats dans le tableau suivant :

Temps mis en seconde	9,7	9,8	9,9	10,2	10,3	10,7
Nombre d'athlètes	2	3	4	2	3	1

1. Construis le diagramme cumulatif des effectifs cumulés croissants de cette série statistique.
2. Construis le diagramme cumulatif des fréquences cumulées décroissantes de cette série statistique.

Activité 4 Polygone des effectifs cumulés, polygones des fréquences cumulées (Variable quantitative continue)

On s'intéresse à l'âge des 120 instituteurs d'une inspection de l'enseignement primaire.
On regroupe les résultats dans le tableau ci-dessous.

Ages	[20 ; 25[	[25 ; 30[	[30 ; 35[	[35 ; 40[	[40 ; 45[	[45 ; 50[	[50 ; 55[	[55 ; 60[
Effectifs	6	18	30	39	15	6	3	3

1. Recopie et complète les tableaux suivants :

Tableau 1

Ages	[20 ; 25[	[25 ; 30[	[30 ; 35[	[35 ; 40[	[40 ; 45[	[45 ; 50[	[50 ; 55[	[55 ; 60[
Effectifs	6	18	30	39	15	6	3	3
ECC								
ECD								

Tableau 2

Modalités	20	25	30	35	40	45	50	55	60
ECC	0	6							120
ECD	120							3	0

2. a) Trace un repère dont les modalités seront sur l'axe des abscisses et les ECC sur l'axe des ordonnées.

b) Place les points correspondants de coordonnées (Modalités ; ECC) du tableau 2 dans le repère et trace les segments qui relient chacun de ces points.

c) Détermine graphiquement le nombre d'instituteurs qui ont moins de 45 ans.

3. a) Dans ce même repère, place les points correspondants de coordonnées (Modalités ; ECD) du tableau 2 et trace les segments qui relient chacun de ces points.

b) Détermine graphiquement le nombre d'instituteurs qui ont plus de 40 ans.

4. a) Dresse le tableau des fréquences cumulées croissantes (FCC) et celui des fréquences cumulées décroissantes (FCD).

b) Trace un autre repère dont les modalités seront sur l'axe des abscisses et les FCC sur l'axe des ordonnées, puis place les points correspondants de coordonnées (Modalités ; FCC) dans le repère et trace les segments qui relient chacun de ces points.

c) Dans ce même repère, place les points correspondants de coordonnées (Modalités ; FCD) et trace les segments qui relient chacun de ces points.

Récapitulons

- Pour représenter la courbe des effectifs cumulés croissants (Resp des effectifs cumulés décroissants) d'une série statistique regroupée en classes :
  - On dresse le tableau des effectifs cumulés croissants (Resp les effectifs cumulés décroissants) ;
  - On place chaque point dont l'abscisse est la valeur supérieure (Resp valeur inférieure) de la classe et l'ordonnée l'effectif cumulé croissant (Resp l'effectif cumulé décroissant) qui lui correspond ;
  - On trace ensuite les segments qui relient chacun de ces points.
  - Ces deux courbes représentent les polygones des effectifs cumulés croissants et décroissants.
- Pour représenter les courbes des fréquences cumulées croissantes et décroissantes d'une série statistique regroupée en classes, le principe est exactement le même que pour les effectifs cumulés croissants ou décroissants.
- Les deux courbes représentent les polygones des fréquences cumulées croissantes et décroissantes.

Exercices de fixation

6 Une enquête a été menée auprès des employés d'une entreprise pour connaitre le nombre d'enfants de chacun d'eux. Les résultats de cette enquête ont été consignés dans le tableau suivant :

Nombre d'enfants	[0 ; 2 [	[2 ; 4 [	[4 ; 6[	[6 ; 8[	10,7
Nombre d'employés	12	9	15	8	1

Construis le polygone des effectifs cumulés croissants de cette série statistique.

7 Apres avoir reçu sa livraison de télévisions, un commerçant dresse le tableau suivant donnant la répartition des télévisions en fonctions des dimensions en pouces.

Dimensions (en pouce)	[22 ; 32[	[32 ; 42 [	[42 ; 52 [	[52 ; 62[
Fréquence	0,05	0,45	0,35	0, 15

Construis le polygone des fréquences cumulées décroissantes de cette série statistique.

Activité 5 Médiane

A. Cas d'une série à variable discrète

Trouve pour chaque série statistique ci-dessous, un nombre qui la partage en deux séries statistiques de même effectif.

Série A : 1 ; 2 ; 5 ; 7 ; 8 ; 10 ; 17 ; 20 ; 25.

Série B : 5 ; 6 ; 8 ; 9 ; 9 ; 10 ; 15 ; 17.

Série C : 11 ; 6 ; 11 ; 7 ; 11 ; 7 ; 11 ; 5 ; 14.

Série D : 13 ; 5 ; 12 ; 6 ; 8 ; 5 ; 4 ; 14.

Récapitulons

Ce nombre est appelé la médiane de chacune de ces séries statistiques.

Cas discret

Soit une série de N données rangées dans l'ordre croissant :

- Si N est impair (N = $2n + 1$), alors la médiane est la $(n + 1)^{\text{iéme}}$ donnée ;
- Si N est pair (N = $2n$), alors la médiane est la moyenne entre les $n^{\text{iéme}}$ et $(n + 1)^{\text{iéme}}$ donnée.

Exercice de fixation

8 Détermine la médiane de la série statistique dans chacun des cas suivants :

1$^{\text{er}}$ cas : 3 - 4 - 5 - 6 - 6 - 6 -7- 7 -7 - 8.

2$^{\text{e}}$ cas : 10 -10 -10 -12 -12 -13 -14 -14 -15.

B. Cas d'une série à variable continue

La répartition du temps de travail des étudiants en Maths-Info d'un pays, selon l'heure de la journée est donnée par le tableau suivant :

Tranche horaire (en heure)	[0 ; 3[	[3 ; 6[	[6 ; 9[	[9 ; 12[	[12 ; 15[	[15 ; 18[	[18; 21[	[21 ; 24[
Fréquence (en %)	5	3,9	10,8	13,6	17,1	21,4	19,8	8,4

1. Construis la courbe des fréquences cumulées croissantes.
2. Détermine l'abscisse du point du graphique d'ordonnée 50 %.

■ **Récapitulons**

L'abscisse du point du graphique d'ordonnée correspondant à 50% des effectifs est appelé la médiane de cette série statistique.

Cas continu

Pour déterminer la médiane d'une série statistique par méthode graphique :

- On trace le polygone des fréquences cumulées croissantes ou décroissantes (Resp. le polygone des effectifs cumulés croissants ou décroissants) ;
- La médiane est l'abscisse du point du polygone dont l'ordonnée est 0,5 ou 50 %. (Resp. l'ordonnée est la moitié de l'effectif total).

Exercice de fixation

9 Une sage-femme a relevé les tailles en centimètres des bébés nés dans une maternité durant un trimestre. À l'issue de ces relevés, elle a dressé le tableau suivant :

Taille (en cm)	[45 ; 47[	[47 ; 49[	[49 ; 51[	[51 ; 53[	[53 ; 55[	[52 ; 62[
Nombre de bébés	10	20	25	25	35	15

Détermine graphiquement la médiane de cette série statistique.

Activité 6 Étendue, Écart moyen

On considère les deux séries de notes obtenues par un même groupe de 15 élèves d'une classe de seconde.

- Série A : 9 ; 9 ; 10 ; 10 ; 10 ; 11 ; 11 ; 11 ; 11 ; 12 ; 12 ; 13 ; 13 ; 14
- Série B : 3 ; 6 ; 6 ; 6 ; 8 ; 9 ; 9 ; 10 ; 10 ; 14 ; 14 ; 16 ; 17 ; 17 ; 20

Ces deux séries ont la même moyenne $\overline{x}$ = 11.

1. a) Calcule la différence entre la meilleure note et la mauvaise note de la série A.
   b) Calcule la différence entre la meilleure note et la mauvaise note de la série B.
2. Recopie et complète le tableau ci-dessous relativement à la série A :

Notes	9	10	11	12	13	14
Effectifs	3					
Écarts à la moyenne	$\lvert 9-11 \rvert = 2$					

3. a) Vérifie que la moyenne de la série des écarts à la moyenne de la série A est égale à 1,2.
   b) Calcule la moyenne de la série des écarts à la moyenne de la série B.
   c) Conclus quant à la dispersion de ces deux séries.

Récapitulons

- La différence entre la valeur la plus grande et la valeur la plus petite d'une série statistique est l'étendue de la série.
- L'écart moyen ou l'écart absolu moyen est le nombre réel e tel que :
$e = \frac{n_1|x_1 - \overline{x}| + n_2|x_2 - \overline{x}| + ... + n_p|x_p - \overline{x}|}{N}$ où $\overline{x}$ est la moyenne ; n_i est l'effectif de la modalité x_i. N est l'effectif total et p le nombre de modalités.
- L'écart moyen est un indicateur de dispersion des valeurs observées autour de la moyenne.
- $e_A < e_B$, donc les notes de la série A sont moins dispersées autour de la moyenne que celles de la série B.

Exercice de fixation

10 Une enquête a été menée auprès des membres d'une ONG pour connaître leurs âges. Les résultats de cette enquête ont été consignés dans le tableau ci-dessous.

Âge	18	20	21	23	27	28	30	35
Nombre de membres	2	5	8	16	11	10	27	1

1. Détermine l'étendue de cette série statistique.
2. a) Calcule l'écart moyen de cette série statistique.
   b) Donne une interprétation du résultat obtenu.

Activité 7 Variance, Écart type

On considère la série suivante où $\overline{x} = 11$.

1. a) Recopie et complète le tableau ci-contre :

Notes x_i	9	10	11	12	13	14
Effectifs n_i	3	3	4	2	2	1
Carrés des écarts à la moyenne $(x_i - \overline{x})^2$						

b) Calcule la moyenne de la série des carrés des écarts à la moyenne.
Le nombre positif V_1 obtenu est appelé variance de la série.
c) Calcule la racine carrée de V_1.

2. a) Recopie et complète le tableau suivant :

Notes x_i	9	10	11	12	13	14	Totaux
Effectifs n_i	1	3	4	2	2	1	
$n_i.x_i$							
$n_i.x_i^2$							

b) Calcule la moyenne des notes au carrées diminuée du carré de la note moyenne.
Le nombre positif V_2 obtenu est appelé variance de la série.
c) Calcule la racine carrée de V_2.

3. Compare et interprète les résultats obtenus en 1.c) et 2.c) .

Récapitulons

- La variance d'une série statistique est égale à la moyenne pondérée de la série des carrés des écarts à la moyenne.
- La variance d'une série statistique est aussi égale à la moyenne des carrés diminués du carré de la moyenne.
- L'écart-type est la racine carrée de la variance.
- La variance et l'écart-type sont des indicateurs de dispersion.

Exercices de fixation

11 On donne la répartition de trente élèves d'une classe selon leur nombre de frères et sœurs.

Nombre de frères et sœurs	0	1	2	3	4	5
Nombre d'élèves	5	13	7	3	1	1

Détermine la variance et l'écart type de cette série statistique sachant que sa moyenne est de 1,5.

On donnera le résultat à 10^{-2} près.

12 On donne la distribution des notes d'un devoir de mathématiques dans une classe de 2^{de} C.

Note	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	16	18	20
Effectif	2	1	3	5	4	2	3	4	3	4	1	2	2	1	1

1. Calcule la moyenne $\bar{x}$ de cette série statistique.
2. Calcule la variance puis l'écart-type de cette série statistique.

13 Dans un tournoi de scrabble, le nombre de points totalisé par les huit participants a été :

298 ; 407 ; 336 ; 425 ; 512 ; 321 ; 543 ; 396.

Calcule le score moyen et l'écart-type de ces scores.

I. Effectifs cumulés, fréquences cumulées

Soit une série statistique à caractère quantitatif $(x_i ; n_i)$ dont les modalités ne sont pas regroupées en classes.

- L'effectif cumulé croissant (resp. décroissant) d'une modalité est la somme des effectifs des modalités inférieures (resp supérieures) ou égales à la valeur de cette modalité.
- Le quotient de l'effectif cumulé croissant (resp. décroissant) d'une modalité par l'effectif total est la fréquence cumulée croissante (resp. décroissante) de cette modalité.

Exemple Le tableau ci-dessous indique les vitesses de quatre cents véhicules enregistrées par un radar lors d'un contrôle routier.

Vitesse en km/h	[65 ; 80[	[80 ; 95[	[95 ; 110[	[110 ; 125[	[125 ; 140[	[140 ; 155[	[155 ; 170[
Effectifs	39	176	97	51	23	12	2

Dressons le tableau des fréquences cumulées croissantes et décroissantes. On obtient :

Vitesse en km/h	[65 ; 80[	[80 ; 95[	[95 ; 110[	[110 ; 125[	[125 ; 140[	[140 ; 155[	[155 ; 170[
Fréquences	0,0975	0,44	0,2425	0,1275	0,0575	0,03	0,005
FCC (*)	0,0975	0,5375	0,78	0,9075	0,965	0,995	1
FCD (**)	1	0,9025	0,4625	0,22	0,0925	0,035	0,005

› Remarque

La fréquence cumulée croissante (resp. décroissante) d'une modalité est la somme des fréquences des modalités inférieures (resp. supérieures) ou égales à cette modalité.

Pour s'entraîner : Exercices 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6

II. Représentations graphiques

B. Diagrammes cumulatifs et polygones des effectifs cumulés

1. Diagrammes cumulatifs : cas d'une variable quantitative discrète

Présentation

Les effectifs cumulés croissants et décroissants peuvent être représentés par un diagramme cumulatif. La courbe représentative de la fonction obtenue à partir des effectifs cumulés croissants (ou des fréquences cumulées croissantes) se présente comme une courbe en escalier croissante.

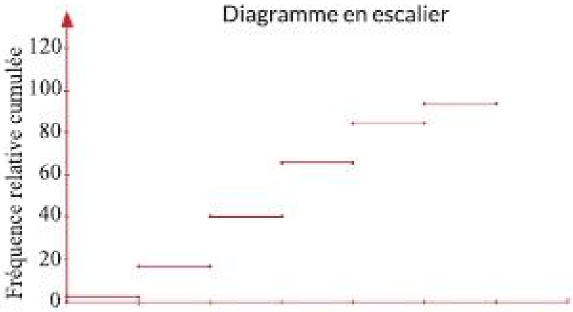
La courbe représentative de la fonction obtenue à partir des effectifs cumulés décroissants (ou des fréquences cumulées décroissantes) se présente comme une courbe en escalier décroissante.

Exemple

On a noté sur 96 jours comparables le nombre d'appels reçus entre 10h et 10h 10min par une secrétaire. Les résultats sont consignés dans le tableau ci-dessous :

Nombre d'appels (x_i)	Nombre de jours (n_i)	Fréquences en %	Fréquences cumulées croissantes	Fréquences cumulées décroissantes
0	2	2,08	2,08	100
1	14	14,58	16,66	97,92
2	23	23,96	40,62	83,34
3	24	25	65,62	59,38
4	18	18,75	84,37	34,38
5	9	9,38	93,75	15,63
6	6	6,25	100	6,25

Diagramme en escalier



Pour s'entraîner : Exercice 7

2. Polygone des effectifs cumulés, polygone des fréquences cumulées (variable quantitative continue)

Présentation

Pour représenter le polygone des effectifs cumulés croissants (respectivement décroissants) d'une série statistique donnée par des classes :

- On place chaque point dont l'abscisse est la borne supérieure (respectivement inférieure) de la classe sauf pour le premier point (respectivement dernier point) et l'ordonnée de l'effectif cumulé croissant (respectivement décroissant) qui lui correspond ;
- On trace ensuite les segments qui relient chacun de ces points.

Pour représenter les polygones des fréquences cumulées croissantes et décroissantes d'une série statistique donnée par des classes, le principe est exactement le même que pour les effectifs cumulés croissants ou décroissants.

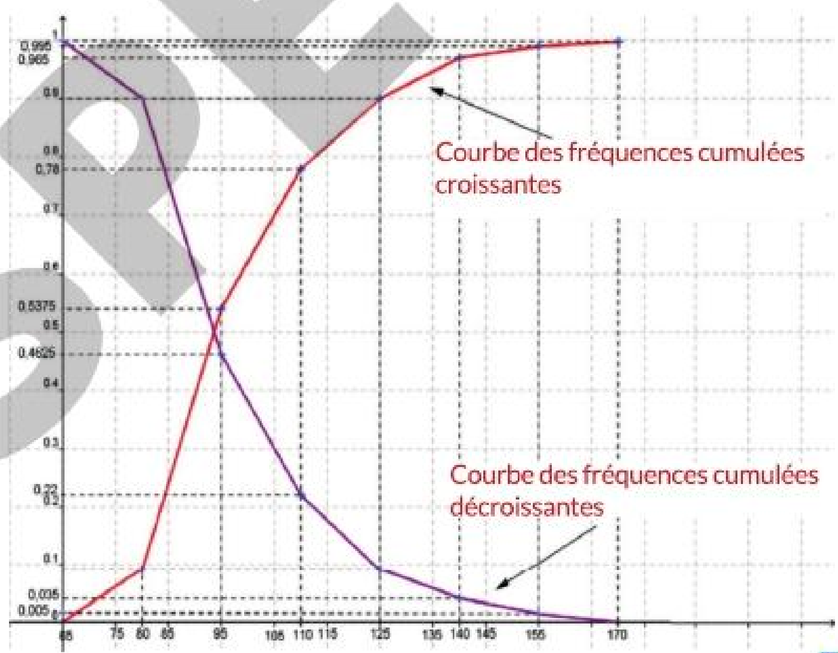
Exemple

Le tableau ci-dessous indique la vitesse de quatre cents véhicules enregistrée par un radar lors d'un contrôle routier.

Vitesse en km/h	[65 ; 80[	[80 ; 95[	[95 ; 110[	[110 ; 125[	[125 ; 140[	[140 ; 155[	[155 ; 170[
Effectifs	39	176	97	51	23	12	2

Dressons le tableau des fréquences cumulées croissantes et décroissantes. On obtient :

Vitesse en km/h	[65 ; 80[	[80 ; 95[	[95 ; 110[	[110 ; 125[	[125 ; 140[	[140 ; 155[	[155 ; 170[
Fréquences	0,0975	0,44	0,2425	0,1275	0,0575	0,03	0,005
FCC	0,0975	0,5375	0,78	0,9075	0,965	0,995	1
FCD	1	0,9025	0,4625	0,22	0,0925	0,035	0,005



Pour s'entraîner : Exercice 8

III. Paramètres de position et de dispersion

Présentation

Pour décrire une variable quantitative sur une population, on réduit cette variable à quelques valeurs numériques qui la caractérisent.

1. Paramètres de position

Les valeurs donnant une idée de l'ordre de grandeur des observations sont appelées paramètres de position.

a) Mode et classe modale

On appelle mode d'une série statistique toute modalité d'effectif maximal (ou de fréquence maximale).
Lorsque les modalités sont des intervalles, on parle de classe modale. Le mode est le centre de la classe modale.
La classe modale est la modalité d'effectif maximal lorsque les classes ont la même amplitude.

Pour s'entraîner : Exercice 9

b) Moyenne

Soit une série statistique (x_i, n_i), $1 \leq i \leq p$, d'effectif total N.

- Dans le cas d'une série statistique discrète, la moyenne notée $\overline{x}$ est donnée par :

$$\overline{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \cdots + n_p x_p}{N}.$$

- Dans le cas d'une série statistique continue (série statistique regroupée en classes), la moyenne est la moyenne de la série (c_i, n_i) des centres de classes associés.

$$\bar{x} = \frac{n_1 c_1 + n_2 c_2 + \cdots + n_p c_p}{N} = n_1 f_1 + n_2 f_2 + \cdots + n_p f_p.$$

Pour s'entraîner : Exercices 10 ; 11

c) Médiane

Soit une série de N données rangées dans l'ordre croissant des valeurs :
La médiane est un nombre réel noté M_e tel que :

- 50% des individus ont une valeur du caractère inférieure ou égal à M_e.
- 50% des individus ont une valeur du caractère supérieure ou égale à M_e.

Cas discret

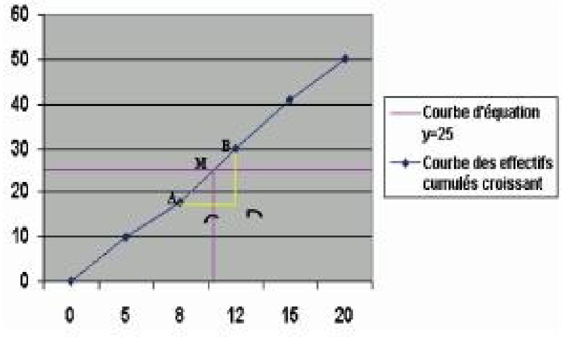
Dans la pratique, soit une série de N données rangées dans l'ordre croissant des valeurs :

- Si N est impair (N = $2n + 1$), alors la médiane est la $(n + 1)^{ième}$ donnée ;
- Si N est pair (N = $2n$), alors la médiane est la moyenne des $n^{ième}$ et $(n + 1)^{ième}$ donnée.

Cas continu

Pour déterminer la médiane d'une série statistique par méthode graphique :

- On trace le polygone des fréquences cumulées croissantes ou décroissantes (respectivement le polygone des effectifs cumulés croissants ou décroissants) ;
- La médiane est l'abscisse du point du polygone dont l'ordonnée est 0,5 ou 50 %. (Resp l'ordonnée est la moitié de l'effectif total).



- Pour déterminer algébriquement la médiane d'une série statistique, on peut procéder comme suit :

Soit $[a\ ;\ b[$ est la classe dont l'effectif cumulé croissant (resp. fréquence cumulée croissante) est $\frac{N}{2}$ (resp. 0,5). On note Me la médiane.

On admet que les points dont les coordonnées sont dans le tableau suivant sont alignés.

Modalité (abscisse)	a	Me	b
Effectif cumulé croissant (ordonnée)	c	$\frac{N}{2}$	d

d est l'effectif cumulé croissant (resp. fréquence cumulée croissante) de $[a\ ;\ b[$ et c celui (resp. celle) de l'intervalle qui précède $[a\ ;\ b[$.

Alors $\dfrac{d-c}{b-a}=\dfrac{\frac{N}{2}-c}{Me-a}$.

Pour s'entraîner : Exercices 12 ; 13 ; 14 ; 15 ; 16 ; 17 ; 18

2. Paramètres de dispersion

Les valeurs donnant une idée de l'étalement des observations sont appelées paramètres de dispersion.
Les paramètres de dispersion permettent de mesurer la façon dont les valeurs du caractère sont reparties autour de la moyenne ou de la médiane.

a) Écart moyen ou écart moyen absolue

L'écart moyen est le nombre réel $e=\dfrac{n_1\left|x_1-\overline{x}\right|+n_2\left|x_2-\overline{x}\right|+\ldots+n_p\left|x_p-\overline{x}\right|}{N}$ où $(x_i\ ;\ n_i)$ est la série statistique de moyenne $\overline{x}$ et p le nombre de modalités.

L'écart moyen permet d'apprécier la distance moyenne des modalités à la moyenne.

L'écart s'exprime dans la même unité que les valeurs observées.

Ce paramètre indique les valeurs observées se trouvant à e-unités de $\overline{x}$.

Pour s'entraîner : Exercices 19 ; 20 ; 21 ; 22

b) Variance, écart type

La variance V d'une série statistique est la moyenne pondérée des carrés des écarts à la moyenne.

On a : $V=\dfrac{n_1\left(x_1-\overline{x}\right)^2+n_2\left(x_2-\overline{x}\right)^2+\ldots+n_p\left(x_p-\overline{x}\right)^2}{N}$ où $(x_i;n_i)$ est la série statistique de moyenne x , p est le nombre de modalités et N l'effectif total.

Remarque

La variance V d'une série statistique est égale à la moyenne des carrés diminués du carré de la moyenne.

On a : $V=\dfrac{n_1\left(x_1\right)^2+n_2\left(x_2\right)^2+\ldots+n_p\left(x_p\right)}{N}-\left(\overline{x}\right)^2$.

- L'écart type notée σ (sigma) est la racine carrée de la variance. $\sigma=\sqrt{V}$.

L'écart type est un indicateur de dispersion associé à la moyenne.

Pour des séries regroupées en classes de même amplitude, on utilise les centres C_i des classes comme modalités x_i.

Remarque

L'écart type s'exprime dans la même unité que les valeurs observées.

Pour s'entraîner : Exercices 23 ; 24 ; 25

QUESTION 1

Comment déterminer la médiane d'une série statistique à partir du polygone des effectifs cumulés ou des fréquences cumulées ?

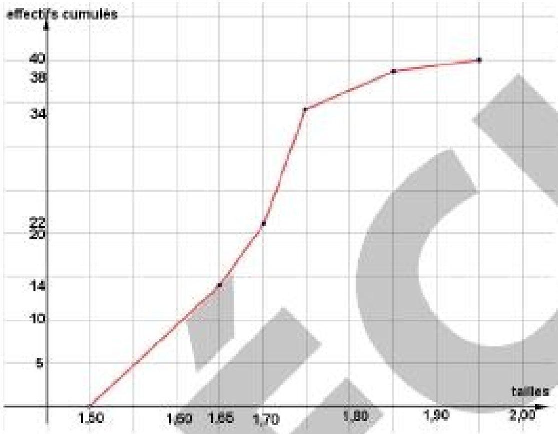
Méthode

Pour déterminer la médiane d'une série statistique à partir du polygone des effectifs cumulés ou des fréquences cumulées, on peut procéder comme suit :

- on place sur l'axe des ordonnées le point dont l'ordonnée est la moitié de l'effectif total ou 50 % des fréquences ;
- on détermine ensuite l'antécédent de ce point.

Exercice

On considère le polygone des effectifs cumulés croissants ci-dessous.



Détermine la médiane de cette série statistique.

Solution commentée

On détermine la moitié de l'effectif total.

L'effectif total est 40, on a : $\frac{40}{2}=20$

On place sur l'axe des ordonnées le point d'ordonnée 20.

On détermine l'antécédent de ce point.

La médiane de cette série statistique est 1,68.

Exercice non corrigé

On considère le polygone des fréquences cumulées croissantes ci-dessous.

Détermine la médiane de cette série statistique.

QUESTION 2

Comment calculer la variance d'une série statistique ?

Méthode

Pour calculer la variance V d'une série statistique, on peut procéder comme suit :

- on calcule la moyenne $\overline{x}$ de cette série statistique ;
- on calcule la moyenne S des carrés de cette série statistique ;
- on calcule V tel que : $V = S - (\overline{x})^2$

Exercice

On considère la série statistique suivante donnant la répartition des élèves du club santé d'un lycée en fonction de leurs tailles.

Taille (en cm)	155	160	165	170	179
Effectifs	12	18	10	8	2

Détermine la variance de cette série statistique.

Solution commentée

On détermine la moyenne $\overline{x}$ de cette série statistique.

$$\overline{x} = \frac{1}{50}(12 \times 155 + 18 \times 160 + 10 \times 165 + 8 \times 170 + 2 \times 179)$$

$\overline{x} = 162{,}16$ cm.

On détermine la moyenne S des carrés de cette série statistique.

$$S = \frac{1}{50}(12 \times 155^2 + 18 \times 160^2 + 10 \times 165^2 + 8 \times 170^2 + 2 \times 179^2)$$

$S = 26332{,}64$ cm².

On calcule la variance V telle que : $V = S - (\overline{x})^2$.

$V = 26332{,}64 - (162{,}16)^2$

$V = 36{,}7744$ cm².

Exercice non corrigé

On considère la série statistique suivante donnant la répartition des employés d'une entreprise en fonction de leurs poids.

Poids	60	70	73	75	80
Nombre d'employés	10	12	60	15	35

Détermine la variance de cette série statistique.

QUESTION 3

Comment calculer l'écart absolu moyen d'une série statistique ?

Méthode

Pour déterminer l'écart absolu moyen d'une série statistique, on peut procéder comme suit :

- on détermine la moyenne $\bar{x}$ de cette série ;
- on complète le tableau suivant :

Modalités (x_i)	x_1	x_2	...	x_p
Effectif (n_i)	n_1	n_2	...	n_p
$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$	$\lvert x_1 - \bar{x} \rvert$	$\lvert x_2 - \bar{x} \rvert$	...	$\lvert x_p - \bar{x} \rvert$
$n_i \lvert x_i - \bar{x} \rvert$	$n_1 \lvert x_1 - \bar{x} \rvert$	$n_2 \lvert x_2 - \bar{x} \rvert$	...	$n_p \lvert x_p - \bar{x} \rvert$

- on effectue la somme de tous les résultats obtenus dans la dernière ligne ;
- on effectue le quotient de cette somme par l'effectif total.

Exercice

On considère le tableau suivant donnant la répartition des employés d'une entreprise en fonction de leurs salaires.

Salaires	80.000	100.000	150.000	220.000	300.000
Nombre d'employés	38	40	52	25	5

Calcule l'écart absolu moyen de cette série statistique.

Solution commentée

On calcule la moyenne x de cette série statistique.

$$\bar{x} = \frac{1}{160}\,(38 \times 80.000 + 40 \times 100.000 + 52 \times 150.000 + 25 \times 220.000 + 5 \times 300.000)$$

$\bar{x} = 136.500$

On complète le tableau suivant :

Salaires	80.000	100.000	150.000	220.000	300.000
Nombre d'employés	38	40	52	25	5
$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$	56 500	36 500	135 000	83 500	163 500
$n_i \lvert x_i - \bar{x} \rvert$	2 147 000	1 460 000	702 000	2 087 500	817 500

On effectue la somme : 2.147.000 + 1.460.000 + 702.000 + 2.087.500 + 817.500 = 7.214.000

On effectue le quotient : $\dfrac{7.214.000}{160} = 45087{,}5$.

L'écart moyen est de : 45087,5.

Exercice non corrigé

Le tableau ci-dessous donne la répartition des billets d'une tombola selon leur gain.

Gain	0	10.000	20.000	50.000	100.000
Nombre de billets	225	105	10	4	6

Calcule l'écart absolu moyen de cette série statistique.

Exercices de fixation

Effectifs cumulés – Fréquences cumulées

1 Recopie le numéro de chaque ligne du tableau puis réponds par V si l'affirmation est vraie ou par F si l'affirmation est fausse.

N°	Affirmations
1	Quand les valeurs du caractère sont rangées dans l'ordre croissant, l'effectif cumulé croissant d'une modalité est la somme des fréquences des modalités qui lui sont inférieures ou égales.
2	Quand les valeurs du caractère sont rangées dans l'ordre croissant, l'effectif cumulé décroissant d'une modalité est la somme des effectifs des modalités qui lui sont supérieures ou égales.
3	La fréquence cumulée décroissante d'une modalité x est le quotient de l'effectif cumulé décroissant par l'effectif total.
4	La fréquence cumulée croissante d'une modalité x est la somme des fréquences des modalités supérieures ou égales à x.

2 Dans un quartier de Katiola, on a relevé le nombre de pièces par appartement. Les résultats sont résumés dans le tableau ci-dessous :

Nombre de pièces	1	2	3	4	5	6	7
Nombre d'appartements	48	75	96	64	39	25	3

Recopie le numéro de chaque ligne du tableau puis réponds par V si l'affirmation est vraie ou par F si l'affirmation est fausse.

N°	Affirmations
1	L'effectif cumulé croissant de la modalité 1 est 3.
2	L'effectif cumulé croissant de la modalité 4 est 219.
3	L'effectif cumulé décroissant de la modalité 7 est 3.
4	L'effectif cumulé décroissant de la modalité 5 est 227.
5	La fréquence cumulée croissante de la modalité 4 est 0,137.
6	La fréquence cumulée croissante de la modalité 4 est 0,808.
7	La fréquence cumulée décroissante de la modalité 6 est 0,992.
8	La fréquence cumulée décroissante de la modalité 7 est 0,008.

3 Le tableau ci-dessous indique le nombre d'enfants de 50 familles des employés d'une société de gardiennage.

Nombre d'enfants	0	1	2	3	4	5	Total
Nombre de familles	4	11	7	14	8	6	50

Dresse le tableau des effectifs cumulés croissants de cette série.

4 Ibo a pesé les œufs de sa ferme qui ont été produits pendant le mois de décembre. Il a obtenu le tableau ci-dessous où les masses des œufs sont exprimées en grammes.

Masse de l'œuf	[20 ; 30[	[30 ; 40[	[40 ; 50[	[50 ; 60[	[60 ; 70[	[70 ; 80[	[80 ; 90[
Nombre d'œufs	3	51	74	112	92	62	6

Dresse le tableau des effectifs cumulés décroissants de cette série.

5 Le tableau suivant donne le nombre de tonnes d'anacardes produit en 2018 par des agriculteurs de la région du hambol.

Nombre d'agriculteurs	1	2	3	4	5	6	7
Anacardes produits en tonne	10	55	80	15	38	40	12

Dresse le tableau des fréquences cumulées décroissantes.

6 Le tableau suivant donne la répartition des entreprises du secteur automobile en fonction de leurs chiffres d'affaires en millions de francs CFA.

Chiffres d'affaires	[0 ; 0,25[	[0,25 ; 0,5 [	[0,5 ; 0,75[	[60 ; 70[	[1 ; 1,25[	[1,25 ; 1,5[
Nombre d'entreprises	37	16	12	92	6	3

Dresse le tableau des fréquences cumulées croissantes.

Diagrammes cumulatifs : cas d'une variable quantitative discrète

7 Un gérant d'hôtel a relevé le nombre de jours où la suite présidentielle a été occupée au cours de l'année. Il a regroupé ces données dans le tableau suivant :

Nombre de fois où la suite a été occupée	0	1	2	3	4	5	6
Nombre de jours	70	115	82	58	25	12	3
Effectifs cumulés décroissants	365	295	180	98	40	15	3

Construis le diagramme cumulatif des effectifs cumulés décroissants.

Polygone des effectifs cumulés, polygone des fréquences cumulées (variable quantitative continue)

8 Les tailles, en centimètre de personnes sont reportées dans les tableaux suivants :

Taille	[145 ; 150[	[150 ; 155[	[155 ; 160[	[160 ; 165[	[165 ; 170[	[170 ; 175[	[175 ; 180[	[180 ; 185[	[185 ; 190[	[190 ; 195[
Effectifs	3	4	7	15	20	21	14	8	5	3

1. Construis le polygone des effectifs cumulés croissants.
2. Construis le polygone des effectifs cumulés décroissants.
3. Construis le polygone des fréquences cumulées croissantes.

Mode - Classe modale

9 On a demandé à 40 fonctionnaires de la ville d'Abidjan qu'elle est le temps en minutes mis entre leur domicile et leur lieu de travail.
Voici les résultats :

60	60,1	45	90	90	100	110	105,2	100	80
95	100	90	80,1	60	60+	75,7	105	85	75,9
90,4	110,6	80	60	75,8	105	70	100	90	30
100	30	45	70	75	100	80	75	75	90

a) Regroupe ces valeurs en intervalles d'amplitude 15 et donne l'effectif de chaque classe.

b) Détermine la classe modale.

Mode - Classe moyenne

10 Réponds par vrai ou par faux à chacune des affirmations suivantes :

1 Soit $x_1, x_2, ..., x_p$ les modalités d'une série statistique et $n_1, n_2, ..., n_p$ les effectifs respectifs de ces modalités. $f_0, f_1, ... , f_p$ les fréquences respectives de ces modalités. La moyenne de cette série est :
$\overline{x} = f_1 x_1 + f_2 x_2 + ... + f_p x_p$

2 La moyenne de toute série statistique est toujours un nombre entier naturel.

11 On considère les séries statistiques suivantes :

Série 1 : 70 – 10 – 109 – 119 – 122 – 109

Série 2 : 25 – 14 – 21 – 33 – 22 – 12 – 35

Pour chaque ligne du tableau, une seule affirmation est juste. Recopie le numéro de la ligne et la lettre qui correspond à l'affirmation juste.

N°	Affirmation	a	b	c
1	La moyenne de la première série est	$\frac{539}{6}$	71,67	109
2	L'approximation décimale d'ordre 2 par défaut de la moyenne de la série 2 est	23,41	22,14	23,14

Médiane

12 Recopie le numéro de chaque ligne du tableau suivi de V si l'affirmation est vraie ou de F si l'affirmation est fausse.

N°	Affirmation
1	La médiane d'une série statistique est le nombre réel Me tel qu'au moins des individus aient une valeur du caractère inférieure $\frac{1}{4}$ ou égal à Me.
2	La médiane d'une série statistique est toujours une valeur du caractère.
3	La médiane d'une série statistique est un nombre toujours positif.
4	Une série statistique peut avoir plusieurs médianes.

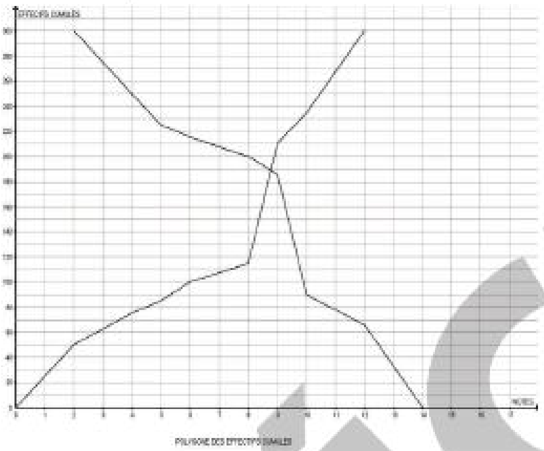
13 On considère les séries statistiques suivantes :

Série 1 : 70 – 10 – 109 – 119 – 122 – 109
Série 2 : 25 – 14 – 21 – 33 – 22 – 12 – 35

Pour chaque ligne du tableau, une seule affirmation est juste. Recopie le numéro de la ligne et la lettre qui correspond à l'affirmation juste.

N°	Affirmation	a	b	c
1	La médiane de la première série est	109	110	119
2	La médiane de la deuxième série est	35	21	22

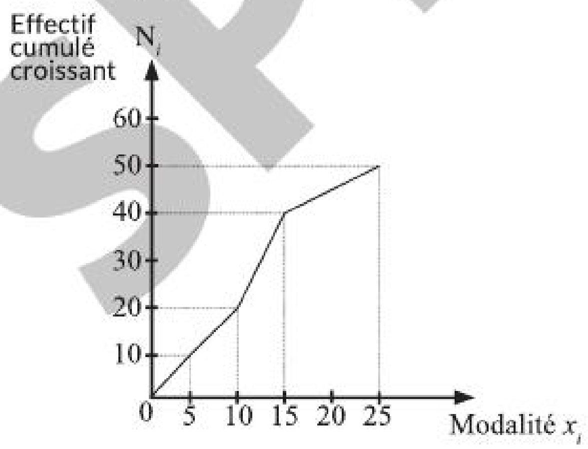
14 Voici le polygone des effectifs cumulés croissants et le polygone des effectifs cumulés décroissants d'une série statistique.



A partir du graphique, détermine la médiane de cette série statistique.

15 La figure ci-dessous représente le polygone des effectifs cumulés croissants d'une série statistique.

A partir du graphique, détermine la médiane de cette série statistique.



16 Lors de la correction du BEPC, la fiche statistique de notes d'un correcteur a permis d'obtenir le tableau suivant :

Classes	[0 ; 5[	[5 ; 10[	[10 ; 15[	[15 ; 20[
Effectifs	5	24	20	11
Effectifs cumulés décroissants	60	55	31	11

Calcule la médiane en utilisant les effectifs cumulés décroissants.

17 On a demandé à des élèves de seconde C le nombre de leurs frères et sœurs. Voici les résultats obtenus :

Nombre de frères et sœurs	0	1	2	3
Effectif	10	24	12	4

1. Calcule l'effectif total de cette série.
2. Justifie que la médiane de cette série est égale à 1.
3. Une élève de la classe affirme : « puisque la médiane de la série est égale à 1, on peut dire que exactement la moitié des élèves ont au moins un frère ou une sœur ».

Dis si elle a raison. Justifie ta réponse.

18 On a demandé à des élèves le nombre de fois où ils sont allés au cinéma dans le mois. Le diagramme ci-dessous représente les résultats relevés.

1. Calcule l'effectif total de cette série.
2. Justifie que la médiane de cette série est égale à 3.
3. Dis si oui ou non la moitié des élèves ont vu au moins 3 films durant le mois. Justifie ta réponse.

Étendue-Écart moyen

19 On a demandé à des élèves le nombre de fois où ils sont allés au cinéma dans le mois. Le diagramme en bâtons ci-dessous représente les résultats relevés.
Détermine l'étendue de cette série.

20 Soit $x_1, x_2, ..., x_p$ les modalités d'une série statistique tels que $x_1 < x_2 < ... < x_p$ *et* $n_1, n_2, ..., n_p$ les effectifs respectifs de ces valeurs.

Soit $\bar{x}$ la moyenne de cette série.
Parmi les propositions de réponses, une seule est correcte. Recopie le numéro et la lettre qui correspond à la réponse juste.

1. L'étendue est :

a) $n_p - n_1$

b) $x_p + x_1$

c) $x_p - x_1$

2. L'écart moyen est :

a) La moyenne.

b) La somme des écarts entre la valeur des modalités et la moyenne.

c) La moyenne pondérée des écarts entre la valeur des modalités et la moyenne.

3. L'écart moyen est :

a) $$\frac{n_1|x_1+\bar{x}|+n_2|x_2+\bar{x}|+...+n_p|x_p+\bar{x}|}{N}$$

b) $$\frac{n_1(x_1-\bar{x})^2+n_2(x_2-\bar{x})^2+...+n_p(x_p-\bar{x})^2}{N}$$

c) $$\frac{n_1|x_1-\bar{x}|+n_2|x_2-\bar{x}|+...+n_p|x_p-\bar{x}|}{N}$$

21 Voici le relevé des tailles, en mètres, d'un groupe de candidats au concours de police.

1,64 ; 1,66 ; 1,70 ; 1,55 ; 1,66 ; 1,64 ; 1,72 ; 1,70 ; 1,62 ; 1,72 ; 1,57 ; 1,64.

1. Sachant que la taille moyenne de ces candidats est de 1,6517 m, calcule l'écart moyen de cette série statistique.

2. Donne une interprétation de ce résultat.

22 Les tableaux suivants représente la répartition des 100 employés d'une entreprise, selon le salaire en milliers de francs CFA.

Salaire	[0 ; 100[	[100 ; 200[	[200 ; 300[	[300 ; 400[	[400 ; 500[	[500 ; 600[
Effectif	22	5	15	35	20	3

Calcule l'écart moyen de cette série statistique.

Variance - Écart-type

23 Soit $x_1, x_2, ..., x_p$ les modalités d'une série statistique et $n_1, n_2, ..., n_p$ les effectifs respectifs de ces modalités. Soit $\bar{x}$ la moyenne de cette série.

Parmi les propositions de réponse, une seule est correcte. Recopie le numéro et la lettre qui correspond à la réponse juste.

1. La variance est :

a) $$\frac{n_1(x_1-\bar{x})^2+n_2(x_2-\bar{x})^2+...+n_p(x_p-\bar{x})^2}{N} ;$$

b) $$\frac{n_1(x_1)^2-n_2(x_2)^2-...-n_p(x_p)^2}{N}-(\bar{x})^2 ;$$

c) $$\frac{n_1|x_1-\bar{x}|+n_2|x_2-\bar{x}|+...+n_p|x_p-\bar{x}|}{N}.$$

2. La variance est :

a) la racine carrée de la moyenne ;

b) la moyenne pondérée des carrés des écarts à la moyenne;

c) la différence entre la somme des carrés et le carré de la moyenne.

3. L'écart type est :

a) la racine carrée de la variance ;

b) la valeur absolue de la variance ;

c) la valeur absolue de l'écart moyen.

24 Le tableau suivant donne le nombre de clés USB vendus dans un magasin informatique en fonction de leur capacité (en Go) sur une période d'une semaine.

Capacité en Go	35	36	37	38	39	40
Effectifs	4	8	10	14	8	6

Sachant que la moyenne de cette série est de 3 Go, calcule sa variance et son écart type.

25 On étudie les revenus mensuels en francs CFA de 430 foyers du district de Yamoussoukro. On obtient :

Revenus	[700 ;900[	[900 ;1100[	[1100 ;1300[	[1300 ;1400[	[1400 ;1500[	[1500 ;1600[
Effectifs	13	219	20	46	50	82

1. Calcule la variance de cette série.

2. Calcule l'écart type de cette série.

Exercices de renforcement/approfondissement

26 On considère la série suivante de données :
7 ; 2 ; 3 ; 7 ; 12 ; 3 ; 18 ; 24 ; 5 ; 38 ; 42 ; 16 ; 45 ; 34 ; 19 ; 16 ; 26 ; 34 ; 38 ; 40 ; 5 ; 39.

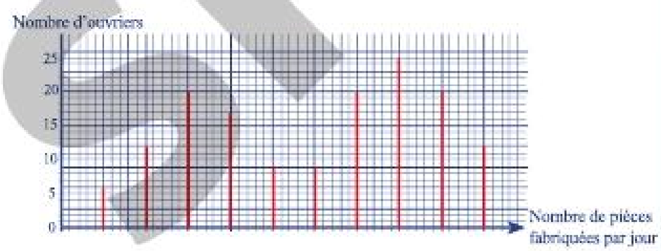
Pour chacune des affirmations 1 et 2, une seule réponse est exacte. Donne le numéro suivi de la lettre correspondant à la réponse correcte.

N°	Affirmations	A	B	C	D
1	L'étendue de cette série est :	43	37	38	33
2	La médiane de cette série est :	18	18,5	19	18,2

27 Recopie le numéro de chaque affirmation suivi de V si l'affirmation est vraie ou de F si elle est fausse.

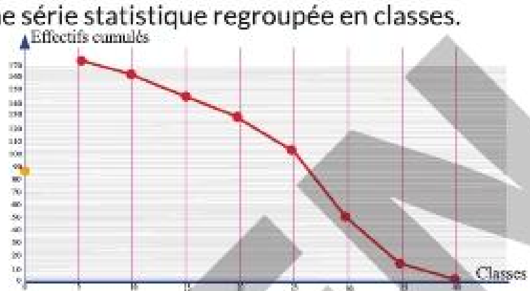
1. Une variable quantitative est dite discrète lorsqu'elle a de petits effectifs.
2. Pour représenter une variable quantitative discrète, on utilise un histogramme.
3. Pour le calcul de la moyenne d'une série statistique continue, on utilise le centre des classes.
4. La moyenne et l'écart type sont des caractéristiques de dispersion d'une série.
5. L'écart type est la racine carrée de la moyenne des écarts.
6. La variance est l'abscisse du point du polygone des fréquences cumulées ayant pour ordonnée 0,5.
7. Pour deux séries, portant sur la même variable, celle dont l'écart type est le plus grand est la série la plus dispersée.

28 Le diagramme en bâtons ci-dessous représente le nombre d'ouvriers d'une société en fonction du nombre de pièces fabriquées par jour.



Dresse le tableau des fréquences cumulées croissantes.

29 Voici le polygone des effectifs cumulés décroissants d'une série statistique regroupée en classes.



1. Détermine graphiquement la médiane de cette série statistique.
2. Détermine par le calcul la médiane de cette série statistique.

30

1. Calcule la moyenne et l'écart type de chacune des deux séries données par leur diagramme en bâtons.
2. Compare la dispersion des deux séries.

31 Le temps d'écoute quotidien de la radio pulsar du Hambol par 100 personnes est résumé dans les tableaux suivants :

Temps d'écoute en minutes	[0 ; 30[	[30 ; 60[	[60 ; 90[
Nombre de personnes	14	22	11

[90 ; 110[	[110 ; 150[	[150 ; 180[
20	18	15

Calcule la variance et l'écart type de cette série.

32 On a sélectionné un échantillon de ménages dans un quartier et l'on a compté le nombre de personnes dans le ménage. Les résultats sont consignés dans le tableau ci-dessous :

Nombre de personnes	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre de ménages	201	238	137	142	55	15	4	2

1. Calcule la variance de cette série.
2. Calcule l'écart type de cette série.

33 La distribution des salaires mensuels dans une ONG a pour moyenne 80.000 francs CFA et pour écart type 10000 francs CFA.
Détermine dans chaque cas la moyenne et l'écart type des salaires :

a) Chaque salaire est augmenté de 3000 francs CFA ;
b) Chaque salaire est augmenté de 4%.

34 Dis si, oui ou non, l'on peut trouver une série de huit notes de 0 à 20 dont :

a) La moyenne est 10 et l'écart type 0.
b) La moyenne est 10 et l'écart type 10.
c) La moyenne est 3 et l'écart type est supérieur à 6,5.

35 On lance simultanément cinq pièces de monnaie cent fois de suite et on compte le nombre de fois qu'apparaît la face « Pile ».
On obtient le tableau suivant :

Modalités	0	1	2	3	4	5
Effectifs	2	17	29	33	16	3

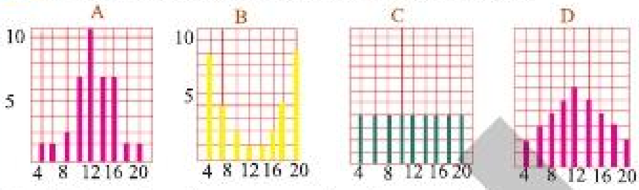
1. Dresse le tableau des effectifs cumulés croissants et des effectifs cumulés décroissants.
2. Détermine la médiane de cette série statistique.
3. Détermine la variance de cette série statistique.

36 Une radio FM a enquêté sur l'âge de ses auditeurs de 5 ans à 30 ans.
Le tableau de répartition (en pourcentage) est le suivant :

Age	[5 ; 8[	[8 ; 13[	[13 ; 16[	[16 ; 18[	[18 ;22[	[22 ;30[
Fréquence (en %)	6	12	26	30	18	8

1. a) Dresse le tableau des fréquences cumulées croissantes.
   b) Déduis le pourcentage des auditeurs qui ont moins de 18 ans.
2. a) Construis le polygone des fréquences cumulées croissantes.
   b) Déduis l'âge médian des auditeurs, puis interprète ce résultat.

37 Voici représentées quatre séries de notes :



1. Détermine la moyenne de chaque série.
2. Précise la série qui a le plus petit écart-type et celle qui a le plus grand écart-type.
3. Calcule l'écart type de la série A et l'écart-type de la série D.

38 Deux tireurs à l'arc, Amine et Massé s'affrontent en vue d'une sélection lors d'une épreuve comportant vingt tirs sur une cible.
Les résultats obtenus sont les suivants :

	50	30	20	10	0
Amine	4	6	5	4	1
Massé	6	3	5	3	3

1. Dis si la moyenne par tir permet de départager les deux concurrents.
2. Reprends la question 1 en ne prenant en compte que les dix meilleurs tirs.
3. Calcule l'écart type de chacune des séries du tableau ci-dessus.
4. Dis qui d'Amine ou de Massé est le tireur le plus régulier. Justifie la réponse.

39 Dans un journal, on a comptabilisé le nombre de lignes pour chaque petite annonce.
On a obtenu le tableau de répartition suivant :

Nombre de lignes	1	2	3	4	5	6
Nombre d'annonces	3	8	21	39	22	7

1. Donne la population étudiée, la variable et sa nature et le mode.
2. Calcule la moyenne de cette série et exprime le résultat à l'aide d'une phrase.
3. Calcule l'écart type de cette série.
4. Calcule le pourcentage d'annonces dont le nombre de ligne présente un écart avec la moyenne plus grand que l'écart type.

40 Lors d'un recensement des paysans dans une région, l'une des questions a porté sur la superficie exploitée par ceux-ci. Le tableau ci-dessous représente la superficie exploitée en hectare de 175 paysans.

Superficie exploitée en (hectare)	[0 ; 3[	[3 ; 6[	[6 ; 9[	[9 ; 12[	[12 ; 15[	[15 ; 18[
Nombre de paysans	15	25	18	27	54	36

1. Détermine la classe modale de cette série statistique.
2. a) Dresse le tableau des effectifs cumulés croissants et décroissants.
   b) Dresse le tableau des fréquences cumulées croissantes et décroissantes.
3. a) Construis dans un repère orthogonal les polygones des effectifs cumulés croissants et décroissants.
   b) Détermine graphiquement la médiane de cette série statistique.
   c) Détermine algébriquement la médiane de cette série statistique et interprète le résultat.
4. Détermine le pourcentage de paysans qui ont une superficie cultivable supérieure ou égale à 12 hectares.

41 On a relevé le taux de cholestérol, en gramme par litre de sang, dans un échantillon de 220 personnes. Les résultats sont consignés dans le tableau ci-dessous :

Taux	[1,6 ; 1,8[	[1,8 ; 2,0[	[2,0 ; 2,2[	[2,2 ; 2,4[	[2,4 ; 2,6[	[15 ; 18[
Effectif	68	59	45	30	18	36

1. a) Présente dans un tableau les fréquences et les fréquences cumulées croissantes.
   b) Trace le polygone des fréquences cumulées croissantes de cette série.
2. Détermine graphiquement la médiane de cette série statistique.
3. On considère qu'un taux supérieur à 2,1 grammes par litre de sang est anormal.
   Détermine graphiquement le pourcentage de personnes ayant un taux anormal.
4. Présente une synthèse courte des résultats obtenus.

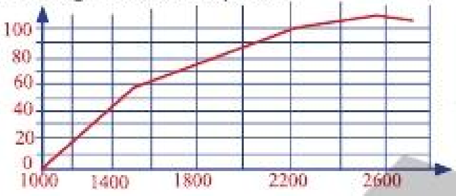
42 On considère la série suivante de 13 données :

$2 ; 3 ; 3 ; 4 ; 4 ; 4 ; 5 ; 5 ; 6 ; 6 ; 7 ; 9 ; x.$

x désigne la valeur d'une donnée inconnue.

1. Le nombre x est un nombre entier tel que : $0 \leq x \leq 10$.
   On suppose que la moyenne de la série des 13 données est égale à 5.
   a) Justifie que : x est égal à 7.
   b) Détermine l'étendue, la médiane de la série des données.
2. On suppose que la médiane de la série des 13 données est égale à 5 et l'étendue est 7.
   Détermine toutes les valeurs possibles du nombre x.

43 La courbe ci-contre représente la répartition des salaires, en milliers de francs CFA, des jeunes employés d'une grande entreprise.



Par exemple, on peut lire sur cette courbe que 70 % des employés ont un salaire inférieur ou égal à 1 800 000 francs CFA.

1. a) Donne le salaire le plus bas et le salaire le plus haut de cette série.
   b) Détermine l'étendue de ces salaires.
2. Détermine la médiane de cette série statistique.
3. Donne une interprétation de tous les résultats obtenus.

44 Une course a été organisée pour les élèves d'une classe de seconde A

(40 garçons et 50 filles) d'un lycée. Les résultats sont donnés dans les tableaux ci-dessous :

• **Temps de parcours des garçons :**

Temps (en min)	De 10 à 15 15 exclu	De 15 à 20 20 exclu	De 20 à 25 25 exclu	De 25 à 30 30 exclu	De 30 à 35 35 exclu
Effectif	8	14	9	6	3

• **Temps de parcours des filles :**

Temps (en min)	De 10 à 15 15 exclu	De 15 à 20 20 exclu	De 20 à 25 25 exclu	De 25 à 30 30 exclu	De 30 à 35 35 exclu
Effectif	7	8	12	11	12

1. a) Justifie que le temps de parcours moyen des garçons est 20,25 minutes.
   b) Calcule le temps de parcours moyen des filles.
2. Construis deux histogrammes pour représenter les résultats de chaque série.
3. a) Calcule le pourcentage de garçons ayant effectué un temps compris entre 15 et 30 minutes exclu.
   b) Calcule le pourcentage de filles ayant effectué un temps compris entre 15 et 30 minutes exclu.
4. Entre le groupe des garçons et celui des filles, détermine celui qui a les résultats les plus homogènes.

Situations complexes

45 Pendant la récréation, M. Tioté professeur de Sciences de la Vie et de la Terre (SVT) et Mlle Gbaza professeur de Physique- Chimie (PC) discutent de leur classe de seconde C_1 en salle des professeurs.

M. Tioté : « C'est une classe moyenne et très homogène. Il est dommage que je n'ai pas de tête de classe, mais au moins il n'y a pas d'élèves faibles ».

Mes moyennes sur 20 en SVT sont les suivantes :

8	10	11	10	12	11	11	8	12	10	10
9	10	10	9	11	8	14	9	9	10	12
13	12	11	8	10	9	7	10	10	12	9

Mlle Gbaza : « Il est vrai que c'est une classe moyenne, mais je trouve le niveau très hétérogène. Pour aider leurs camarades, j'ai mis en binôme les meilleurs avec les plus faibles ».

Mes moyennes sur 20 en PC sont les suivantes :

8	10	13	13	18	10	10	12	9	9	9
11	12	4	8	10	5	8	5	16	10	15
16	9	8	7	13	8	11	12	9	15	12

Le professeur de Mathématiques de la classe, présent en salle des professeurs, souhaite arbitrer cette discussion. Pour vérifier les acquis de ses élèves en statistiques, il leur demande de commenter cette discussion à partir des notes obtenues dans les deux disciplines.

En utilisant tes connaissances, dis si l'affirmation de chaque professeur à propos du niveau des élèves de chacune de leur classe est oui ou non fondée.

46 Des chimistes d'un laboratoire viennent de composer une nouvelle fibre synthétique qui devrait se caractériser par sa résistance. Sur cette fibre synthétique, il sera mentionné « taux de résistance 99 % ».

Pour que cette mention soit portée, il faut que lors du test de résistance, le pourcentage moyen de résistance de 60 fibres soit compris entre 80 % et 95 %, l'écart type soit inférieur à 15 et qu'au moins 95 % des 60 fibres ait un pourcentage de résistance compris entre $[\overline{x}-2\sigma\,;\ \overline{x}+2\sigma]$ où $\overline{x}$ désigne la moyenne et σ l'écart type.

Le pourcentage de résistance des 60 fibres synthétiques est le suivant :

Pourcentage de résistance	[30 ; 45[	[45 ; 60[	[60 ; 75[	[75 ; 90[	[90 ; 105[	[105 ; 120[
Effectif	1	2	9	36	11	1

Le laboratoire sollicite des statisticiens venus faire une enquête dans votre établissement. Ces derniers se trouvant dans votre classe vous présentent la situation.

En te référant à tes connaissances et à partir d'une argumentation cohérente, dis si oui ou non le laboratoire peut étiqueter la nouvelle fibre synthétique.

47 Des élèves de 2^{de} C découvrent le texte suivant dans une revue :

« Un institut de consommation a analysé 100 fromages d'une laiterie qui fabrique des fromages et les vend avec la mention « 45 % de matière grasse ». Il a obtenu les résultats suivants :

Taux de matière grasse	[41 ; 42[	[42 ; 43[	[43 ; 44[	[44 ; 45[	[45 ; 46[	[46 ; 47[
Nombre de fromages	2	10	25	40	21	2

Cet institut autorise la vente de fromages sous l'étiquette « 45% de matière grasse » si l'analyse d'un échantillon de fromages donne :

- La moyenne des taux de matière grasse comprise entre 44 et 46 ;
- L'écart type inférieur à 1,5 ;
- 95 % des fromages ont un taux de matière grasse comprise entre la moyenne diminuée de deux fois l'écart type et la moyenne augmentée de deux fois l'écart type. »

Un des élèves affirme que l'institut va interdire la vente des fromages de cette laiterie. Les autres cherchent à vérifier cette affirmation.

En te référant à tes connaissances et à partir d'une argumentation cohérente, confirme ou infirme l'affirmation de l'élève.

10 PRODUIT SCALAIRE

Commentaire de la Leçon

Le produit scalaire est un puissant outil mathématique dont les fondements ont été posés par le mathématicien allemand Hermann Grassmann. Il a des applications, aussi bien en mathématiques (pour la détermination d'objets perpendiculaires ou orthogonaux) qu'en physique (pour le travail des forces). Il apparaît pourtant tardivement dans l'histoire des sciences (fin du XIXe siècle) et se voit prolongé au XXe siècle dans des espaces de dimensions supérieures ou complexes. À la même époque, le produit vectoriel qui, à deux vecteurs, associe un troisième vecteur et non un nombre réel, fait son apparition.

La notion de produit scalaire est nouvelle en classe de seconde C, toutefois les notions qui sont utilisées pour l'aborder ont été étudiées dans des leçons précédentes (angles orientés et trigonométrie, mesures algébriques d'un couple de points, etc.)

Une fois mise en place, la définition et l'interprétation géométrique, l'enseignant mettra les élèves en activité soit pour démontrer des propriétés soit pour faire fonctionner ce nouvel outil au travers d'exercices appropriés et variés.

Lors des exercices convoquant une décomposition de vecteur, le professeur expliquera la méthode qui a guidé son choix afin d'entraîner les élèves à choisir une bonne décomposition de vecteur pour calculer le produit scalaire.

Le théorème de la médiane n'est pas un savoir exigible, toutefois il doit être traité sous forme d'exercices. Lors d'une évaluation, si on souhaite que les élèves l'utilisent, il devra être rappelé dans le sujet.

Le produit scalaire sera utilisé dans diverses exercices, notamment lors de la recherche de certains lieux géométriques.

Habiletés et Contenus

- **Connaître :** la définition du produit scalaire de deux vecteurs ; la définition du carré scalaire d'un vecteur ; les propriétés relatives au produit scalaire de deux vecteurs ; la propriété relative au carré scalaire d'un vecteur ; la propriété relative à l'interprétation géométrique du produit scalaire ; les propriétés relatives aux règles de calculs sur le produit scalaire ; le théorème d'Al Kashi, les propriétés relatives aux vecteurs orthogonaux ; les relations métriques caractérisant un triangle rectangle ; l'expression du produit scalaire dans une base orthonormée.
- **Traduire** l'orthogonalité de deux droites à l'aide du produit scalaire.
- **Calculer** le produit scalaire de deux vecteurs connaissant leurs coordonnées dans une base orthonormée ; la longueur d'un côté d'un triangle en utilisant le théorème d'Al Kashi ; la mesure d'un angle d'un triangle en utilisant le théorème d'Al Kashi.
- **Démontrer** une propriété en utilisant les règles de calculs du produit scalaire.
- **Déterminer** la mesure de l'angle de deux vecteurs connaissant leurs coordonnées.
- **Écrire** une équation cartésienne d'un cercle dont on connait un diamètre.
- **Traiter une situation** faisant appel au produit scalaire.

Situation d'Apprentissage

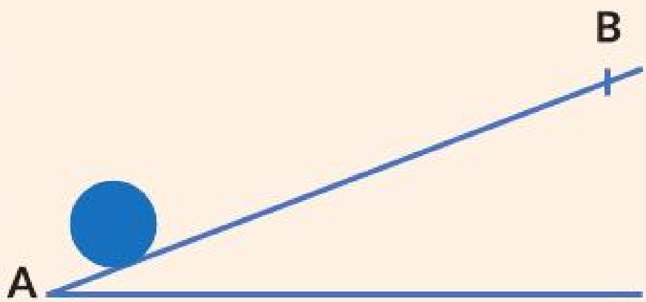
Suite aux pluies diluviennes du 13 Octobre 2021 sur ABIDJAN, la toiture de la salle de classe des élèves de la seconde C d'un collège situé à yopougon Ananeraie fut arrachée par un vent violent. Dans le but de refaire la charpente, le directeur du collège fait appel à un charpentier.

Ce dernier doit tirer des poutres de 60 kg chacune sur toute la distance de AB de 30 m, et sur un plan incliné d'un angle de 15 degrés par rapport à l'horizontale.

Aman, élève de cette classe pense que l'ouvrier exerçant une force de 350 N ne pourra pas faire parvenir la poutre jusqu'au sommet B. Konan son voisin soutien le contraire.

Un élève d'une classe de première C qui les a écouté, leur dit que le produit scalaire peut les aider à se mettre d'accord.

Curieux, tous les élèves de cette classe de seconde C décident d'étudier le produit scalaire et ses propriétés afin de départager leurs deux amis.



Activité 1 Produit scalaire de deux vecteurs

Recopie et complète le tableau ci-dessous.

$\|\vec{u}\|$	$\|\vec{v}\|$	$mes(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$	$\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$
2	3	60°	
3	$\sqrt{2}$	45°	
1	2	0°	
11	5	90°	

Récapitulons

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant deux vecteurs non nuls, le nombre $\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ est appelé le produit scalaire des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

On le note $\vec{u}.\vec{v}$ et on lit ". $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$".
On admet que si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, alors $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

Exercices de fixation

1 Reproduis et complète le tableau suivant :

$\|\vec{u}\|$	$\|\vec{v}\|$	$mes(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$	$\vec{u}.\vec{v}$
2	1	$\frac{\pi}{4}$	
4	3	$\frac{2\pi}{3}$	

2 Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.
Recopie et coche dans chaque cas la bonne réponse.

1	Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est :	un vecteur	
		un nombre réel	
		un segment	
2	Lorsque $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$, on a $\vec{u}\,.\,\vec{v} =$	$\|\vec{u}\|\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$	
		$\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|\sin(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$	
		$\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$	
3	$\vec{u}\,.\,\vec{v} = 0$ lorsque	$\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$	
		$\vec{u} = \vec{v}$	
		$\vec{u} \neq \vec{0}$ ou $\vec{v} \neq \vec{0}$	
4	$\vec{u}\,.\,\vec{v} =$	$-\vec{v}.\vec{u}$	
		$(\vec{u}.\vec{v})\times(\vec{v}.\vec{u})$	
		$\vec{v}.\vec{u}$	

3 Calcule le produit scalaire $\vec{u}\,.\,\vec{v}$ dans chacun des cas ci-dessous :

1. $\|\vec{u}\| = 2$; $\|\vec{v}\| = 3$; $\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
2. $\|\vec{u}\| = 5$; $\|\vec{v}\| = \sqrt{2}$; Mes$(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \frac{3\pi}{4}$.
3. $\|\vec{u}\| = 4$; $\|\vec{v}\| = 7$; $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens.
4. $\|\vec{u}\| = 8$; $\|\vec{v}\| = 27$; $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraires.

Activité 2 Carré scalaire d'un vecteur

$\vec{u}$ désigne un vecteur non nul du plan. Utilise la définition du produit scalaire (vue à l'activité 1) pour calculer $\vec{u}.\vec{u}$

Récapitulons

- Le produit scalaire d'un vecteur non nul par lui-même est appelé, le carré scalaire de ce vecteur. il est égale au carré de la norme de ce vecteur.
- On écrit : $\vec{u}.\vec{u} = \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$.

Exercices de fixation

4 On donne un vecteur $\vec{v}$ tel que : $\|\vec{v}\| = \sqrt{5}$.
Calcule le carré scalaire du vecteur $\vec{v}$.

5 On donne : $\vec{u}\,(4\,;3)$ et $\vec{v}\,(-1\,;2)$ dans une base orthonormée. Calcule : $\vec{u}^{\,2}$ et $\vec{v}^{\,2}$.

Activité 3 Propriétés du produit scalaire

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ désignent deux vecteurs non nuls du plan.
Utilise la définition du produit scalaire et les propriétés du cosinus d'un angle pour démontrer chacune des propriétés suivantes :

1. $|\vec{u}.\vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.
2. $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$.
3. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens équivaut à $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.
4. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraire équivaut à $\vec{u}.\vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.
5. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

Récapitulons

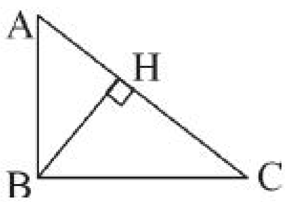
1. $|\vec{u}.\vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.
2. $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$.
3. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens équivaut à $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.
4. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraire équivaut à $\vec{u}.\vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.
5. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

Exercices de fixation

6 ABCD est un carré de côté 5 cm.
Calcule les produits scalaires suivants : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DA}$.

7 BAC est un triangle rectangle en B et H est le pied de la hauteur issue de B.

Calcule : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BH}$.



Activité 4 Interprétation géométrique du produit scalaire

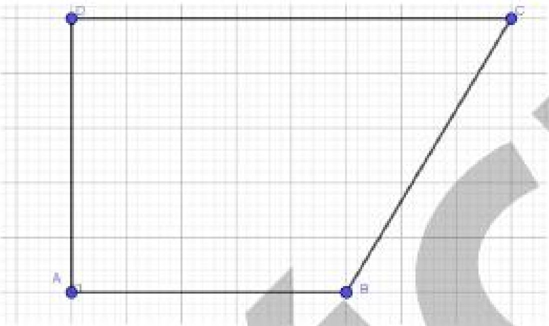
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. On pose $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ et on note H et K, les projetés orthogonaux respectifs des point B et A sur (OA) et sur (OB).
Démontre que les nombres $\overline{OA} \times \overline{OH}$ et $\overline{OB} \times \overline{OK}$ sont égaux.

Récapitulons

Les nombres réels $\overline{OA} \times \overline{OH}$ et $\overline{OB} \times \overline{OK}$ sont égaux.
Chacun de ces nombres désigne aussi le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
On admettra que ce nombre est indépendant des représentants choisis pour les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Exercice de fixation

8 ABCD est un trapèze rectangle en A.



AB = 5 ; CD = 8.
Calcule les produits scalaires suivants :

- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$;
- $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{BC}$;
- $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DA}$.

Activité 5 Règles de calculs des produits scalaires.

Soit $\vec{u}$, $\overrightarrow{u'}$, $\vec{v}$ et $\overrightarrow{v'}$des vecteurs et k un nombre réel. Utilise les propriétés de développement déjà étudiées pour démontrer chacune des égalités suivantes :

1. $\vec{u}.(\vec{v} + \overrightarrow{v'}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\overrightarrow{v'}$;
2. $(k\vec{u}).\vec{v} = \vec{u}.(k\vec{v}) = k(\vec{u}.\vec{v})$;
3. $(\vec{u} + \overrightarrow{u'}).\vec{v} = \vec{u}.\vec{v} + u'.\vec{v}$;
4. $(\vec{u} + \overrightarrow{u'}).(\vec{v} + \overrightarrow{v'}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\overrightarrow{v'} + \overrightarrow{u'}.\vec{v} + \overrightarrow{u'}.\vec{v}$;
5. $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\,\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$;
6. $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}\ \vec{v} + \vec{v}^2$;
7. $(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$.

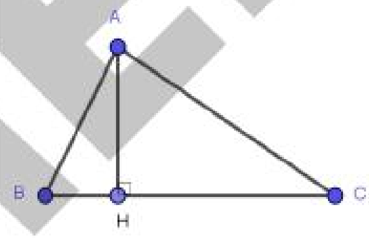
Dans toute la suite, on admettra les propriétés ci-dessus.

Exercice de fixation

9 Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan tels que :
$\vec{u}^2=2$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\vec{u}.\vec{v} = -4$.
Calcule en détaillant les étapes :
1. $(3\vec{u} - \vec{v}).(-\vec{u} + 2\vec{v})$;
2. $(\vec{u} - 3\vec{v})^2$.

Activité 6 Relations métriques caractérisant un triangle rectangle

ABC est un triangle et H est le projeté orthogonal de A sur la droite (BC).
1. Démontre que ABC est un triangle rectangle en A si et seulement si $BA^2 = \overline{BH} \times \overline{BC}$.
2. Démontre que ABC est un triangle rectangle en A si et seulement si $AH^2 = -\overline{HB} \times \overline{HC}$.



Récapitulons

ABC est un triangle et H est le projeté orthogonal de A sur la droite (BC).
- ABC est un triangle rectangle en A si et seulement si $BA^2 = \overline{BH} \times \overline{BC}$.
- ABC est un triangle rectangle en A si et seulement si $AH^2 = -\overline{HB} \times \overline{HC}$.

Exercice de fixation

10 ABC est un triangle rectangle en A tel que : AB = 5 cm et BC = 10 cm.
H est le pied de la hauteur issue de A.
Calcule : BH ; HC et AH.

Activité 7 Produit scalaire dans un triangle

Soit A, B et C trois points du plan.
Justifie que : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{AC^2+AB^2-BC^2}{2}$.

Récapitulons

La formule $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{AC^2+AB^2-BC^2}{2}$, permet également de calculer un produit scalaire.

Exercice de fixation

11 Calcule $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, sachant que : AB = 7 ; AC = 4 et BC = 5.

Activité 8 Théorème d'AL-KASHI.

Soit ABC un triangle.

Posons : BC = a, CA = b et AB = c puis $\widehat{A} = \widehat{BAC}$, $\widehat{B} = \widehat{CBA}$ et $\widehat{C} = \widehat{ACB}$.

1. Démontre que : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$ en utilisant l'égalité : $\overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2$.
2. Déduis-en que le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $a^2 = b^2 + c^2$.

Récapitulons

- Le résultat de la consigne 1) ci-dessus est connu sous le nom de théorème d'Al Kashi.
- Le résultat de la consigne 2) n'est rien d'autre que le théorème de Pythagore.

Exercice de fixation

12 ABC est un triangle tel que : AB = 6 cm ; AC = 2 cm et $\cos\hat{A} = 0{,}1$.
Calcule BC.

Activité 9 Théorème de la médiane

Soit ABC un triangle et A' le milieu du côté [BC].
Démontre que :

1. $AB^2 + AC^2 = AA'^2 + \frac{BC^2}{2}$.

Démontre que :

2. a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AA'^2 - \frac{BC^2}{4}$.

b) Déduis-en que le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si le point A appartient au cercle de diamètre [BC].

3. a) Démontre que : $AB^2 - AC^2 = 2\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{CB}$.

b) Déduis-en que le triangle ABC est isocèle en A si et seulement si la médiane issue de A est une hauteur.

Récapitulons

Les trois relations démontrées ci-dessus permettent de calculer la longueur de la médiane [AA']. C'est pourquoi on les appelle les théorèmes de la médiane.

Exercice de fixation

13 ABC est un triangle et I est le milieu de [BC]. On donne : BC = 4 et AI = 3.
Calcule :

1. $AB^2 + AC^2$; 2. $AB^2 - AC^2$; 3. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

Activité 10 Forme analytique du produit scalaire.

Soit $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ une base orthonormée. Dans cette base, $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ et $\vec{v} = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath}$.

1. Justifie que : $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2)$.
2. Démontre que : $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$.

Récapitulons

On a :

- $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2)$.
- $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$.

L'écriture : $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$ est appelée forme analytique du produit scalaire.

Exercice de fixation

14 Dans une base orthonormée, on donne les vecteurs suivants : $\vec{u}(-3;5)$ et $\vec{v}(1;-2)$.
Calcule le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$.

Activité 11 Équation cartésienne d'un cercle

$A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ sont deux points du plan muni d'un repère orthonormé.
Soit (C) le cercle de diamètre [AB] et $M(x ; y)$ un point du cercle (C) .
En utilisant la forme analytique du produit scalaire, détermine une équation cartésienne d'un cercle (C) .

Récapitulons

Une équation du cercle (C) de diamètre [AB] est : $(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0$.

Exercices de fixation

15 Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on donne : E(1 ; −2) et F(3 ; 4).

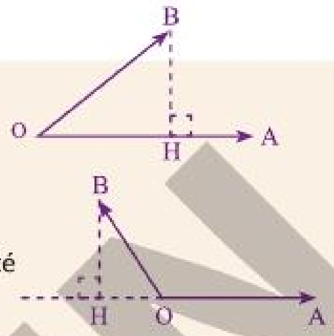
Détermine une équation du cercle de diamètre [EF].

16 Dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$), on donne A(−2 ; −3) et B(2 ; 1).

Détermine une équation du cercle de diamètre [AB].

I. Définition et premières propriétés

1. Définition



Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

On appelle le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le nombre réel noté $\vec{u}.\vec{v}$ et défini par :

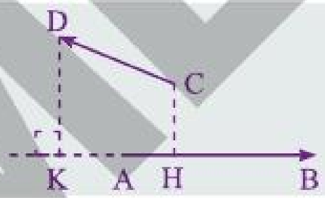
- si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, alors : $\vec{u}.\vec{v} = 0$;
- si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$, alors $\vec{u}.\vec{v} = \overline{OA} \times \overline{OH}$ où $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ et H le projeté orthogonal de B sur la droite (OA).

› Remarque

Cette écriture du produit scalaire est appelée forme algébrique du produit scalaire.

Propriété

Soit A, B, C et D quatre points tels que : A ≠ B. Soit H et K, les projetés orthogonaux respectifs des points C et D sur la droite (AB). On a : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overline{AB} \times \overline{HK}$.



2. Le carré scalaire

Le carré scalaire d'un vecteur $\vec{u}$ est le nombre réel noté $\vec{u}^2$ défini par $\vec{u}.\vec{u}$.

Pour s'entraîner : Exercices 1 ; 2 ; 3

II. Propriétés du produit scalaire

1. Vecteurs orthogonaux

Propriété

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a :
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

2. Calculs avec le produit scalaire

Propriétés

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{u}'$, $\vec{v}$ et $\vec{v}'$ et tout nombre réel k, on a :

1. $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{v}') = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{v}'$;
2. $(k\vec{u}).\vec{v} = \vec{u}.(k\vec{v}) = k(\vec{u}.\vec{v})$;
3. $(\vec{u} + \vec{u}').\vec{v} = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}'.\vec{v}$;
4. $(\vec{u} + \vec{u}').(\vec{v} + \vec{v}') = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{v}' + \vec{u}'.\vec{v} + \vec{u}'.\vec{v}'$;
5. $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$;
6. $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$;
7. $(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$;
8. $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$;
9. $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{4}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$.

3. Forme trigonométrique du produit scalaire

Propriété

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. On a :
$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right)$.

Propriété

Soit A, B et C trois points du plan. On a :
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \dfrac{AC^2 + AB^2 - BC^2}{2}$

Pour s'entraîner : Exercices 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 9 ; 10 ; 11

4. Théorème d'Al Kashi

Soit ABC un triangle quelconque. Posons BC = a, CA = b et AB = c puis $\hat{A} = \widehat{BAC}$, $\hat{B} = \widehat{CBA}$ et $\hat{C} = \widehat{ACB}$.

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$.

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$.

$c^2 = b^2 + a^2 - 2ab \cos \hat{C}$.

Pour s'entraîner : Exercices 12 ; 13 ; 14

III. Relation métrique dans un triangle

1. Caractérisation d'un triangle rectangle

Propriétés

Soit ABC un triangle, H le pied de la hauteur issue de A.
Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. ABC est rectangle en A ; 2. $BA^2 = \overline{BH} \times \overline{BC}$;
3. $CA^2 = \overline{CH} \times \overline{CB}$; 4. $HA^2 = -\overline{HB} \times \overline{HC}$.

2. Théorème de la médiane

Propriétés

Soit ABC un triangle et A' le milieu du segment [BC]. On a :

$AB^2 + AC^2 = AA'^2 + \dfrac{BC^2}{2}$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AA'^2 - \dfrac{BC^2}{4}$.

Pour s'entraîner : Exercice 17

3. Ensemble de points

Propriété

Soit A et B deux points distincts. L'ensemble des points M du plan vérifiant $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre [AB].

Pour s'entraîner : Exercices 15 ; 16

IV. Forme analytique du produit scalaire

1. Base orthonormée, repère orthonormé

Définition

Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base.
La base $(\vec{i}, \vec{j})$ est orthonormée signifie que $\|\vec{i}\| = 1$ et $\|\vec{j}\| = 1$ et $\vec{i}.\vec{j} = 0$.
Un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ est orthonormé si la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est orthonormée.

2. Expression du produit scalaire dans une base orthonormée (forme analytique)

Propriété

Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives (x, y) et (x', y') dans cette base. On a : $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$.

Conséquence

Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée, $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *deux vecteurs de coordonnées respectives* (x, y) *et* (x', y').
$u \perp v \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$.

Pour s'entraîner : Exercice 8

QUESTION 1

Comment calculer un produit scalaire ?

Méthode

Pour calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

- Si nous connaissons les distances AB, AC et BC, nous utilisons la formule : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{AC^2+AB^2-BC^2}{2}$.
- Si nous connaissons le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) noté H ou de B sur la droite (AC) noté K, nous utilisons la formule : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overline{AB} \times \overline{AH}$ (ou $\overline{AC} \times \overline{AK}$).
- Si nous connaissons l'angle $\widehat{BAC}$ et les distances AB et AC, nous utilisons la formule : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \text{AB} \times \text{AC} \times \cos\widehat{BAC}$.
- Si nous connaissons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, dans un repère orthonormé avec $\overrightarrow{AB}(x, y)$ et $\overrightarrow{AC}(x', y')$, alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = xx' + yy'$.

Exercice

Utilise la forme la plus adaptée pour calculer $\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{EH}$, sachant que le triangle EFH est isocèle de sommet principal E, les angles à la base ont pour mesure 75° et EF = EH = 8.

Solution commentée

La donnée de la mesure de l'angle à la base du triangle nous suggère l'utilisation de la forme trigonométrique du produit scalaire.

On a : $\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{EH} = \text{EF} \times \text{EH} \times \cos\widehat{FEH}$

Les angles à la base étant de 75°, l'angle $\widehat{FEH}$ vaut 30°. $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, donc $\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{EH} = 8 \times 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$.

On conclut que : $\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{EH} = 32\sqrt{3}$.

Exercice non corrigé

ABC est un triangle isocèle de sommet principal B, I est le milieu de [AC], AC = 6 et BI = 5.

Calcule $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

QUESTION 2

Comment calculer la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$ de deux vecteurs non nuls ?

Méthode

Pour calculer l'angle $\widehat{AOB}$ de deux vecteurs, on peut procéder comme suit :

- on calcule $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$;
- on déduit $\cos\widehat{AOB}$;
- on utilise éventuellement une calculatrice pour déterminer la mesure ou une valeur approchée de la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$.

Exercice

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, on considère les vecteurs $\vec{u}(5;-1)$ et $\vec{v}(-2;-3)$.

On désigne par A et B les points tels que : $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$.

Détermine l'approximation décimale d'ordre 1 par excès de la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$.

■ Solution commentée

- On utilise l'expression analytique du produit scalaire pour calculer $\vec{u}.\vec{v}$.

  $\vec{u}.\vec{v} = 5 \times (-2) + (-1) \times (-3)$, donc $\vec{u}.\vec{v} = -7$.
- On calcule OA et OB

  OB = $\sqrt{(-2)^2 + (-3)^2}$, donc OB = $\|\vec{v}\| = \sqrt{13}$.

  De même, OA = $\sqrt{26}$.
- On écrit la forme trigonométrique de $\vec{u}.\vec{v}$ pour tirer la valeur de cos $\widehat{AOB}$.

  $\vec{u}.\vec{v}$ = OA × OB × cos $\widehat{AOB}$,

donc cos $\widehat{AOB} = \dfrac{-7}{\sqrt{26}\sqrt{13}}$,

soit cos $\widehat{AOB} = -\dfrac{7}{13\sqrt{2}}$.

La connaissance de cos $\widehat{AOB}$ permet en utilisant une calculatrice, de déterminer la mesure ou une valeur approchée de la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$. On trouve :

mes $\widehat{AOB} \simeq 112{,}4°$.

■ Exercice non corrigé

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on considère les points A(−1 ; 2), B(4 ; 1), C(4 ; 3) et D(2 ; −1).

1. Fais une figure.
2. Détermine une valeur approchée en degré de la mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}})$.

QUESTION 3

Comment démontrer que deux droites sont perpendiculaires ?

Méthode

Pour démontrer que deux droites sont perpendiculaires, Il suffit de prouver que le produit scalaire de deux de leurs vecteurs directeurs respectifs est nul.

■ Exercice

Soit un carré ABCD et I et J les milieux respectifs des côtés [AB] et [BC].
Démontre que les droites (AJ) et (DI) sont perpendiculaires.

■ Solution commentée

On doit démontrer que $\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{DI} = 0$.

$\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{DI} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ})(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AI})$ (On utilise l'égalité de Chasles pour faire apparaître des vecteurs orthogonaux).

$\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BJ}.\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BJ}.\overrightarrow{AI}$ (Propriété du produit scalaire)

ABCD est un carré donc $\overrightarrow{BJ}.\overrightarrow{AI} = 0$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DA} = 0$, de plus $\overrightarrow{BJ} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$,

de même $\overrightarrow{BJ}.\overrightarrow{DA} = -\dfrac{1}{2}DA^2$, or AB = DA donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB}.\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, soit $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{2}AB^2$.

On en déduit donc que : $\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{DI} = 0 - \dfrac{1}{2}AB^2 + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} = 0$, donc les vecteurs $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{DI}$ sont orthogonaux et par suite, les droites (AJ) et (DI) sont perpendiculaires.

■ Exercice non corrigé

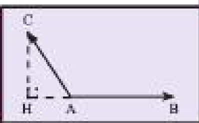
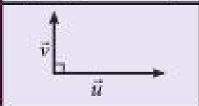
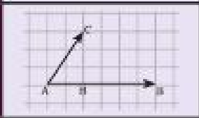
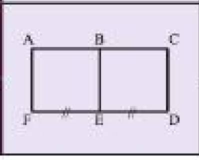
Reprends cet exercice en utilisant un repère orthonormal du plan.

Mes séances d'exercices

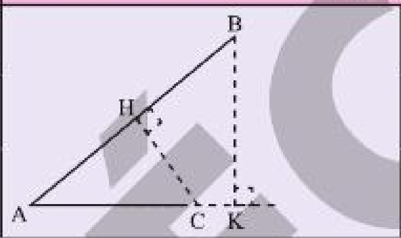
Exercices de fixation

Définition et premières propriétés

1 Pour chaque ligne du tableau ci-dessous, une seule réponse est juste.
Écris le numéro de la ligne suivi de la lettre de la colonne qui correspond à la réponse juste.

		a	b	c
1		$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AB \times AH$	$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AH$	$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC$
2		$\vec{u}.\vec{v} = -1$	$\vec{u}.\vec{v} = 1$	$\vec{u}.\vec{v} = 0$
3		$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -12$	$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 12$	$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 6$
4		$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE} = AB^2$	$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AE$	$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AB \times FE$
5		$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{FE} = -AB \times FE$	$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{FE} = AC$	$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{FE} = AB^2$

2 Recopie le numéro de chaque affirmation suivi de V si l'affirmation est vrai ou de F si l'affirmation est fausse.

N°	AFFIRMATIONS	
1		$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AH$
2		$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AK \times AH$
3		$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AC \times AK$
4	$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs. $\vec{u}.(\vec{v}-\vec{w}) = 0 \Rightarrow \vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{w}$	
5	$\lVert\vec{u}+\vec{v}\rVert = \lVert\vec{u}\rVert + \lVert\vec{v}\rVert \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires	
6	$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs. $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\lVert\vec{u}+\vec{v}\rVert^2 - \lVert\vec{u}\rVert^2 - \lVert\vec{v}\rVert^2)$	

3 Recopie le numéro de chaque affirmation suivi de V si l'affirmation est vrai ou de F si l'affirmation est fausse.

1. Le produit scalaire de deux vecteurs est un vecteur.
2. Le produit scalaire de deux vecteurs est un nombre réel.
3. Le carré scalaire d'un vecteur est quelque fois un nombre réel négatif.

Propriétés de produit scalaire

4 Soit ABCD un rectangle. O est le point d'intersection des diagonales tels que AB = 5 et AD = 3.
Calcule les produits scalaires suivants :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{OD}.\overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{OD}.\overrightarrow{OB}$

5 On donne les points O, A, B tels que OA = 3, OB = 5, $Mes(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) = \frac{\pi}{3}$.
Calcule le produit scalaire : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$.

Mes séances d'exercices

6 Calcule le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$ dans chacun des cas suivants. θ désigne la mesure principale de $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$.

1. $\|\vec{u}\| = 4$; $\|\vec{v}\| = 1{,}5$; $\theta = -\dfrac{2\pi}{3}$;
2. $\|\vec{u}\| = 8$; $\|\vec{v}\| = 10$; $\theta = \dfrac{\pi}{6}$;
3. $\|\vec{u}\| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\|\vec{v}\| = 9$; $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$;
4. $\|\vec{u}\| = 7$; $\|\vec{v}\| = 56$; $\theta = 120°$.

7 ABCD est un parallélogramme tel que : AB = 5, AD = 4 et AC = 6.

Calcule les produits scalaires suivants :

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AB}$.

8 Dans une base orthonormée, on donne les vecteurs suivants : $\vec{u}$ (−3 ; 5) et $\vec{v}$ (1 ; −2).

Calcule le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$.

9 Le plan vectoriel $\mathcal{V}$ est muni d'une base orthonormé $(\vec{i}, \vec{j})$.

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que : $\vec{u}.\vec{v} = -3$; $\|\vec{u}\| = 4$ et $\|\vec{v}\| = 5$.

Calcule : $(\vec{u}+2\vec{v})^2$; $\|\vec{u}-\vec{v}\|$; $(3\vec{u}+5\vec{v}).(-\vec{u}+2\vec{v})$.

10 Soit $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ deux vecteurs orthogonaux de normes respectives 10 et 3.

Calcule : $u.(2\vec{u}+3\vec{v})$; $(\vec{u}-2\vec{v}).\vec{v}$; $(\vec{u}+\vec{v})^2$; $(\vec{u}-\vec{v})^2$; $(\vec{u}-\vec{v}).(\vec{u}+\vec{v})$; $(2\vec{u}-\vec{v})^2$.

11 ABCD est un carré de centre O et de côté de longueur 4.

Calcule :

1. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$
2. $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}$
3. $\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OB}$
4. $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{OB}$
5. $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AO}$.

Théorème d'Al Kashi

12 ABC est un triangle tel que :
$AB = \sqrt{2}$; $AC = \sqrt{3}$ et mes $\hat{A}$ = 30°.
Calcule BC.

13 ABC est un triangle tel que :
AB = 3 ; BC = $\sqrt{13}$ et AC = 4.
Détermine la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

14 ABC est un triangle tel que : AB = 16 ; AC = 16 et $mes\,\widehat{BAC} = 60°$.

1. Calcule BC.
2. Détermine la mesure des angles $\widehat{CBA}$ et $\widehat{BCA}$.

Ensemble de points

15 Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, I, J).
On donne les points A(1 ; 3) et B(−5 ; −1).
Détermine une équation du cercle de diamètre [AB].

16 Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, I, J).
On donne les points A(2 ; 3) et B(4 ; −3).
Détermine une équation du cercle de diamètre [AB].

Théorème de la médiane

17 ABC est un triangle tel que AB = 5, BC = 6 et AC = 8.
On note A' le milieu de $[BC]$.
Calcule AA'.

Exercices de renforcement / approfondissement

18 Dans un triangle PQR. On donne :

$\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{PR} = 3\sqrt{2}$; PR = 3 et PQ = 2.

1. Détermine la mesure de l'angle $\widehat{QPR}$.
2. Calcule la longueur du côté $[QC]$ puis donne une valeur approchée à 0,1 près de cette distance.

19 Soit ABC un triangle rectangle en A.

Démontre que BC > AB et BC > AC.

Autrement dit dans un triangle rectangle, l'hypoténuse est le plus long côté.

20 Soit ABC un triangle rectangle en A, H le pied de la hauteur issue de A.

1. Démontre que : $AH^2 = \frac{BA^2 \times CA^2}{BC^2}$.
2. Déduis-en que : $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$.

21 Soit ABC un triangle rectangle en A, H le pied de la hauteur issue de A.

Démontre que : AB × AC = AH × BC.

22 Soit ABCD un carré tel que : AB = 1. Soit E le point du côté [AB] tel que $AE = \frac{1}{5}AB$; G le point du côté [AD] tel que : $AG = \frac{4}{5}AD$. Soit F le point tel que le quadrilatère AEFG soit un rectangle.

Démontre que les droites (GE) et (FC) sont perpendiculaires.

Méthode analytique

1. Justifie que le repère (A, B, D) est un repère orthonormé.
2. Dans la base orthonormée $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$, détermine les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{GE}$ et $\overrightarrow{FC}$.
3. Démontre que les droites (GE) et (FC) sont perpendiculaires.

Méthode géométrique

Sans utiliser de coordonnées, démontre que $\overrightarrow{GE}.\overrightarrow{FC} = 0$. Déduis-en que les droites (GE) et (FC) sont perpendiculaires.

23 Soit A, B, C, D quatre points quelconques du plan. Démontre que : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 0$.

24 Quatre points A, B, C et D forment un quadrangle orthocentrique si chacun de ses points est l'orthocentre du triangle ayant pour sommets les trois autres points. (O, I, J) est un repère orthonormé du plan. On donne les points A(5 ; 0) ; B(−1 ; −2) ; C(11 ; -8) et D(7 ; 4).

Démontre que les points A, B, C et D forment un quadrangle orthocentrique.

25 ABCD est un carré tel que : AB = a ($a > 0$). Soit I le milieu de [AD].

Démontre que la mesure de l'angle $\widehat{ACI}$ est indépendante de a.

26 Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, I, J). On donne les points A (3 ; 1) ; B(−1 ; 3) et C(−2 ; 5).

Détermine une équation cartésienne des tangentes au cercle de diamètre [AB] passant par C.

27 Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, I, J). On donne les points A (−1 ; 2) et B(3 ; 4).

1. Détermine une équation de la médiatrice de [AB].
2. Détermine une équation du cercle de diamètre [AB].
3. Détermine une équation de la tangente en A au cercle de diamètre [AB].

28 ABC est un triangle et O le centre du cercle circonscrit à ce triangle. Soit H le point du plan tel que $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ et G le centre de gravité du triangle ABC.

1. Démontre que H est l'orthocentre du triangle ABC.
2. Démontre que les points O, H et G sont alignés.

29 Soit $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ deux vecteurs du plan vectoriel V.

1. Démontre que : $|\vec{u}.\vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$.
2. Démontre que $|\vec{u}.\vec{v}| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$ si et seulement si $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ sont colinéaires.

30 Soit $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ deux vecteurs du plan vectoriel $\mathcal{V}$.

1. Démontre que $\|\vec{u}\| \leq \|\vec{u} - \vec{v}\| + \|\vec{v}\|$.

   (On pourra écrire $\vec{u} = (\vec{u} - \vec{v}) + \vec{v}$).
2. Déduis-en que : $\left|\|\vec{u}\| - \|\vec{v}\|\right| \leq \|\vec{u} - \vec{v}\|$.

31 Calcule la longueur de la médiane [AI] du triangle ABC tel que AB = 3, AC = 5, BC = 6, le point I étant le milieu de [BC].

32 Soit ABC un triangle quelconque.

On pose : AB = c, BC = a, CA = b.

1. Démontre que : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = BC^2$.
2. Déduis-en que : $a^2 = ac\cos\widehat{B} + ba\cos\widehat{C}$.

33 Soit (C) un cercle de centre O et de rayon r et M un point du plan n'appartenant pas au cercle (C).

1. Une droite (D) passant par M coupe (C) en deux points distincts A et B. On note I le milieu du segment [AB].
   Démontre que : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = OM^2 - r^2$.
2. Une droite (D') passant par M coupe (C) en deux points distincts P et Q. On note J le milieu du segment [PQ].
   Démontre que : $\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{MQ} = OM^2 - r^2$.

Le nombre réel $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ s'appelle la puissance du point M par rapport au cercle (C) de centre O et de rayon r.

Si on pose OM = d, on écrit alors $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = d^2 - r^2$.

34 Soit ABC un triangle quelconque.

On pose : AB = c, BC = a, CA = b.

Soit G le point tel que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Démontre que : $GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$.

35 Soit ABC un triangle. On note I, J, K les milieux respectifs des côtés [BC], [CA], [AB]. Soit H le point d'intersection des hauteurs issues des sommets B et C.

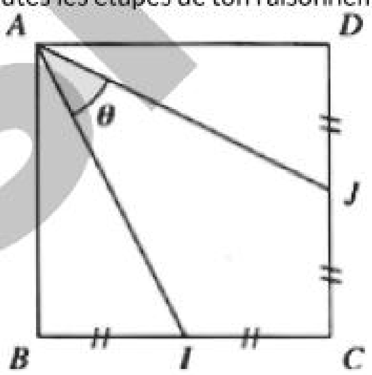
1. Démontre que pour tout point M du plan :
   $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB} = 0$.
2. Démontre que $\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CA} = 0$ et $\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AB} = 0$.
3. Déduis-en que H appartient à la hauteur issue du sommet A.

On obtient ainsi que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes. Leur point de concours s'appelle l'orthocentre du triangle.

Situations complexes

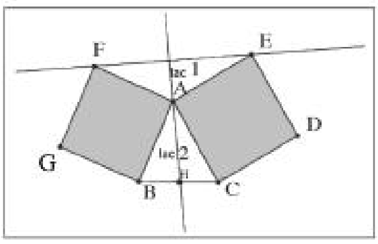
36 Un père partage un terrain de forme carrée à ses trois enfants. Pour éviter le conflit entre les jumeaux, il décide que la parcelle de l'aîné, élève en classe de seconde C, soit entre celles des jumeaux. La figure ci-après illustre ce partage. L'aîné, pour connaitre l'aire de sa partie, décide de déterminer l'angle θ. Pour cela, il te sollicite.

Détermine la valeur approchée de θ à 10^{-2} près en justifiant toutes les étapes de ton raisonnement.



37 Deux lacs bordent deux terrains de forme carrée comme l'indique la figure ci-dessous dans laquelle ABC est un triangle quelconque. ACDE et ABGF sont des carrés et H milieu de [BC]. Les propriétaires veulent partager chacun des deux lacs de sorte que la ligne droite (AH) qui les partage soit perpendiculaire à la ligne (EF). Soucieux, l'un fait appel à son fils élève en classe de seconde.

Celui-ci avec ton aide cherche à faire le partage.



1. Justifie que si I est le milieu de [AB], alors pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.
2. Démontre que les droites (AH) et (EF) sont perpendiculaires.

11 ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS DANS $\mathbb{R}$

Commentaire de la Leçon

Même si l'on peut faire remonter l'histoire des mathématiques à l'histoire de l'Humanité dans son ensemble, les premières traces tangibles de la résolution des équations remontent bien sûr à l'apparition de l'écriture, et donc à la Mésopotamie. Il faut comprendre que les notations mathématiques, et ce à partir de l'écriture même des chiffres et des nombres, a toujours changé à travers notre Histoire. Des traces d'équations sont perçues chez les Babyloniens, chez les Egyptiens, dans la Grecque Antique avec « Les Eléments » d'Euclide, chez les Arabes... Ainsi, c'est au mathématicien perse Mohammad Ibn Moussa al Khwarizmi (780 – 850) que l'on doit la naissance de l'algèbre. En 833, al Khwarizmi dédie au Calife de Bagdad, al Ma'moun, un traité qui contient ses propres méthodes pour la résolution de problèmes et qui s'intitule « livre abrégé sur le calcul par la restauration (al jabr) et la comparaison (al mugabala) ». « Al jabr » a donné le mot algèbre. En Europe, le développement systématique de ces méthodes se fait au XVe et XVIe siècles. Les mathématiciens italiens parmi lesquels on peut citer Scipione del Ferro (1465 – 1526), Gérolamo Cardano (1501 – 1576) et Nicolò Tartaglia (1500 – 1557), s'attaquent aussi à la résolution des équations du troisième degré. Enfin ajoutons que c'est au jeune mathématicien Évariste Galois (1811-1832) que l'on doit le résultat suivant : « Il n'y a pas de méthode générale (donc pas de formule) pour résoudre une équation de degré supérieur à 5. »

L'élève qui arrive en classe de seconde sait résoudre dans l'ensemble des nombres réels, des équations et inéquations du premier degré. Dans la leçon « polynômes et fractions rationnelles », il sait écrire la forme canonique d'un polynôme du second degré, sait vérifier qu'un nombre réel est un zéro d'un polynôme, etc. Il s'agit d'utiliser ces acquis par la résolution d'équations ou d'inéquations.

Aucune théorie sur la résolution des équations ou des inéquations ne doit être envisagée. En outre, l'utilisation du discriminant pour résoudre une équation du second degré n'est pas inscrite au programme.

Pour la résolution d'équations ou d'inéquations du troisième degré, il faut présenter des exercices où un zéro est donné. La résolution des équations se poursuivra en classe de première.

Habiletés et Contenus

I. ÉQUATIONS DANS $\mathbb{R}$

- ✓ **Identifier** une équation dans $\mathbb{R}$, deux équations équivalentes.
- ✓ **Résoudre** des équations dans $\mathbb{R}$ dont les membres sont deux polynômes ou deux fractions rationnelles, des équations avec valeur absolue.

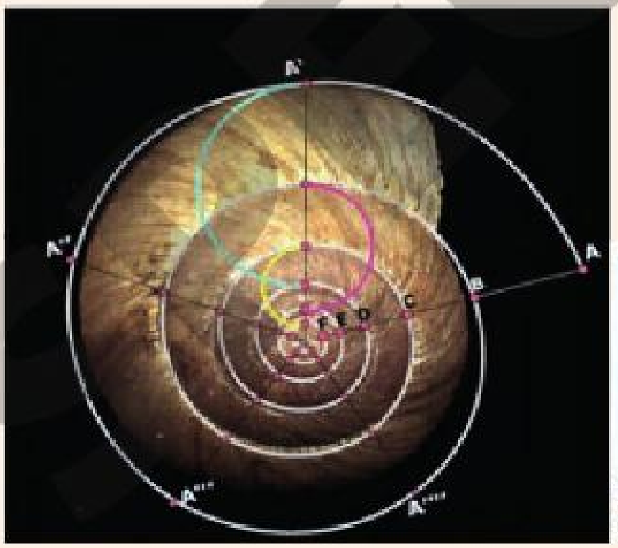
II. INÉQUATIONS DANS $\mathbb{R}$

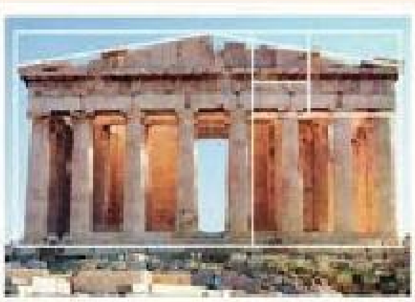
- ✓ **Identifier** une inéquation dans $\mathbb{R}$, deux inéquations équivalentes.
- ✓ **Résoudre** des inéquations dans $\mathbb{R}$ dont les membres sont deux polynômes ou deux fractions rationnelles, des inéquations avec valeur absolue.

III. TRAITER UNE SITUATION faisant appel aux équations et inéquations dans $\mathbb{R}$

Situation d'Apprentissage

Fatimah, élève en seconde C au Lycée Moderne de Korhogo, découvre dans une encyclopédie « le nombre d'or ». Il y est défini comme la solution positive de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$. Ce nombre est dit être présent dans tout ce qui est beau (musique, peinture,…) et aussi dans la nature (fleur de tournesol, escargot, …) ou dans l'architecture.





Elle en parle à ses camarades de classe. Émerveillés par le sujet, elle et ses camarades s'organisent pour s'informer sur la résolution d'équations et d'inéquations dans $\mathbb{R}$ afin de déterminer ce nombre d'or.

Activité 1 Équation dans $\mathbb{R}$

On considère l'équation (E) : $x \in \mathbb{R}, -\frac{2}{3}x+\frac{1}{4}=-x+1$.

1. Identifie l'inconnue dans l'équation (E).
2. Identifie les deux membres de cette équation.
3. Soit f et g les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies respectivement par : $f(x)=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{4}$ et $g(x) = -x+1$.
   Réécris l'équation (E) en utilisant les fonctions f et g.

Récapitulons

Soit f et g des fonctions numériques. L'énoncé (E) : $x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x)$ est appelé une équation à une inconnue dans $\mathbb{R}$.
(E) est le nom de l'équation et $\mathbb{R}$ est le référentiel de l'équation.

Exercice de fixation

1 Recopie et complète le tableau ci-dessous par une croix pour indiquer que l'énoncé est soit vrai, soit faux :

	Vrai	Faux
$x \in \mathbb{R}, x^2 - 2x + 7 = 0$ est une équation dans $\mathbb{R}$.		
$xy - x + 1 = 0$ est une équation du premier degré dans $\mathbb{R}$.		

Activité 2 solution, ensemble de validité d'une équation dans $\mathbb{R}$

On considère les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par : $f(x)=\frac{x-1}{x-2}$ et $g(x)=x-\frac{5}{2}$.

1. a) Calcule $f(0)$ et $g(0)$, puis compare les résultats.

   b) Calcule $f\left(\frac{11}{2}\right)$ et $g\left(\frac{11}{2}\right)$, puis compare les résultats.

2. a) Détermine l'ensemble de définition de chacune des fonctions f et g.

   b) Détermine les contraintes sur x pour que l'équation (E) : $x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x)$ ait un sens.

Récapitulons

$\frac{11}{2}$ est une solution de l'équation (E) car $f\left(\frac{11}{2}\right) = g\left(\frac{11}{2}\right)$.
0 n'est pas une solution de l'équation (E) car $f(0) \neq g(0)$.
Les contraintes sur x de l'équation (E) sont : $x \in D_f \cap D_g$.
$D_f \cap D_g$ est appelé l'ensemble de validité de l'équation (E).

Exercice de fixation

2

1. Écris la lettre de l'affirmation suivie de vrai si elle est vraie ou de faux si elle est fausse.
   a) -1 est solution de l'équation $x \in \mathbb{R}, x(x-1) = 2$.
   b) 0 est solution de l'équation $x \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}, \frac{x^2(x+1)}{x}=x$.
   c) L'équation $x \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}, \frac{x(x+2)}{x^3+8}=0$ admet pour solutions 0 et -2.
   d) -3 est un élément de l'ensemble de validité de l'équation : $x \in \mathbb{R}, \frac{x+3}{x}=2x-3$.
2. On considère l'équation suivante (E): $x \in \mathbb{R}, \frac{x+4}{x-1}=\frac{x}{x+1}$.

   Parmi les nombres suivants, indique la solution de l'équation (E) : -1 ; $-\frac{2}{3}$; 0 ; 1 ; $\frac{2}{3}$; 2.

Activité 3 Équations équivalentes

1. Dans chacun des cas suivants, résous dans $\mathbb{R}$ les équations proposées.
   Cas 1 : (E_1): $x^2 - 4 = 0$ et (E_2) : $x^3 - x = 3x$.
   Cas 2 : (E_3): $|x| - 1 = 0$ et (E_4): $x^2 - 1 = 0$.
2. Compare dans chacun des cas les ensembles de solutions de ces équations.

Récapitulons

Les équations (E_3) et (E_4) de même référentiel et ont le même ensemble de solutions : on dit qu'elles sont équivalentes.

Exercice de fixation

3 Parmi les équations suivantes, indique celles qui sont équivalentes et l'ensemble dans lequel elles le sont.

(E_1) : $2x + 1 = 5$; (E_2) : $\dfrac{x+1}{x-2} = \dfrac{x-2}{x+1}$;

(E_3) : $3(2x - 1) = 0$; (E_4) : $\dfrac{2}{x-1} + \dfrac{3}{x+2} = \dfrac{6}{x^2+x-2}$.

Activité 4 Résolution d'une équation

1. On donne l'équation (E_1) : $x \in \mathbb{R}$, $2x + 3 = -x + 1$.
   a) Transforme (E_1) de sorte à avoir une équation de la forme $ax + b = 0$, où a et b sont des réels.
   b) Résous (E_1).
2. On donne l'équation suivante dans $\mathbb{R}$, (E_2) : $(3x + 1)^2 + 4x^2 = 0$
   Résous (E_2).

Récapitulons

Résoudre une équation dans $\mathbb{R}$ consiste à déterminer l'ensemble des nombres réels qui vérifient l'égalité. Cet ensemble est appelé ensemble de solutions de l'équation.

On note : $S_{\mathbb{R}}(E_1)$ ou $S_{\mathbb{R}}$ s'il n'y a pas de confusion.

- L'équation (E_2) n'a pas de solution : on dit que l'ensemble de solutions est l'ensemble vide.
  On note : $S_{\mathbb{R}} = \varnothing$.
- La résolution d'une équation peut se faire en transformant l'équation en une équation équivalente au moyen des règles de calcul dans $\mathbb{R}$.

Exercice de fixation

4 Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations ci-dessous :

a) $-4x + 1 = 0$; b) $3x + \dfrac{x+1}{2} = 4$;

c) $2x + 3 = -x + \dfrac{2}{3}$; d) $\dfrac{3x+1}{4} - \dfrac{x+2}{5} = 5 + \dfrac{x}{3}$.

Activité 5 Équations dans ℝ de la forme $f(x) = g(x)$, où f et g sont des polynômes

f et g sont deux polynômes. Résous dans chacun des cas, l'équation : $f(x) = g(x)$.

1. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 6$ et $g(x) = -2x - 6$.
2. $f(x) = 9x^2 - 4$ et $g(x) = (6x + 4)(x - 5)$.

Récapitulons

Pour résoudre une équation du type $f(x) = g(x)$, où f et g sont des polynômes :

- on se ramène dans le cas d'une équation de la forme $p(x) = 0$, où p est un polynôme ;
- on factorise $p(x)$ si possible ;
- on détermine les solutions si elles existent de l'équation $p(x) = 0$.

Exercice de fixation

5

1) Résous dans ℝ, chacune des équations ci-dessous :

a) $(x + 3)(2x - 6) = 0$; d) $16x^2 = 49$;

b) $x^2 - 81 = 0$; e) $(x + 5)^2 - (3x + 2)^2 = 0$;

c) $-4x^2 + 9 = 0$; f) $(2x - 3)^2 = (2 - 3x)^2$.

2) Résous dans ℝ, chacune des équations ci-dessous :

a) $5x = 4x^2$; e) $2x^2 - 6x + 10 = x^2 + 1$;

b) $x + 2 = 5x^2 + 10$; f) $(x - 1)^2 + (x^2 - 1) = 0$;

c) $2x^2 - x + 6x - 3 = 0$; g) $2x^3 - 2x = x^2 - 1$;

d) $5(x - 3) = x^2 - 9$; h) $4 - x^2 = 2x^2 + 14x + 20$.

Activité 6 Équations dans ℝ de la forme $f(x) = g(x)$ où f et g sont des fractions rationnelles.

f et g sont deux polynômes de ℝ vers ℝ. Résous dans chacun des cas l'équation précisée.

1. $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ et $g(x) = \frac{2x+5}{x-2}$; $f(x) = g(x)$.
2. $f(x) = \frac{2x+3}{5x-3}$ et $g(x) = \frac{x-2}{x+2}$; $f(x) = g(x)$.

Récapitulons

Pour résoudre une équation de la forme $f(x) = g(x)$, où f et g sont des fractions rationnelles :

- on détermine l'ensemble de validité de l'équation ;
- on se ramène à une équation liant deux polynômes de la forme $P(x)=Q(x)$;
- on résout la nouvelle équation obtenue ;
- on conclut en tenant compte de l'ensemble de validité de l'équation initiale.

Exercice de fixation

6

1) Résous dans ℝ chacune des équations ci-dessous :

a) $2 = \frac{x+3}{x}$; d) $\frac{2x^2+4x+3}{x^2+x} = \frac{2x+1}{x}$;

b) $\frac{x+1}{x-2} = \frac{x-2}{x+1}$; e) $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} = \frac{5}{x^2+x-2}$.

c) $\frac{x+3}{2x-1} = \frac{x-2}{2x+1}$;

2) Résous dans ℝ chacune des équations ci-dessous :

a) $\frac{3x-1}{x-1} = \frac{6x-9}{2x-5}$; b) $\frac{2x+5}{x-3} = \frac{2x-3}{x+5}$;

c) $\frac{5}{x+2} = \frac{1}{-2x+3}$; d) $\frac{-2}{2x+7} = \frac{-2}{-x+4}$.

Activité 7 Équations dans $\mathbb{R}$ avec valeur absolue.

Résous dans $\mathbb{R}$, les équations ci-dessous :

$|x+3| = 1$; $|2x - 4| = |x+1|$.

Récapitulons

Pour résoudre une équation comportant une valeur absolue, on peut utiliser les propriétés suivantes :

- Si x et a sont des nombres réels et r un nombre réel positif, alors : $|x - a| = r \Leftrightarrow x \in \{a - r\,;\, a + r\}$
- Pour tous réels x et y, on a : $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y$ ou $x = -y$.

Exercice de fixation

7 Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations ci-dessous :

a) $|x + 1| = 2$; d) $|4x+2| = 3$;

b) $|-3x - 1| = -2$; e) $|x| = x$;

c) $|2x - 1| = |3x + 1|$; f) $|2x - 3| = 5x + 4$.

Activité 8 Inéquations dans $\mathbb{R}$

On considère l'inéquation (I) : $x \in \mathbb{R}$, $3x - \dfrac{1}{2} > 2x + 4$.

1. Identifie l'inconnue dans l'inéquation (I).
2. Identifie les deux membres de cette inéquation.
3. Soit f et g les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par : $f(x) = 3x - \dfrac{1}{2}$ et $g(x) = 2x + 4$.
   Réécris l'inéquation (I) en utilisant les fonctions f et g.

Récapitulons

Soit f et g deux fonctions numériques. L'énoncé (I) : $x \in \mathbb{R}$, $f(x) < g(x)$ (ou $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq g(x)$ ou $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > g(x)$ ou $\in \mathbb{R}$, $f(x) \geq g(x)$) est appelé une inéquation à une inconnue dans $\mathbb{R}$.

(I) est le nom de l'inéquation et $\mathbb{R}$ est le référentiel de l'inéquation.

Si le référentiel n'est pas mentionné, alors le référentiel est l'ensemble $\mathbb{R}$.

Exercice de fixation

8 Écris la lettre de l'affirmation suivie de vraie si elle est vraie ou de faux si elle est fausse.

a) $t - 8 < \dfrac{t}{t-8}$ est une inéquation dans $\mathbb{R}$.

b) $y^3 - y + xy + 6 \leq 0$ est une inéquation du premier degré dans $\mathbb{R}$.

Activité 9 Solution d'une inéquation, ensemble de validité d'une inéquation

On considère les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par : $f(x) = 3x + 4$ et $g(x) = \dfrac{x+1}{2x-3}$.

1. a) Calcule $f(1)$ et $g(1)$, puis compare les résultats.

   b) Calcule $f(-2)$ et $g(-2)$, puis compare les résultats.

2. a) Détermine l'ensemble de définition de chacune des fonctions f et g.

   b) Détermine les contraintes sur x pour que l'inéquation (I) : $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq g(x)$ ait un sens.

Récapitulons

1 est une solution de l'inéquation (I) car $f(1) \geq g(1)$.
-2 n'est pas une solution de l'inéquation (I) car $f(-2) < g(-2)$.
Les contraintes sur x de l'inéquation (I) sont : $x \in Df \cap Dg$
$Df \cap Dg$ est appelé l'ensemble de validité de l'inéquation (I).

Exercices de fixation

9 Recopie le numéro de chaque affirmation suivi de V si l'affirmation est vraie ou de F si elle est fausse.

1	-4 est solution de l'inéquation $x \in \mathbb{R}$, $2x - 3 > 3x - 2$.
2	0 est solution de l'inéquation $x \in \mathbb{R}$, $\frac{x-2}{x+1} < 2x + 1$.
3	L'ensemble de validité de l'inéquation : $y \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{y} + 3 > 0$ est $]-\infty ; -3[$.
4	La résolution de l'équation : $x \in \mathbb{R}$, $x + 3 = 0$ permet de déterminer l'ensemble de validité de l'inéquation : $x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{x+3} \leq \frac{x+3}{x^2}$.

10 On considère l'inéquation suivante (I): $x \in \mathbb{R}$, $\frac{x-2}{x+3} \leq 2$.

Parmi les nombres suivants, indique ceux qui sont solutions de (I) : -20 ; -9 ; -8 ; -5 ; -3 ; 0 ; 2.

Activité 10 Inéquations équivalentes

1. Dans chacun des cas suivants, résous dans $\mathbb{R}$ les inéquations proposées.
   a) Cas 1 : (I_1) : $|x| - 1 < 0$ et (I_2) : $x^2 < 1$
   b) Cas 2 : (I_3) : $9x > x^2$ et (I_4) : $9 - x > 0$
2. Compare dans chacun des cas les ensembles de solutions de ces inéquations.

Récapitulons

Les inéquations (I_1) et (I_2) ont le même ensemble de solutions : on dit qu'elles sont équivalentes.

Exercice de fixation

11 Recopie et relie chacune des inéquations de la colonne A à l'inéquation de la colonne B qui lui est équivalente.

A
$\frac{2x+3}{x+1} \leq x$
$x - 3 < x^2 - 3x$
$\frac{x^2+x-1}{x-1} < 1$

B
$(x-1)(x-3) > 0$
$\frac{x^2}{x-1} < 0$
$\frac{2-x^2}{x+1} \leq -1$

Activité 11 Résolution d'une inéquation

1. On donne l'inéquation (I_1) : $x \in \mathbb{R}$, $-x + 2 < 2x + 1$.
   a) Transforme (I_1) de sorte à avoir une inéquation (I'_1) de la forme $ax + b < 0$, où a et b sont des réels.
   b) Résous (I'_1).
2. On donne l'inéquation suivante dans $\mathbb{R}$, (I_2) : $-x^2 - x + 1 \geq -7x + 12$. Résous (I_2).

Récapitulons

Résoudre une inéquation dans $\mathbb{R}$ consiste à déterminer l'ensemble des nombres réels qui vérifient l'inégalité. Cet ensemble est appelé ensemble de solutions de l'inéquation.
On le note : $S_{\mathbb{R}}$ (I) ou $S_{\mathbb{R}}$ s'il n'y a pas de confusion.
L'inéquation (I_2) n'a pas de solution : On dit que l'ensemble de solutions est l'ensemble vide.
On note : $S_{\mathbb{R}} = \varnothing$.
La résolution d'une inéquation peut se faire en transformant l'inéquation en une inéquation équivalente au moyen des règles de calcul dans $\mathbb{R}$.

Exercice de fixation

12 Résous dans $\mathbb{R}$, chacune des inéquations ci-dessous :

a) $-2x + 7 \geq 1$; b) $3x - \dfrac{x-2}{5} > \dfrac{1}{2} - 2x$;

c) $x + 5 \leq \dfrac{x+5}{7} - x + 3$; d) $\dfrac{x+7}{2} - \dfrac{3x-2}{7} < \dfrac{x+4}{18} - 1$.

Activité 12 Inéquations dans $\mathbb{R}$ de la forme $f(x) \leq g(x)$ où f et g sont des polynômes

f et g sont deux polynômes. Dans chacun des cas, résous dans $\mathbb{R}$ l'inéquation précisée :
$f(x) = -x + 2$; $g(x) = 2x + 1$; $f(x) \geq g(x)$.
$f(x) = 2x^2 - x + 1$; $g(x) = -7x + 9$; $f(x) < g(x)$.
$f(x) = (x + 1)(x + \sqrt{2})$; $g(x) = (x + 1)(-x - 3\sqrt{2})$; $f(x) \leq g(x)$.

Récapitulons

Pour résoudre une inéquation de la forme $f(x) \leq g(x)$, où f et g sont des polynômes :
- on se ramène au cas d'une inéquation de la forme $p(x) \leq 0$, où p est un polynôme obtenu par différence de f et g ;
- on factorise $p(x)$ si possible ;
- on étudie le signe de $p(x)$ dans un tableau de signes ;
- on détermine les solutions, si elles existent, de l'inéquation $p(x) \leq 0$.

Exercice de fixation

13 Résous dans $\mathbb{R}$, chacune des inéquations ci-dessous :

a) $x^2 + 2 \geq 0$; c) $(3x + 5)^2 \leq 0$; e) $25 - 4x^2 > 0$; g) $5 - x^2 > 9$;

b) $(-2x + 1)^2 + 4 < 0$; d) $x^2 - 4 < 0$; f) $(3x + 1)^2 \leq (x - 3)^2$; h) $(x - 3)^2(x + 3) \geq (x^2 - 9)(4x + 1)$.

Activité 13 Inéquations dans ℝ de la forme $f(x) \leq g(x)$ où f et g sont des fractions rationnelles.

f et g sont deux fonctions de ℝ vers ℝ.
Résous dans chacun des cas l'inéquation précisée.

1. $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+1}$; $g(x) = \dfrac{1}{x+2}$; $x \in \mathbb{R}$, $f(x) < g(x)$.

2. $f(x) = \dfrac{6x^2 - x + 2}{2x+3}$; $g(x) = \dfrac{3x^2 - x - 2}{x-3}$; $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq g(x)$.

Récapitulons

Pour résoudre une inéquation de la forme $f(x) \leq g(x)$, où f et g sont des fractions rationnelles :
- on détermine l'ensemble de validité de l'inéquation ;
- on se ramène à une inéquation de la forme $p(x) \leq 0$ où p est une fraction rationnelle obtenue par différence de f et g ;
- on étudie le signe du numérateur et du dénominateur de p dans un tableau de signes ;
- on conclut en tenant compte de l'ensemble de validité de l'inéquation initiale.

Exercice de fixation

14 Résous dans ℝ chacune des inéquations ci-dessous :

a) $\dfrac{5}{x-2} - \dfrac{4}{x+2} < \dfrac{3}{x^2-4}$;

c) $\dfrac{x-2}{x} - \dfrac{x}{x-1} + \dfrac{2}{x^2-x} \leq 0$;

b) $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2}{x-2} - \dfrac{3}{x+3} > 0$;

d) $\dfrac{2x+1}{2x-1} + \dfrac{2x-1}{2x+1} \geq \dfrac{4x^2+6}{4x^2-1}$.

Activité 14 Inéquations dans ℝ avec valeur absolue.

Résous dans ℝ, chacune des inéquations ci-dessous :

1. $|x-3| < 2$; **2.** $|2x-4| \leq \dfrac{2}{3}$.

Récapitulons

Pour résoudre une inéquation comportant une valeur absolue, on peut utiliser la propriété suivante :
- Si x et a sont des nombres réels et r un nombre réel positif alors :
  $|x-a| < r \Leftrightarrow a - r < x < a + r$.
- On détermine l'ensemble de solutions de l'inéquation.

Exercice de fixation

15 Résous dans ℝ , chacune des inéquations ci-dessous :

a) $|x-4| < 2$;

d) $|x+4| \leq x+4$;

b) $|2x+3| \leq 1$;

e) $|x+2| < x+5$.

c) $|-2x+3| + |x-6| \leq 0$;

A. ÉQUATIONS DANS $\mathbb{R}$

1. Définition

Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ d'ensembles de définition respectifs Df et Dg.
L'énoncé (E): $x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x)$ est appelé une équation à une inconnue dans $\mathbb{R}$.
(E) est le nom de l'équation et $\mathbb{R}$ est le référentiel de l'équation.
Si le référentiel n'est pas mentionné, alors le référentiel est l'ensemble $\mathbb{R}$.

Exemple

(E): $x \in \mathbb{R}$, $3x - 12 = x + 2$ est une équation à une inconnue dans $\mathbb{R}$.

2. Solution d'une équation, ensemble de validité

Propriété et définition

On considère l'équation (E): $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = g(x)$.

- L'ensemble de validité D_E de l'équation (E) est $Df \cap Dg$.
- α est une solution de l'équation (E), lorsque $\alpha \in D_E$ et $f(\alpha) = g(\alpha)$.

Exemple

On considère l'équation (E): $x \in \mathbb{R}$, $3x - 12 = x + 2$.
On pose : $f(x) = 3x - 12$ et $g(x) = x + 2$.
On a : $Df = \mathbb{R}$ et $Dg = \mathbb{R}$.
Donc $D_E = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$.

$7 \in D_E$
$f(7) = 3\times7 - 12$ et $g(7) = 7 + 2$.
$f(7) = 9$ et $g(7) = 9$.
Comme $f(7) = g(7)$, alors 7 est la solution de l'équation (E).

Pour s'entraîner : Exercices 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5

3. Équations équivalentes

Définition

Soient (E_1) et (E_2) deux équations d'ensembles de validité respectifs D_{E_1} et D_{E_2}, P un sous-ensemble de $D_{E_1} \cap D_{E_2}$.
(E_1) et (E_2) sont équivalentes sur P si elles ont le même ensemble de solutions dans P.

Exemple

On considère les équations (E_1): $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{3x+1}{x-1} = 2$.
et (E_2): $x \in \mathbb{R}$, $3x + 1 = 2x - 2$
On a : $D_{E_1} = \mathbb{R}\backslash\{1\}$; $D_{E_2} = \mathbb{R}$ et $D_{E_1} \cap D_{E_2} = \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

$\forall x \in D_{E_1}$, on a : $\dfrac{3x+1}{x-1} = 2 \Leftrightarrow 3x + 1 = 2(x - 1)$
$\Leftrightarrow 3x + 1 = 2x - 2$.
On a : $\forall x \in D_{E_1}$, (E_1)$\Leftrightarrow$(E_2), donc (E_1) et (E_2) sont équivalentes sur D_{E_1}.

Pour s'entraîner : Exercice 7

4. Résolution d'équation

Définition

- Résoudre une équation (E) dans $\mathbb{R}$, consiste à déterminer :
  - ✓ son ensemble de validité ;
  - ✓ son ensemble de solutions.

L'ensemble de solutions est noté : $S_{\mathbb{R}}$ (E) ou $S_{\mathbb{R}}$ s'il n'y a pas de confusion.

- Lorsqu'une équation n'a pas de solution, on dit que l'ensemble de solutions est l'ensemble vide.
  On note : $S_{\mathbb{R}} = \varnothing$.

Exemple

On considère l'équation (E) : $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{4x-3}{x+1} = 3$.

On a : $D_E = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$\forall x \in D_E$, on a : $\dfrac{4x-3}{x+1} = 3 \Leftrightarrow 4x - 3 = 3(x+1)$

$\Leftrightarrow 4x - 3 = 3x + 3$

$\Leftrightarrow x = 6$

Comme $6 \in D_E$, donc $S_{\mathbb{R}} = \{6\}$.

5. Équations dont les membres sont des polynômes

› Méthode

Pour résoudre une équation du type $f(x) = g(x)$ où f et g sont des polynômes :

- on se ramène au cas d'une équation de la forme $p(x) = 0$, où p est un polynôme ;
- on factorise $p(x)$ si possible ;
- on détermine les solutions si elles existent, de l'équation $p(x) = 0$.

Exemple

On considère l'équation (E): $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 9 = x + 3$.

$x^2 - 9 = x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 9 - (x+3) = 0$

$\Leftrightarrow (x+3)(x-3) - (x+3) = 0$

$\Leftrightarrow (x+3)(x-3-1) = 0$

$\Leftrightarrow (x+3)(x-4) = 0$

$\Leftrightarrow x + 3 = 0$ ou $x - 4 = 0$

$\Leftrightarrow x = -3$ ou $x = 4$.

Par suite : $S_{\mathbb{R}} = \{-3 ; 4\}$.

Pour s'entraîner : Exercice 9

6. Équations dont les membres sont des fractions rationnelles

› Méthode

Pour résoudre une équation du type $f(x) = g(x)$ où f et g sont des fractions rationnelles:

- on détermine l'ensemble de validité de l'équation ;
- on se ramène à une équation de la forme $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = 0$, où P et Q sont des polynômes ;
- on résout $P(x) = 0$;
- on conclut en tenant compte de l'ensemble de validité de l'équation initiale.

Exemple

On considère l'équation

$(E) : x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{x+1}{x+3} = \dfrac{x+1}{x-1}$.

On pose $f(x) = \dfrac{x+1}{x+3}$ *et* $g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$.

Soit D_E l'ensemble de validité de l'équation (E)

On a : $D_E = \mathbb{R} \setminus \{-3 ; 1\}$.

$\dfrac{x+1}{x+3} = \dfrac{x+1}{x-1} \Leftrightarrow \dfrac{x+1}{x+3} - \dfrac{x+1}{x-1} = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x+1)(x-1) - (x+3)(x+1)}{(x+3)(x-1)} = 0$

$\Leftrightarrow (x+1)(x-1) - (x+3)(x+1) = 0$

$\Leftrightarrow -4(x+1) = 0$

$\Leftrightarrow x = -1$.

Comme $-1 \in D_E$, donc : $S_{\mathbb{R}} = \{-1\}$.

Pour s'entraîner : Exercice 11

7. Équations dont les membres comportent des valeurs absolues

a) Équation du type $|f(x)| = |g(x)|$

› Méthode

Pour résoudre une équation du type $|f(x)| = |g(x)|$:

- on détermine l'ensemble de validité de l'équation ;
- on utilise la propriété suivante : pour tous réels x et y, on a : $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y$ ou $x = -y$;
- l'ensemble de solutions de l'équation est l'intersection de l'ensemble de validité et la réunion des deux ensembles de solutions des équations trouvées.

Exemple

On considère l'équation (E): $x \in \mathbb{R}$, $|4x + 2| = |x + 3|$.
Soit D_E l'ensemble de validité de l'équation (E), $D_E = \mathbb{R}$.

$|4x + 2| = |x + 3| \Leftrightarrow 4x + 2 = x + 3$ ou $4x + 2 = -x - 3$

$\Leftrightarrow 3x = 1$ ou $5x = -5$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$ ou $x = -1$, donc : $S_{\mathbb{R}} = \{-1 ; \frac{1}{3}\}$.

Pour s'entraîner : Exercice 13

b) Équation du type $|f(x)| = r$

› Méthode

Pour résoudre une équation du type $|f(x)| = r$, où f est une fonction affine et r un nombre réel positif :
on peut utiliser la propriété suivante : si x et a sont des nombres réels et r un nombre réel positif, alors :
$|x - a| = r \Leftrightarrow x \in \{a - r ; a + r\}$.

Exemple

On considère l'équation (E) : $x \in \mathbb{R}$, $|x + 2| = 5$

$|x + 2| = 5 \Leftrightarrow |x - (-2)| = 5$

$\Leftrightarrow x \in \{-2 - 5 ; -2 + 5\}$.

$\Leftrightarrow x \in \{-7 ; 3\}$, donc : $S_{\mathbb{R}} = \{-7 ; 3\}$.

B. INÉQUATIONS DANS $\mathbb{R}$

1. Définition

Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ d'ensembles de définition respectifs Df et Dg.
L'énoncé (I) : $x \in \mathbb{R}$, $f(x) < g(x)$ est appelé une inéquation à une inconnue dans $\mathbb{R}$.
(I) est le nom de l'inéquation et $\mathbb{R}$ est le référentiel de l'inéquation.
Si le référentiel n'est pas mentionné, alors le référentiel est l'ensemble $\mathbb{R}$.

Exemple

(I): $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 2x - 1 < x - 2$ est une inéquation à une inconnue dans $\mathbb{R}$.

2. Solution d'une inéquation, ensemble de validité

Définition

On considère l'inéquation (I): $x \in \mathbb{R}, f(x) < g(x)$.

- L'ensemble de validité D_I de l'inéquation (I) est $Df \cap Dg$.
- α est une solution de l'inéquation (I), lorsque $\alpha \in D_I$ et $f(\alpha) < g(\alpha)$.

Exemple

On considère l'inéquation

$(I): x \in \mathbb{R},\ \dfrac{x-2}{x+1} < \dfrac{1}{x-1}$.

On pose : $f(x) = \dfrac{x-2}{x+1}$ et $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$.

On a : $Df = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et $Dg = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Donc : $D_I = \mathbb{R} \setminus \{-1\,;\,1\}$.

$2 \in D_I$.

$f(2) = \dfrac{2-2}{2+1}$ et $g(2) = \dfrac{1}{2-1}$.

$f(2) = 0$ et $g(2) = 1$.

Comme $f(2) < g(2)$, alors 2 est une solution de l'inéquation (I).

3. Inéquations équivalentes

Définition

Soient (I_1) et (I_2) deux inéquations d'ensembles de définition respectifs D_{I_1} et D_{I_2}, P un sous-ensemble de $D_{I_1} \cap D_{I_2}$.
(I_1) et (I_2) sont équivalentes sur P si elles ont le même ensemble de solutions dans P.

Exemple

On considère les inéquations $(I_1): x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x - 3 < x^2 - 5$ et $(I_2): x \in \mathbb{R}, 2x - 3 < -5$.

On a : $D_{I_1} = \mathbb{R}$; $D_{I_2} = \mathbb{R}$ et $D_{I_1} \cap D_{I_2} = \mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $x^2 + 2x - 3 < x^2 - 5 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 - x^2 < -5$.

$\Leftrightarrow 2x - 3 < -5$.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}, (I_1) \Leftrightarrow (I_2)$.

Alors (I_1) et (I_2) sont équivalentes sur $\mathbb{R}$.

Pour s'entraîner : Exercice 8

4. Résolution d'inéquation

Définition

- Résoudre une inéquation (I) dans $\mathbb{R}$, consiste à déterminer :
  - ✓ son ensemble de validité ;
  - ✓ son ensemble de solutions.

L'ensemble de solutions est noté : $S_{\mathbb{R}}$ (I) ou $S_{\mathbb{R}}$ s'il n'y a pas de confusion.

- Lorsqu'une inéquation n'a pas de solution, on dit que l'ensemble de solutions est l'ensemble vide.
  On note : $S_{\mathbb{R}} = \varnothing$.

Exemple

On considère l'inéquation (I) : $x \in \mathbb{R}$,

$2x - \dfrac{x+2}{3} \leq 2$. On a : $D_I = \mathbb{R}$.

$\forall x \in D_I$, on a: $2x - \dfrac{x+2}{3} \leq 2 \Leftrightarrow \dfrac{6x - x - 2}{3} \leq 2$

$\Leftrightarrow \dfrac{5x-2}{3} - 2 \leq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{5x-2-6}{3} \leq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{5x-8}{3} \leq 0$

$\Leftrightarrow x \leq \dfrac{8}{5}$

$S_{\mathbb{R}} = \left]-\infty ; \dfrac{8}{5}\right]$

5. Inéquations dont les membres sont des polynômes

Méthode

Pour résoudre une inéquation du type $f(x) < g(x)$ où f et g sont des polynômes :

- on se ramène au cas d'une inéquation de la forme $p(x) < 0$, où p est un polynôme obtenu par la différence de f et g;
- on factorise $p(x)$ si possible ;
- on étudie le signe de $p(x)$ dans un tableau de signes ;
- on détermine les solutions si elles existent, de l'inéquation $p(x) < 0$.

Exemple

On considère l'inéquation (I): $x \in \mathbb{R}, x^2 - 9 < x + 3$.

$x^2 - 9 < x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 9 - (x + 3) < 0$
$\Leftrightarrow (x + 3)(x - 3) - (x + 3) < 0$
$\Leftrightarrow (x + 3)(x - 3 - 1) < 0$
$\Leftrightarrow (x + 3)(x - 4) < 0$.

x	$-\infty$		-3		4		$+\infty$
$x + 3$		-	0	+	|	+	
$x - 4$		-	|	-	0	+	
$(x + 3)(x - 4)$		+	0	-	0	+	

Donc : $S_{\mathbb{R}} =]-3\,;4[$.

Pour s'entraîner : Exercice 10

6. Inéquations dont les membres sont des fractions rationnelles

Méthode

Pour résoudre une inéquation du type $f(x) < g(x)$ où f et g sont des fractions rationnelles:

- on détermine l'ensemble de validité de l'inéquation ;
- on se ramène à une inéquation de la forme $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$, où P et Q sont des polynômes ;
- on étudie le signe du numérateur $P(x)$ et du dénominateur $Q(x)$ dans un tableau de signes ;
- on détermine les solutions (si elles existent) de l'inéquation $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$;
- on conclut en tenant compte de l'ensemble de validité de l'inéquation initiale.

Exemple

On considère l'inéquation

$(I): x \in \mathbb{R},\ \frac{x+1}{x+3} < \frac{x+1}{x-1}$.

Soit D_I l'ensemble de validité de l'équation (I).

On a : $D_I = \mathbb{R} \setminus \{-3\,; 1\}$.

$\frac{x+1}{x+3} < \frac{x+1}{x-1} \Leftrightarrow \frac{x+1}{x+3} - \frac{x+1}{x-1} < 0$

$\Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-1)-(x+3)(x+1)}{(x+3)(x-1)} < 0$

$\Leftrightarrow \frac{-4(x+1)}{(x+3)(x-1)} < 0$.

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$-4(x+1)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{-4(x+1)}{(x+3)(x-1)}$		$+$	‖	$-$	0	$+$	‖	$-$	

Donc : $S_{\mathbb{R}} =]-3\,;-1[\cup]1; +\infty[$.

7. Inéquations dont les membres comportent des valeurs absolues

› Méthode

Pour résoudre une inéquation comportant une valeur absolue, on peut utiliser la propriété suivante :
Si x et a sont des nombres réels et r un nombre réel positif, alors : $|x - a| < r \Leftrightarrow a - r < x < a + r$.

Exemple

On considère l'inéquation (E): $x \in \mathbb{R}$, $|x + 2| \leq 3$.

$|x + 2| \leq 3 \Leftrightarrow |x - (-2)| \leq 3$

$\Leftrightarrow -2 - 3 \leq x \leq -2 + 3$

$\Leftrightarrow -5 \leq x \leq 1$

Donc : $S_{\mathbb{R}} = [-5\,; 1]$

Pour s'entraîner : Exercice 14

QUESTION 1

Comment vérifier qu'un nombre réel est solution d'une équation ?

Méthode

- on donne un nom à chaque membre de l'égalité ;
- on calcule la valeur numérique de chaque membre ;
- on compare les valeurs numériques calculées :
  - ✓ si les valeurs sont égales, alors le nombre est solution de l'équation ;
  - ✓ si les valeurs sont différentes, alors le nombre n'est pas solution de l'équation.

Exercice

On considère l'équation : (E): $-3x + 4 = x + 4$. Parmi les nombres 0 et -1, indique la solution de (E).

Solution commentée

Posons $f(x) = -3x + 4$ et $g(x) = x + 4$.

$f(0) = -3 \times 0 + 4$ et $g(0) = 0 + 4$.

$f(0) = 4$ et $g(0) = 4$.

Alors : $f(0) = g(0)$.

Donc 0 est la solution de l'équation.

$f(-1) = -3 \times (-1) + 4$ et $g(-1) = -1 + 4$.

$f(-1) = 7$ et $g(-1) = 3$.

Alors : $f(-1) \neq g(-1)$.

Donc -1 n'est pas la solution de l'équation.

Exercice non corrigé

On considère l'équation : (E): $2x + 3 = x - 1$. Parmi les nombres 0 ; $\frac{1}{2}$ et -4, indique la solution de (E).

QUESTION 2

Comment vérifier qu'un nombre réel est solution d'une inéquation ?

Méthode

- on donne un nom à chaque membre de l'inégalité ;
- on calcule la valeur numérique de chaque membre ;
- on compare les valeurs numériques calculées :
  - ✓ Si les valeurs vérifient l'inégalité, alors le nombre est solution de l'inéquation ;
  - ✓ Si les valeurs ne vérifient pas l'inégalité, alors le nombre n'est pas solution de l'inéquation.

Exercice

On considère l'inéquation : (I): $-x^2 + 3 < 2x - 1$. Parmi les nombres -2 et 2, indique celui qui est une solution de (I).

Solution commentée

Posons $f(x) = -x^2 + 3$ et $g(x) = 2x - 1$.

$f(-2) = -(-2)^2 + 3$ et $g(-2) = 2 \times (-2) - 1$.

$f(-2) = -1$ et $g(-2) = -5$.

On a : $f(-2) > g(-2)$,

donc -2 n'est pas une solution de l'inéquation.

$f(2) = -(2)^2 + 3$ et $g(2) = 2 \times (2) - 1$.

$f(2) = -1$ et $g(2) = 3$.

On a : $f(2) < g(2)$.

Donc 2 est une solution de l'inéquation.

Exercice non corrigé

On considère l'inéquation : (I): $\frac{x+3}{x-2} \leq 2$. Parmi les nombres -1 ; 0 ; $\frac{1}{2}$; 1 ; 3, indique ceux qui sont solutions de (I).

QUESTION 3

Comment résoudre une équation dont les membres sont des polynômes?

Méthode

- on transpose tous les termes dans un même membre de l'équation ;
- on factorise si possible (recherche d'un zéro, un facteur commun, forme canonique, etc.);
- on résout et on conclut.

Exercice

Résous dans ℝ, l'équation : (E): $2x^2 - 4 = -5x - 1$.

Solution commentée

$2x^2 - 4 = -5x - 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 4 + 5x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 5x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow (x + 3)(2x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow x + 3 = 0$ ou $2x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = -3$ ou $x = \frac{1}{2}$.

$S_{\mathbb{R}} = \{-3 ; \frac{1}{2}\}$.

Exercice non corrigé

Résous dans ℝ les équations suivantes :

(E_1): $2x + 3 = (x + 4)(2x + 3)$; (E_2): $(3x + 1)^2 = (x + 3)^2$

QUESTION 4

Comment résoudre une inéquation dont les membres sont des polynômes?

Méthode

- on transpose tous les termes dans un même membre de l'inéquation ;
- on factorise si possible (recherche d'un zéro, un facteur commun, forme canonique, etc.);
- on dresse un tableau de signes ;
- on conclut.

Exercice

Résous dans ℝ, l'inéquation : (E): $4x^2 + 2x + 2 \leq x^2 + x + 4$.

Solution commentée

$4x^2 + 2x + 2 \leq x^2 + x + 4 \Leftrightarrow 4x^2 + 2x + 2 - x^2 - x - 4 \leq 0.$

$\Leftrightarrow 3x^2 + x - 2 \leq 0$

$\Leftrightarrow (3x - 2)(x + 1) \leq 0$

Dressons le tableau de signe de $(3x - 2)(x + 1)$.

x	$-\infty$		-1		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$x + 1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$3x - 2$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$(x + 1)(3x - 2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $S_{\mathbb{R}} = [-1 ; \frac{2}{3}]$.

Exercice non corrigé

Résous dans ℝ, l'inéquation suivante : (I): $2x^3 + 2x^2 > x^3 - 5x^2$.

QUESTION 5

Comment résoudre une équation dont les membres sont des fractions rationnelles?

Méthode

- on détermine l'ensemble de validité de l'équation ;
- on applique l'égalité de quotients ($\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$) ;
- on transpose tous les termes dans un même membre de l'équation;
- on factorise si possible ;
- on résout et on conclut en tenant compte de l'ensemble de validité.

Exercice

Résous dans $\mathbb{R}$, l'équation : (E): $\frac{x+2}{x}=\frac{x}{2x-3}$.

Solution commentée

L'ensemble de validité D_E de l'équation est $\mathbb{R} \setminus \{0 ; \frac{3}{2}\}$

$\frac{x+2}{x}=\frac{x}{2x-3} \Leftrightarrow (x+2)(2x-3)=x^2$

$\Leftrightarrow (x+2)(2x-3)-x^2=0$

$\Leftrightarrow x^2+x-6=0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x+3)=0$

$\Leftrightarrow x-2=0$ ou $x+3=0$

$\Leftrightarrow x=2$ ou $x=-3$.

Comme $2 \in D_E$ et $-3 \in D_E$, alors : $S_{\mathbb{R}}=\{-3 ; 2\}$.

Exercice non corrigé

Résous dans $\mathbb{R}$, l'équation : (E): $\frac{x-2}{x+1}=\frac{x+1}{x+2}$.

QUESTION 6

Comment résoudre une inéquation dont les membres sont des fractions rationnelles?

Méthode

- on détermine l'ensemble de validité de l'inéquation ;
- on transpose tous les termes dans un même membre de l'inéquation ;
- on réduit au même dénominateur ;
- on factorise le numérateur et le dénominateur si possible ;
- on dresse un tableau de signes.
- on conclut en tenant compte de l'ensemble de validité.

Exercice

Résous dans $\mathbb{R}$, l'inéquation : (E): $\frac{x+1}{x-2}>\frac{x-2}{x+2}$.

Solution commentée

L'ensemble de validité D_I de l'inéquation est $\mathbb{R} \setminus \{-2 ; 2\}$.

$\frac{x+1}{x-2}>\frac{x-2}{x+2} \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-2}-\frac{x-2}{x+2}>0$

$\Leftrightarrow \frac{(x+1)(x+2)-(x-2)^2}{(x-2)(x+2)}>0$

$\Leftrightarrow \frac{7x-2}{(x-2)(x+2)}>0.$

Dressons le tableau de signes de $\frac{7x-2}{(x-2)(x+2)}$.

x	$-\infty$		-2		$\frac{2}{7}$		2		$+\infty$
$7x-2$		-		-	0	+		+	
$x+2$		-	0	+		+		+	
$x-2$		-		-		-	0	+	
$\frac{7x-2}{(x-2)(x+2)}$		-	‖	+	0	-	‖	+	

$S_{\mathbb{R}} =]-2\,;\frac{2}{7}[\cup]2\,;+\infty[$.

Exercice non corrigé

Résous dans ℝ, l'inéquation suivante : $(\mathrm{I}) : 2-\frac{3}{x}>\frac{2}{x+1}$.

7 QUESTION — Comment résoudre une équation dont les membres comportent des valeurs absolues?

Méthode 1

- on détermine l'ensemble de validité de l'équation ;
- on applique la propriété suivante : ($|x| = |y| \Leftrightarrow x = y$ ou $x = -y$;
- on résout chacune des équations de la forme $f(x) = g(x)$ trouvées;
- L'ensemble de solutions de l'équation est la réunion des solutions trouvées précédemment en tenant compte de l'ensemble de validité.

Exercice

Résous dans ℝ, l'équation (E): $|3x-2| = |5x+1|$.

Solution commentée

L'ensemble de validité D_E de l'équation est ℝ.

$|3x-2|=|5x+1| \Leftrightarrow 3x-2=5x+1$ ou $3x-2=-5x-1$

$\Leftrightarrow 3x-2-5x-1=0$ ou $3x-2+5x+1=0$

$\Leftrightarrow -2x-3=0$ ou $8x-1=0$

$\Leftrightarrow x=-\frac{3}{2}$ ou $x=\frac{1}{8}$.

Comme $-\frac{3}{2} \in D_E$ et $\frac{1}{8} \in D_E$, donc :

$S_{\mathbb{R}}=\{-\frac{3}{2}\,;\frac{1}{8}\}$.

Méthode 2

- on applique la propriété suivante : (f est une application affine et r est un nombre réel positif $|f(x)| = r \Leftrightarrow f(x) = r$ ou $f(x) = -r$;
- on résout chacune des équations trouvées ;
- l'ensemble de solutions de l'équation est la réunion des solutions trouvées précédemment.

Exercice

Résous dans $\mathbb{R}$, l'équation (E) : $|\frac{1}{2}x+2| = 3$.

Solution commentée

$|\frac{1}{2}x+2| = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x+2 = 3$ ou $\frac{1}{2}x+2 = -3$

$\Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -10$.

$S_{\mathbb{R}} = \{-10 ; 2\}$.

Exercice non corrigé

Résous dans $\mathbb{R}$, chacune des équations suivantes :

(E_1) : $\left|\frac{x-2}{x+1}\right| = \left|\frac{x+1}{x+2}\right|$; $\qquad (E_2)$: $|-3x-4| = 1$.

QUESTION 8 Comment résoudre une inéquation comportant une valeur absolue?

Méthode

- on détermine l'ensemble de validité de l'inéquation ;
- on utilise la propriété suivante :
  f et g sont des fonctions numériques
  $|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow (g(x) \geq 0$ et $f(x))^2 < (g(x))^2$
- on factorise et on obtient : $(f(x) - g(x))\ (f(x) + g(x)) < 0$;
- on dresse le tableau de signe de $(f(x) - g(x))(f(x) + g(x))$.
- on conclut en tenant compte de l'ensemble de validité.

Exercice

Résous dans $\mathbb{R}$, l'inéquation (I) : $|3x - 4| < 2x + 1$.

Solution commentée

Déterminons l'ensemble de validité D_I de l'inéquation est $\mathbb{R}$.

$|3x - 4| < 2x + 1 \Leftrightarrow 2x + 1 > 0$ et $(3x - 4)^2 < (2x+1)^2$

$|3x - 4| < 2x + 1 \Leftrightarrow x \in [-\frac{1}{2} ; +\infty[$ et $(3x - 4)^2 < (2x+1)^2$.

$\Leftrightarrow x \in]-\frac{1}{2} ; +\infty[$ et $(3x - 4)^2 - (2x + 1)^2 < 0$.

$\Leftrightarrow x \in]-\frac{1}{2} ; +\infty[$ et

$(3x - 4 - 2x - 1)(3x - 4 + 2x + 1) < 0$

$\Leftrightarrow x \in]-\frac{1}{2} ; +\infty[$ et $(x - 5)(5x - 3) < 0$.

Dressons le tableau de signe de $(x-5)(5x-3)$

x	$-\infty$		$\frac{3}{5}$		5		$+\infty$
$x-5$		-		-	0	+	
$5x-3$		-	0	+		+	
$(x-5)(5x-3)$		+	0	-	0	+	

$3x-4| < 2x+1 \Leftrightarrow x \in \left]-\frac{1}{2} ; +\infty\right[$ et $x \in \left]\frac{3}{5} ; 5\right[$

$S_{\mathbb{R}} = \left]\frac{3}{5} ; 5\right[\cap D_I$, donc : $S_{\mathbb{R}} = \left]\frac{3}{5} ; 5\right[$.

Exercice non corrigé 1

Résous dans $\mathbb{R}$, l'inéquation (I): $|x-4| \leq 3x$.

Exercice non corrigé 2

Résous dans $\mathbb{R}$, les inéquations ci-dessous :

a) $|x| \leq 1$; *b)* $|x-3| \leq 2$; *c)* $|x+3| < 9$; *d)* $|2x| \leq -1$.

Exercice non corrigé 3

Résous dans $\mathbb{R}$, les inéquations ci-dessous :

a) $|3x-5| \leq |x-7|$; b) $|x^2-5x+13| > |6x-15|$.

Exercices de fixation

Équations et inéquations dans ℝ

1 Recopie et complète chaque ligne du tableau ci-dessous par une croix dans la case qui convient :

	Vrai	Faux
$x\in\mathbb{R}$, $2x^2 + 5x - 3 = 0$ est une équation dans ℝ.		
$xy - 3x - 1 = 0$ est une équation du premier degré dans ℝ.		
$t \in \mathbb{R}$, $t^4 + t = -3t^2 - 4$ est une équation dans ℝ.		
L'équation : $x\in\mathbb{N}$, $5x^2 + 6x - 4 = 0$ a pour référentiel ℝ.		

2 Recopie et complète chaque ligne du tableau ci-dessous par une croix dans la case qui convient :

	Vrai	Faux
L'inéquation : $x\in\mathbb{R}$, $-2x^2 - x + 3 \leq 0$ a pour référentiel ℝ.		
$x^2 - 3xy + 1 < 0$ est une inéquation du premier degré dans ℝ.		
$t \in \mathbb{R}$, $t^2 - t \geq - t^2 + 1$ est une inéquation dans ℝ.		
$x\in\mathbb{R}$, $5x^2 - x + 2 > 0$ est une inéquation du second degré dans ℝ.		

Solutions d'une équation et d'une inéquation, ensemble de validité

3 Recopie et complète chaque ligne du tableau ci-dessous par une croix dans la case qui convient :

	Vrai	Faux
0 est une solution de l'équation : $x \in \mathbb{R}$, $x(3x + 2) = 0$.		
-1 est solution de l'inéquation : $x \in \mathbb{R}$, $\frac{x+1}{x} \leq 2x$.		
L'équation : $x \in \mathbb{R}$, $\frac{(x-1)(x+3)}{x^2+1} = 0$ admet pour solutions -3 et 1.		
L'ensemble des solutions de l'équation : $(x - 2)(2x + 1) = 0$ est $\left[-\frac{1}{2};2\right]$.		
L'inéquation : $x\in\mathbb{R}$, $x^2 + \sqrt{2} > 0$ admet deux solutions distinctes.		

4 Recopie et complète chaque ligne du tableau ci-dessous par une croix dans la case qui convient :

	Vrai	Faux
0 est un élément de l'ensemble de validité de l'équation : $x\in\mathbb{R}$, $\frac{x^2+3}{x} = x-3$.		
0 est un élément de l'ensemble de validité de l'inéquation : $x\in\mathbb{R}$, $\frac{x^2(x-1)}{x+1} \geq 2x$		
L'ensemble de validité de l'équation : $x\in\mathbb{R}$, $-3x^2 + 4 = 9$ est ℝ.		
L'ensemble de validité de l'équation : $x \in \mathbb{R}$, $\frac{x-2}{x^2+2} = 2x$ est ℝ.		

5 On considère l'équation (E) : $x\in\mathbb{R}$, $\frac{x+2}{x+1} = \frac{x-1}{x}$.
Parmi les nombres suivants, indique la solution de (E) : -1 ; $-\frac{1}{2}$; 0 ; $\frac{1}{2}$; 1.

6 On considère l'inéquation (I) : $x \in \mathbb{R}$, $3x - 4 \leq x - 1$.
Parmi les nombres suivants, indique les solutions de (I) : -1 ; 0 ; 1 ; $\frac{3}{2}$; 5 ; 20.

Équations et inéquations équivalentes

7 Parmi les équations suivantes, indique celles qui sont équivalentes et précise l'ensemble dans lequel elles le sont.

(E_1): $-8x + 1 = 3$; (E_2) : $\frac{5}{x+3} - \frac{3}{x-1} = \frac{x^2-14}{x^2+2x-3}$;

(E_3): $\frac{2x-3}{x+1} = \frac{2x+1}{x-1}$; (E_4): $x(2 - x) = 0$.

8 Recopie et relie chacune des inéquations de la colonne A à l'inéquation de la colonne B qui lui est équivalente.

A
$\frac{x+3}{x-1} < \frac{3x-1}{x}$
$x^2 - 4 > x - 2$
$\frac{2x^2-x+2}{x-2} < -1$

B
$(x - 2)(x + 1) > 0$
$\frac{2x^2}{x-2} < 0$
$\frac{2x^2-5x-1}{x(x-1)} > 0$

Équations et inéquations dont les membres sont des polynômes

9 Résous dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

a) $2x^2 - 3x = 0$; b) $\frac{x+3}{2}+\frac{2x-1}{3}=2-x$;

c) $(3x-1)^2=(2x+3)^2$; d) $(x-5)^2=(x-5)(3x+4)$;

e) $5x-\frac{8x-3}{2}=-\frac{1}{2}$; f) $81x^2-6=10$.

10 Résous dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

a) $5x+4>7x+2$; b) $2x-\frac{x-1}{2}\geq\frac{1}{3}-3x$;

c) $x+2-\frac{x-1}{3}\leq x-3$; d) $x^2-2>0$;

e) $(3x+2)^2<(x-1)^2$; f) $(x-2)^2(x+2)\leq(x^2-4)(2x-3)$.

Équations et inéquations dont les membres sont des fractions rationnelles

11 Résous dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

a) $\frac{-x+5}{x-1}=3$; b) $\frac{x+1}{x}=\frac{x}{x+1}$;

c) $\frac{2x+1}{2x-1}=\frac{x-2}{x+3}$; d) $\frac{2}{x+2}-\frac{1}{x-3}=\frac{3}{x^2-x-6}$;

e) $\frac{3x^2+2x-1}{x^2}=\frac{x+1}{x}$; f) $\frac{x-3}{x+1}=\frac{2x-1}{x+3}$.

12 Résous dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

a) $\frac{3}{x-4}>\frac{2}{x+4}$; b) $x+4\geq\frac{x}{x+1}$;

c) $\frac{4}{x+1}-\frac{3}{x-1}\leq\frac{1}{x^2-1}$;

d) $\frac{2-x}{x-1}+\frac{3x+1}{x}-\frac{1}{x(x-1)}<0$;

e) $\frac{3x-1}{3x+1}+\frac{3x+1}{3x-1}>\frac{9x^2+11}{9x^2-1}$; f) $\frac{(x+1)^2+(x-1)^2}{(x+1)^2-(x-1)^2}\leq-4$.

Équations et inéquations dont les membres comportent des valeurs absolues

13 Résous dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

a) $|x-2|=3$; b) $|-x+3|=-1$; c) $|-3x+2|=5$

d) $|3x+1|=|-2x+6|$; e) $|x+1|=x+1$

f) $|3-2x|=4x+1$.

14 Résous dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $|x+3|<3$; b) $|2x-1|\leq 7$; c) $|-5x-14|<-9$

d) $|x-1|<x-1$; e) $|x+3|\leq x+6$; e) $|3x-4|<x-3$.

Exercices de renforcement/approfondissement

15 Détermine trois entiers naturels consécutifs dont la somme est 69.

16 Le père de Samira a 27 ans de plus qu'elle. Dans 6 ans, son âge sera le double de celui de sa fille. Détermine les âges respectifs de Samira et de son père ?

17 Un père laisse en héritage un troupeau de 80 moutons à ses trois fils. Il écrit dans son testament « l'aîné des fils doit recevoir 10 moutons de plus que le deuxième et le deuxième doit recevoir 5 moutons de plus que le troisième ».

Détermine la part de chaque fils.

18 Résous dans $\mathbb{R}$, chacune des équations ci-dessous :

a) $(2x+1)^2-(x+2)^2=x(x+1)$;

b) $(x+3)^2=(2x+6)(5-3x)$.

c) $16(x+1)^2=36(2x-1)^2$;

d) $(5x^2-x-2)^2-(4x^2+x-2)^2=0$;

e) $(x+1)(x+2)(x+3)=(x+2)(x+3)(x+4)$.

19 Résous dans $\mathbb{R}$, chacune des inéquations ci-dessous :

a) $-2x(x-1)\leq x^2$;

b) $16x^2-9>(x+1)(3-4x)$;

c) $x^2-4x+4<(x+1)(6-3x)-(2-x)^2$;

d) $2x^3+4\geq x^2+16$.

20 Résous dans $\mathbb{R}$, chacune des équations ci-dessous :

a) $\frac{3x+1}{2x-2}=2$; **b)** $3-\frac{x+2}{3x+1}=\frac{1}{x+1}$;

c) $\frac{7}{4x^2-3x}=\frac{x}{4x-3}+\frac{1}{x}$; **d)** $\frac{2x^2+x-1}{x+1}=\frac{x-1}{x+3}$.

21 Résous dans $\mathbb{R}$, chacune des inéquations ci-dessous :

a) $\dfrac{3x-2}{x-1}<0$; b) $\dfrac{x}{x-1}\leq 0$;

c) $\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{2}{x+2}>\dfrac{3}{x+1}$; d) $\dfrac{1-2x}{x-3}\geq\dfrac{x+3}{2x+1}$.

22 Résous dans $\mathbb{R}$ chacune des équations ci-dessous :

a) $x^2+3|x|-2=0$; b) $|x^2+x-3|=2x+1$;

c) $|x-2|+|x-3|-|x-4|=0$; d) $|x^2+6x|-x-6=0$.

23 On désire résoudre l'inéquation (I) :
$x\in\mathbb{R}$, $|x+4|+|2x-1|\leq 12$.

1. Écris $|x+4|+|2x-1|$ sans les symboles de valeur absolue.
2. Démontre que : $S_{\mathbb{R}}(I)=[-5\,;3]$.

24 Résous dans $\mathbb{R}$, chacune des inéquations ci-dessous.

a) $|x|+\dfrac{1}{3}<x+3$; b) $5x+2|x-1|\geq 4$;

c) $x+7\leq|x^2-x|$; d) $x^2+4x<|2x-7|$;

e) $|2x^2+x-3|>|x+4|$.

25 Résous dans $\mathbb{R}$, chacune des équations et inéquations ci-dessous après en avoir déterminé l'ensemble de validité.

a) $\dfrac{5}{|x+1|-2}=|x+1|+2$; b) $\dfrac{2+|x+1|}{3-|x|}=2$;

c) $\dfrac{x^2}{|x|}-2\leq\dfrac{|x|-1}{3x}$; d) $\dfrac{x^2+|x|+3}{x^2-|x|-2}\geq 0$.

26 Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on donne les points A et B de coordonnées respectives

$(-3\,;2)$ et $(4\,;3)$. Détermine les coordonnées du point M de la droite (AB) tel que $3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=\vec{0}$.

27 Détermine trois nombres entiers naturels impairs consécutifs dont la somme est 141.

28 Résous dans $\mathbb{R}$, chacune des équations ci-dessous :

a) $2x^4+x^2+3=0$; b) $4x^4-17x^2+1=0$;

c) $x^4-x^2-6=0$.

29 On donne l'équation (E) : $3x^3+10x^2-x-12=0$.

1. Justifie que 1 est solution de (E).
2. Résous (E).

30 On donne l'équation (E) : $x^4-13x^2-48=0$.

1. Justifie que 4 est solution de (E).
2. Justifie que si x est solution de (E) alors $-x$ est solution de (E).
3. Résous (E).

31 On donne l'inéquation suivante (I) dans $\mathbb{R}$:

$\dfrac{6x^2+x-2}{2x+3}\geq\dfrac{3x^2-x-2}{x+3}$.

1. Détermine l'ensemble de validité V de (I).
2. Justifie que (I) $\Leftrightarrow x\in V,\ \dfrac{4x(3x+2)}{(2x+3)(x+3)}\geq 0$.
3. Résous (I).

Situation complexe

32 Fatimah, élève en seconde C dans un lycée, découvre dans une encyclopédie la définition suivante : « Le nombre d'or (ou section dorée, proportion dorée, ou encore divine proportion) est une proportion, définie initialement en géométrie comme l'unique rapport $\dfrac{a}{b}$ entre deux longueurs a et b telles que le rapport de la somme $a+b$ des deux longueurs sur la plus grande a soit égal à celui de la plus grande a sur la plus petite b ». Elle en parle à ses camarades de classe. Curieux, ceux-ci veulent se faire une idée exacte de ce nombre d'or.

En utilisant tes connaissances mathématiques, détermine la valeur de ce nombre d'or.

33 Avant la remise des copies d'un devoir de mathématiques en classe de seconde C, des élèves veulent savoir leurs notes. Le professeur dicte leurs notes : 8 ; 12 ; 16 ; 11 ; ......

Le professeur annonce la répartition des points des quatre exercices du devoir comme suit:

- 15% des points à l'exercice 1 ;
- Les deux cinquièmes à l'exercice 2 ;
- Le quart à l'exercice 3 et les 6 points restant affectés à l'exercice 4.

Un élève affirme que ceux qui ont obtenu 11 ; 12 et 16 ont eu la moyenne au devoir. Un autre élève dit qu'un élève ayant obtenu une note supérieure ou égale à 16 a la moyenne au devoir.

En utilisant tes connaissances mathématiques, départage les deux élèves.

12 HOMOTHÉTIES

Le microscope est un outil miportant pour la biologie et de la médécine . En effet grâce à cet appareil , il est possible d'étudier les micro organismes.

Commentaire de la Leçon

La notion d'homothétie est nouvelle en classe de seconde C. Elle vient enrichir le champ des transformations du plan étudiées au premier cycle (symétries, translations). L'enseignant pourra l'aborder à partir de prérequis portant sur la traduction vectorielle de l'alignement de trois points. La notion d'homothétie sera approfondie en classe de première par la composée de deux homothéties et sera exploitée en classe de terminale dans l'étude des similitudes du plan.

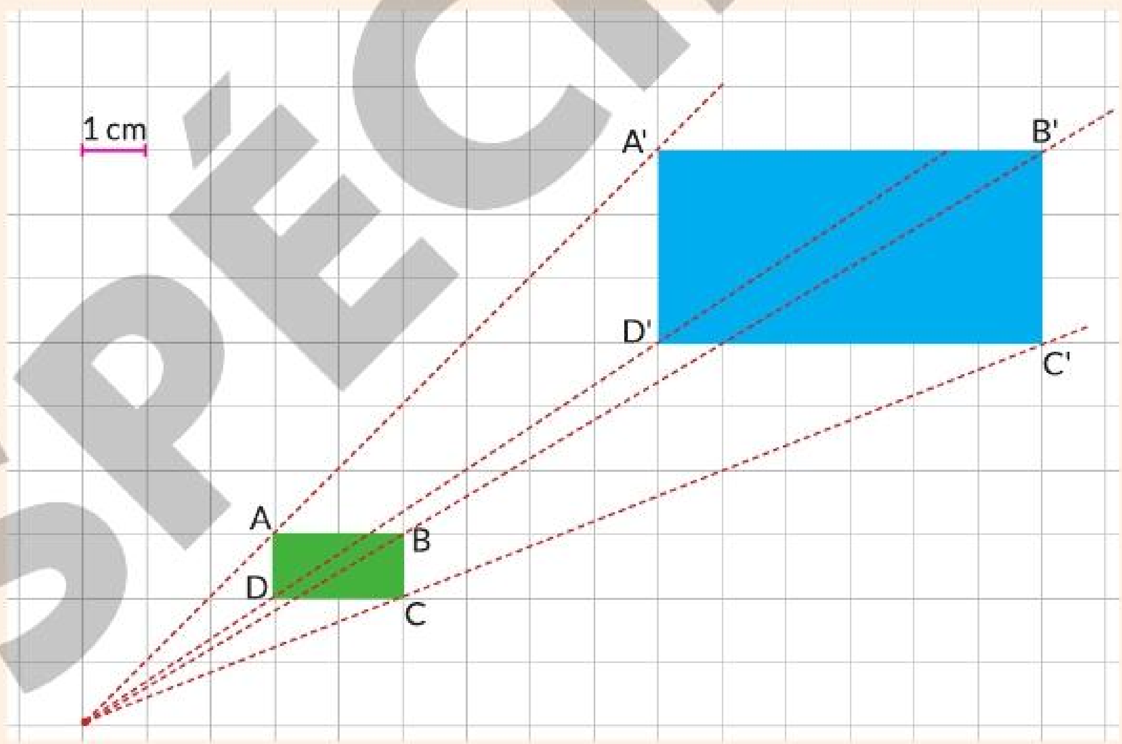
Une homothétie est une transformation qui conserve les formes et les directions mais, en général, pas les longueurs. Cette notion d'homothétie découle du théorème de Thales (vers 624 av. J.-C. - vers 547 av. J.-C.).

Mais le terme « homothétie » a été introduit par le mathématicien français Michel Chasles (1793-1880) qui en propose même la prononciation. Homo-thétie est composé de deux éléments d'origine grecque, le préfixe homo , « semblable » et thesis, « position ».

Habiletés et Contenus

- ✓ **Connaitre** la définition d'une homothétie ; la propriété relative à l'alignement ; la propriété relative aux points invariants par une homothétie ; la propriété fondamentale de l'homothétie ; les propriétés relatives aux images de figures simples par une homothétie ; les propriétés relatives à la conservation de l'alignement, du parallélisme, de l'orthogonalité, du milieu et des angles orientés par une homothétie ; les propriété relatives à la caractérisation d'une homothétie ; les propriétés relatives à la multiplication des longueurs et des aires par une homothétie.
- ✓ **Construire** l'image d'un point par une homothétie en utilisant la définition ; l'image d'une droite, d'un segment, d'une demi-droite, d'un cercle par une homothétie ; l'image d'un point par une homothétie définie par une de ses caractéristiques.
- ✓ **Trouver** l'image d'un point par une homothétie ; le rapport d'une homothétie caractérisée par deux points et leurs images.
- ✓ **Démontrer** deux droites sont parallèles en utilisant une homothétie ; une égalité angulaire en utilisant une homothétie ; que deux droites sont perpendiculaire en utilisant une homothétie ; le parallélisme des droites ; qu'un point est le milieu d'un segment en utilisant une homothétie.
- ✓ **Traiter une situation** faisant appel aux homothéties.

Situation d'Apprentissage



Lors d'une projection de film organisée par le club de mathématique de ton lycée, tes camarades et toi , vous vous apercevez que la pellicule ABCD, projetée sur le grand écran est transformée en A'B'C'D'.

Curieux, vous décidez de comprendre ce phénomène d'agrandissement.

Découverte des habiletés

Activité 1 Définition

1. Place deux points distincts O et M sur ton cahier.
2. Construis le point M' du plan tel que : $\overrightarrow{OM'} = 3\overrightarrow{OM}$.
3. Marque un autre point P et construis le point P' tel que : $\overrightarrow{OP'} = -2\overrightarrow{OP}$.
4. Justifie que la correspondance qui à tout point M associe le point M' tel que : $\overrightarrow{OM'} = 3\overrightarrow{OM}$ est une application.

Récapitulons

- Etant donné un point O, l'application du plan dans lui-même qui à tout point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = 3\overrightarrow{OM}$ est appelée l'homothétie de centre O et de rapport 3.
- Le point M' est appelé l'image du point M par l'homothétie de centre O et de rapport 3 et on note M'= $h_{(O\,;3)}$(M).

Exercice de fixation

1 Pour chaque proposition du tableau ci-dessous, trois informations a, b et c sont proposées dont une seule permet d'avoir la proposition exacte.
Écris dans ton cahier le numéro de chaque proposition suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

N°	Propositions	Informations		
		a	b	c
1	Si B est l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport 5, alors…	$\overrightarrow{OB} = 5\overrightarrow{AO}$	$\overrightarrow{OB} = 5\overrightarrow{OA}$	$\overrightarrow{BA} = 5\overrightarrow{BO}$
2	Si $\overrightarrow{AB} = \frac{-3}{2}\overrightarrow{AO}$, alors …	B est l'image de O par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{-3}{2}$.	B est l'image de A par l'homothétie de centre O et rapport $\frac{-3}{2}$.	O est l'image de B par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{-3}{2}$.

Exercice de fixation

2 Traduis chaque égalité vectorielle par une homothétie :

a) $\overrightarrow{EU} = -2\overrightarrow{ET}$; b) $PR = \frac{4}{3}\overrightarrow{PM}$; c) $\overrightarrow{\Omega B} = \sqrt{5}\overrightarrow{\Omega A}$.

Activité 2 Alignement du centre, d'un point et de son image

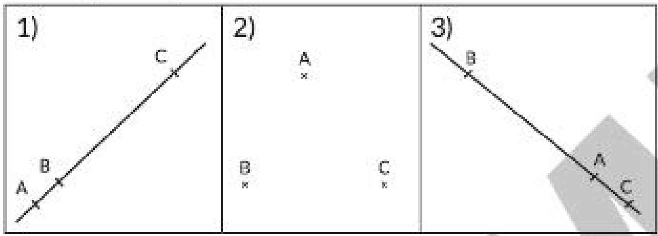
On considère l'homothétie h de centre O et de rapport k. On désigne par M' l'image d'un point M par h.
Justifie que les point M, M' et O sont alignés.

Récapitulons

Si le point M' est l'image d'un point M par une homothétie de centre O, alors les points O, M et M' sont alignés.

Exercice de fixation

3 Observe les étiquettes ci-dessous. Indique le numéro de l'étiquette ou les numéros des étiquettes où B est l'image de A par une homothétie de centre C.



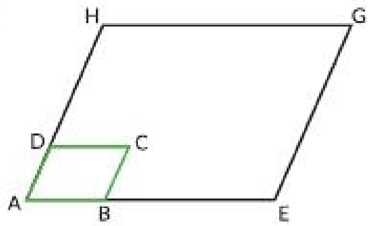
Exercice de fixation

4 Dans la figure ci-contre, ABCD et AEGH sont des parallélogrammes tels que :

AE = 3AB et AH = 3AD.

On désigne par h l'homothétie de centre A et de rapport 3.

1. Justifie que h(C) = G.
2. Déduis en que les points A, C et G sont alignés.



Activité 3 Point invariant par une homothétie

Soit h l'homothétie de centre O et de rapport k.

On se propose de déterminer suivant les valeurs de k, l'ensemble des points invariants par h, c'est-à-dire l'ensemble des points M du plan tels que : h(M) = M.

Justifie que : h(M) = M équivaut à $(1-k)\overrightarrow{OM} = \vec{0}$.

Déduis de cette égalité, l'ensemble des points invariants par l'homothétie de centre O et de rapport k.

Récapitulons

- Une homothétie de rapport différent de 1 admet pour seul point invariant, son centre.
- L'homothétie de rapport 1 est l'application identique du plan, c'est-à-dire l'application du plan dans lui-même qui à tout point M associe le point M.

Exercice de fixation

5 Recopie dans ton cahier le numéro de chacune des affirmations, suivi de vrai si l'affirmation est vraie ou faux si l'affirmation est fausse.

1. Si un point O appartient à une droite (D), alors chaque point de la droite (D) est invariant par l'homothétie de centre O et de rapport 4.
2. Chaque point du plan est invariant par l'homothétie de rapport 1.
3. O étant un point fixe du plan, si h est l'homothétie de centre O et de rapport -1, alors le point O est le seul point invariant par h.
4. A étant un point fixe du plan, l'homothétie de centre A et de rapport 4 admet un seul point invariant qui est le point A.
5. A étant un point fixe du plan, l'homothétie de centre A et de rapport 1 admet un seul point invariant qui est le point A.

Activité 4 Propriété fondamentale de l'homothétie

On considère l'homothétie h de centre O et de rapport k, A et B sont deux points distincts d'images respectives A' et B' par h.

Justifie que : $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$.

Récapitulons

Si deux points A et B ont pour images respectives les points A' et B' par une homothétie de rapport k, alors : $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$.

Exercice de fixation

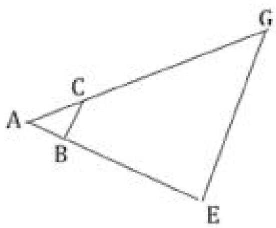
6 Réordonne les groupes de mots suivants pour obtenir une propriété.

d'images respectives R et S / alors $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{PQ}$ / si P et Q sont deux points distincts / par une homothétie de rapport l,

Exercice de fixation

7 Dans la figure ci-contre ABC et AEG sont des parallélogrammes tels que : AE = 4AB et AG = 4AC.

Justifie que : $\overrightarrow{EG} = 4\overrightarrow{BC}$.



Exercice de fixation

8 Sur la figure ci-contre, construis le point R, image du point B par l'homothétie de centre O qui applique A sur A'.

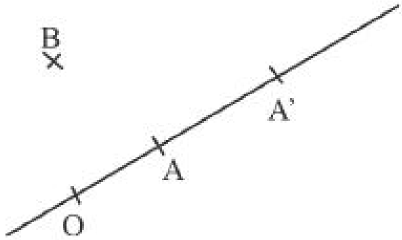


IMAGE DE FIGURES SIMPLES

Activité 5 Image d'une droite par une homothétie

On donne un point O, un nombre réel k non nul et une droite (AB).

Soit h l'homothétie de centre O et de rapport k.

On se propose de démontrer que l'image de la droite (AB) est la droite (A'B'), où A' = h(A) ; B'= h(B) et que les droites (AB) et (A'B') sont parallèles.

1. a) Soit M un point de la droite (AB).
Justifie que l'image M' de M par h appartient à la droite (A'B').
b) Déduis-en que l'image de la droite (AB) par h est incluse dans la droite (A'B').
2. Soit N' un point de la droite (A'B'),
a) Justifie qu'il existe un point N tel que N'= h(N).
b) Justifie que N appartient à la droite (AB).
c) Justifie que la droite (A'B') est incluse dans l'image de la droite (AB) par h.
3. Déduis de 1) et 2) l'image de la droite (AB) par l'homothétie h.
4. Justifie que les droites (AB) et (A'B') sont parallèles.
5. Donne une conclusion à cette activité .

Récapitulons

L'image de la droite (AB) par h est incluse dans la droite (A'B'). On note : h[(AB)] $\subset$ (A'B').

La droite (A'B') est incluse dans l'image de la droite (AB) par h.

On a : h[(AB)] $\subset$ (A'B') et (A'B') $\subset$ h[(AB)], donc h[(AB)] = (A'B').

L'image d'une droite par une homothétie est une droite qui lui est parallèle.

Exercice de fixation

9 ABC est un triangle tel que AB = 4 cm ; AC = 5 cm et BC = 3 cm.

On désigne par h l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{-1}{2}$.

On pose h(B) = E et h(C) = F.

1. Fais une figure.
2. Justifie que les droites (BC) et (EF) sont parallèles.

Activité 6 Image d'une demi-droite par une homothétie

Soit O un point, [AB) une demi-droite et k un nombre réel non nul. On désigne par h l'homothétie de centre O et de rapport k. Soit A' et B' les images respectives de A et B par h.

Soit M un point de la demi-droite [AB).

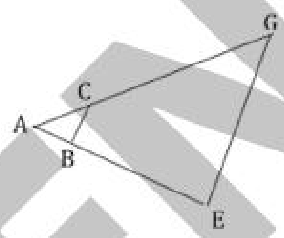
1. a) Justifie que l'image M' de M par h appartient à la demi-droite [A'B').
b) Conclus.
2. Soit N' un point de la demi-droite [A'B').
a) Justifie qu'il existe un point N de [AB) tel que : N' = h(N).
b) Conclus.
3. Donne une conclusion à cette activité.

Récapitulons

L'image de la demi-droite [AB] par l'homothétie h est la demi-droite [A'B').

Exercice de fixation

10 Dans la figure ci-contre ABC et AEG sont des triangles tels que : AE = 4AB et AG = 4AC.



Détermine l'image de chacune des demi-droites [BC) et [CB) par l'homothétie de centre A et de rapport 4.

Activité 7 Image d'un segment

On donne un point O du plan et un segment quelconque [AB].
Soit h l'homothétie de centre O et de rapport k.

On se propose de démontrer que l'image du segment [AB] est le segment [A'B'], où A' = h(A) ; B'= h(B) et que : A'B' = $|k|$AB.

1. Soit M un point du plan et M' le point tel que M'= h(M).
   a. Justifie que si M $\in$ [AB], alors M' $\in$ [A'B'].
   b. Soit N' un point du segment [A'B'].
   c. Justifie qu'il existe un point N du segment [AB] tel que : N' = h(N).
2. Justifie que : A'B' = $|k|$ AB.
3. Formule une conclusion de cette activité.

Récapitulons

- L'image du segment [AB] par l'homothétie h est le segment [A' B'].
- L'homothétie multiplie les longueurs par la valeur absolue de son rapport.

Exercice de fixation

11 OAB est un triangle tel que OA = 4cm, OB =3cm et AB = 5cm.
Les points E et F sont les images respectives des points A et B par l'homothétie de centre O et rapport $\frac{-1}{2}$.

a. Fais une figure.
b. Justifie que le segment [EF] est l'image du segment [AB] par h.
c. Détermine la longueur du segment [EF].

Activité 8 Image d'un cercle

On donne un cercle (C) de centre O et de rayon r et h l'homothétie de centre Ω et de rapport k.

On se propose de démontrer que l'image du cercle (C) par h est le cercle (C') de centre O' et de rayon $|k| \times r$, où O' = h(O).

1. a) Soit M un point de (C).
Justifie que l'image M' de M par l'homothétie h appartient au cercle (C').
   b) Soit N' un point de (C').
2. a) Justifie qu'il existe un point N de (C) tel que :N'= h(N).
   b) Formule une conclusion de cette activité.

Récapitulons

L'image d'un cercle de centre O et de rayon r par une homothétie de rapport k est le cercle de centre O' et de rayon $|k| \times r$, où $O' = h(O)$.

Exercice de fixation

12 (C) est un cercle de centre I et de rayon 4 cm. O est un point situé à l'extérieure du cercle (C) .

1. Fais une figure.
2. a) Construis le cercle (C'), image du cercle (C) par l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{-1}{2}$.

   b) Explique ta méthode de construction.

LES PROPRIÉTÉS DE CONSERVATION

Activité 9 Conservation du milieu d'un segment

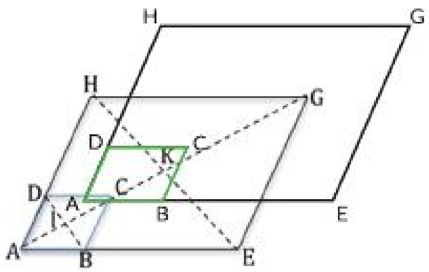
Soit un segment [AB] et I le milieu de ce segment. On considère une homothétie de rapport k et on note A', B' et I' les images respectives des points A, B et I par h.

1. En utilisant la caractérisation vectorielle du milieu d'un segment, justifie que I' est le milieu du segment [A' B'].
2. Formule une conclusion de cette activité.

Récapitulons

L'image du milieu d'un segment par une homothétie, est le milieu de l'image de ce segment

Exercice de fixation



13 Dans la figure ci-contre, ABCD est un parallélogramme de centre I , AEGH est un parallélogramme de centre K et que : AE = 3AB et AH = 3AD.

On désigne par h l'homothétie de centre A et de rapport 3

Justifie que le point K est l'image de I par h.

Activité 10 Conservation de la mesure des angles orientés

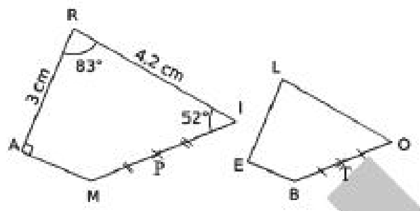
Soit O un point du plan. On considère trois points A, B et C deux à deux distincts, d'images respectives A', B' et C' par l'homothétie de centre O et de rapport 3.

1. Compare $Mes(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}})$ et $Mes(\widehat{\overrightarrow{B'A'},\overrightarrow{B'C'}})$.
2. Formule une conjecture à partir de cette activité.

Récapitulons

On admettra que les homothéties conservent les angles orientés.

Exercice de fixation



14 Sur la figure ci-contre, le quadrilatère BELO est l'image du quadrilatère RAMI par une homothétie h de rapport $\frac{2}{3}$.

1. Complète le tableau ci-dessous.

Point	R	A	M	I	P
Image par h					

2. Détermine les mesures des angles $(\overrightarrow{LE}, \overrightarrow{LO})$ et $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OL})$.

Activité 11 Conservation du parallélisme

On considère deux droites parallèles (D) et (Δ) d'images respectives (D') et (Δ') par une homothétie de rapport k.

Justifie que les droites (D') et (Δ') sont aussi parallèles.

Formule une conclusion de cette activité.

Récapitulons

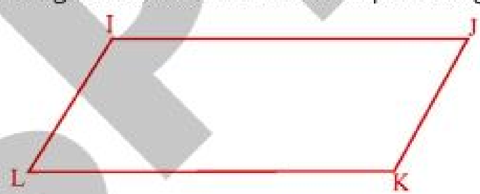
Les homothéties conservent le parallélisme.

Exercice de fixation

16 ABC est un triangle de centre de gravité O. E est un point du segment [AB].
La parallèle à la droite (BC) passant par E coupe la droite (AC) au point F. Les points G, H, I et K sont les images respectives des points B , C, E, et F par l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{-1}{2}$.

1. Fais une figure.
2. Justifie que les droites (GH) et (IK) sont parallèles.

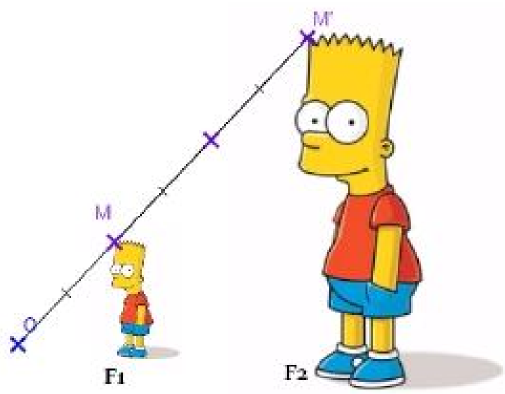
17 Sur la figure ci-dessous IJKL est un parallélogramme.



Soit h l'homothétie de centre K et de rapport −0,5.

On pose : h(I)= I' ; h(J) = J' ; h(L) = L' .

1. Reproduis la figure.
2. Construis les points I' ; J' et L'.
3. Démontre que les droites (I'J') et (LK) sont parallèles.



Activité 12 conservation de l'orthogonalité

On considère deux droites perpendiculaires (D) et (Δ) d'images respectives (D') et (Δ') par une homothétie de rapport k.

1. Justifie que les droites (D') et (Δ') sont aussi perpendiculaires.
2. Formule une conclusion à partir de cette activité.

Récapitulons

Les homothéties conservent l'orthogonalité.

Exercice de fixation

17 ABC est un triangle tel que : $Mes(\widehat{\overline{AB},\overline{AC}}) = \frac{\pi}{2}$. Les points E et F sont les images respectives des points A et B par l'homothétie de centre A et rapport 2.

1. Fais une figure.
2. Justifie que $Mes(\widehat{\overline{AE},\overline{AF}}) = \frac{\pi}{2}$.

CARACTÉRISATION D'UNE HOMOTHÉTIE

Activité 13 Homothétie définie par son centre, un point et son image.

Etant donné trois points deux à deux distincts O, B et C, recherchons l'existence d'une homothétie ayant pour centre le point O et qui applique le point B sur le point C.

1. Justifie que si les points O, B et C ne sont pas alignés, il n'existe aucune homothétie de centre O qui applique B sur C.
2. Si les points O, B et C sont alignés, vérifie que l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{\overline{OC}}{\overline{OB}}$ applique B sur C.

Récapitulons

On peut caractériser une homothétie par son centre, un point et son image.

Exercice de fixation

18 ABC est un triangle non isocèle. G est le centre de gravité du triangle. I est le milieu du segment [BC].

1. Fais une figure.
2. Justifie l'existence d'une homothétie de centre G qui applique le point A sur le point I.
3. Détermine le rapport de cette homothétie.

Activité 14 Homothétie définie par son rapport, un point et son image.

On considère deux points distincts A et A' et k un nombre réel non nul, différent de 1.
Justifie qu'il existe un point O et un seul tel que $\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}$.
Déduis-en qu'il existe une et une seule homothétie de rapport k qui applique A sur A'.

Récapitulons

k étant un nombre réel non nul différent de 1, A et A' étant deux points distincts, on peut caractériser une homothétie par son rapport, un point et son image. Le centre O de cette homothétie est déterminé par : $\overrightarrow{OA} = \dfrac{1}{k-1}\overrightarrow{AA'}$.

Exercice de fixation

19 1. Place deux points A et B distincts.
2. Justifie qu'il existe homothétie h de rapport 3 qui applique le point A sur le point B.
3. Construits le point O, centre de l'homothétie h.

Activité 15 Homothétie définie par deux points distincts et leurs images.

Etant donné quatre points A, B, A' et B' tels que : A ≠ B et A' ≠ B'. Recherchons l'existence d'une homothétie qui applique A sur A' et B sur B'.

1. Si une telle homothétie existe, justifie que : (AB) // (A'B') et A'B' ≠ AB.
2. Cas où les points A, B, A' et B' ne sont pas alignés.
   a) Justifie que les droites (AA') et (BB') sont sécantes.
   b) Caractérise alors l'homothétie qui applique A sur A' et B sur B'.
3. Cas où les points A, B, A' et B' sont alignés.

Justifie que l'homothétie de rapport $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$ qui applique A sur A' est l'unique homothétie qui satisfasse aux conditions du problème.

Récapitulons

Une homothétie est caractérisée par deux points distincts et leurs images.

Exercice de fixation

20 ABCD est un trapèze tel que AB = 2 cm ; CD = 5 cm et (AB) parallèle à (CD).
1. Fais une figure.
2. Justifie qu'il existe une homothétie h qui applique A sur C et B sur D.
   Construis le point O, centre de l'homothétie h.

CONSTRUCTION DE L'IMAGE D'UN POINT

Activité 16 Construction de l'image d'un point par une homothétie définie par son centre, un point et son image

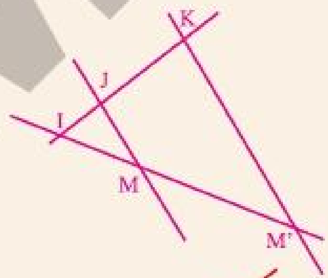
On considère trois points alignés et deux à deux distincts I, J et K.
Soit M un point n'appartenant pas à la droite (IJ). On se propose de construire l'image du point M par l'homothétie h de centre I qui applique J sur K.

1. Justifie que l'image M' de M par h appartient à la droite (IM).
2. Justifie que M' appartient à la parallèle à la droite (JM) passant par K.
3. Déduis des questions précédentes la construction du point M'.
4. Rédige un programme de construction du point M'.
5. Rédige un programme de construction du point M' dans le cas où le point M appartient à la droite (IJ).

Récapitulons

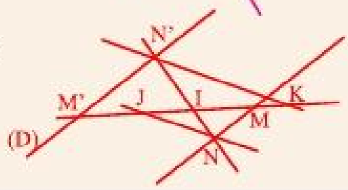
Pour construire l'image M' d'un point M par une homothétie déterminée par son centre, un point et son image, on peut procéder de la façon suivante :

Cas où M n'appartient pas à la droite (IJ)



construire la droite (IM) ;
construire la droite (JM) ;
construire la parallèle (D) à la droite (JM) et passant par K ;
le point M' est le point d'intersection des droites (D) et (IM).

Cas où M appartient à la droite (IJ)



construire grâce à la méthode précédente l'image N' d'un point N quelconque n'appartenant pas à la droite (IJ) ;
construire la parallèle (D) à la droite (MN) et passant par le point N' ;
Le point M' est le point d'intersection de la droite (D) et de la droite (IM).

Exercice de fixation

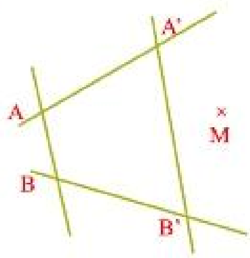
21 A, B et C sont trois alignés tels que : AB = 2 cm, BC = 3 cm. M est un point qui n'appartient pas à la droite (AB).

1. Fais une figure.
2. Le point N est l'image du point M par l'homothétie de centre A qui applique le point B sur le point C.

Construis le point N.

Activité 17 Construction de l'image d'un point par une homothétie définie par deux points distincts et leurs images

Sur la figure ci-contre,
- les droites (AB) et (A'B') sont parallèles ;
- les droites (AA') et (BB') sont sécantes.



Soit h l'homothétie définie par : h(A) = A' et h(B) = B'.

On se propose de déterminer l'image M' d'un point M par l'homothétie h (cas où M n'appartient ni à la droite (AA'), ni à la droite (BB').

1. Justifie que le point M' appartient à la droite (D), parallèle à (AM) et passant par le point A'.
2. a) Justifie que le point M' appartient à la droite (D_1) passant par B' et parallèle à la droite (BM).

   b) Justifie (D) et (D_1) sont sécantes.
3. Déduis des consignes précédentes un programme de construction du point M'.
4. Examine le cas où M appartient à la droite (AA') ou à la droite (BB').

Récapitulons

Pour construire l'image M' d'un point M par une homothétie déterminée par deux points distincts et leurs images, on peut procéder de la façon suivante :

Cas où M n'appartient ni à la droite (AA'), ni à la droite (BB')

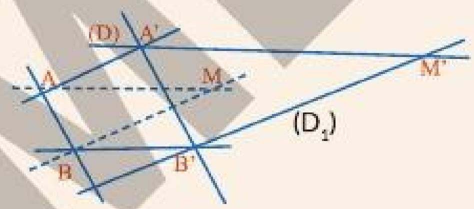
Construire la droite (AM) ;

Construire la droite (BM) ;

Construire la droite (D) parallèle à (AM) et passant par A' ;

Construire la droite (D_1) parallèle à (BM) et passant par B' ;

M' est le point d'intersection des droites (D) et (D_1).



Remarque :

Dans le cas où M appartient à l'une des droites (AA') ou (BB'), on se ramène au cas de l'activité 15 en construisant l'image d'un point n'appartenant pas à l'une des droites (AA') ou (BB')

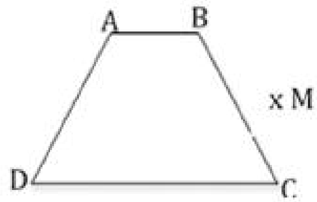
Exercices de fixation

22 Dans la figure ci-contre ABCD est un trapèze.

On désigne par h l'homothétie qui applique le point D sur le point A et le point C sur le point B.

1. Reproduis la figure.
2. On désigne par N l'image du point M.

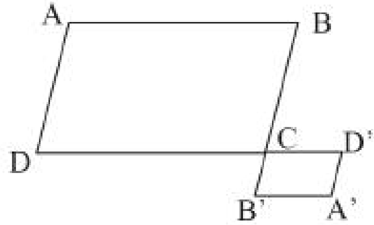
Construis le point N.



23 Sur la figure ci-contre, ABCD et CB'A'D' sont des parallélogrammes. On donne : AB = 6 ; BC = 3 ; CD' = 2 et CB' = 1.

Justifie qu'il existe une homothétie de centre C qui transforme le parallélogramme ABCD en le parallélogramme CB'A'D'.

Précise son rapport.

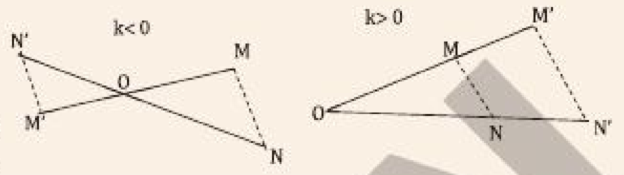


1. DÉFINITION ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

Définition

Soit O un point du plan et k un nombre réel non nul.

On appelle homothétie de centre O et de rapport k, l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M du plan associe le point M' du plan tel que : $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.



Notation

L'homothétie de centre O et de rapport k se note $h_{(O,k)}$

Exemples

- L'homothétie de rapport 1 est l'application identique du plan.
- L'homothétie de centre O et de rapport -1 et la symétrie centrale de centre O.

2. Conséquence de la définition

Propriété

M, M' et O sont trois points du plan et k un nombre réel non nul.

Si M' est l'image de M par l'homothétie de centre O et de rapport k, alors les points O, M et M' sont alignés.

Pour s'entraîner : Exercices 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5

Point invariant

O est un point du plan et k un nombre réel non nul et différent de 1.

L'homothétie de centre O et de rapport k non nul et différent de 1 a un seul point invariant : c'est le point O.

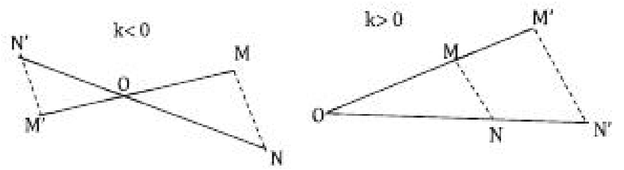
Propriété fondamentale

M, N, M' et N' sont des points du plan et k un nombre réel non nul.

Si M' et N' sont les images respectives des points M et N par une homothétie de rapport k, alors $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$.

Propriété

Si M et N sont deux points distincts d'images respectives M' et N' par une homothétie de rapport k, alors $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$.



Exemple d'application

Dans la figure ci-contre, qui n'est pas en grandeurs réelles, O $\in$ [ES] et O $\in$ [KW].

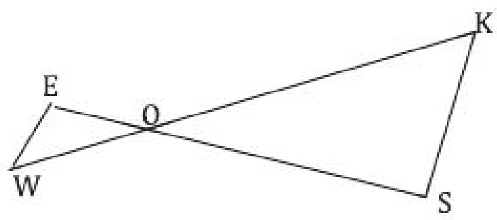
On donne $OE = \frac{1}{4}OS$ et $OW = \frac{1}{4}OK$.

On veut démontrer que : $\overrightarrow{WE} = \frac{-1}{4}\overrightarrow{KS}$

On considère l'homothétie h de centre O et de rapport $\frac{-1}{4}$.

On a : h(K) = W et h(S) = E.

D'après la propriété fondamentale on a : $\overrightarrow{WE} = \frac{-1}{4}\overrightarrow{KS}$.



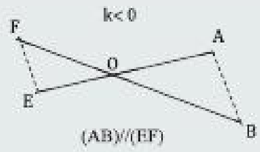
Pour s'entraîner : Exercices 7, 8

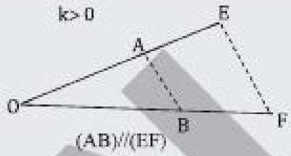
2. IMAGES DE FIGURES SIMPLES

1. Image d'une droite, d'une demi-droite

Propriétés

- L'image d'une droite par une homothétie est une droite qui lui est parallèle.
- L'image d'une demi-droite par une homothétie est une demi-droite.





La droite (EF) est l'image de la droite (AB) par l'homothétie de centre O et de rapport k.

Remarque :
Soit h est une homothétie de centre O et (D) une droite du plan.
Si O appartient à la droite (D), alors l'image de la droite (D) par h est la droite (D) elle-même.

Exemple d'application

Soit O un point du plan.

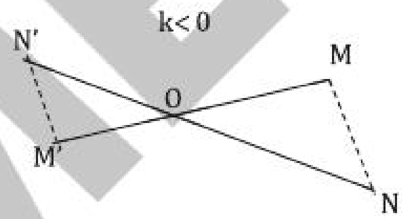
On considère l'homothétie de centre O et de apport $\frac{-1}{5}$.

A, B, C et D sont des points du plan distincts deux à deux tels que h(A) = D et h(B) = C.

On veut démontrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

D'après la propriété fondamentale on a : $\overrightarrow{DC} = \frac{-1}{5}\overrightarrow{AB}$.

Les droites (AB) et (CD) ont des vecteurs directeurs colinéaires, donc elles sont parallèles.

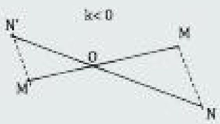


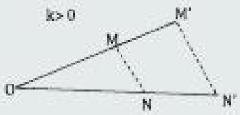
Pour s'entraîner : Exercices 9, 10, 12, 17

2. Image d'un segment

Propriété

Si A et B sont deux points distincts du plan d'images respectives A' et B' par une homothétie de rapport k, alors l'image du segment [AB] par cette homothétie est le segment [A'B'] et on a : A'B'= $|k|$ AB.

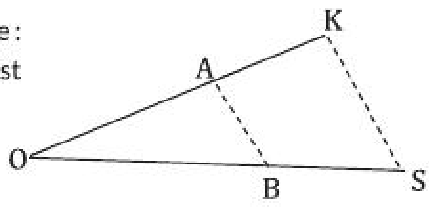




Exemple d'application

Dans la figure ci-contre qui n'est pas en grandeurs réelles on donne :
OA = 3cm, OB = 4cm et AB = 2 cm, h(A) = K et h(B) = S, où h est l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{3}{2}$.
On veut calculer la longueur du segment [KS].
L'image du segment [AB] par h est le segment [KS].

KS = $\frac{3}{2}AB$, donc : KS = 3 cm.

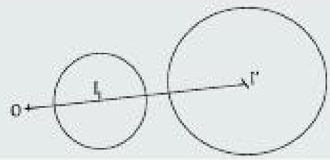


Pour s'entraîner : Exercice 11

3. Image d'un cercle

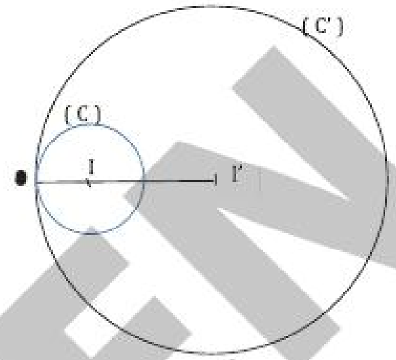
Propriété

L'image du cercle (C) de centre I et de rayon r par une homothétie h de centre O et de rapport k est le cercle (C') de centre h(I) et de rayon $|k|\,r$.



On considère le cercle (C) de centre I et de rayon r et le cercle (C') de centre I' et de rayon R
Si h ((C)) = (C'), alors h(I) = I' et R = $|k|\ r$.

Exemple d'application



Dans la figure ci-contre, qui n'est pas en grandeurs réelles, le cercle (C') est l'image de (C) par l'homothétie de centre O et de rapport 4.

On donne le rayon du cercle (C) égal à 1,5cm.

Déterminons le rayon du cercle (C').

Le cercle (C') est l'image du cercle (C) par l'homothétie de centre O et de rapport 4.

Donc le rayon du cercle (C') est égal à 1,5cm × 4, soit 6cm.

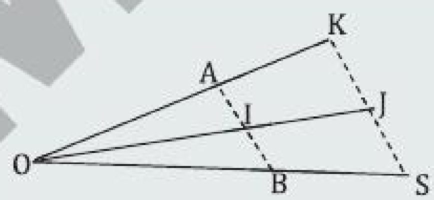
S'entraîner : Exercices 13, 31, 39, 42

3. PROPRIÉTÉS DE CONSERVATION

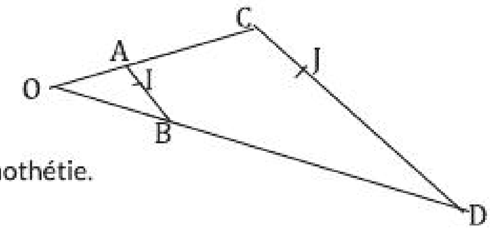
1. Conservation de l'alignement

Propriété

Des points alignés ont pour images par une homothétie des points alignés.
On désigne par h est l'homothétie de centre O qui applique A sur K et B sur S.
Les points A, B et I sont alignés. Leurs images respectives K, J et S par l'homothétie par h sont alignés.



Exemple d'application



Dans la figure ci-contre :

Les points A, B et I sont alignés.

On donne h(O) = O, h(A) = C ; h(B) = D, h(I) = J, où h est une homothétie.

On veut montrer que les points C, J et D sont alignés.

Les points C, J et D sont alignés car ils sont les images de trois points alignés par une homothétie sont trois points alignés.

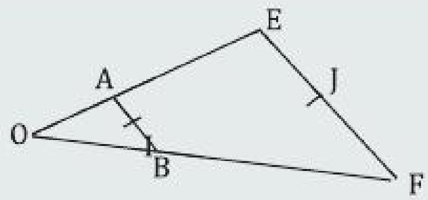
Pour s'entraîner : Exercices 14, 23, 29

2. Conservation du milieu d'un segment

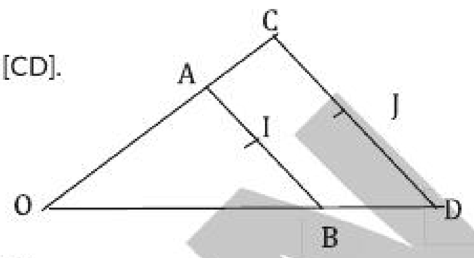
Propriété

Le milieu d'un segment a pour image par une homothétie le milieu de l'image de ce segment.

I est le milieu du segment [AB], h est une homothétie centre O, h(A) = E, h(B) = F et h(I) = J, donc J est le milieu de [EF].



Exemple d'application



Dans la figure ci-contre ABC est un triangle.

Les points I et J sont les milieux respectifs des segments [AB] et [CD].

On désigne par h l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{4}{3}$.

On donne h(A) = C, h(B) = D.

On veut montrer que l'image de I par h est J.

I est le milieu du segment [AB].

On sait aussi que l'image du segment [AB] par h est le segment [CD],

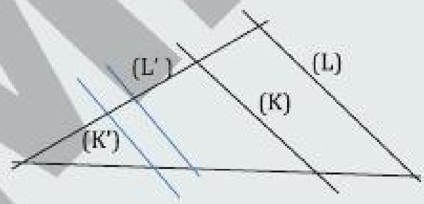
Donc le point J, milieu de [CD] est l'image par h du point I, milieu de [AB].

Pour s'entraîner : Exercices 16, 27, 40, 41

3. Conservation du parallélisme

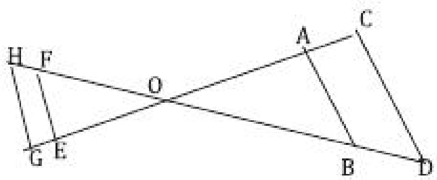
Propriété

Deux droites parallèles ont pour images par une homothétie deux droites parallèles.



Les droites (L') et (K') sont les images respectives des (L) et (K).
Si les droites (L) et (K) sont parallèles, alors les droites (L') et (K') sont parallèles.

Exemple d'application



Dans la figure ci-contre (AB) //(CD).

On désigne par h l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{-1}{2}$.

On donne h(A) = E, h(C) = G, h(B) = F et h(D) = H.

Justifions que les droites (EF) et (HG) sont parallèles.

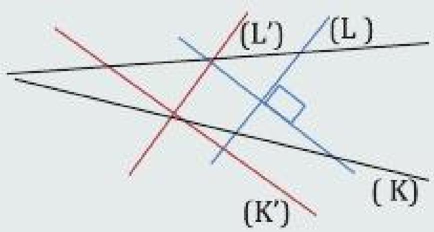
Les droites (EF) et (HG) sont les images de deux droites parallèles (AB) et (CD) par une homothétie.
Elles sont donc parallèles.

Pour s'entraîner : Exercices 18, 28

4. Conservation de l'orthogonalité

Propriété

Deux droites perpendiculaires ont pour images par une homothétie deux droites perpendiculaires.



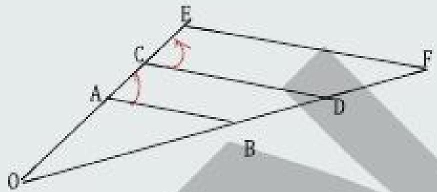
h est une homothétie qui applique (L) sur (L') et (K) sur (K')
Les droites (L') et (K') sont les images respectives de deux droites perpendiculaires. Elles sont donc perpendiculaires.

Pour s'entraîner : Exercice 17

5. Conservation de la mesure des angles orientés

Propriété

Un angle orienté a pour image par une homothétie un angle orienté de même mesure.



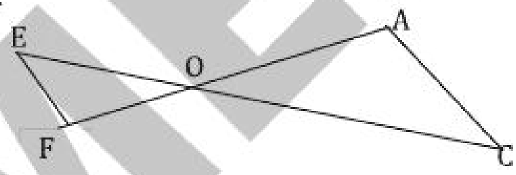
Illustration

Si une homothétie de centre O et de rapport k applique l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}})$ sur l'angle $(\widehat{\overrightarrow{CE},\overrightarrow{CD}})$, alors $Mes(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}}) = Mes(\widehat{\overrightarrow{CE},\overrightarrow{CD}})$.

Exemple d'application

Dans la figure ci contre qui n'est pas en dimensions réelles :

h(A) = F, h(C) = E, où h est l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{-1}{3}$.



Justifions que : $Mes(\widehat{\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AC}}) = Mes(\widehat{\overrightarrow{FO},\overrightarrow{FE}})$.

L'angle $(\widehat{\overrightarrow{FO},\overrightarrow{FE}})$ est l'image de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AC}})$ par l'homothétie h.

Donc $Mes(\widehat{\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AC}}) = Mes(\widehat{\overrightarrow{FO},\overrightarrow{FE}})$.

Pour s'entraîner : Exercices 17, 19, 26

4. CARACTÉRISATION D'UNE HOMOTHÉTIE

1. Homothétie caractérisée par son centre, un point et son image

Propriété

Soient A, B, et C trois points alignés et deux à deux distincts du plan.

Il existe une homothétie et une seule, de centre A qui applique B sur C.

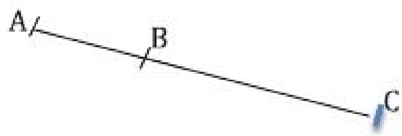
L'homothétie de centre A de rapport $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$ applique B sur C.

Exemple d'application

Dans la figure ci-contre qui n'est pas en grandeurs réelles :

les points A, B et C sont alignés et $\overline{AC} = 3\overline{AB}$.

Justifions l'existence d'une homothétie de centre qui applique B sur C, puis déterminons le rapport de cette homothétie.



Les points A, B et C sont alignés et sont deux à deux distincts, donc, il existe une homothétie de centre A qui applique B sur C.

On a : $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = 3$. Le rapport de cette homothétie vaut 3.

Pour s'entraîner : Exercice 20

2. Homothétie caractérisée par son rapport, un point et son image

Propriété

Soient deux points distincts A et B et k un réel non nul différent de 1.

Il existe une homothétie et une seule, de rapport k qui applique A sur B.

Le point O du plan qui est tel que : $\overrightarrow{OA}=\frac{1}{k-1}\overrightarrow{AB}$ est le centre de l'homothétie de rapport k qui applique A sur B.

Exemple d'application

Dans la figure ci-contre A et B sont deux points distincts du plan.

On veut déterminer le centre de l'homothétie de rapport 3 qui applique A sur B.

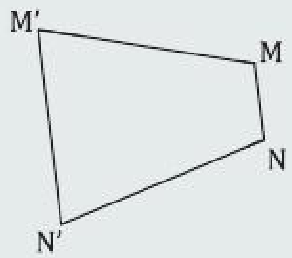
Le centre de l'homothétie est le point O du plan qui est tel que : $\overrightarrow{OA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.
On obtient la figure ci-dessous.

Pour s'entraîner : Exercices 21, 23

3. Homothétie caractérisée par deux points distincts et leurs images.

Propriété

Soient M, N, N' et M' quatre points deux à distincts tels que : (MN)// (M'N') et (MM') et (NN') sécantes.
Il existe une homothétie et une seule qui applique M sur M' et N et N'.

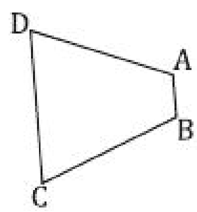


Illustration

(MN)// (M'N') et (MM') et (NN') sécantes, donc il existe une homothétie qui applique M sur M' et N sur N'.

Exemple d'application

Dans la figure ci-contre, qui n'est pas en dimensions réelles ABCD est un trapèze.



On donne AB = 2cm et DC = 6cm.

Justifions qu'il existe une homothétie qui applique B sur C et A sur D.

On a : (AB)// (CD) et (AD) et (BC) sécantes, donc il existe une homothétie qui applique A sur D et B sur C.

Le centre de l'homothétie est point commun aux droites (AD) et (BC) et son rapport est : $\frac{\overline{DC}}{\overline{AB}}$.

Pour s'entraîner : Exercices 24, 25, 37

QUESTION 1

Comment construire l'image M' d'un point M par une homothétie déterminée par son centre I, un point J et son image K ?

Méthode

Pour construire l'image M' d'un point M par une homothétie déterminée par son centre I, un point J et son image K, on peut procéder de la façon suivante :

- Cas où M n'appartient pas à la droite (IJ)
  - ✓ Construis la droite (IM) ;
  - ✓ Construis la droite (JM) ;
  - ✓ Construis la parallèle (D) à la droite (JM) et passant par K
  - ✓ Le point M' est le point d'intersection des droites (D) et (IM)
- Cas où M appartient à la droite (IJ)
  - ✓ Construis grâce à la méthode précédente l'image N' d'un point N quelconque n'appartenant pas à la droite (IJ) ;
  - ✓ Construis la parallèle (D) à la droite (MN) et passant par le point N' ;
  - ✓ Le point M'est le point d'intersection de la droite (D) et de la droite (IM).

Exercice

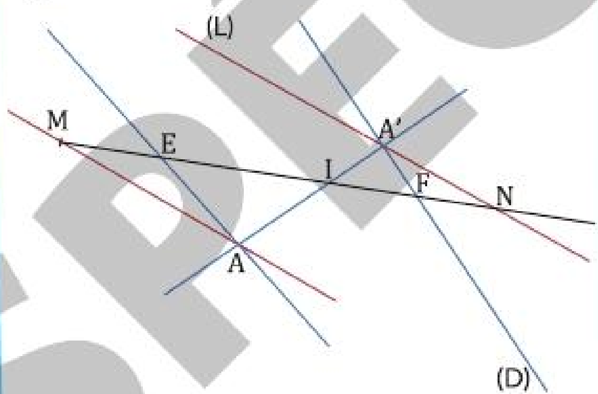
Dans la figure ci-contre les points E, I , F et M sont alignés.

On désigne par h l'homothétie de centre I qui applique E sur F.

1. Reproduis la figure et construis le point N, image du point M par h.
2. Explique ta méthode de construction

Solution commentée

1.



2.
- ✓ On place un point A qui n'appartient pas à la droite (EF).
- ✓ On trace la droite (AE).
- ✓ On trace la droite (D) parallèle à (AE) qui passe par le point F.
- ✓ On trace la droite (AI). Soit {A'} = (D) ∩ (AI)
- ✓ On marque le point A' image de A par l'homothétie.
- ✓ On trace la droite (AM).
- ✓ On trace la droite. (L) parallèle à (AM) qui passe par le point A'.
- ✓ On marque le N, point commun à (L) et à (EF).

Exercice non corrigé

E, F, G sont trois points aligné tels que : F appartient au segment [EG] et EF = 2 cm et FG = 4 cm. H est un pont qui n'appartient pas à la droite (EF).

1. Fais une figure.
2. Construis le point K image du point E par l'homothétie de centre F qui applique G sur E.
3. Explique ta méthode de construction

QUESTION 2

Comment l'image construire l'image M' d'un point M par une homothétie déterminée par deux points distincts A et B et leurs images respectives A' et B' ?

Méthode

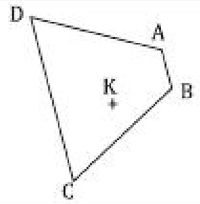
Pour construire l'image M' d'un point M par une homothétie déterminée par deux points distincts A et B et leurs images respectives A' et B', on peut procéder de la façon suivante :

- *Cas où M n'appartient ni à la droite (AA'), ni à la droite (BB')*
  - ✓ Construis la droite (AM).
  - ✓ Construis la droite (BM).
  - ✓ Construis la droite (D) parallèle à (AM) et passant par A'.
  - ✓ Construis la droite (D_1) parallèle à (BM) et passant par B'.
  - ✓ M' est le point d'intersection des droites (D) et (D_1).
- *Cas où M appartient à l'une des droites (AA') ou (BB')*
  - ✓ Construis grâce à la méthode précédente l'image N' d'un point N quelconque n'appartenant ni à (AA'), ni à (BB').
  - ✓ Construis la parallèle (D) à la droite (MN) et passant par le point N'.
  - ✓ Le point M' est le point d'intersection de la droite (D) et de la droite (AA').

Exercice

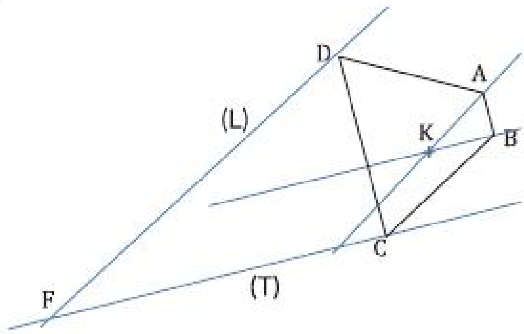
Dans la figure ci-contre, ABCD est un trapèze.

Construis le point F image du point K par l'homothétie qui applique A sur D et B sur C.



Solution commentée

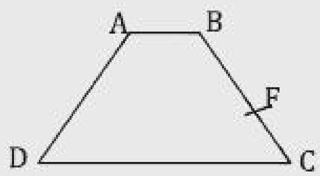
- ✓ On trace les droites (AK) et (BK).
- ✓ On construis la droite (L) , la parallèle à (KA) qui passe par le point D.
- ✓ On construis la droite (T) , la parallèle à (BK) qui passe par le point C.
- ✓ On marque le point F, le point d'intersection de (L) et de (T).



Exercice non corrigé

Dans la figure ci-contre ABCD est un trapèze. F est un point du segment [BC].

1. Reproduis la figure.
2. Construis le point K , image du point F par l'homothétie qui applique le point A sur le point D et le point B sur le point C.



QUESTION 3

Comment utiliser une homothétie pour démontrer ?

Méthode

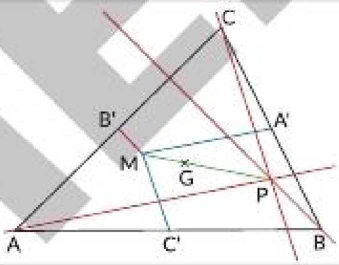
Pour utiliser une homothétie pour démontrer, plusieurs pistes peuvent être exploitées.
On utilise :

- la définition (justifier par exemple l'alignement de trois points) ;
- les propriétés de conservation ;
- les propriétés relatives à l'image d'une droite, aux images de droites parallèles ou perpendiculaires ;
- les images du point de concours de droites ;
- mettre en évidence une homothétie particulière au cas où l'énoncé de l'exercice suggère par exemple un triangle et son centre de gravité, un trapèze, etc.

Exercice

Soit ABC un triangle. On note A', B' et C' les milieux respectifs des côtés [BC], [CA], [AB] et G le centre de gravité du triangle ABC

Étant donné un point M du plan, justifie que la parallèle à (MA') passant par A, la parallèle à (MB') passant par B, et la parallèle à (MC') passant par C, sont concourantes.



Solution commentée

M étant le point de concours des droites (MA'), (MB') et (MC'), il suffit de déterminer l'image du point M.

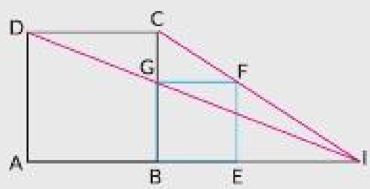
- ✓ Le centre G du triangle étant suggéré, il convient de penser à l'utilisation de l'homothétie h de centre G et de rapport -2. On a : h(A') = A, h(B') = B et h (C') = C. Posons P = h(M).
- ✓ h (A') = A et h(M) = P, donc Le point P appartient à la parallèle à la droite (MA') passant par A
- ✓ de même h(B') = B et h(M) = P, donc le point P appartient également à la parallèle à la droite (MB') passant par B.
- ✓ Enfin, h(C') = C et h(M) = P, donc le point P appartient également à la parallèle à la droite (MC') passant par C.
- ✓ Ces trois droites sont donc concourantes en P. L'homothétie h transforme (A, B, C) en (A', B', C') et M en un point P.
- ✓ Ce point P est sur l'image par h de (MA'), c'est-à-dire la parallèle passant par A à (A'M).
- ✓ Pour les mêmes raisons, P est sur la parallèle à (B'M), passant par B, et est sur la parallèle à (C'M), passant par C.
- ✓ Ces trois droites sont concourantes en P.

Exercice non corrigé

Deux carrés ABCD et BEFG ont un sommet commun B et deux côtés alignés :

E est sur la droite (AB) ; G est sur la droite (BC).

Montrer que les droites (AB), (DG) et (CF) sont concourantes.



QUESTION 4

Comment utiliser une homothétie pour construire une figure sous des contraintes ?

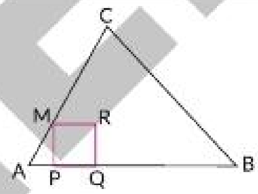
Méthode

Plusieurs méthodes existent et ne sont pas spécifiques à l'homothétie
On peut utiliser la méthode par libération d'une contrainte:

- on libère la contrainte pour l'un des points à construire, puis on détermine le lieu géométrique du point « libéré » ;
- on en déduit la position du point cherchée ;
- on construit alors le reste de la figure ;
- on discute ensuite pour savoir si la construction est toujours possible, et pour connaître le nombre de solutions.

Exercice

On considère un triangle ABC. Construis un carré MPQR tel que les point P et Q appartiennent au segment [AB], M au segment [AC] et R au segment [BC].



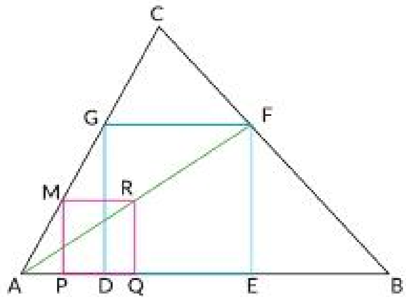
Solution commentée

On construit une figure PQRM en libérant par exemple la contrainte R appartient au segment [BC] (figure ci-dessus)

- ✓ Tracer un carré MPQR quelconque dont deux des sommets sont sur [AB] et un sur [AC]. Joindre A au quatrième sommet de ce carré et prolonger la droite (AR) jusqu'à ce qu'elle rencontre [BC]. Le point d'intersection F sera un sommet du carré recherché.
- ✓ Il suffit de tracer à partir de F la parallèle et la perpendiculaire à [AB] pour compléter le tracé du carré.

Preuve

- ✓ La droite (AR) rencontre la droite (BC) en F.
- ✓ L'homothétie de centre A qui transforme R en F transforme le carré MPQR en un carré GDEF dont les sommets sont sur les côtés du triangle ABC.

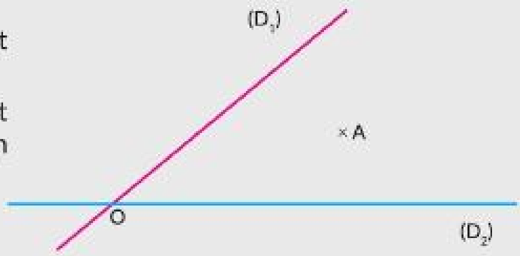


Exercice non corrigé

Exercice non résolu : Cercle tangent à deux droites et passant par un point donné.

On donne deux droites (D_1) et (D_2) sécantes et un point A n'appartenant pas à ces droites. Construis s'il existe un cercle passant par A et tangents à ces deux droites.

Donne le nombre de solutions possibles.



Exercices de fixation

Définition et premières propriétés

1 h est l'homothétie de centre Ω et de rapport -4 et $M' = h(M)$.

Recopie le numéro de chaque affirmation suivi de (V) si l'affirmation est vraie ou de (F) si l'affirmation est fausse.

1. Ω est le milieu du segment [MM'].
2. Les points Ω, M et M' sont alignés.
3. $\overrightarrow{\Omega M} = -4\overrightarrow{\Omega M'}$.
4. $\overrightarrow{\Omega M'} = -4\overrightarrow{\Omega M}$.

2 Dans la figure ci-contre, qui n'est pas en grandeurs réelles, les points E, F et G sont alignés.

On donne : EF = 2 cm et FG = 4 cm.

Pour chaque proposition du tableau ci-dessous, trois informations A, B et C sont proposées dont une seule permet d'avoir la proposition exacte.

Écris dans ton cahier le numéro de chaque proposition suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

N°	Propositions	Informations		
		A	B	C
1	Si h est l'homothétie de centre F qui applique E sur G alors…	le rapport de h est 2.	le rapport de h est −2.	le rapport de h est $\frac{1}{2}$.
2	Si h est l'homothétie de centre E qui applique G sur F, alors …	le rapport de h est $\frac{1}{2}$.	le rapport de h est $\frac{1}{3}$.	le rapport de h est $-\frac{1}{3}$.
3	Si h est l'homothétie de centre E et de rapport 3, alors…	h applique F sur G.	h applique G sur F.	h applique F sur E.
4	Si h est l'homothétie de centre F et de rapport $-\frac{1}{2}$, alors…	h applique G sur E.	h applique E sur G.	h applique F sur G.

3 Pour chaque affirmation du tableau ci-dessous, deux réponses A et B sont proposées dont une seule permet d'avoir l'affirmation complète et exacte.

Écris dans ton cahier le numéro de chaque affirmation suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

N°	Affirmations	Réponses	
		A	B
1	Si $\overrightarrow{OA} = -4\overrightarrow{BO}$, alors…	B est l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport 4.	A est l'image de B par l'homothétie de centre O et de rapport 4.
2	Si $\overrightarrow{OF} = -3\overrightarrow{OH}$, alors……	H est l'image de F par l'homothétie de centre O et de rapport $-\frac{1}{3}$.	H est l'image de F par l'homothétie de centre O et de rapport −3.
3	Si $\overrightarrow{EK} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{KF}$, alors…	K est le centre de l'homothétie de rapport $\frac{3}{2}$ qui applique E sur F.	K est le centre de l'homothétie de rapport $\frac{3}{2}$ qui applique F sur E.

4 Pour chaque proposition du tableau ci-dessous, deux informations A et B sont proposées dont une seule permet d'avoir la proposition exacte.

Écris dans ton cahier le numéro de chaque proposition suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

N°	Propositions	Informations	
		A	B
1	Si G est l'image de H par l'homothétie de centre O et de rapport 3, alors…	$\overrightarrow{OG} = 3\overrightarrow{OH}$.	$\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$.
2	Si B est l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport – 12 , alors…	$\overrightarrow{OB} = -2\overrightarrow{OA}$.	$\overrightarrow{OA} = -2\overrightarrow{OB}$.
3	Si F est l'image de E par l'homothétie de centre I et de rapport 7, alors…	$\overrightarrow{IF} - 7\overrightarrow{IE} = \vec{O}$.	$\overrightarrow{IE} - 7\overrightarrow{IF} = \vec{O}$.

5 Interpréter les égalités vectorielles ci-dessous en utilisant une homothétie.

1. $\overrightarrow{AB} = 4\overrightarrow{AC}$
2. $\overrightarrow{OM} = -3\overrightarrow{M'O}$
3. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA}$

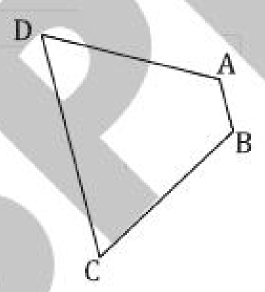
6 Dans la figure ci-dessous qui n'est pas en grandeurs réelles, ABCD est un trapèze isocèle.

On donne : AB = 1 cm, AD = 3 cm , DC= 4 cm.

les point D et C sont les images respectives des points A et B par une homothétie de centre O qui a été effacé.

1. Réalise la figure en dimensions réelles.
2. a) A l'aide de la règle non graduée, construis le point O.

   b) Explique ta méthode construction.



Propriété fondamentale

7 ABC est un triangle. Le point I est tel que : $\overrightarrow{AI} = \frac{-1}{3}\overrightarrow{AB}$.

La parallèle à la droite (BC) passant par I coupe (AC) en J.

1. Fais une figure.
2. Détermine le rapport de l'homothétie qui applique I sur B et J sur C.

8 ABC est un triangle tel que : AB= =6cm, AC=3cm et BC=4cm.

Les points E et F sont les images respectives des points B et C par l'homothétie de centre A et rapport $\frac{1}{3}$.

1. Fais une figure.
2. Justifie que : $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{3} = \overrightarrow{BC}$.

Images de figures simples

9 Pour chaque proposition du tableau ci-dessous, trois informations A, B et C sont proposées dont une seule permet d'avoir la proposition exacte.

Écris dans ton cahier le numéro de chaque proposition suivi de la lettre correspondant à la bonne information.

N°	Propositions	Informations		
		A	B	C
1	Si h est une homothétie, alors…	l'image d'une droite par h est une droite qui lui est parallèle .	l'image d'une droite par h est un segment.	l'image d'une droite par h est une droite qui lui est perpendiculaire.

2	Si h est une homothétie de rapport-3, alors ...	l'image d'un segment par h est un segment de même longueur.	l'image d'un segment [AB] par h est un segment de longueur 3AB.	l'image d'un segment [AB] par h est un segment de longueur $\frac{1}{3}AB$.
3	Si h est une homothétie de rapport 3, alors...	l'image d'un cercle (C) par h est un cercle de même rayon.	l'image d'un cercle (C) par h est un cercle de rayon trois fois plus petit que celui de (C).	l'image d'un segment [AB] par h est un segment de longueur $\frac{1}{3}AB$.

10

1. Trace sur ton cahier une droite (D), puis marque un point I n'appartenant pas à la droite (D).
2. Construis la droite (D'), image de (D) par l'homothétie de centre I et de rapport 3.

11

1. Construis un triangle ABC.
2. Construis l'image du segment [AB] par l'homothétie de centre C et de rapport -2.

12 ABC est un triangle. Les points E et F sont les images respectives des points B et C par l'homothétie de centre A et de rapport $-\frac{1}{2}$.

1. Fais une figure.
2. Justifie que les droites (BC) et (EF) sont parallèles.

13

1. Construis le cercle (C) de centre O et de rayon 3.
2. Place un point A et construis l'image (C') du cercle (C) par l'homothétie de centre A et de rapport 2.

Propriétés de conservation

14 EFG est un triangle tel que EF= 4 cm, EG =3 cm et FG = 5 cm. K est un point du segment [FG].

1. Fais une figure.
2. On désigne par h l'homothétie de centre E et rapport $\frac{3}{2}$.

   Les points I et J sont les images respectives des F et G par h.

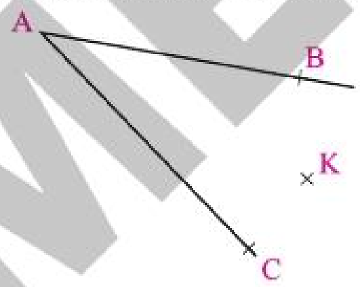
   a. Construis les points I et J.

   b. A l'aide de la règle non graduée construis le point M' image du point K par h.

   c. Justifie ta construction.

15 1. Reproduis la figure ci-dessous

2. Construis l'image $\widehat{B'A'C'}$ de l'angle $\widehat{BAC}$ par l'homothétie de centre K et de rapport -2.



16 Construis un losange MNPQ de centre O, h étant l'homothétie de centre O et de rapport -1

Reproduis et complète le tableau ci-dessous :

h

M	
N	
Q	
O	
(MN)	
[QM]	

17 On se donne un triangle ABC rectangle en A

Soit h l'homothétie de centre B et de rapport 1,5.

1. Construis les points A' et B' tels que : h(A) = A' et h(C) = C'
2. Justifie que les droites (A'B) et (A'C') sont perpendiculaires.

18 IJKL est un parallélogramme.

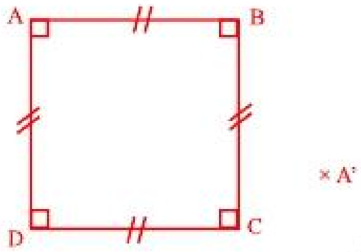
Soit h l'homothétie de centre K et de rapport -0,5

On pose : h(I)= I' ; h(J) = J' ; h(L) = L' .

1. Reproduis la figure.
2. Construis les points I' ; J' et L'.
3. Démontre que les droites (I'J') et (L'K) sont parallèles.

19

1. Reproduis la figure ci-dessous.



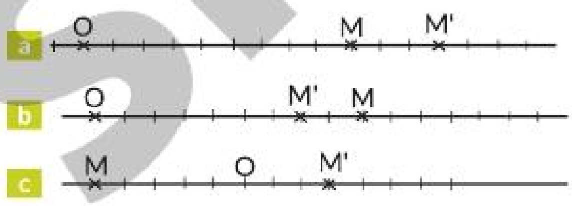
2. Retrouve le centre O de l'homothétie h de rapport 1,5 qui applique le point A sur le point A'.
3. Construis l'image du carré ABCD par cette homothétie.

Caractérisation d'une homothétie

20 ABM est un triangle.

1. Fais une figure.
2. Construis l'image du point M par l'homothétie de rapport $-\frac{1}{2}$ qui applique A sur B.

21 Dans chacun des cas ci-dessous, précise le rapport de l'homothétie de centre O qui applique M sur M'.



22 Place deux points distincts A et B.

1. Construis l'image B' du point B par l'homothétie de centre A et de rapport -2.
2. Construis l'image A' du point A par l'homothétie de centre B et de rapport 2.

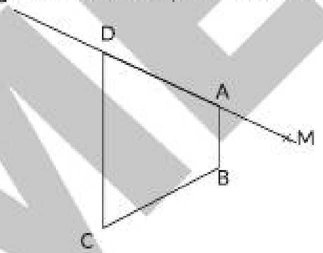
23 On considère trois points alignés I, J et K tels que :

IJ = 2cm et JK = 4cm.

E est un point du plan qui n'appartient pas à la droite (IJ).

1. Fais une figure.
2. On désigne par h l'homothétie de centre I qui applique J sur K.
   a. Construis le point F, image du point E par h.
   b. Explique ta méthode de construction.

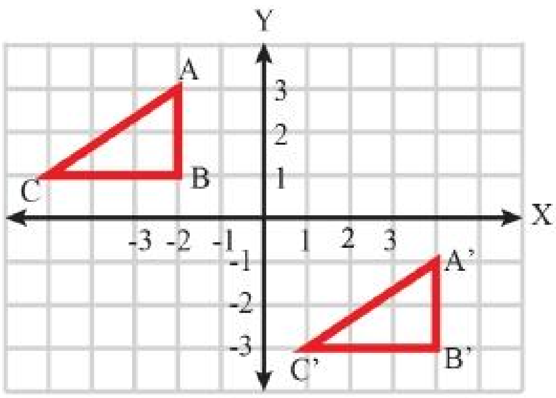
24 Dans la figure ci-dessous, ABCD est un trapèze.



M est un point de la droite (AB).

1. Reproduis la figure.
2. On désigne par h l'homothétie qui applique A sur D et B sur C.
   a. Reproduis et construis le point E, image du point M par h.
   b. Explique ta méthode de construction.

25 Dans la figure ci-dessous,



1. Existe-t-il une homothétie qui applique A sur A', B sur B' et C sur C' ?
2. Justifie ta réponse.

Exercices de renforcement /approfondissement

26 Construis un triangle EFG isocèle en F.

Place le point L image, du point E par l'homothétie de centre F et de rapport −1.

Démontre que EGL est un triangle rectangle.

27 Construis un parallélogramme EFGP de centre O .

Place le point K tel que F soit le milieu du segment [EK].

On note L l'image de K par l'homothétie de centre O et de rapport −1.

Démontre que P est le milieu du segment [LG].

28 Soit ABCD un parallélogramme de centre O, et h l'homothétie de centre O et de rapport -1.

1. Fais une figure.
2. Détermine : h(A) et h(B).
3. Détermine h((AB)) et h ((AC)).

La parallèle à la droite (DB) passant par C coupe (AB) en E et (AD) en K.

On considère l'homothétie h' de centre A qui applique B sur E.

4. Démontre que h'((D)) = K.
5. Compare les aires des triangles ABD et AEK.

29 ABCD est un parallélogramme de centre O. Le point E est l'image de A par la symétrie de centre B. Le point F est l'image de A par la symétrie de centre D. Le point K est tel que : $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{FK}$.

1. Fais une figure.
2. Justifie que les points A, C et K sont alignés.
3. Justifie les points F, C et E sont alignés.

30 On donne trois points A, B et C tels que : $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{4AB}$.

1. Démontre qu'il existe une homothétie h et une seule qui transforme A en B et B en C .
2. Précise le centre et le rapport de h.

31 On donne deux points distincts du plan O et O' et deux cercles (C) et (C') de centres O et O', de rayons R et R' tels que : R' = 3R.

Détermine les homothéties qui transforment (C) en (C').

32 Soit h une homothétie de rapport k ($k \neq 0$) ; soit (P) un rectangle de cotés a et b.

$a > 0$ et $b > 0$) ; soit (P') l'image de (P) par h .

1. Comment doit-on choisir k pour que le périmètre de (P') soit le double de celui de (P) ?
2. Comment doit-on choisir k pour que l'aire de (P') soit le double de celui de (P)?

33 Soit ABC un triangle. Trouve un carré DEFG inscrit dans le triangle ABC tel que :

1. deux des sommets du carré soient sur [AB],
2. un troisième sur [AC].
3. et le quatrième sur [BC].

34 On considère deux points distincts E et F. N est un point tel que le triangle EFN soit rectangle en N et G le centre de gravité du triangle EFN.

1. Détermine l'ensemble des points G lorsque N varie
2. Construis cet ensemble.

35 On considère un cercle (C) de diamètre [AB] et O le point tel que : $\overrightarrow{OA}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

A tout point M de (C), on associe le point R tel que [MR] soit un diamètre de (C).

On appelle Q le point d'intersection des droites (MO) et (AR).

1. Démontre qu'il existe une homothétie qui applique A sur B et Q sur M.
2. Déduis- en l'ensemble des points Q lorsque M décrit (C).

36 On considère (D) et (D') deux droites sécantes en un point O.

A est un point n'appartenant ni à (D), ni à (D').

Construis deux points P et Q tels que :

- P appartient à (D) ;
- Q appartient à (D') ;
- $\overrightarrow{QA}+3\overrightarrow{QP}=\vec{O}$.

37 Soit un triangle ABC, A', B' et C' les milieux respectifs des côtés [BC], [AC] et [AB].

On considère l'application qui à tout point M associe le point M' tel que : $\overrightarrow{MN'}=k\overrightarrow{MA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{MB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{MC}$.

1. Démontre que pour $k=\frac{1}{2}$, f est une homothétie que l'on caractérisera.

(On pourra utiliser le point G tel que $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{O}$.)

2. Détermine l'image du triangle ABC par cette homothétie.
3. Démontre que pour $k=-1$, f est une translation que l'on caractérisera.

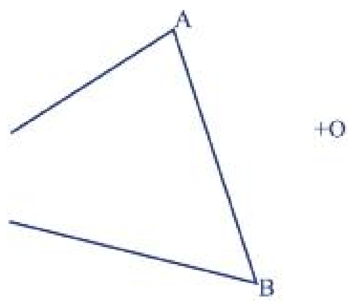
38 On considère un parallélogramme ABCD. Soit I le milieu de [CD], J le point d'intersection des droites (BI) et (AC) et K le point d'intersection des droites (AI) et (BD).

1. Justifie que J est le centre de gravité du triangle BCD.
2. Démontre qu'il existe une homothétie qui applique J sur B et K sur A.
3. Déduis-en que les droites (AB) et (KJ) sont parallèles.
4. Compare l'aire du parallélogramme à celle du triangle IJK.

39 On considère un trapèze ABCD de bases [AB] et [CD].Soit O le point d'intersection des droites (AC) et (BD).

1. Justifie qu'il existe une homothétie h de centre O qui applique A sur C.
2. Déterminer h(A).
3. On pose : B' = h(B). Justifie que B' est un point de la droite (CD).
4. Déduis-en que B' = D.
5. Soit I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [CD], démontre que les points O, I et J sont alignés.
6. On suppose que : ABCD n'est pas un parallélogramme. On note O' le point d'intersection des droites (AD) et (BC), démontre que les points O', I et J sont alignés.

40 La figure ci-dessous représente un triangle dont une partie du triangle ABC a été effacée.



Sans prolonger les côtés [AC] et [BC], tu décides de construire l'image du point C par l'homothétie de centre O et de rapport 2.

1. Reproduis la figure sur ton cahier.
2. Donne un programme de construction du point C' image du point C par l'homothétie de centre O et de rapport 2.

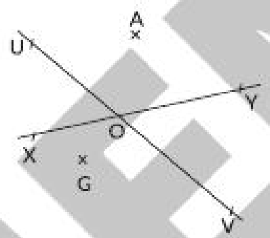
41 On considère un segment [AB] de longueur 6 cm, le point C de [AB] tel que AC= 4 et les cercles (C) de diamètre [AB] et (C') de diamètre [AC] .

Par A, on trace une droite variable (Δ) , distincte de (AB), qui coupe (C) en B' et (C') en C'.

1. Justifie que : (BB')//(CC').
2. Soit h l'homothétie de centre A et telle que h(B)=C a)
   a) Détermine le rapport de h.
   b) Détermine l'image B' par h.
3. Soit I le point d'intersection des droites (BC') et (CB'); h' l'homothétie de centre I et telle que : h'(B) = C'
   a) Détermine l'image de B' par h' .
   b) Détermine le rapport de h' .
3. Démontre que : $\overrightarrow{BC'} = \frac{-5}{2}\overrightarrow{C'I}$.
4. Détermine et construis l'ensemble des points I lorsque (Δ) varie.

42 (UV) et (XY) sont deux droites sécantes en O. A et G sont deux points distincts qui n'appartiennent ni à (UV), ni à (XY).

Construis un triangle de sommet A et de centre de gravité G et dont les deux autres sommets B et C appartiennent respectivement à (UV) et à (XY).



Situation complexe

43 Après la leçon sur les homothéties, le professeur de mathématiques d'une classe de seconde a donné un exercice à faire à la maison dont l'énoncé est : *« Démontre que dans un triangle non équilatéral, le centre de gravité, l'orthocentre et le centre du cercle circonscrit sont alignés. »*

Après plusieurs recherches, l'un de tes camarades de classe, te demande de l'aider.

Propose-lui une solution.

44 Kouamé et sa petite sœur Aya viennent d'hériter d'un terrain ayant la forme d'un triangle ABC rectangle en A tel que : AB = 80 mètres et AC = 250 mètres.

Kouamé décide d'octroyer à sa petite sœur une partie AEFK de ce terrain de telle sorte que AEFK soit un carré et que : $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$.

Il affirme avoir ainsi attribué à Aya 40% de l'aire totale du terrain ABC. Aya conteste cette affirmation et exige un agrandissement de cette parcelle afin qu'elle obtienne un carré AE'F'K', où F' est un point du segment [BC], K' un point du segment [AB] et E'un point du segment [AC].

Pour bien comprendre l'exigence de Aya et à l'aide d'un plan du terrain réalisé à l'échelle $\frac{1}{2000}$, les deux héritiers essaient de représenter à l'intérieur du terrain ABC, le terrain AE'F'K' , mais n'y arrivent pas.

Témoin de cette situation, tu décides de les aider.

1. Représente à l'échelle $\frac{1}{2000}$, le terrain ABC, et les terrains AEFK et AE'F'K' (Justifie les toutes étapes de construction).
2. Dis si l'affirmation de Kouamé relative à l'aire qu'il veut octroyer à sa petite sœur est juste ou fausse.
3. On suppose que Aya a obtenu le terrain AE'F'K'. Détermine qui de Kouamé ou Aya a obtenu le terrain ayant la plus grande aire .(Justifie ta réponse).

13 ÉTUDE DE FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

Commentaire de la Leçon

Jusqu'au 17e siècle, la notion de fonction n'était pas définie avec rigueur, le concept restait assez vague. C'est le mathématicien James GREGORY (1638 - 1675) qui propose la meilleure définition de la notion de fonction. Quant au terme fonction, il a été introduit par le mathématicien allemand LEIBNIZ Gottfried Wilhelm (1646 - 1716). Il désignait par ce terme des grandeurs géométriques dépendant d'autres grandeurs géométriques.

Même si l'idée de relation entre les quantités, prend naissance avec les mathématiques elles-mêmes, et donc chez les mathématiciens babyloniens et grecs, c'est au mathématicien allemand, DIRICHLET Gustav Peter Lejeune (1805 - 1859) que nous devons la définition d'une fonction telle que connue aujourd'hui.

Dans la leçon « généralités sur les fonctions », le concept de fonction a été défini ainsi que les principales définitions qui s'y rattachent. Ici, il s'agit d'étudier le sens de variation et de représenter les fonctions de référence. Au niveau des valeurs absolues, on se limitera à l'étude et à la représentation de la fonction :
$x \mapsto |ax + b|$ où $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$. On évitera de composer la fonction partie entière avec une autre fonction.

L'étude locale des propriétés d'une fonction, l'outil « dérivation » etc., permettra d'approfondir l'étude des fonctions dans les classes ultérieures.

Habiletés et Contenus

- **Identifier** une fonction affine par intervalles.
- **Reconnaître** les fonctions de référence.
- **Représenter** les fonctions de référence ($x \mapsto x^2$; $x \mapsto x^3$; $x \mapsto \frac{1}{x}$; $x \mapsto \sqrt{x}$; $x \mapsto |x|$; $x \mapsto E(x)$) ; les fonctions du type : $x \mapsto |ax+b|$.
- **Calculer** la partie entière d'un nombre réel.
- **Étudier** le sens de variation des fonctions élémentaires et dresser leur tableau de variation.
- **Utiliser** les fonctions de référence pour étudier les fonctions du type : $x \mapsto \frac{a}{x}$; $x \mapsto ax^2$.
- **Traiter une situation** faisant appel aux fonctions de référence.

Situation d'Apprentissage

Une société de location de véhicules située à Yopougon affiche pour une location journalière les tarifs suivants :

- entre un et 50 kilomètres, le client paie 15 000 francs de frais d'entretien du véhicule et 110 francs par kilomètre parcouru ;
- entre 50 et 100 km, le client paie 25 000 francs de frais d'entretien du véhicule et 90 francs par kilomètre parcouru ;
- au delà de 100 km, le client paie 40 000 francs de frais d'entretien du véhicule et 70 francs par kilomètre parcouru.

Un week-end, ton ami KALILOU souhaite rendre visite à sa grande sœur dans une ville située à 85 kilomètres de Yopougon. Il a prévu la somme de 30 000 francs pour la location d'un véhicule. Il se confie à toi et se demande si cette somme est suffisante pour la location d'un véhicule de cette société.

Tu décides de l'aider en utilisant les fonctions de référence.

Activité 1 Fonction affine par intervalles

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

- Si $x \in]-\infty ; -1[$ alors $f(x) = -2x + 3$;
- Si $x \in [-1 ; 3[$ alors $f(x) = -x$;
- Si $x \in [3 ; +\infty[$ alors $f(x) = x + 3$.

1. Détermine la fonction affine f_1 qui est égale à f sur l'intervalle $]-\infty ; -1[$.
2. Détermine la fonction affine f_2 qui est égale à f sur l'intervalle $[-1 ; 3[$.
3. Détermine la fonction affine f_3 qui est égale à f sur l'intervalle $[3 ; +\infty[$.

Récapitulons

La fonction f étant égale à une fonction affine sur chacun des intervalles $]-\infty ; -1[$; $[-1 ; 3[$; $[3 ; +\infty[$ est appelée une fonction affine par intervalles.

Exercice de fixation

1 Dans chacun des cas ci –dessous, recopie dans ton cahier la lettre correspondant à une fonction affine par intervalles.

a)
La fonction f définie par :
Si $x < 1$ alors $f(x)= 4x + 1$
Si $x \geq 1$ alors $f(x) = 1$

b)
La fonction f définie par :
Si $x \in [-2 ; -1[$, alors $f(x) = \dfrac{2}{x}$
Si $x \geq -1$, alors f $f(x) = -x + 1$

c)
La fonction f définie par :
Si $x \in [-4 ; 0[$, alors $f(x) = x^2$
Si $x \geq 0$, alors $f(x) = -x + 1$

d)
La fonction f définie par :
Si $x \in [-2 ; 0[$, alors $f(x) = \dfrac{x+1}{3}$
Si $x \in [0 ; 1[$, alors $f(x) = \dfrac{x}{4} + 1$

Activité 2 La fonction partie entière

Reproduis et complète la dernière colonne du tableau en déterminant pour chaque nombre réel x l'entier relatif z (s'il existe) tel que : $z \leq x < z + 1$.

Nombre réel x	Entier relatif z correspondant
2,578	
3,14	
0,002	
−1,67	
−5, 89	
$\sqrt{2}$	
$-\sqrt{3}$	

On admet que pour tout nombre réel x, il existe un unique entier relatif z tel que : $z \leq x < z + 1$.
On considère la correspondance f qui à tout nombre réel x associe l'entier relatif z tel que $z \leq x < z + 1$.

a) Justifie que f est une application.
b) Détermine $f(-1{,}02)$; $f(7{,}9)$; $f(-\sqrt{3})$.

Récapitulons

On admettra que : quel que soit le nombre réel x, il existe un nombre entier relatif z et un seul tel que : $z \leq x < z + 1$.
L'entier z est appelé la partie entière du nombre réel x, on le note E(x).
Ainsi E(2,578) = 2 ; E (−5,89) = −6
L'application $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est appelée fonction partie entière.
$x \mapsto E(x)$

Remarque

La partie entière d'un nombre réel x est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x.

Exercice de fixation

2 Pour chaque énoncé du tableau ci-dessous, trois informations a, b et c sont proposées, dont une seule permet d'avoir une affirmation juste.
Écris dans ton cahier le numéro de l'énoncé suivi de la lettre correspondant à la bonne information.

N°	Énoncés	Informations		
		a	b	c
1	E(0) est égal à...	-1	0	1
2	Si E(x) = 5, alors ...	$x = 5$	$5 \leq x < 6$	$x = 6$
3	Si $-8 \leq x < -7$, alors ...	E(x) = -7	E(x) = -8	E(x) = $-7{,}5$
4	Si E(x) = -3, alors...	$-4 \leq x < -3$	$-3 \leq x < -2$	$x < -3$
5	E$\left(-\frac{22}{7}\right)$ est égal à ...	-4	-3	3

Activité 3 Étude de la fonction valeur absolue

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = |x|$.

1. Détermine l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Justifie que : Si $x < 0$, $f(x) = -x$;
   Si $x \geq 0$, $f(x) = x$.
3. Justifie que la fonction f est décroissante sur $]-\infty\,;0[$ et croissante sur $[0\,;+\infty[$.
4. Le tableau ci-contre indique les variations de la fonction f.
   a) Commente-le.
   b) Justifie que la représentation graphique de f est la réunion de deux demi-droites.
   c) Représente graphiquement la fonction f dans le plan rapporté à un repère (O, I, J).

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	0	↗

Récapitulons

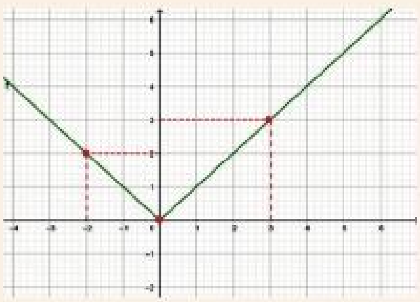
- La fonction $f : x \mapsto |x|$ est définie sur $\mathbb{R}$.
- Elle est croissante sur $[0\,;+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty\,;0[$.
- Le tableau ci-contre, résumant les variations de f sur $\mathbb{R}$ est appelé le tableau de variation de la fonction f.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	0	↗

- La représentation graphique de f est constituée de la réunion de deux demi-droites de même origine qui est le point O.

x	-2	0
$f(x)$	2	0

x	0	3
$f(x)$	0	3



Exercice de fixation

3

- On considère la fonction valeur absolue. Recopie le numéro de chacune des affirmations du tableau ci-dessous, suivi de vrai lorsque l'affirmation est vraie ou de faux lorsque l'affirmation est fausse.

N°	Affirmations
1	f n'est pas une fonction affine par intervalle.
2	La fonction f est décroissante sur l'intervalle $[1\,;2]$.
3	La fonction f est croissante sur l'intervalle $[-1\,;2]$.
4	La fonction f est décroissante sur l'intervalle $[-4\,;-2]$.
5	La fonction f est décroissante sur l'intervalle $[-4\,;2]$.
6	La fonction f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;-2]$.

- Pour chaque énoncé du tableau ci-dessous, trois informations a, b et c sont proposées, dont une seule permet d'avoir une affirmation juste.

Écris dans ton cahier le numéro de l'énoncé suivi de la lettre correspondant à la bonne information.

N°	Énoncés	Informations		
		a	b	c
1	Si $x < -4$, alors…	$\|x\| > 4$	$\|x\| < 4$	$\|x\| = 4$
2	Si $x > 6$, alors…	$\|x\| > 6$	$\|x\| < 6$	$x = 6$
3	Si $-8 \leq x < -7$, alors …	$7 < \|x\| \leq 8$	$\|x\| > 8$	$\|x\| < 7$

Activité 4 Étude de la fonction partie entière

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = E(x)$ où $E(x)$ désigne la partie entière du nombre réel x.

1. Recopie puis complète :

Si $x \in [-3\,;-2[$, $E(x)$ = ...

Si $x \in [-2\,;-1[$, $E(x)$ = ...

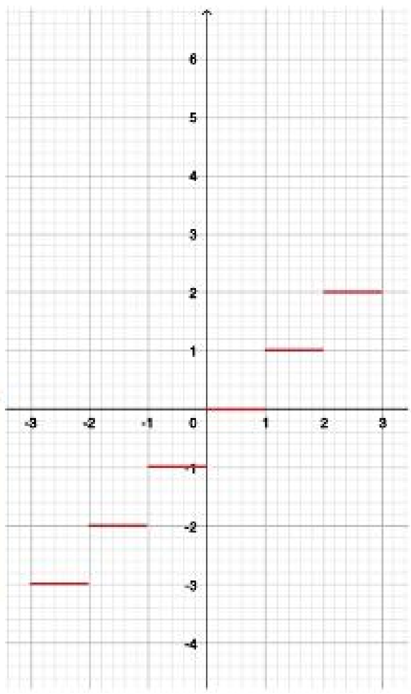
Si $x \in [-1\,;0[$, $E(x)$ = ...

Si $x \in [0\,;1[$, $E(x)$ = ...

Si $x \in [1\,;2[$, $E(x)$ = ...

Si $x \in [2\,;3[$, $E(x)$ = ...

2. Déduis de la question précédente, la représentation graphique de la fonction partie entière sur l'intervalle $[-3\,;3[$.



Récapitulons

- La fonction partie entière est une fonction affine par intervalles.
- Sa représentation graphique sur l'intervalle $[-3\,;3[$ est une fonction constante sur chacun des intervalles $[-3\,;-2[$, $[-2\,;-1[$, $[-1\,;0[$, $[0\,;1[$, $[1\,;2[$, $[2\,;3[$.

Exercice de fixation

4 Représente graphiquement la fonction partie entière sur l'intervalle $[0\,;6[$.

Activité 5 Étude de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$

1. Détermine l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Justifie que pour tous nombres réels u et v de l'intervalle $[0 ; +\infty[$, Si $u < v$, alors $f(u) < f(v)$.
3. Justifie que pour tous nombres réels u et v de l'intervalle $]-\infty ; 0[$, Si $u < v$, alors $f(u) > f(v)$.
4. Déduis des questions précédentes le sens de variation de la fonction f sur $]-\infty ; 0[$ et sur $[0 ; +\infty[$.
5. Dresse le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
6. On se propose de représenter la fonction f sur $[-3 ; 3]$.

   a) Justifie que 0 est le minimum de la fonction f sur l'intervalle $[-3 ; 3]$.

   b) Justifie que 9 est le maximum de f sur l'intervalle $[-3 ; 3]$.

   c) Recopie et complète à l'aide d'une calculatrice le tableau de quelques valeurs de $f(x)$.

(On donnera pour chaque résultat l'arrondi d'ordre 2).

x	3	2,5	2	1,5	1	0,5
$f(x)$						

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$f(x)$							

7. Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), construis la représentation graphique partielle de f correspondant au tableau de valeurs ci-dessus en admettant qu'il s'agit d'une courbe régulière et continue.

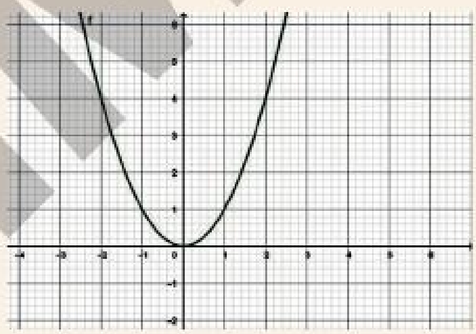
Récapitulons

La fonction f : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$

- n'est pas une fonction affine.
- Elle est définie sur $\mathbb{R}$.
- Elle est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0[$, et strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.
- Son tableau de variation se présente comme suit :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	0	↗

- Sa représentation graphique se présente comme suit :



Remarque

La courbe représentative de la fonction carrée dans un repère orthogonal (O, I, J) est une parabole de sommet O et d'axe (OJ).

Exercice de fixation

5 On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x^2$.

Recopie le numéro de chacune des propositions dans le tableau ci-dessous, suivi de (V) si la proposition est vraie ou de (F) si la proposition est fausse.

N°	Propositions
1	f est une fonction affine par intervalle.
2	La fonction f est décroissante sur l'intervalle [0; 4].
3	La fonction f est croissante sur l'intervalle [− 1 ; 2].
4	La fonction f est décroissante sur l'intervalle [− 4 ; 0].
5	La fonction f est décroissante sur l'intervalle [− 2 ; 2].
6	La fonction f est décroissante sur l'intervalle] -∞; −2].

- Pour chaque énoncé du tableau ci-dessous, trois informations a, b et c sont proposées, dont une seule permet d'avoir une affirmation juste.

Écris dans ton cahier le numéro de l'énoncé suivi de la lettre correspondant à la bonne information.

N°	Énoncés	Informations		
		a	b	c
1	Si $x < -3$, alors...	$x^2 < 9$	$x^2 > 9$	$x^2 = 9$
2	Si $x > 7$, alors...	$x^2 > 49$	$x = 49$	$x^2 < 49$
3	Si $-5 \leq x < -2$, alors ...	$4 < x^2 \leq 25$	$x^2 > 25$	$x^2 < 4$

Activité 6 Étude de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$

1. Détermine l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Explique pourquoi pour tous les nombres réels u et v de l'intervalle $[0\,;+\infty[$, si $u < v$ alors $f(u) < f(v)$.
3. Déduis des questions précédentes, le sens de variation de la fonction f sur $[0\,;+\infty[$.
4. Dresse le tableau de variation de f.
5. On se propose de représenter la fonction f sur $[0\,;10]$.

   a) Recopie et complète à l'aide d'une calculatrice le tableau de quelques valeurs de $f(x)$.

   (On donnera pour chaque résultat l'arrondi d'ordre 1 de $f(x)$).

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$											

   b) Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), construis la représentation graphique partielle de f correspondant au tableau de valeurs ci-dessus.

   (On admettra qu'il s'agit d'une courbe régulière et continue).

Récapitulons

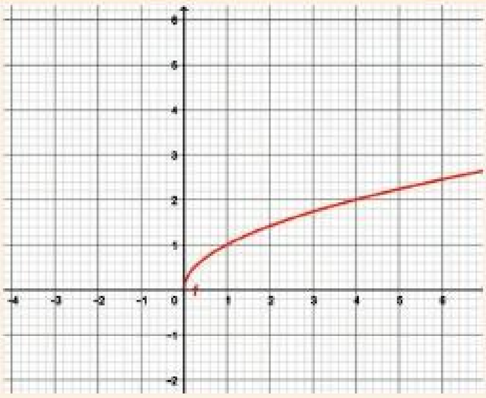
La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $[0\,;+\infty[$.

- Elle est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

Son tableau de variation est :

x	0	$+\infty$
$\sqrt{x}$	0	$\nearrow$

- Sa courbe représentative se présente comme suit :



Exercice de fixation

6 Pour chaque énoncé du tableau ci-dessous, trois informations a, b et c sont proposées, dont une seule permet d'avoir une affirmation juste.

Écris dans ton cahier le numéro de l'énoncé suivi de la lettre correspondant à la bonne information.

N°	Énoncés	Informations		
		a	b	c
1	$0 < x < 4$	$\sqrt{x} < 2$	$\sqrt{x} > 2$	$\sqrt{x} = 2$
2	$64 < x$	$\sqrt{x} < 8$	$\sqrt{x} = 8$	$\sqrt{x} > 8$

Activité 7 Étude de la fonction $h:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, $x\mapsto\dfrac{1}{x}$

1. Détermine l'ensemble de définition de la fonction h.
2. Justifie que pour tous nombres réels u et v de l'intervalle $]0\,;+\infty[$, si $u<v$, alors $h(u)>h(v)$.
3. Justifie que pour tous nombres réels u et v de l'intervalle $]-\infty\,;0[$, si $u<v$, alors $h(u)>h(v)$.
4. Déduis des questions précédentes le sens de variation de la fonction h sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$.
5. Dresse le tableau de variation de h.
6. On se propose de représenter la fonction h sur $[-4\,;0[\cup]0\,;4]$. On note (C_h) la représentation graphique de la fonction h.
   a) Justifie que si un point $M(x,\,y)$ appartient à (C_h), alors $x>0$ et $y>0$ ou $x<0$ et $y<0$.
   b) Déduis-en que la représentation graphique de h est la réunion de deux parties disjointes du plan.
   c) Recopie et complète à l'aide d'une calculatrice le tableau de quelques valeurs de $h(x)$. (On donnera pour chaque résultat l'arrondi d'ordre 2).

x	-4	$-2{,}5$	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2	$2{,}5$	4
$h(x)$													

   d) Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), construis la représentation graphique partielle de h correspondant au tableau de valeurs ci-dessus.

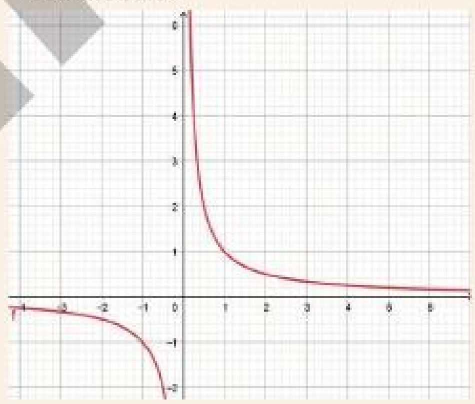
Récapitulons

Soit la fonction $h:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, $x\mapsto\dfrac{1}{x}$

- L'ensemble de définition de la fonction h est $]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$.
- La fonction h est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$.
- Son tableau de variation se présente comme suit :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h(x)$	$\searrow$		$\searrow$

- Sa représentation graphique (H) se présente comme suit :



Exercice de fixation

7 Pour chaque énoncé du tableau ci-dessous, trois informations a, b et c sont proposées, dont une seule permet d'avoir une affirmation juste.

Écris dans ton cahier le numéro de l'énoncé suivi de la lettre correspondant à la bonne information.

N°	Énoncés	Informations a	b	c
1	si $0<x<2$, alors ...	$\dfrac{1}{x}<0{,}5$	$\dfrac{1}{x}>0{,}5$	$\dfrac{1}{x}=0{,}5$
2	si $6<x$, alors ...	$\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{1}{x}>\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{6}$

Activité 8 Étude de la fonction $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x^3$

1. Détermine l'ensemble de définition de la fonction g.
2. a et b étant deux nombres réels positifs tels que : $a < b$, justifie que $a^3 < b^3$.
3. Déduis de la question précédente que si a et b sont deux nombres réels négatifs tels que : $a < b$, alors $a^3 < b^3$.
4. Soit deux nombres réels a et b tels que : $a < 0 < b$, justifie que $a^3 < b^3$.
5. Détermine en utilisant les questions 2 , 3 et 4 le sens de variation de la fonction g.
6. Dresse le tableau de variation de g.
7. On se propose de représenter la fonction g sur $[-2 ; 2]$.

a) Recopie et complète à l'aide d'une calculatrice le tableau de quelques valeurs de $g(x)$.
(On donnera pour chaque résultat l'arrondi d'ordre 1)

x	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2
$g(x)$									

b) Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), construis la représentation graphique partielle de g correspondant au tableau de valeurs ci-dessus.

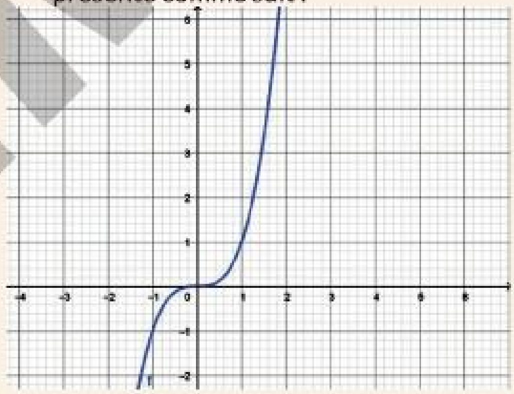
Récapitulons

Soit la fonction $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x^3$

- La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$.
- La fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- Le tableau de variation de la fonction g se présente comme suit :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$		0 ↗	

- La représentation graphique de g se présente comme suit :



Exercice de fixation

8 Pour chaque énoncé du tableau ci-dessous, trois informations a, b et c sont proposées, dont une seule permet d'avoir une affirmation juste.

Écris dans ton cahier le numéro de l'énoncé suivi de la lettre correspondant à la bonne information.

N°	Énoncés	Informations a	Informations b	Informations c
1	Si $x < 3$, alors ...	$x^3 > 27$	$x^3 < 27$	$x^3 = 27$
2	Si $-2 < x$, alors ...	$x^3 < -8$	$x^3 > -8$	$x^3 = -8$

Activité 9 Étude de la fonction $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto |ax+b| \end{array}$ où a est un nombre réel non nul

Premier cas : On suppose que a est un nombre réel strictement positif.

1. Détermine l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Justifie que f est une fonction affine par intervalles.
3. Justifie que f est strictement croissante sur $[-\frac{b}{a}\ ; +\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty\ ; -\frac{b}{a}[$.
4. Dresse le tableau de variation de la fonction f.
5. Construis dans le plan muni d'un repère orthonormé la courbe représentative de la fonction f dans le cas où $a = 2$ et $b = -3$.

Deuxième cas : On suppose que a est un nombre réel strictement négatif.

1. Détermine l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Justifie que f est une fonction affine par intervalles.
3. Justifie que f est strictement croissante sur $[-\frac{b}{a}\ ; +\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty\ ; -\frac{b}{a}\ [$.
4. Dresse le tableau de variation de f.

   Construis dans le plan muni d'un repère orthonormé la courbe représentative de la fonction f dans le cas où $a = -3$ et $b = 2$.

Récapitulons

Soit la fonction $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto |ax+b| \end{array}$

- La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.
- La fonction f est strictement croissante sur $[-\frac{b}{a}\ ; +\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty\ ; -\frac{b}{a}[$.
- La courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère (O, I, J) est la réunion de deux demi-droites de même origine, le point A $(-\frac{b}{a}\ ; 0)$.

Exercice de fixation

9 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = |3x - 6|$.

1. Justifie que f est une fonction affine par intervalles.
2. Représente graphiquement la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O ; I ; J).

Activité 10 Étude de la fonction $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto ax^2 \end{array}$ où a est un nombre réel non nul

Premier cas : On suppose que a est un nombre réel strictement positif.

1. Détermine l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Justifie que f est strictement croissante sur $[0\ ; +\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0[$.
3. Dresse le tableau de variation de f.
4. Construis dans le plan muni d'un repère orthonormé la courbe représentative de la fonction f dans le cas où $a = 2$.

Deuxième cas : On suppose que a est un nombre réel strictement négatif.

1. Détermine l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Justifie que f est strictement décroissante sur $[0\ ; +\infty[$ et strictement croissante sur $]-\infty\ ;\ 0\ [$
3. Dresse le tableau de variation de f.
4. Construis dans le plan muni d'un repère orthonormé la courbe représentative de la fonction f dans le cas où $a = -3$.

Récapitulons

- Si a est un réel strictement positif, la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = ax^2$ est strictement croissante sur $[0\ ; +\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty\ ; 0\ [$.
- Si a est un réel strictement négatif, la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = ax^2$ est strictement décroissante sur $[0\ ; +\infty[$ et strictement croissante sur $]-\infty\ ; 0\ [$.

Exercice de fixation

10 Recopie le numéro de chacune des propositions dans le tableau ci-dessous, suivi de vrai lorsque la proposition est vraie ou de faux lorsqu'elle est fausse.

N°	Propositions
1	La fonction définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x) = 3x^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2	La fonction définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x) = -4x^2$ strictement décroissante sur $[0 ; 9]$.
3	La fonction définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x) = -\frac{5}{3}x^2$ strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.
4	La fonction définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x) = 7x^2$ est strictement croissante sur $[-7 ; -1]$.
5	La fonction définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x) = -x^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Activité 11 Étude de la fonction $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{a}{x}$ où a est un nombre réel non nul

On désigne par (C_h) la courbe représentative de h dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

Premier cas : On suppose que a est un nombre réel strictement positif.

1. Détermine l'ensemble de définition de la fonction h.
2. Justifie que pour tous nombres réels u et v de l'intervalle $]0 ; +\infty[$, si $u < v$, alors $h(u) > h(v)$.
3. Justifie que pour tous nombres réels u et v de l'intervalle $]-\infty ; 0[$, si $u < v$, alors $h(u) > h(v)$.
4. Déduis des questions précédentes le sens de variation de la fonction h sur $]-\infty ; 0[$ et sur $]0 ; +\infty[$.
5. Dresse le tableau de variation de h.
6. Justifie que si un point $M(x, y)$ appartient à (C_h), alors $x > 0$ et $y > 0$ ou $x < 0$ et $y < 0$.
7. Représente (C_h) dans le cas où $a = 3$.

Deuxième cas : On suppose que a est un nombre réel strictement négatif.

1. Détermine l'ensemble de définition de la fonction h.
2. Justifie que pour tous nombres réels u et v de l'intervalle $]0 ; +\infty[$, si $u < v$, alors $h(u) < h(v)$.
3. Justifie que pour tous nombres réels u et v de l'intervalle $]-\infty ; 0[$, si $u < v$, alors $h(u) < h(v)$.
4. Déduis des questions précédentes le sens de variation de la fonction h sur $]-\infty ; 0[$ et sur $]0 ; +\infty[$.
5. Dresse le tableau de variation de h.
6. Justifie que si un point $M(x, y)$ appartient à (C_h), alors $x > 0$ et $y < 0$ ou $x < 0$ et $y > 0$.
7. Représente (C_h) dans le cas où $a = -2$.

Récapitulons

- Si a est un réel strictement positif, la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{a}{x}$ est strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty ; 0[$.
- Si a est un réel strictement négatif, la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{a}{x}$ est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$ et strictement croissante sur $]-\infty ; 0[$.

Exercice de fixation

11 Recopie le numéro de chacune des propositions dans le tableau ci-dessous, suivi de vrai lorsque la proposition est vraie ou de faux lorsqu'elle est fausse.

N°	Propositions
1	La fonction définie sur $\mathbb{R}^*$, par : $f(x) = -\frac{5}{x}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
2	La fonction définie sur $\mathbb{R}^*$, par : $f(x) = \frac{7}{x}$ est strictement décroissante sur $[1 ; 9]$.
3	La fonction définie sur $\mathbb{R}^*$, par : $f(x) = -\frac{9}{x}$ est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.

1. Fonction affine par intervalles

a) Définition

Une fonction est dite affine par intervalles si elle est définie sur un ou plusieurs intervalles disjoints par des fonctions affines.

Exemple

La fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
Si $x \in [-3 ; -1[$, alors $f(x) = -2x + 3$;
Si $x \in [-1 ; 3[$, alors $f(x) = 2$;
Si $x \in [3 ; +\infty[$, alors $f(x) = x - 2$
est une fonction affine par intervalles.

Remarque

La représentation graphique de f est la réunion de deux segments et d'une demi-droite.

Pour s'entraîner : Exercices 1 ; 2 ; 3 ; 4

b) Fonction partie entière

Propriété
Quel que soit le nombre réel x, il existe un nombre entier relatif z et un seul tel que : $z \leq x < z+1$

Définition
Le nombre entier relatif z tel que $z \leq x < z + 1$ est appelé la partie entière de x.

Notation
La partie entière de x est notée E(x).

Exemple

$7 \leq 7,8 < 8$ donc E(7,8) = 7.
$-5 \leq -4,02 < -4$ donc E (−4,02) = −5.
L'application $\begin{array}{l} E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto E(x) \end{array}$ est appelée la fonction partie entière.

Remarque

La partie entière d'un nombre réel x est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x.

Pour s'entraîner : Exercices 5 ; 6 ; 7

2. Étude de quelques fonctions de référence

a) La fonction $x \mapsto |x|$

Définition
si $x < 0$, $|x| = -x$;
si $x > 0$, $|x| = x$.

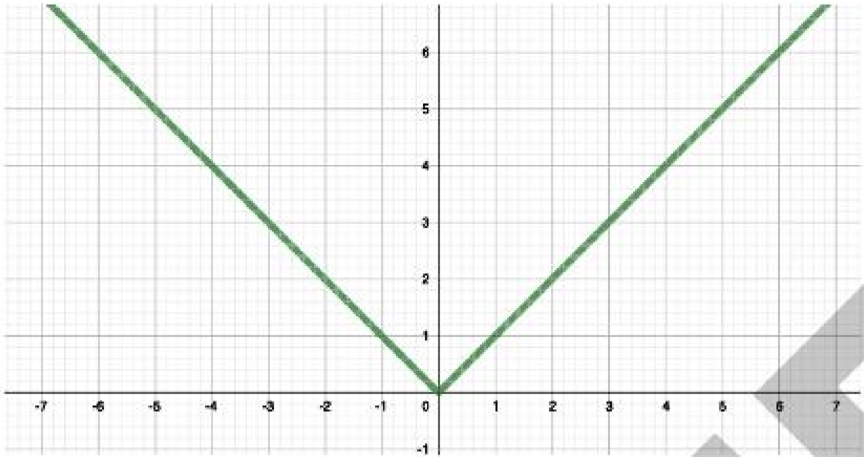
Ensemble de définition
Son ensemble de définition est $\mathbb{R}$.

Sens de variation
Elle est croissante sur $[0 ; +\infty[$ et décroissante sur $]-\infty ; 0[$.

Le tableau de variation

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	0	↗

➲ Représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé



Pour s'entraîner : Exercices 8 ; 9

b) La fonction $x \mapsto x^2$

➲ Ensemble de définition

L'ensemble de définition est $\mathbb{R}$.

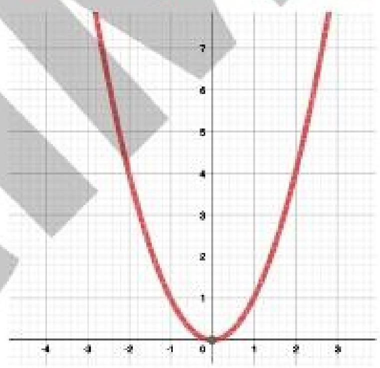
➲ Sens de variation

Elle est croissante sur $[0\,;+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty\,;0]$.

➲ Le tableau de variation

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

➲ Représentation graphique



Pour s'entraîner : Exercices 11 ; 12

c) La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$

➲ Ensemble de définition

Son ensemble de définition est $]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$.

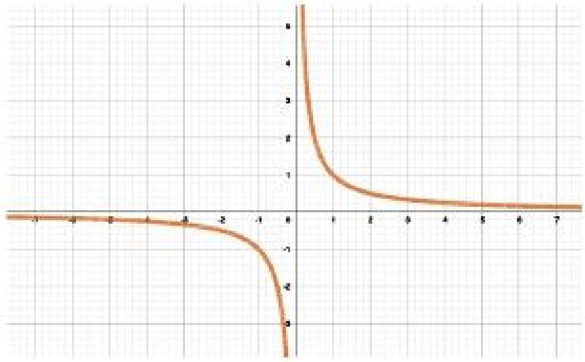
➲ Sens de variation

Elle est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0[$ et strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$.

➲ Le tableau de variation

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$		$\searrow$	

➲ Représentation graphique



Pour s'entraîner : Exercices 13 ; 14

d) La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$

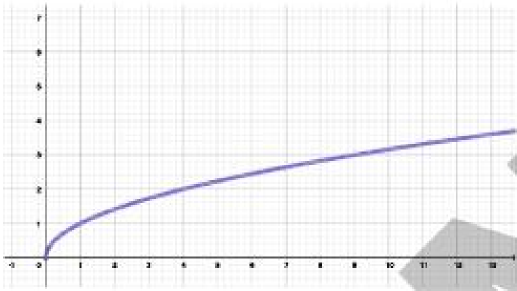
Ensemble de définition

Son ensemble de définition est $[0\,;+\infty[$.

Sens de variation

Elle est croissante sur $[0\,;+\infty[$.

Représentation graphique



Pour s'entraîner : Exercices 15 ; 16

e) La fonction $x \mapsto x^3$

Ensemble de définition

Son ensemble de définition est $\mathbb{R}$.

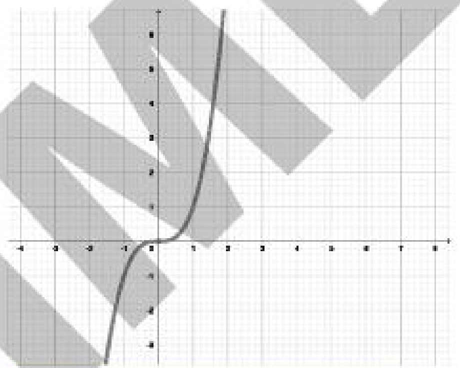
Sens de variation

Elle est croissante sur $\mathbb{R}$.

Le tableau de variation

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↗		

Représentation graphique



Pour s'entraîner : Exercices 17 ; 18

f) La fonction $x \mapsto |ax + b|$, $a \neq 0$.

Ensemble de définition

Son ensemble de définition est $\mathbb{R}$.

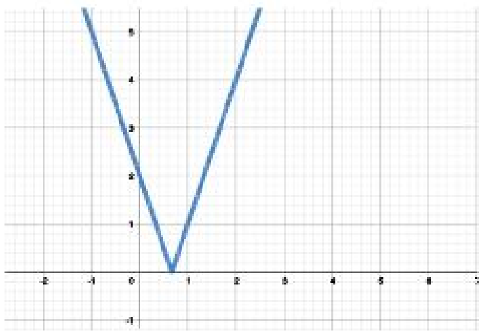
Sens de variation

Elle est décroissante sur $]-\infty\,;-\frac{b}{a}[$ et croissante sur $[-\frac{b}{a}\,;+\infty[$.

Le tableau de variation

x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
$f(x)$	↘	0	↗

Représentation graphique pour $a = -3$ et $b = 2$

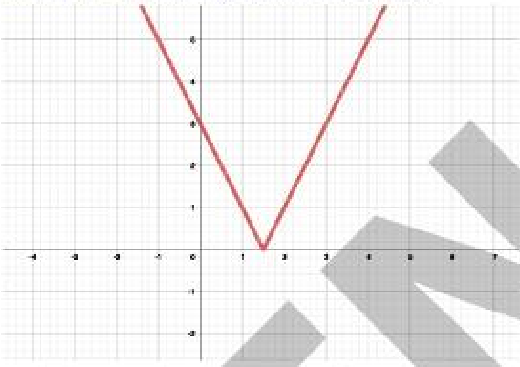


Exemple d'application

On veut étudier la fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = |-2x + 3|$.
Elle est définie sur $\mathbb{R}$.
Elle est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.
Le tableau de variation de f est :

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

La représentation graphique de f est :



Pour s'entraîner : Exercices 19 ; 20 ; 21

g) La fonction $x \mapsto ax^2$, $(a \neq 0)$

Ensemble de définition

Son ensemble de définition est $\mathbb{R}$.

Sens de variation

$a < 0$	$a > 0$
Elle est croissante sur $]-\infty; 0[$ et décroissante sur $[0\,;+\infty[$.	Elle est décroissante sur $]-\infty; 0[$ et croissante sur $[0\,;+\infty[$.

Le tableau de variation

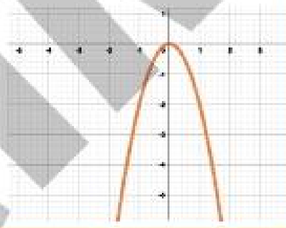
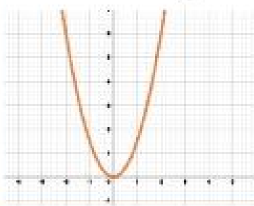
$a < 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$

$a > 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

Représentation graphique

$a < 0$	$a > 0$
Pour $a = -2$ 	Pour $a = \frac{3}{2}$ 

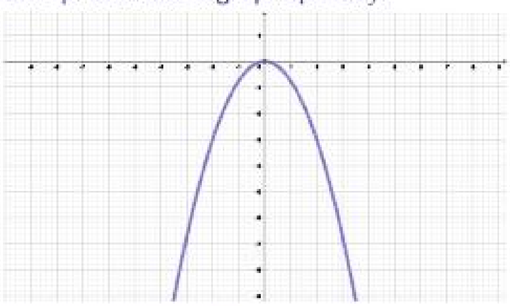
Exemple d'application

On veut étudier la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{-3}{4}x^2$.
Le sens de variations de f.
f est croissante sur $]-\infty\,;0]$ et décroissante sur $[0\,;+\infty[$.

Le tableau de variation de f.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$

La représentation graphique de f.



Pour s'entraîner : Exercices 12 ; 22 ; 23

h) 8La fonction $x \mapsto \dfrac{a}{x}$, $(a \neq 0)$

Ensemble de définition

Elle est définie sur $]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$.

Sens de variation

$a < 0$	$a > 0$
Elle est strictement croissante sur$]-\infty\,;0[$ et strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.	Elle est décroissante sur $]-\infty\,;0[$ et croissante sur $[\,0\,;+\infty[$.

Le tableau de variation

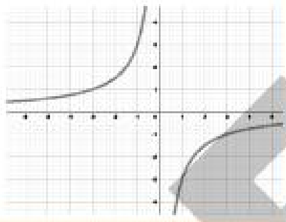
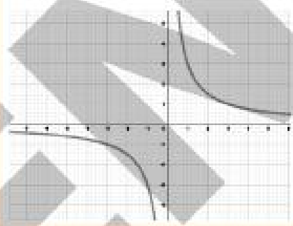
$a < 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	‖	$\nearrow$

$a > 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	‖	$\searrow$

Représentation graphique

$a < 0$	$a > 0$
Pour $a = -3$	Pour $a = 3$
	

Exemple d'application

On veut étudier la fonction f définie de $\mathbb{R}^*$ sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{-3}{4x}$.

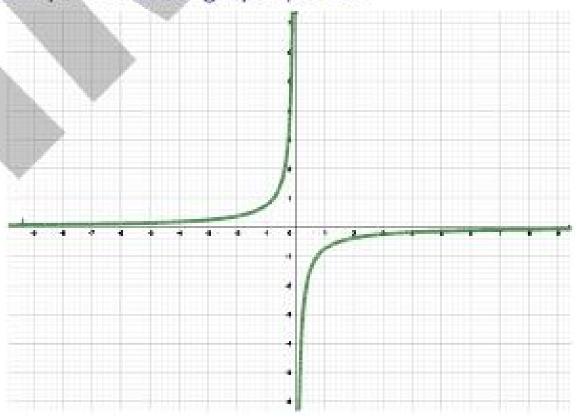
Elle est définie sur $]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$.

Elle est strictement croissante sur$]-\infty\,;0[$ et strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

Son tableau de variation est ci-dessous :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	‖	$\nearrow$

Sa représentation graphique est :



Pour s'entraîner : Exercices 14 ; 24 ; 25

QUESTION 1

Comment représenter une fonction affine par intervalles ?

Méthode

- On détermine les images des bornes des intervalles sur lesquelles la fonction est définie sur un intervalle borné.
- Lorsque l'intervalle est de la forme $]-\infty, a]$ ou $[a,+\infty[$, on calcule $f(a)$ et $f(b)$ où b est un nombre réel de l'intervalle $]-\infty, a]$ ou $[a,+\infty[$.
- On place les points obtenus.
- Puis on représente la fonction sur chaque intervalle.
- Ainsi la représentation graphique de f est une réunion de demi-droites ou de segments deux à, deux disjoints.

Exercice

Représente dans le plan muni d'un repère, la fonction f définie par :

si $x \in]-\infty, 1]$, $f(x) = -x + 1$

si $x \in]1, 3]$, $f(x) = x - 1$

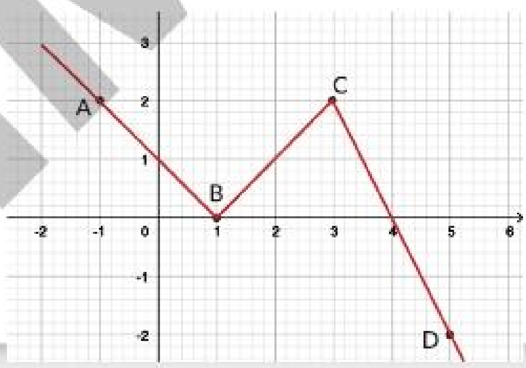
si $x \in]3, +\infty[$, $f(x) = -2x + 8$

Solution commentée

- On prend un nombre réel de l'intervalle $]-\infty, 1]$, par exemple -1, on calcule $f(-1) = 2$. On obtient le $A(-1 ; 2)$.
- On calcule $f(1)$, 1 étant l'extrémité de l'intervalle $]-\infty, 1]$ et on obtient le point $B(1 ; 0)$.
- On calcule $f(3)$, 3 est l'une des extrémités de l'intervalle $]1 ; 3]$, on obtient le point $C(3 ; 2)$.
- On prend un nombre réel dans l'intervalle $]3,+\infty[$, par exemple 5. On calcule $f(5) = -2$.

On obtient le point $D(5 ; -2)$.

- La représentation graphique de f est la réunion de la demi droite [BA), le segment [BC] et la demi-droite [CD).



Exercice non corrigé 1

Représente graphiquement dans le plan muni d'un repère (O, I, J), la fonction f définie par :

si $x \in]-\infty, -3]$, $f(x) = x - 1$.

si $x \in]-3, 0]$, $f(x) = -2x + 2$.

si $x \in]0, +\infty[$, $f(x) = 2$.

Exercice non corrigé 2

On considère les fonctions f, g et h toutes de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies respectivement par :

$$\begin{cases} f(x) = 3x - 2, si\ x \leq 4 \\ f(x) = 1 - x, si\ x > 4 \end{cases} ; \quad \begin{cases} g(x) = x^2 + 3,\ si\ x \leq 0 \\ g(x) = 5x + 7,\ si\ x > 0 \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} h(x) = 2020,\ si\ x \leq -2 \\ h(x) = -9x,\ si\ x > -2 \end{cases} .$$

Représente graphiquement chacune de ces fonctions dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

QUESTION 2

Comment écrire la fonction $x \mapsto |ax+b|$ avec $a \neq 0$ sous la forme d'une fonction affine par intervalles ?

Méthode

On étudie le signe de $ax+b$ suivant les valeurs de x.

$a < 0$	$a > 0$
Si $x \in]-\infty, \frac{-b}{a}]$, $ax+b \geq 0$, donc $f(x) = ax+b$. Si $x \in [\frac{-b}{a}, +\infty[$, $ax+b \leq 0$, donc $f(x) = -ax-b$.	Si $x \in]-\infty, \frac{-b}{a}]$, $ax+b \leq 0$, donc $f(x) = -ax-b$ Si $x \in [\frac{-b}{a}, +\infty[$, $ax+b \geq 0$, donc $f(x) = ax+b$

Exercice

Justifie que la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = |-4x+2|$ est une fonction affine par intervalles.

Solution commentée

On étudie le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x

- Si $x \in]-\infty ; \frac{1}{2}]$, $-4x+2 \geq 0$;
- Si $x \in [\frac{1}{2} ; +\infty[$, $-4x+2 \leq 0$,

donc si $x \in]-\infty ; \frac{1}{2}]$, alors $f(x) = -4x+2$,

si $x \in [\frac{1}{2} ; +\infty[$, alors $f(x) = 4x-2$.

Exercice non corrigé 1

Justifie que la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = |3x-6|$ est une fonction affine par intervalles.

Exercice non corrigé 2

Justifie que la fonction g définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

$g(x) = |-5x+3|$ est une fonction affine par intervalles.

Exercices de fixation

Fonctions affines par intervalles

1 Chaque lettre a), b), c) et d) désigne une fonction.

Dans chacun de ces cas, recopie la lettre suivie de vrai si la fonction est affine par intervalles ou de faux si la fonction n'est pas affine par intervalles.

a) La fonction f définie par : Si $x < -3$, alors $f(x) = x^3$ Si $x \geq -3$, alors $f(x) = -2x$	**b)** La fonction f définie par : Si $x \in [-2\,;-1[$, alors $f(x) = -\sqrt{2}x - 1$ Si $x \geq -1$, alors $f(x) = -x + \sqrt{3}$
c) La fonction f définie par : Si $x \in [-4\,;0[$, alors $f(x) = 2$ Si $x \geq 0$, alors $f(x) = 2x+1$	**d)** La fonction f définie par : Si $x \in [-2\,;0[$, alors $f(x) = \frac{3}{x}$ Si $x \in [0\,;1[$, alors $f(x) = -3x + 1$

2 On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

si $x \in]-\infty\,;2]$, $f(x) = x - 2$

si $x \in]2\,;6]$, $f(x) = -2x + 3$

si $x \in]6\,;+\infty[$, $f(x) = 2$

Détermine $f(-5)$, $f(3)$ et $f(7)$.

3 On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

si $x \in [-5\,;-3]$, $f(x) = 2x - 1$

si $x \in]-3\,;5]$, $f(x) = x - 3$

si $x \in]5\,;10[$, $f(x) = 3x - 5$

Calcule $f(-2)$, $f(2{,}5)$, $f(5)$ et $f(8)$.

4 On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

si $x \in]-\infty\,;-2]$, $f(x) = x + 2$

si $x \in]-2\,;6]$, $f(x) = -x + 2$

si $x \in]6\,;+\infty[$, $f(x) = 3$

1. Détermine l'ensemble définition de la fonction f.
2. Représente la fonction f sur son ensemble de définition.

La fonction partie entière

5 Recopie le numéro de chacune des affirmations ci-dessous suivi de vrai lorsque l'affirmation est vraie ou de faux lorsqu'elle est fausse.

1. La fonction $x \mapsto E(x)$ est constante sur $\mathbb{R}$
2. La fonction $x \mapsto E(x)$ est constante sur des intervalles dont les extrémités sont des entiers relatifs consécutifs.
3. La fonction $x \mapsto E(x)$ n'est pas une fonction affine par intervalles.

6 Recopie le numéro de chacune des affirmations dans le tableau ci-dessous suivi de vrai lorsque l'affirmation est vraie ou de faux lorsqu'elle est fausse.

N°	Affirmations
1	$E(-0{,}75) = 0$.
2	$E(3) = 3$.
3	$E(-5) = 5$.
4	$E(-3{,}14) = -3$.
5	$E(0) = 0$.

7

1. Donne l'expression de la fonction $x \mapsto E(x)$ sur chacun de intervalles suivants : $[-5\,;-4[$; $[-4\,;-3[$, $[-3\,;-2[$; $[-2\,;-1[$; $[-1\,;0[$.
2. Représente la fonction $x \mapsto E(x)$ sur l'intervalle $[-5\,;0[$.

La fonction $x \mapsto |x|$

8 On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$.

Recopie le numéro de chacune des propositions ci-dessous suivi de vrai lorsque la proposition est vraie ou de faux lorsqu'elle est fausse.

1. La fonction f est une fonction affine par intervalles.
2. La fonction f est croissante sur $]-5\,;-2]$.
3. La fonction f est croissante sur $[-3\,;4]$.
4. La fonction f est croissante sur $[3\,;7]$.
5. La fonction f est décroissante sur $[-10\,;-1]$.

9 Pour chaque proposition du tableau ci-dessous, deux informations A et B sont proposées dont une seule permet d'avoir la proposition exacte.

Écris dans ton cahier le numéro de chaque proposition suivi de la lettre correspondant à la bonne information.

N°	Propositions	Informations	
		A	B
1	Si $x > 0$, alors …	$\lvert x\rvert = x$	$\lvert x\rvert = -x$
2	Si $0 > x$, alors…	$\lvert x\rvert = x$	$\lvert x\rvert = -x$
3	$\lvert\pi - 3\rvert$ est égal à …	$\pi - 3$	$3 - \pi$
4	$\lvert 2\sqrt{2} - 3\rvert$ est égal à ….	$2\sqrt{2} - 3$	$3 - 2\sqrt{2}$

10 Pour chaque proposition du tableau ci-après, trois informations A, B et C sont proposées dont une seule permet d'avoir la proposition exacte.
Écris dans ton cahier le numéro de la proposition suivi de la lettre correspondant à la bonne information.

N°	Propositions	Informations		
		A	B	C
1	Si $-4 > x$, alors	$\lvert x\rvert < 4$	$\lvert x\rvert = 4$	$\lvert x\rvert > 4$
2	Si $8 < x$, alors ...	$\lvert x\rvert > 8$	$\lvert x\rvert < 8$	$\lvert x\rvert = 8$

La fonction : $x \mapsto ax^2, (a \neq 0)$

11 Pour chaque proposition du tableau ci-dessous, trois informations A, B et C sont proposées dont une seule permet d'avoir la proposition exacte.
Écris dans ton cahier le numéro de la proposition suivi de la lettre correspondant à la bonne information.

N°	Propositions	Informations		
		A	B	C
1	$-5 > x$	$x^2 < 25$	$x^2 = 25$	$x^2 > 25$
2	$7 < x$	$x^2 < 49$	$x^2 = 49$	$x^2 > 49$

12 Recopie le numéro de chacune des propositions suivi de vrai lorsque la proposition est vraie ou de faux lorsque la proposition est fausse.

1. La fonction $f : x \mapsto x^2$ est strictement décroissante sur$]-\infty\,;0]$.
2. La fonction $f : x \mapsto x^2$ est strictement croissante sur $[-2\,;6]$.
3. La fonction $f : x \mapsto -3x^2$ est strictement décroissante sur$]-\infty\,;0]$.
4. La fonction $f : x \mapsto -3x^2$ est strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$.
5. La fonction $f : x \mapsto \sqrt{3}\,x^2$ est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

La fonction : $x \mapsto \frac{1}{a} (a \neq 0)$

13 Pour chaque proposition du tableau ci-dessous, trois informations A, B et C sont proposées dont une seule permet d'avoir la proposition exacte.

Écris dans ton cahier le numéro de chaque proposition suivi de la lettre correspondant à la bonne information.

N°	Propositions	Informations		
		A	B	C
1	Si $-2 < x < 0$, alors...	$\frac{1}{x} < 0{,}5$	$\frac{1}{x} > 0.5$	$\frac{1}{x} = 0.5$
2	Si $6 < x$, alors ...	$\frac{1}{x} < \frac{1}{6}$	$\frac{1}{x} > \frac{1}{6}$	$\frac{1}{x} = \frac{1}{6}$

14 Recopie le numéro de chacune des affirmations ci-dessous suivi de vrai lorsque l'affirmation est vraie ou de faux lorsqu'elle est fausse.

1. La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est strictement décroissante sur$]-\infty\,;0[$.
2. La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est strictement croissante sur $[-5\,;-1]$.
3. La fonction $f : x \mapsto \frac{-\pi}{x}$ est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0[$.
4. La fonction $f : x \mapsto \frac{-\sqrt{3}}{x}$ est strictement décroissante sur $]0\,;+\infty[$.
5. La fonction $f : x \mapsto \frac{0{,}25}{x}$ est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

La fonction : $x \to \sqrt{x}$

15 Pour chaque affirmation du tableau ci-dessous, trois réponses A, B et C sont proposées dont une seule permet d'avoir l'affirmation exacte.

Écris dans ton cahier le numéro de l'affirmation suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

N°	Affirmations	Réponses		
		A	B	C
1	$0 < x < 4$	$\sqrt{x} < 2$	$\sqrt{x} > 2$	$\sqrt{x} = 2$
2	$64 < x$	$\sqrt{x} < 8$	$\sqrt{x} = 8$	$\sqrt{x} > 8$

16 a et b sont deux nombres réels strictement positifs tels que : $a < b$.

1. Compare $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$.
2. Justifie ta réponse.

La fonction : $x \mapsto x^3$

17 Pour chaque proposition du tableau ci-dessous, trois informations sont proposées dont une seule permet d'avoir la proposition vraie. Écris le numéro suivi de la lettre de la bonne information.

N°	Propositions	Informations		
		A	B	C
1	$x < 3$	$x^3 < 27$	$x^3 > 27$	$x^3 = 27$
2	$x < -2$	$x^3 < -8$	$x^3 = -8$	$x^3 > -8$

18 a et b sont deux nombres réels strictement négatifs tels que : $a < b$.

1. Compare a^3 et b^3.
2. Justifie ta réponse.

La fonction : $x \mapsto |ax + b|$ avec $a \neq 0$

19 On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = |x + 3|$.

Recopie le numéro de chacune des affirmations dans le tableau ci-dessous suivi de vrai lorsque l'affirmation est vraie ou de faux lorsqu'elle est fausse.

N°	Affirmations
1	f est une fonction affine par intervalles.
2	Si $x \in]-\infty ; -3]$, $f(x) = x + 3$.
3	f est strictement croissante sur $[-3 ; +\infty[$.

20 On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = |-2x + 5|$.

Recopie le numéro de chacune des affirmations dans le tableau ci-dessous suivi de vrai lorsque l'affirmation est vraie ou de faux lorsqu'elle est fausse.

N°	Affirmations
1	f est strictement décroissante sur $]-\infty ; \frac{5}{2}]$.
2	Si $x \in]-\infty ; \frac{5}{2}]$, $f(x) = -2x + 5$.
3	Si $x \in [\frac{5}{2} ; +\infty[$, $f(x) = 2x - 5$.
4	f est strictement croissante sur $[\frac{5}{2} ; +\infty[$.

21 Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = |3x - 6|$.
Justifie que g est une fonction affine par intervalles.

Exercices de renforcement/approfondissement

22 Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{1}{4}x^2$.

1. Étudie le sens de variation de la fonction f.
2. Dresse le tableau de variation de la fonction f.
3. Représente graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-3 ; 3]$ dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

23 Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$.

1. Étudie le sens de variation de la fonction f.
2. Dresse le tableau de variation de la fonction f.
3. Représente graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-3 ; 3]$ dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

24 Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{3}{x}$.

1. Étudie le sens de variation de la fonction f.
2. Dresse le tableau de variation de la fonction f.
3. Représente graphiquement dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), la fonction f sur l'intervalle $[-4 ; 0[\cup]0 ; 6]$.

25 Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = -\frac{4}{x}$.

1. Étudie le sens de variation de la fonction g.
2. Dresse le tableau de variation de la fonction g.
3. Représente graphiquement dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) la fonction g sur l'intervalle $[-4 ; 0[\cup]0 ; 6]$.

26 Soit g la fonction définie par :

Si $x \in [-2 ; -1[$, $g(x) = 1 - x$;

Si $x \in [-1 ; 4]$, $g(x) = x + 3$.

1. Détermine l'ensemble de définition de la fonction g.
2. Étudie les variations de g et dresse son tableau de variation de la fonction g.
3. Représente graphiquement la fonction g dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

27 Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

Si $x \in]-\infty ; -1[$, alors $f(x) = -2x + 3$;
Si $x \in [-1 ; 3[$, alors $f(x) = -x$;
Si $x \in [3 ; +\infty[$, alors $f(x) = x + 3$.

1. Détermine l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Étudie le sens de variation de la fonction f.
3. Dresse le tableau de variation de f.
4. Représente graphiquement la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

28 Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = |-x + 6|$.

1. Justifie que g est une fonction affine par intervalles
2. Étudie les variations de g et dresse son tableau de variation
3. Représente graphiquement la fonction g dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

29 Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
$g(x) = 2x - |1 - 5x|$.

1. Détermine l'ensemble de définition de la fonction g.
2. Justifie que g est une fonction affine par intervalles.
3. Représente graphiquement la fonction g dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

30 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2$.
(C) est la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Soit A et B les points de (C) d'abscisses respectives 1 et 2.

1. Détermine le coefficient directeur de la droite (AB).
2. Soit M et N deux points d'abscisses respectives u et v telles que : $u + v = 3$. Démontre que les droites (MN) et (AB) sont parallèles.

31 On donne la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto 1 - x^2$.

1. Détermine l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Justifie que f est croissante sur $]-\infty\,;0[$ et décroissante sur $[0\,;+\infty[$.
3. Dresse un tableau de quelques valeurs de f.
4. Justifie que 1 est le maximum de f sur $\mathbb{R}$.
5. Détermine le réel α pour lequel ce maximum est atteint.
6. Représente graphiquement sur $[-4\,;4]$ la fonction f dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

32 Détermine l'ensemble des nombres réels x tels que $E(3x) = 4$.

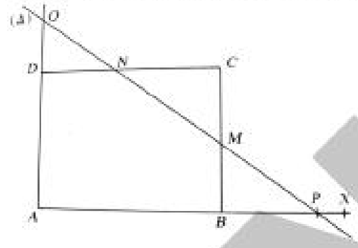
33

1. Justifie que quel que soit le nombre réel x,
$E(x+1) = E(x) + 1$.
2. Justifie que quel que soit le nombre réel x, et l'entier relatif k, $E(x + k) = E(x) + k$.

34

1. Justifie que quel que soit le couple $(x\,;y)$ de nombres réels, $E(x) + E(y) \leq E(x + y)$.
2. Déduis-en que : $2\,E(x) + 1 \leq E(x) + E(x + 1)$.

35 Considérons le rectangle ABCD ci-contre.



On pose : AB = 4 ; AD = 3.
Soit P le point de la demi-droite [BX) tel que : BP = 2.
Une droite (Δ) passant par P coupe [BC] en M, [CD] en N et AD en Q.
On pose : BM = x.

1. Exprime AQ en fonction de x.
2. Détermine un encadrement de x pour Q$\in$ [AD].
3. Exprime CN en fonction de x.
4. Détermine la valeur de x pour que N soit le milieu du segment [CD].
5. Exprime DQ en fonction de x.
6. Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x)$ = DQ.
   a) Étudie les variations de f.
   b) Construis la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère (O, I, J).
7. Détermine la valeur de x pour laquelle la droite (Δ) est parallèle à la droite (BD).

Situations complexes

36 Une bibliothèque privée propose à ses clients trois formules de location :

- Formule 1 : 2000 F d'abonnement annuel et 150 F par livre loué ;
- Formule 2 : 1000 F d'abonnement annuel et 200 F par livre loué ;
- Formule 3 : pas d'abonnement et 300 F par livre loué.

Nanou, élève de 2[de] C, désire s'inscrire dans cette bibliothèque mais ne sait pas quelle est la formule la plus avantageuse. Il te sollicite.

Détermine, en fonction du nombre de livres à louer, la formule de location la plus avantageuse pour Nanou.

37 M[lle] Moya, élève en classe de seconde veut choisir un abonnement pour son téléphone portable. Les formules suivantes sont proposées :

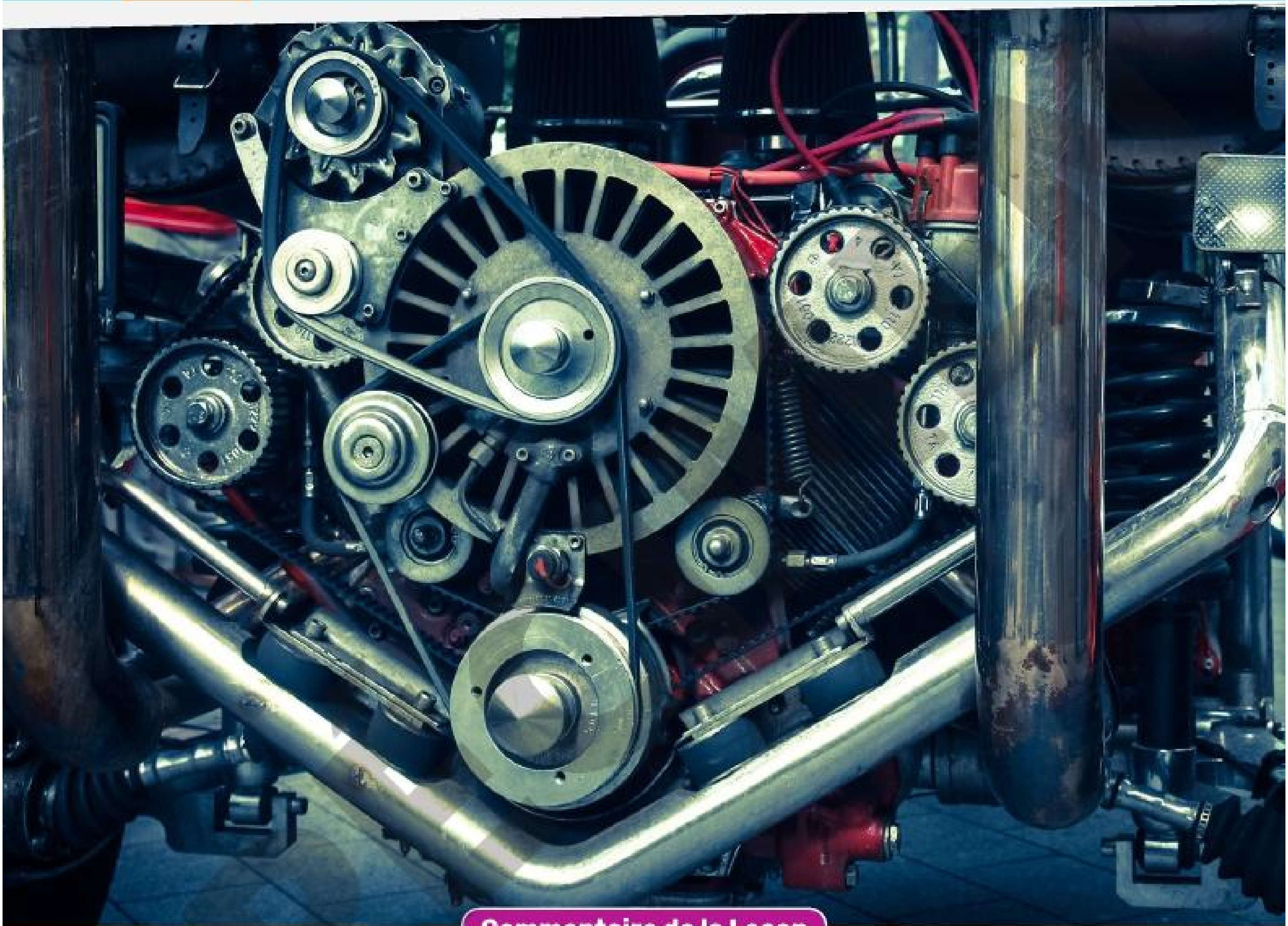
	Forfait pour deux heures de connections	Supplément par minute de dépassement
Formule 1	300 F CFA	25F CFA
Formule 2	150 F CFA	75 F CFA

Moya sait qu'elle va dépasser les deux heures de connections, et voudrait savoir quelle est la formule la plus intéressante en fonction du nombre x de minutes de dépassement.

Hésitante, elle se confie à toi.

Détermine la formule qu'elle devra choisir. Justifie ta réponse.

14 ROTATIONS



Commentaire de la Leçon

La notion de rotation est nouvelle en classe de seconde C. Elle vient enrichir le champ des isométries planes étudiées au premier cycle. L'enseignant pourra l'aborder à partir de prérequis portant sur la construction d'un angle orienté de mesure donnée. La notion de rotation sera approfondie en classe de première par la composée de deux rotations.

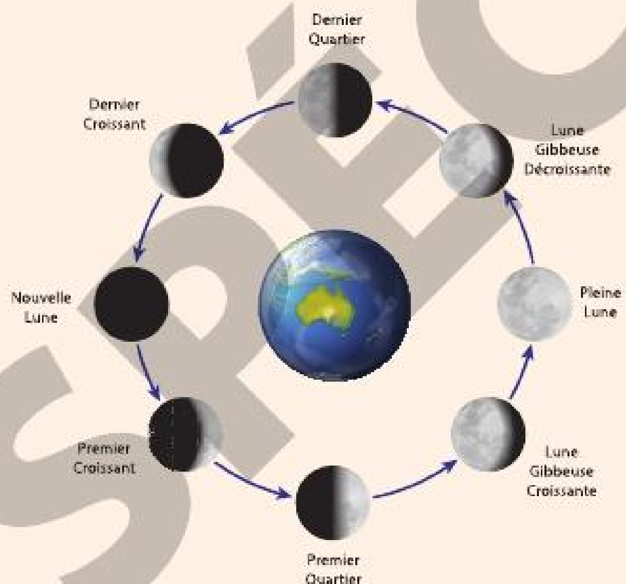
Une rotation est une transformation du plan qui, à tout point, fait correspondre un point, en «tournant» autour d'un point central, comme la roue autour de son essieu.

Elle découle de l'utilisation de la roue qui ne fut utilisée qu'à partir du quatrième ou cinquième millénaire avant notre ère, il va donc de 6 à 7 mille ans..). C'est l'invention de l'essieu qui a permis d'utiliser la roue pour le transport, pour la construction de machines de plus en plus complexes.

Habiletés et Contenus

- **Connaître** la définition d'une rotation,la propriété relative aux points invariants par une rotation ; la propriété fondamentale de la rotation ; les propriétés relatives aux images de figures simples par une rotation ; les propriétés relatives à la conservation de l'alignement ; de l'orthogonalité, du milieu, et des angles orientés par une rotation ; les propriétés relatives à la caractérisation d'une rotation.
- **Construire** l'image d'un point par une rotation en utilisant la définition ; l'image d'une droite, d'un segment ; d'une demi-droite, d'un cercle par une rotation.
- **Trouver** l'image d'un point par une rotation.
- **Démontrer** que deux droites sont perpendiculaires en utilisant une rotation, une égalité angulaire en utilisant une rotation, qu'un point est le milieu d'un segment en utilisant une rotation.
- **Traiter une situation** faisant appel aux rotations.

Situation d'Apprentissage



À l'occasion d'un cours de géographie, votre professeur vous propose d'analyser la figure ci-contre, indiquant les phases de la lune autour de la terre.
On estime que la distance entre la lune et la terre est d'environ 384 000 kilomètres.
Curieux, les élèves de ta classe décident d'expliquer géométriquement le passage de la phase « lune Gibbeuse croissant » à la phase «pleine lune », de la phase « premier quartier » à la phase « dernier quartier ».

Activité 1 Définition

1. Place un point O sur ton cahier.
2. Place un autre point M sur ton cahier.

3. a) Construis un point M' du plan tel que : OM = OM' et $Mes(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}}) = \frac{\pi}{2}$. Donne le nombre de points que tu peux construire.
4. Supposons que M est égal à O. Conjecture la position du point M'.
5. A partir de ce qui précède, justifie qu'il existe une application du plan dans le plan qui laisse le point O invariant et qui applique M sur M'.

Récapitulons

Etant donné un point O, on considère l'application du plan dans lui-même définie par :

- Si M est distinct de O, alors l'image du point M est le point M' tel que : OM = OM' et $Mes(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}}) = \frac{\pi}{2}$;
- Si M = O, alors M'= O.

Cette application est appelée la rotation de centre O et d'angle orienté $\frac{\pi}{2}$. Le point M' est appelé l'image du point M par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

On note : M' = r(M) ou M' = $r_{(O\,;\,\frac{\pi}{2})}$(M).

- Par définition, le centre O d'une rotation d'angle non nul est le seul point invariant par cette rotation.

Exercices de fixation

1 EFGH est un carré de sens direct et de centre K.

Recopie dans ton cahier le numéro de l'affirmation suivi de V si l'affirmation est vraie ou de F si l'affirmation est fausse.

N°	Affirmations
1	H est l'image de G par la rotation de centre K et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
2	E est l'image de F par la rotation de centre K et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
3	G est l'image de F par la rotation de centre K et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
4	E est l'image de F par la rotation de centre K et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
5	F est l'image de H par la rotation de centre K et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

2 Les points A, B et O sont trois points distincts du plan.

r est la rotation de centre O, d'angle $\frac{\pi}{4}$ qui applique le point A sur le point B.

Pour chacune des lignes 1 et 2 du tableau, trois affirmations E, F et G te sont proposées, dont une seule est vraie.

Écris le numéro de chaque ligne suivi de la lettre correspondant à l'affirmation vraie.

Nº	Affirmations		
	E	F	G
1	B appartient à la médiatrice du segment [AO].	A appartient à la médiatrice du segment [BO].	O appartient à la médiatrice du segment [AB].
2	$Mes(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AO}}) = \frac{\pi}{4}$.	$Mes(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{OB}}) = \frac{\pi}{4}$.	$Mes(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}}) = \frac{\pi}{4}$.

3 Sur la figure ci-contre, A et B sont deux points distincts du plan orienté.
Reproduis et construis le point C, image de A par la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

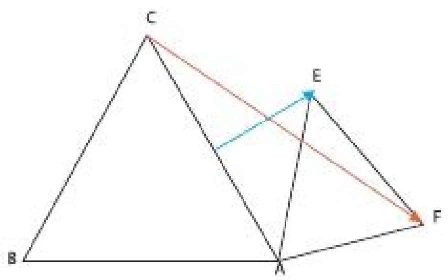
Activité 2 Propriété fondamentale de la rotation

O, A et B étant trois points donnés et deux à deux distincts du plan, on considère la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$. On désigne par : A' et B' les images respectives des points A et B par la rotation r.

1. Vérifie en utilisant ton rapporteur que : $Mes(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'}}) = \frac{\pi}{6}$.
2. Vérifie en utilisant ton compas que : A'B' = AB.
3. Formule une conjecture à partir de cette activité.

Récapitulons
On admet :
si r est une rotation d'angle de mesure principale $\frac{\pi}{6}$ et A et B deux points distincts d'images respectives A' et B', par r, alors A'B'= AB et $Mes(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'}}) = \frac{\pi}{6}$.

Exercices de fixation



4 Dans la figure ci-contre, les triangles ABC et AEF sont équilatéraux de sens indirect. On désigne par r la rotation de centre A d'angle orienté $\frac{-\pi}{3}$.

Pour chacune des lignes 1 ; 2 ; 3 et 4 du tableau, deux affirmations K et L sont proposées, dont une seule est vraie.
Écris dans ton cahier le numéro de chaque ligne suivi de la lettre correspondant à l'affirmation vraie.

N°	Affirmations	
	K	L
1	$r(B) = C$	$r(C) = B$.
2	$r(F) = E$	$r(E) = F$.
3	BE = AB	BE = CF.
4	$Mes(\widehat{\overrightarrow{BE},\overrightarrow{CF}}) = \frac{-\pi}{3}$	$Mes(\widehat{\overrightarrow{BE},\overrightarrow{CF}}) = \frac{\pi}{3}$.

5 Soit E et F deux points distincts tels que EF = 5 cm. E' et F' sont les images respectives de E et de F par la rotation d'angle orienté $-\frac{\pi}{12}$.

Détermine E'F' et $Mes\left(\widehat{\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{E'F'}}\right)$.

Activité 3 Images de figures simples.

1. Image d'une droite par une rotation

On considère trois points distincts deux à deux A, B et C. r la rotation de centre C et d'angle orienté $\frac{\pi}{4}$.

a) Trace la droite (AB) et marque un point M sur cette droite.

b) Construis les points A' et B' images respectifs des points A et B par la rotation r puis trace la droite (A'B').

c) Construis le point M' tel que $M' = r(M)$, puis vérifie que M' est un point de la droite (A'B').

d) Soit N' un point de la droite (A'B'), construis le point N tel que $r(N) = N'$.

e) Vérifie que le point N est situé sur la droite (AB).

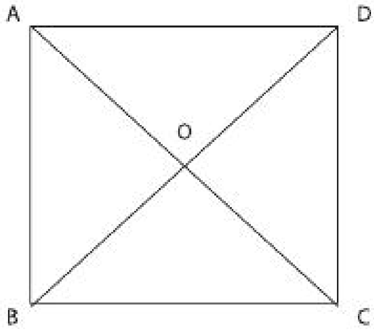
f) Énonce une conjecture à partir de cette activité.

Récapitulons

On admettra que l'image de la droite (AB) par la rotation r est la droite (A'B'), où $A' = r(A)$ et $B' = r(B)$.

Exercices de fixation

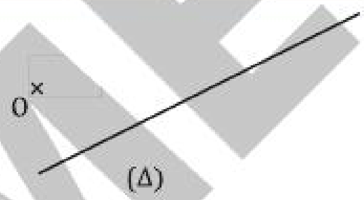
6 Dans la figure ci-contre ABCD est un carré de sens direct. On désigne par r_1 la rotation de centre O d'angle orienté $-\frac{\pi}{2}$ et par r_2 la rotation de centre A d'angle orienté $-\frac{\pi}{2}$.



Pour chacune des lignes 1 ; 2 ; 3 et 4 du tableau ci-dessous, deux affirmations F et G sont proposées, dont une seule est vraie.
Écris le numéro de chaque ligne suivi de la lettre correspondant à l'affirmation vraie.

N°	Affirmations	
	F	G
1	L'image de la droite (AB) par r_1 est la droite (AD).	L'image de la droite (AB) par r_1 est la droite (CD).
2	L'image de la droite (CD) par r_1 est la droite (AB).	L'image de la droite (CD) par r_1 est la droite (BC)
3	L'image de la droite (AB) par la rotation r_2 est la droite (BC).	L'image de la droite (AB) par la rotation r_2 est la droite (DC).
4	L'image de la droite (BC) par la rotation r_2 est la droite (AB).	L'image de la droite (BC) par la rotation r_2 est la droite (DC).

7 Reproduis et construis l'image de la droite (Δ) par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$.



2. Image d'une demi-droite

On considère trois points distincts deux à deux A, B et C et la rotation r de centre C et d'angle orienté $\frac{-\pi}{6}$.

a) Trace la demi-droite [AB) et marque un point M sur cette demi-droite.

b) Construis les points A' et B' images respectifs des points A et B par la rotation r puis trace la demi-droite [A'B').

c) Construis le point M' tel que M' = r(M), puis vérifie que M' est un point de la demi-droite [A'B').

d) Soit N' un point de la demi-droite [A'B'), construis le point N tel que r(N) = N'.

e) Vérifie que le point N est situé sur la demi- droite [AB).

f) Énonce une conjecture à partir de cette activité.

Récapitulons

On admettra que l'image d'une demi-droite [AB) par une rotation r est la demi-droite [A'B'), où A' = r(A) et B'= r(B).

Exercices de fixation

8 Soient cinq points O, A, B, C et F deux à deux distincts et r une rotation de centre O telle que :
r(A) = F ; r (C) = B.
Recopie dans ton cahier puis complète chacune des phrases ci-dessous :

1. L'image de la demi-droite [CA) est la demi-droite ...
2. L'image de la demi-droite [AC) est la demi-droite ...

9 ABC est un triangle équilatéral de sens indirect.

1. Fais une figure.
2. Détermine l'image de la demi-droite [AB) par la rotation de centre A d'angle $\frac{-\pi}{3}$.

3. Image d'un segment

a) Soient trois points distincts deux à deux A, B et C et la rotation r de centre C et d'angle orienté $\frac{-\pi}{6}$.

b) Soit M un point du segment [AB] et M' son image par r.

c) Justifie que M' appartient au segment [A'B'].

d) Soit N' un point du segment [A'B']. Justifie qu'il existe un point N du segment [AB] tel que r(N) = N'.

e) Donne une conclusion pour cette activité.

Récapitulons

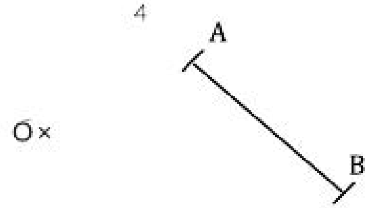
L'image d'un segment [AB] par une rotation r est le segment [A'B'], où A'= r(A) et B' = r(B).

Exercices de fixation

10 Recopie le tableau et coche la bonne réponse.

L'image d'un segment par une rotation est :	un segment.	
	une demi-droite.	
	une droite.	

11 Reproduis et construis l'image du segment [AB] par la rotation de centre O et d'angle orienté $-\frac{\pi}{4}$.

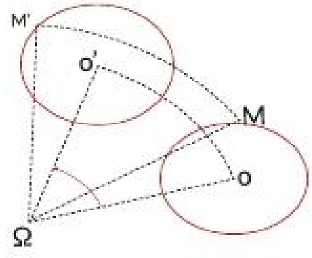


12 Soit EFGK un carré de centre I et de sens direct.
Soit r la rotation de centre I et d'angle orienté $\frac{\pi}{2}$.
Détermine par r l'image du segment [FE] et du segment [GF].

4. Image d'un cercle

On considère la rotation r de centre Ω et d'angle orienté α.
(C) est le cercle de centre de O et de rayon 3 cm. (Voir figure ci-contre).

Soit M un point de (C) et M' l'image de M par la rotation r.



a) Démontre que M' appartient au cercle (C') de centre O' et de rayon 3 cm, où O' = r(O).

b) Soit N' un point de (C') et N le point tel que r(N) = N'. Justifie que N est un point de (C).

c) Donne une conclusion de cette activité.

Récapitulons

L'image du cercle de centre O et de rayon 3 cm par une rotation r est le cercle de rayon 3 cm et de centre O', image de O par r.

Exercices de fixation

13 On considère la rotation r de centre O et d'angle orienté $-\frac{5\pi}{4}$ tel que : $r(A) = B$.
Recopie le tableau ci-dessous et coche la bonne réponse.

(C) est le cercle de centre A et de rayon 2,5. Son image par r est :	le cercle de centre A et de rayon 2,5.	
	le cercle de centre B et de rayon $2{,}5 \times \frac{5}{6}$.	
	le cercle de centre B et de rayon 2,5.	
	le cercle de centre B et de rayon 2.	

14 Place un point O et construis le cercle de centre O et de rayon 3cm
Soit A un point du plan distinct de O.
On considère la rotation r de centre A et d'angle orienté $-\frac{\pi}{2}$.

1. Construis l'image (C') du cercle (C) par la rotation r.
2. Explique ta méthode de construction.

Activité 4 Des propriétés de conservation

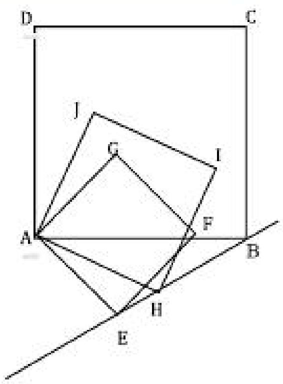
1. Conservation de l'alignement

On considère trois points deux à deux distincts A, B et C, d'images respectifs A', B' et C' par une rotation r.
Justifie que si les points A, B et C sont alignés, alors les points A', B' et C' sont alignés.

Récapitulons

Toute rotation conserve l'alignement.

Exercices de fixation



15 Sur la figure ci-contre, ABCD, AEFG et AHIJ sont des carrés.
Justifie que les points D, G et J sont alignés.

16 Construis un carré ABCD direct de centre O. On considère la rotation de centre A et d'angle orienté $\frac{\pi}{2}$.

On pose : $E = r(O)$, $F = r(C)$.

Justifie que les points E, F et A sont alignés.

2. Conservation du milieu d'un segment

a) Construis un segment [AB] de milieu I et O un point du plan.
On considère la rotation de centre O et d'angle orienté $\frac{\pi}{3}$.
On note C, D et J les images respectives des points A, B et I par r.
b) Justifie que J est le milieu du segment [CD].

Récapitulons
L'image du point I, milieu du segment [AB] est le point J, milieu du segment [A'B'].

Exercices de fixation

17 ABC est un triangle isocèle en A tel que :

$Mes(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) = \frac{\pi}{5}$.

K et L sont les milieux respectifs des segments [AB] et [AC] et r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{5}$.

Recopie le tableau ci-contre et coche la bonne réponse.

L'image de K par r est :	B	
	L	
	K	
	C	

18 ABC et ACD sont deux triangles équilatéraux, I est le milieu de [BC] et J le milieu de [DC].

Justifie que I est l'image de J par une rotation que l'on déterminera.

3. Conservation de la mesure des angles orientés

a) Place dans le plan cinq points O, A, B, C et D tels que : $Mes(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}}) = \frac{\pi}{3}$.

b) Construis les points E, F , G ,et H images respectives des points A, B, C et D par la rotation de centre O et d'angle orienté $\frac{\pi}{3}$ vérifie que : $Mes(\widehat{\overrightarrow{EF},\overrightarrow{GH}}) = \frac{\pi}{3}$.

c) Conjecture une propriété relative à la mesure des angles orientés.

Récapitulons
- O est un point du plan et r la rotation de centre O d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

Etant donnés quatre points deux à deux distincts, A, B, C et D tels que $Mes(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}}) = \frac{\pi}{3}$, les points E, F , G et H les images respectives des points A, B, C et D par la rotation r,

on a : $Mes(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}}) = Mes(\widehat{\overrightarrow{EF},\overrightarrow{GH}}) = \frac{\pi}{3}$.
- La rotation r conserve la mesure des angles orientés.

Exercices de fixation

19 On considère une rotation d'angle $\frac{\pi}{7}$ et les points E, F , G et H, images respectives par cette rotation des point A, B ,C et D. On donne : $Mes(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) = -\frac{\pi}{7}$.

Recopie le numéro de la bonne réponse.

$Mes(\widehat{\overrightarrow{EF},\overrightarrow{GH}})$ est égal à : 1) $\frac{-\pi}{5}$; 2) $-\frac{\pi}{7}$; 3) $\frac{\pi}{7}$; 4) $\frac{\pi}{5}$

20 Construis un losange ABCD tel que : $Mes(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}}) = \frac{\pi}{3}$.

Soit C' l'image de C par la rotation de centre A et d'angle orienté $\frac{\pi}{3}$.

1. Construis le point C'.
2. Justifie que $Mes(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC'}}) = \frac{\pi}{6}$.

4. Conservation du parallélisme

Soit O un point du plan.

On considère deux droites strictement parallèles (D) et (Δ) d'images respectives (D') et (Δ ') par la rotation r de centre O et d'angle orienté α .

(On prendra $\alpha = \frac{\pi}{3}$ pour les constructions.)

a) Place deux points distincts A et B sur la droite (D) et un point C sur la droite (Δ).
b) Construis le point E de la droite (Δ) tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE}$.
c) Construis les points A', B', C' et E' images respectives des points A, B, C et E par la rotation r.
d) Justifie que : $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'E'}$.
e) Déduis-en que les droites (D') et (Δ') sont aussi parallèles.
f) Formule une conclusion à partir de cette activité.

Récapitulons

Les images de deux droites parallèles par la rotation r sont deux droites parallèles.

Exercice de fixation

21 Construis un losange ABCD tel que : $Mes(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}}) = \frac{\pi}{3}$.

Construis les points C' et B' images respectives des points C et B par la rotation de centre A et d'angle orienté $\frac{\pi}{3}$.

Justifie que les droites (AB') et (BC') sont parallèles.

5. Conservation de l'orthogonalité

Soit O un point du plan.

On considère deux droites perpendiculaires (D) et (Δ) d'images respectives (D') et (Δ') par la rotation r de centre O et d'angle orienté α (On prendra $\alpha = \frac{\pi}{3}$ pour les constructions.)

a) Construis les droites (D') et (Δ').

b) En utilisant la propriété relative à la conservation des mesures d'angles orientés, justifie que les droites (D') et (Δ') sont perpendiculaires.

Récapitulons

Les images de deux droites perpendiculaires par la rotation r sont deux droites perpendiculaires.

On dit que la rotation r conserve l'orthogonalité.

Exercice de fixation

22 Construis un carré direct ABCD.

Construis les points E et F, images respectives des points D et C par la rotation de centre A et d'angle orienté $\frac{\pi}{6}$.

Justifie que les droites (DE) et (AF) sont perpendiculaires.

Activité 5 Caractérisation d'une rotation

1. Rotation déterminée par son centre, un point et son image

Soit O, A et B trois points deux à deux distincts du plan tels que : OA = OB.

Justifie qu'il existe une rotation et une seule de centre O qui applique A sur B.

Récapitulons

Etant donné trois points deux à deux distincts O, A et B tels que : OA = OB, la rotation r de centre O et d'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}})$ applique A sur B.

Exercice de fixation

23 On considère deux triangles équilatéraux directs ABC et ACD.

Détermine l'angle de la rotation de centre A qui applique B sur D.

2. Rotation déterminée par deux points distincts et leurs images

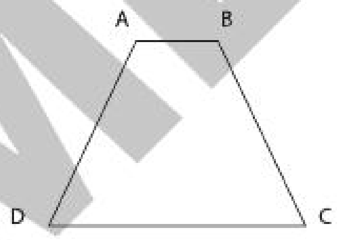
On considère quatre points A, B, C et D deux à deux distincts.

1. Détermine une condition nécessaire pour qu'il existe une rotation r telle que : $r(A) = C$ et $r(B) = D$.
2. A l'aide d'un contre exemple, justifie que cette condition n'est pas suffisante
3. Détermine une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une rotation r telle que : $r(A) = C$ et $r(B) = D$.
4. Propose une méthode construction du centre Ω de la rotation r.

Récapitulons

Etant donné quatre points deux à deux distincts A, B, C et D tels que AB = CD et $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$, la rotation r de centre Ω et d'angle orienté $\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})}$ applique A sur C et B sur D, où Ω est le point d'intersection s'il existe, des médiatrices des segments [AC] et [BD] si elles sont distinctes ou des droites (AB) et (A'B') si elles sont confondues.

Exercices de fixation



24 Dans la figure ci-contre, ABCD est un trapèze isocèle.

1. Justifie qu'il existe une rotation qui applique le point A sur le point C et qui applique point D sur le point B.
2. Détermine le centre et l'angle cette rotation.

25 1. Construis ABC un triangle équilatéral de coté 3 cm.

2. Place les points I et J, milieux respectifs des cotés [AB] et [AC] .
3. Détermine le centre et l'angle de la rotation qui applique I en J et B en A.

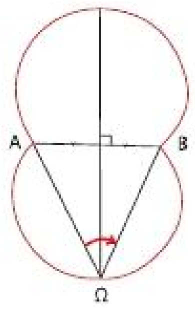
3. Rotation déterminée par son angle, un point et son image

a) Place deux points A et B tels que AB = 5 cm.

b) En utilisant la notion d'arc capable ; construis le centre de la rotation d'angle orienté $\frac{-\pi}{6}$ qui applique le point A sur le point B.

Récapitulons

Le centre de la rotation d'angle $\frac{-\pi}{6}$ qui applique A sur B est l'un des points commun à la médiatrice du segment [AB] et à l'un des arcs capable de mesure $\frac{\pi}{6}$ d'extrémités les points A et B.



Exercice de fixation

26

1. Marque sur ton cahier deux points distincts A et B.
2. Construis le centre O de la rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ qui applique A sur B.

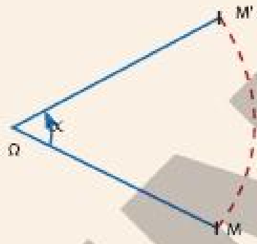
1. DÉFINITION D'UNE ROTATION

Définition

Soit Ω un point du plan orienté et α un nombre réel appartenant à $]-\pi, \pi]$.

On appelle rotation de centre Ω et d'angle orienté de mesure principale α, l'application du plan dans lui-même qui, à chaque point M du plan associe le point M' du plan tel que :

- si M ≠ Ω alors ΩM = ΩM' et $Mes(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}) = \alpha$;
- si M = Ω, alors M' = Ω.



Notation

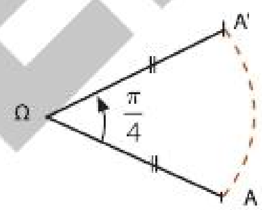
On note : M' = $r_{(\Omega;\alpha)}$(M)

ou

M' = r(M), s'il n'y a pas de confusion.

Exemples

La figure ci-contre désigne la construction de l'image A' du point A par : $r_{\left(\Omega;\frac{\pi}{4}\right)}$.



Conséquence de la définition

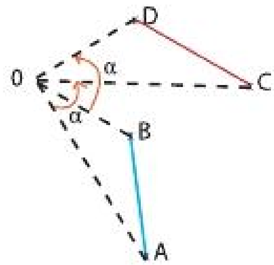
Propriété

Le seul point invariant par une rotation d'angle α non nul est le centre de cette rotation.

Pour s'entraîner : Exercices 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6

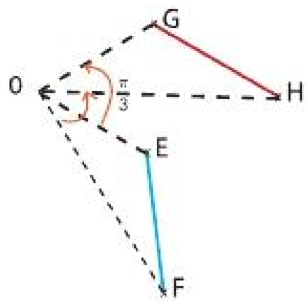
2. DES PROPRIÉTÉS DE CONSERVATION

Si A et B sont deux points distincts d'images respectives C et D par une rotation d'angle orienté de mesure α, alors : AB = CD et $Mes(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}) = \alpha$



Exemple d'application

Si deux points distincts E et F ont pour images respectives G et H par une rotation d'angle orienté de mesure $\frac{\pi}{3}$, alors : EF = GH et $Mes(\widehat{\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{GH}}) = \frac{\pi}{3}$.



Pour s'entraîner : Exercices 8, 9, 24, 25

3. IMAGES DE FIGURES SIMPLES PAR UNE ROTATION

1. Image d'une droite et d'une demi-droite

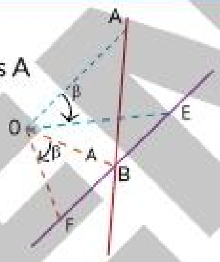
Propriétés

- L'image d'une droite par une rotation est une droite.
- L'image d'une demi droite par une rotation est une demi - droite.

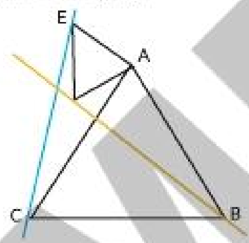
Exemple d'application

Dans la figure ci-contre les points E et F sont les images respectives des points A et B par la rotation r de centre O d'angle β.

Donc, l'image de la droite (AB) par la rotation r est la droite (EF).



Dans la figure ci-contre les triangles sont équilatéraux de sens direct. . L'image de la demi-droite [EC) par la rotation de centre A d'angle $\frac{\pi}{3}$ est la demi-droite [FB).



Pour s'entrainer : Exercices 10, 11, 12

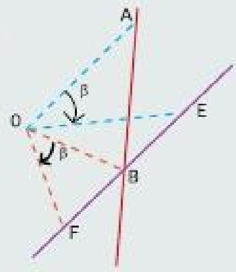
2. Image d'un segment

Propriété

L'image d'un segment par une rotation est un segment.

Dans la figure ci-contre, les points E et F sont les images respectives des points A et B par la rotation r de centre O et d'angle β.

Donc, l'image du segment [AB] par la rotation r est le segment [EF] et AB = EF.



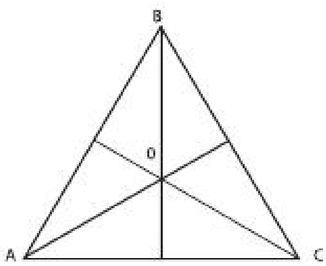
Exemple d'application

Dans la figure ci-contre ABC est triangle équilatéral de sens direct. Le point O est l'orthocentre du triangle. Désignons par r la rotation de centre O d'angle $\frac{-2\pi}{3}$.

On veut démontrer que l'image du segment [AB] par r est le segment [BC].

On a r(A) = B et r(B) = C.

L'image du segment [AB] est le segment [BC] et AB = BC.



Pour s'entrainer : Exercices 13, 14,

3. Image d'un cercle

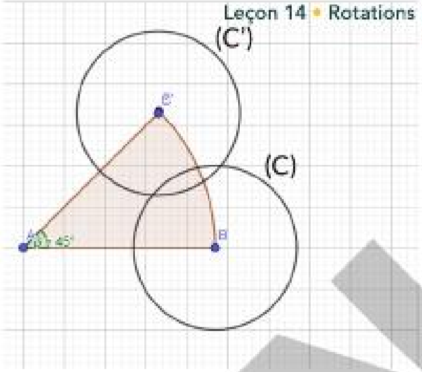
Propriété

L'image d'un cercle (C) de centre O par la rotation r est le cercle (C') de centre O' et de même rayon, où r(O) = O'.

Exemple d'application

Dans la figure ci-contre le cercle (C') est l'image de (C) par une rotation d'angle orienté de mesure $\frac{\pi}{4}$.

Les deux cercles ont le même rayon égal 2cm.



Pour s'entraîner : Exercice 15

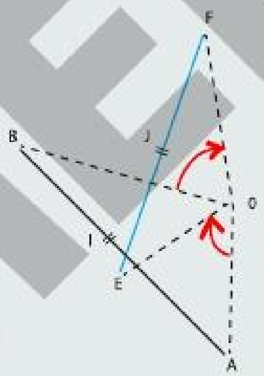
4. PROPRIÉTÉS DE CONSERVATION

1. Conservation du milieu d'un segment

Propriété

L'image du milieu d'un segment par une rotation est le milieu de l'image de ce segment.

Illustration



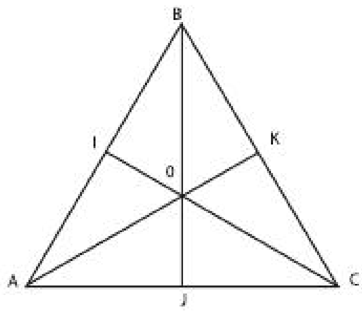
Dans la figure ci-contre, le point I est le milieu du segment [AB].

Le segment [EF] est l'image du segment [AB] par une rotation r de centre O .

Le point J , milieu du segment [EF] est l'image du point I par la rotation r.

Exemple d'application

Dans la figure ci-contre le triangle ABC est équilatéral de sens direct. Les points I, J et K sont les milieux respectifs des segments [AB], [AC] et [BC].



On désigne r la rotation de centre O et d'angle $\frac{-2\pi}{3}$.

Le point I est le milieu du segment [AB].

L'image du segment [AB] par r est le segment [BC].

Démontrons que le point K est l'image du point I par la rotation r.

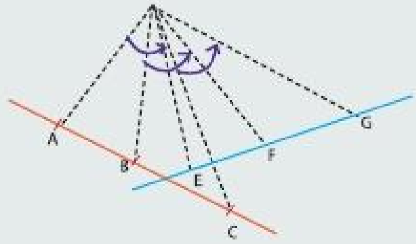
On a : r(A) = B, r(B) = C , I est le milieu du segment [AB] et K est le milieu du segment [BC]. Donc K est l'image du point I par r. Car, l'image du milieu d'un segment par une rotation est le milieu de l'image de ce segment.

Pour s'entraîner : Exercices 18, 19, 28

2. Conservation de l'alignement

Propriété

Les images de trois points alignés par une rotation sont trois points alignés.



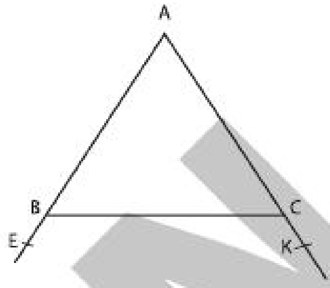
Dans la figure ci-contre les points A,B et C sont alignés.

Les points E, F et G sont les images respectives des points A, B et C par une rotation de centre le point O et d'angle α.

Donc les points E, F et G sont aussi alignés.

Exemple d'application

Dans la figure ci-contre ABC est triangle équilatéral de sens direct. E est un point de la droite (AB). et K est l'image du point E par la rotation r de centre A d'angle $\frac{\pi}{3}$.



On veut démontrer que le point K appartient à la droite (AC).

Désignons par r la rotation de centre A d'angle orienté $\frac{\pi}{3}$.

On a : r(A = A ; r(B) = C et r(E) = K.

K appartient à la droite (AC) car les images de trois alignés sont trois points alignés.

Pour s'entraîner : Exercice 17

3. Propriété de la conservation des mesures des angles orientés

Toute rotation conserve les mesures des angles orientés.

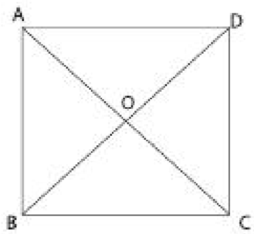
Si A, B et C, sont points du plan d'images respectives A', B' et C', par une rotation, alors

$Mes(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) = Mes(\widehat{\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'}})$.

Exemple d'application

ABCD est un carré direct de centre O.

On veut montrer que l'image de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AO}})$ par une rotation est un angle de même mesure.



On désigne par r la rotation de centre O d'angle orienté de mesure $\frac{\pi}{2}$.

r(A) = B ; r(B) = C et r(O) = O.

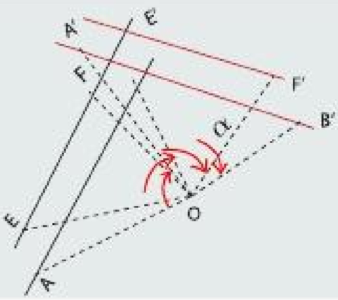
On a : $Mes(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BO}) = \frac{\pi}{4}$.

Pour s'entraîner : Exercices 25, 32, 38

4. Propriété de la conservation du parallélisme des droites.

Propriété

Les images de deux droites parallèles par une rotation sont deux droites parallèles.



Illustration

Les droites (AB) et (EF) sont parallèles. Leurs images, les droites (A'B') et (E'F') par la rotation de centre O d'angle α sont aussi parallèles.

Pour s'entraîner : Exercices 24, 25, 38, 41

5. Propriété de la conservation de l'orthogonalité.

Les images de droites perpendiculaires par une rotation sont deux droites perpendiculaires.

Exemple d'application

Dans la figure ci-contre, le triangle ABC est isocèle au point A et est de sens direct.

On désigne par :

r la rotation de centre A et d'angle orienté : $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$.

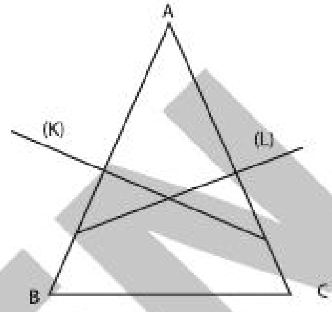
La droite (L) est l'image de la droite (K) par r.

Les droites (AB) et (K) sont perpendiculaires.

On veut montrer que les droites (AC) et (L) sont perpendiculaires.

On a : r(A)=A, r(B)= C et l'image de la droite (K) est la droite (L).

Les droites (AB) et (K) sont perpendiculaires, donc leurs images respectives (AC) et (L) sont perpendiculaires.



Pour s'entraîner : Exercices 25, 29, 32

5. CARACTÉRISATION D'UNE ROTATION

1. Rotation caractérisée par son centre, un point et son image

Propriété

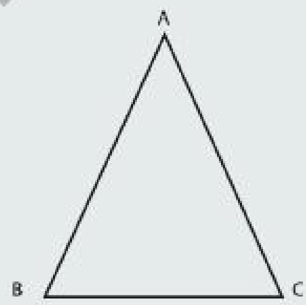
Soit A, B, et C trois points deux à deux distincts du plan tels que : AB =AC.

Il existe une rotation et une seule, de centre A qui applique B sur C.

Illustration

Dans la figure ci-contre, on a AB = AC.

La rotation de centre A, d'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$ applique le point B sur le point C.



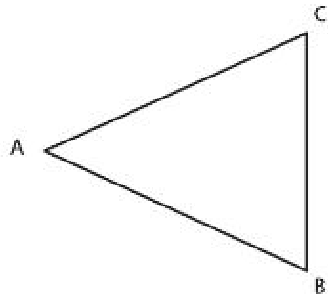
Exemple d'application

Dans la figure ci-contre, ABC est un triangle isocèle en A, de sens direct et $Mes(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \frac{\pi}{4}$.

Caractérisons la rotation r de centre A qui applique B sur C.

On a : $Mes(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \frac{\pi}{4}$ et AB = AC,

Donc r est la rotation de centre A, d'angle $\frac{\pi}{4}$.

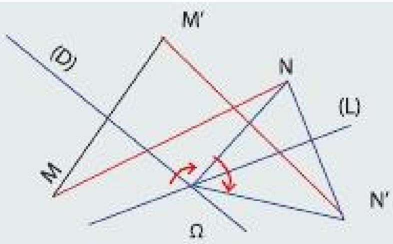


Pour s'entraîner : Exercices 21, 26

2. Rotation caractérisée par deux points distincts et leurs images.

S'il existe quatre points deux à distincts M, N, N' et M' tels que :

MN = M'N' et $\overrightarrow{MM'} \neq \overrightarrow{NN'}$, alors il existe une rotation r et une seule telle que : r(M) = M' et r(N) = N'.



Méthode

Pour déterminer le centre et l'angle d'une rotation r telle que : r(A) = A' et r(B) = B'

(A ≠ B et A' ≠ B'), on construit les médiatrices (Δ) et (Δ') respectives de [AA'] et [BB'].

Premier Cas : (Δ) et (Δ') se coupent en un point Ω.

Ω est le centre de la rotation et l'angle orienté est : $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}}\right)$.

Deuxième cas : (Δ) et (Δ') et sont confondues.

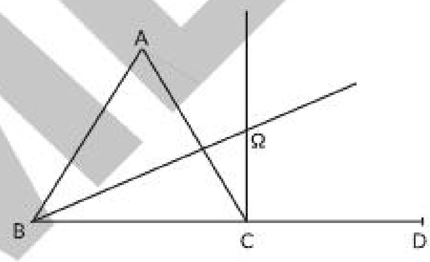
Ω est le point d'intersection des droites (AB) et (A'B'). L'angle de la rotation est $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}}\right)$.

Exemple d'application

ABC est un triangle équilatéral de sens direct.

Place le point D tel que C soit le milieu de [BD].

Justifions qu'il existe une rotation r que l'on caractérisera qui applique A sur C et B sur D.



AB = CD et $\overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{BD}$, donc il existe une rotation r telle que : r(A) = C et r(B) = D.

$Mes(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}}) = Mes(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}}) = -Mes(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}) = \frac{\pi}{3}$.

Son centre Ω est le point d'intersection des médiatrices des segments [AC] et [BD].

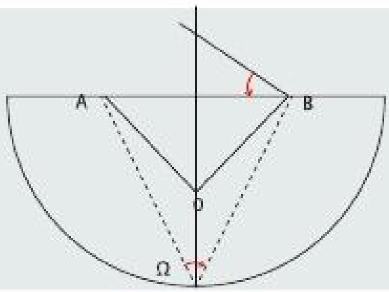
Pour s'entraîner : Exercices 22, 40

3. Rotation déterminée par la donnée de l'angle, un point et son image

Une rotation est déterminée par la donnée de son angle orienté $\propto$, d'un point A et son image B.

Dans ce cas, son centre Ω s'obtient comme l'intersection de la médiatrice du segment

[AB] et de l'un des deux arcs capables de mesure $|\propto|$ et d'extrémité A et B.

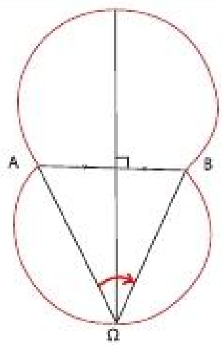


Exemple d'application

Dans la figure ci-contre A et B sont deux points distincts.

Il existe une rotation d'angle $\frac{-\pi}{4}$ qui applique A sur B.

Le centre de cette rotation Ω est le point commun de la médiatrice du segment [AB] et de l'un des arcs capables d'extrémité A et B de mesure $\frac{\pi}{4}$.



Pour s'entraîner : Exercice 23

QUESTION 1

Comment déterminer le centre et l'angle d'une rotation déterminée par deux points distincts et leurs images ?

Méthode

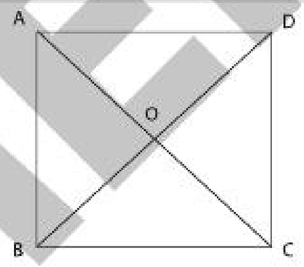
Pour déterminer le centre et l'angle d'une rotation r telle que r(A) = C et r(B) = D (A ≠ B et C ≠ D) :

- on construit les médiatrices (K) et (L) des segments [AC] et [BD].
- si (K) et (L) se coupent en un point O, O est le centre de la rotation.
- L'angle de la rotation est donné par : $Mes(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}})$.
- Si (K) et (L) sont parallèles, alors le centre O de la rotation est le point d'intersection des droites (AB) et (DC).

Exercice

Dans la figure ci-contre ABCD est un carré de sens direct.

1. Justifie qu'il existe une rotation qui applique le point A sur le point C et le point B sur le point D.
2. Détermine le centre et l'angle de cette rotation.



Solution commentée

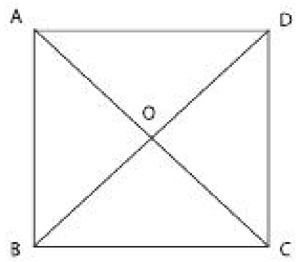
On a : AB = CD, car les côtés d'un carré ont la même longueur et $\overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{AB}$, car les diagonales d'un carré se coupent.

Donc, il existe une rotation qui applique A sur C et B sur D.

Le centre de cette rotation est le point commun aux médiatrices des segments [AC] et [BD], c'est à dire le centre du carré.

L'angle de la rotation est donné par

$Mes(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}}) = \pi$



Exercice non corrigé

Soit ABC un triangle isocèle direct de sommet A. On considère les triangles équilatéraux directs ADB et ACE.

Justifie qu'il existe une rotation r qui applique D sur B et C sur E.

Caractérise la rotation r.

QUESTION 2

Question 2 : Comment déterminer le centre d'une rotation déterminée par son angle, un point et son image ?

Méthode

Pour construire le centre d'une rotation déterminée par la donnée de son angle orienté $\propto$, d'un point A et son image B :

- on construit les deux arcs capables de mesure $|\propto|$ d'extrémité A et B ;
- dans ce cas, son centre Ω s'obtient comme l'intersection de la médiatrice du segment [AB] et de l'un des arcs capables.

Exercice

Dans la figure ci-contre AB = 5 cm.

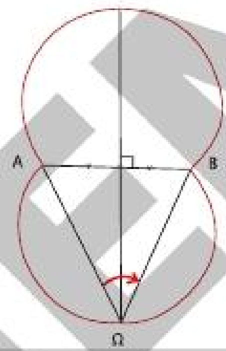
Détermine le centre la rotation d'angle $\frac{-\pi}{6}$ qui applique A sur B.

Solution commentée

Dans la figure ci-contre A et B sont deux points distincts.

Il existe une rotation d'angle $\frac{-\pi}{6}$ qui applique A sur B.

Le centre de cette rotation Ω est le point commun de la médiatrice du segment [AB] et de l'un des arcs capables d'extrémité A et B de mesure $\frac{\pi}{6}$.

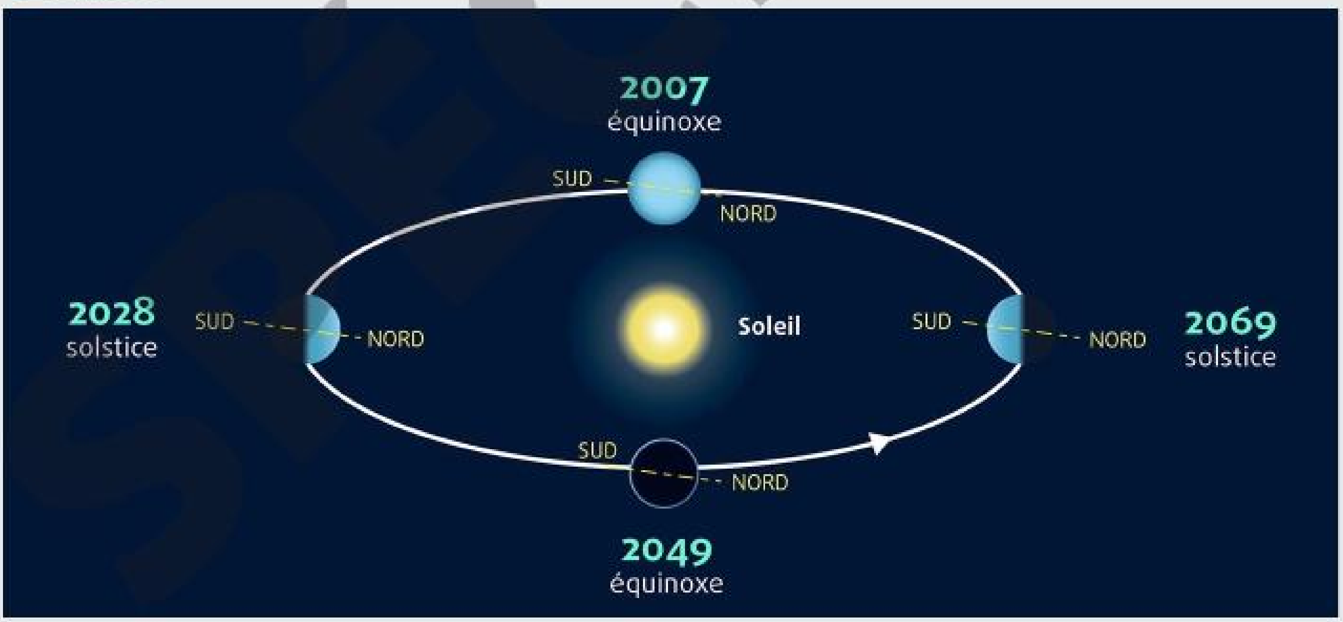


Exercice non corrigé

Dans la figure ci-contre AB = 4 cm.

Reproduis le centre de la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ qui applique A sur B.

Curiosité



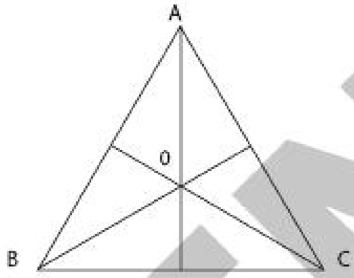
Exercices de fixation

Définition et premières propriétés

1 La figure ci-contre, est un triangle équilatéral ABC de sens direct dont l'orthocentre est le point O.

Pour chaque affirmation, deux réponses a et b sont proposées dont une seule est vraie.

Écris le numéro de chaque affirmation suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.



N°	affirmations	réponses	
		a	b
1	r est la rotation de centre A d'angle $\frac{\pi}{3}$.	r(A) = A	r(A) = B
2	r est la rotation de centre A d'angle $\frac{\pi}{3}$.	r(B) = C	r(C) = B
3	r est la rotation de centre O d'angle $\frac{2\pi}{3}$.	r(A) = B	r(A = C
4	r est la rotation de centre O qui applique le point C sur le point B.	L'angle de la rotation est $\frac{-\pi}{3}$.	L'angle de la rotation est $\frac{-2\pi}{3}$.

2 r est la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{-\pi}{6}$.

Pour chaque affirmation, trois réponses A, B et C sont proposées dont une seule est vraie.

Écris le numéro de chaque affirmation suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

N°	Affirmations	Réponses		
		A	B	C
1	F = r (E).	Ω est le milieu du segment [EF].	ΩE = ΩF et $Mes(\widehat{\overrightarrow{\Omega F},\overrightarrow{\Omega E}}) = -\frac{\pi}{6}$.	ΩE = ΩF et $Mes(\widehat{\overrightarrow{\Omega E},\overrightarrow{\Omega F}}) = -\frac{\pi}{6}$.
2	ΩQ = ΩP et $Mes(\widehat{\overrightarrow{\Omega Q},\overrightarrow{\Omega P}}) = -\frac{\pi}{6}$.	R(P) = Q.	R(Q) = P.	Ω, P et Q sont alignés.

3 Soit ABC un triangle rectangle et isocèle en B de telle sorte que le triplet ABC soit de sens direct.

Détermine l'angle de la rotation de centre B qui applique A sur C.

4 Place deux points distincts A et B.

1. Construis l'image A' du point A par la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
2. Construis l'image B' du point B par la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

5 Soit ABCD un carré direct.

Caractérise une rotation d'angle orienté non nul qui laisse ce carré globalement invariant.

6 A étant un point fixé du plan, on considère la rotation de centre A et d'angle orienté de mesure $\frac{\pi}{4}$.
Pour chaque affirmation, trois réponses A, B et C sont proposées dont une seule est vraie.
Écris le numéro de chaque affirmation suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

N°	Affirmations	Réponses		
		A	B	C
1	Q = r(M) et r(N) =P.	$Mes(\widehat{\overrightarrow{NM},\overrightarrow{QP}}) = \frac{\pi}{4}$.	$Mes(\widehat{\overrightarrow{MN},\overrightarrow{PQ}}) = \frac{\pi}{4}$.	$Mes(\widehat{\overrightarrow{MN},\overrightarrow{QP}}) = \frac{\pi}{4}$.
2	Q = r(M) et r(N) =P.	MN = PQ.	MP = NQ.	MQ = QP.

7 Soit ABC un triangle équilatéral direct.

1. Construis les images respectives E et F des points B et C par la rotation de centre A et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$.
2. Détermine $Mes(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{EF}})$.

8 A étant un point fixé du plan, on considère la rotation de centre O et d'angle orienté de mesure $\frac{\pi}{4}$.

Pour chaque donnée de la colonne 2, trois affirmations A, B et C sont proposées dans les colonnes 3 ; 4 et 5 dont une seule est vraie.
Écris le numéro de chaque donnée suivi de la lettre de l'affirmation qui est vraie.

N°	Données	Affirmations		
		A	B	C
1	E = r (A) r(B) = F , r(I) = K AI + IB = AB.	KE + EF = KF.	EK + KF = EF.	KF + FE = KE.
2	E = r(A) r(B) = F , r(I) = K et I est milieu de [EF].	K est le milieu de [EF].	F est le milieu de [KE].	E est le milieu de [KF].
3	E = r (A) r(B) = F AB = 5 cm.	EF = 2,5 cm.	EF = 5 cm.	EF = 10 cm.

9 Soit ABC un triangle isocèle direct de sommet A.
On considère les triangles équilatéraux directs ADB et ACE.

1. Détermine $Mes(\widehat{\overrightarrow{DC},\overrightarrow{BE}})$.
2. Justifie que : DC = BE.

10 ABCD et AEFG sont deux carrés de sens directs.

1. Fais une figure.
2. Justifie que les droites (BE) et (DG) sont perpendiculaires.

Images de figures simples

11 Construis un carré ABCD de centre O et de sens indirect.

1. Détermine l'image de la droite (AB) par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
2. Détermine l'image de la droite (DC) par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

12 Soit (D) une droite et O de la droite (D).

Construis l'image de (D) par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
Explique ta méthode de construction.

13 (L) est une droite et O est un point qui n'appartient pas à la droite (L).

1. Fais une figure.
   a. Construis la droite (K), image de la droite (L) par la rotation de centre O d'angle orienté $\frac{\pi}{4}$.
   b. Explique ta méthode construction.

14 On considère un segment [AB], O un point n'appartenant pas à [AB] et r une rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

1. Fais une figure.
2. Construis l'image du segment [AB] par la rotation r.
3. Explique ta méthode construction.

15 Soit EFGK un carré de centre I et de sens direct.

Soit r la rotation de centre I et d'angle orienté de mesure $\frac{\pi}{2}$.
Détermine par r l'image du segment [FE] et du segment [GF].

Propriété de la conservation

16 Construis un carré ABCD direct de centre O. On considère la rotation de centre A et d'angle orienté $\frac{\pi}{3}$.

On pose : E = r(O), F = r(C).

1. Fais une figure.
2. Justifie que les points A, E et F sont alignés.

17 O, B et M sont trois points non alignés. I est le milieu du segment [BM].

1. Fais une figure.
2. Construis les points C et N, les images respectives des points B et M par la rotation r de centre O d'angle orienté de mesure $\frac{\pi}{6}$.
3. On désigne par L le milieu du segment [CN].

Justifie que r(I) = L.

18 On considère deux triangles équilatéraux directs ABC et ACD.

1. Détermine le centre de la rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ qui applique B sur D.
2. Détermine l'image C' du point C par cette rotation.
3. Justifie que A est le milieu de [BC'].

19 Construis un parallélogramme ABCD.

1. Construis les points E, F et G images respectives des points B ,C et D par la rotation de centre A et d'angle orienté $\frac{\pi}{3}$.
2. Justifie que le quadrilatère AEFG est un parallélogramme.

Images de figures simples

20 ABC est triangle isocèle de sens indirect tel que : AB= AC = 4 cm et $Mes(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) = -\frac{\pi}{4}$.

1. Fais une figure.
   a. Justifie qu'il existe une rotation de centre A qui applique le point B sur le point C.
   b. Donne l'angle cette rotation.

21 Construis sur ton cahier quatre points M, N, P et Q deux à deux distincts tels que :

$Mes(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PQ}) = \frac{\pi}{4}$ et MN = PQ = 7cm

1. Justifie qu'il n'existe aucune rotation qui applique M sur N et P sur Q .
2. Justifie l'existence d'une rotation r telle que : r(M) = P et r(N) = Q
3. Construis le point Ω, centre de la rotation r
4. Place un point A du plan.
   Construis le point A' image de A par r.

22 Marque sur ton cahier deux points distincts A et B.

Construis le centre O de la rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$ qui applique A sur B.

Exercices de renforcement

23 Recopie le numéro de chacune des affirmations contenues dans le tableau ci-dessous suivi de « V » lorsque l'affirmation est vraie ou de « F » lorsqu'elle est fausse.

N°	Affirmations
1	L'image d'une droite par une rotation d'angle droit est une droite qui lui est perpendiculaire.
2	Si l'image d'une droite par une rotation est une droite qui lui est perpendiculaire, alors l'angle orienté de cette rotation est $\frac{\pi}{3}$ ou $\frac{-\pi}{3}$.
3	Il n'existe aucune rotation transformant une droite en une droite qui lui est parallèle.
4	Si une droite est invariante par une rotation, alors l'angle de cette rotation est nul.

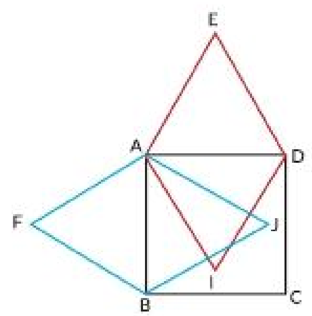
24 Recopie le numéro de chacune des affirmations dans le tableau ci-dessous suivi de « V » lorsque l'affirmation est vraie ou de « F » lorsqu'elle est fausse.

N°	Affirmations
1	L'image d'un angle par une rotation est l'opposé de cet angle.
2	L'image d'un cercle de rayon 2 cm par une rotation est cercle de diamètre 5 cm.
3	Les images de deux droites parallèles par une rotation sont deux droites parallèles.
4	Les images de deux droites perpendiculaires par une rotation sont deux droites parallèles.
5	L'image du milieu d'un segment par une rotation est le milieu de l'image de ce segment.

25 Les triangles ADE, AID, ABJ et AFB sont équilatéraux et ABCD est un carré de centre O.

Détermine le centre et l'angle de la rotation r dans chacun des cas suivants :

1. r(D) = C et r(F) = E ;
2. r(B) = J et r(D) = E ;
3. r(D) = J et r(I) = B ;
4. r(F) = J et r(B) = E.



26 ABC et ADE sont deux triangles isocèles et rectangles au point A.

1. Fais une figure.
2. Justifie que les droites (BD) et (CE) sont perpendiculaires.

27 A, B, I et O sont quatre points du plan tels que AB = 5cm, I est le milieu du segment [AB] et le point O n'appartient pas à la droite (AB).

1. Fais une figure .
2. Soit r la rotation de centre O et d'angle orienté de mesure $\frac{\pi}{6}$.
   a. Construis les C ; D et E les images respectives des points A, B et I par la rotation r.
   b. Justifie le point J est le milieu du segment [CD].

28 ABCD est un parallélogramme direct ABCD de centre I. O est un point extérieur au parallélogramme.

1. Fais une figure.
   a. Construis les points EFGH et J les images respectives des points A, B, C, D et I par la rotation de centre O et d'angle orienté de mesure $\frac{\pi}{3}$.
   b. Justifie que le quadrilatère EFGH est un rectangle.
   c. Justifie que les ponts E, G et J sont alignés.

29 Soient A, B et C trois points alignés distincts.

Construis les triangles équilatéraux directs ABI et BCJ. (Faire deux figures, l'une avec B $\in$ [AC], l'autre avec C$\in$ [AB].

Démontre dans chaque cas à l'aide d'une rotation que IC = AJ.

30 On considère un triangle rectangle isocèle direct ABC de sommet principal A.

1. Détermine le centre et l'angle de la rotation r qui transforme A en C et B en A.
2. Soit D l'image de C par la rotation r, construis le point D.
3. Justifie que le quadrilatère BACD est un carré.

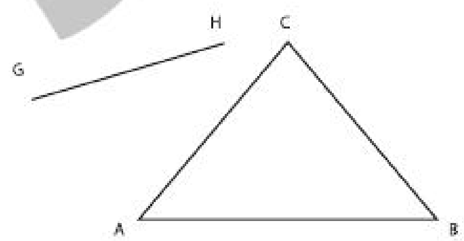
Exercices d'approfondissement

31 Soit ABC un triangle rectangle isocèle direct de sommet principal A

1. Construis le point E image de A par la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
2. Construis le point F image de C par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{6}$.
3. Démontre que les points A, E et F sont alignés

32 Les points G et H sont les images respectives des points A et B par une rotation r.

1. Reproduire la figure ci-dessus.
2. Sans construire le centre de cette rotation, construis le point F l'image du point C.
3. Démontre que les médiatrices des segments [AG], [BH] et [CF] sont concourantes.



33 Soit ABCD un carré direct et M un point de la droite (AD).

1. Fais une figure.
2. Construis l'image EFGH du carré ABCD par la rotation de centre M et d'angle orienté de mesure $\frac{\pi}{2}$.
3. Justifie que les droites (FG) et (BC) sont perpendiculaires.

34 Soit ABC un triangle équilatéral direct et D l'image de A par la symétrie orthogonale d'axe (BC). soit M un point du segment [BC] , le cercle de centre C qui passe par M coupe le segment [CD] en un point N. En utilisant une rotation, justifie que AM=BN.

35 Construis le centre O de la rotation r d'angle $\frac{-\pi}{2}$ qui applique A sur B.

1. Construis le point D image de C par r.
2. Démontre que CA = BD et que la droite (BD) est une hauteur du triangle ABC.

36 Soit ABCD un parallélogramme direct.

On considère les points E et F tels que : ABE et ADF soit des triangles rectangles isocèles directs de sommet principal A. soit G le point défini par $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}$.

Démontre que le triangle AGC est rectangle isocèle direct.

37 On donne une droite (D) et un point A n'appartenant pas à (D). Soit B un point quelconque de la droite (D).

1. Construis le triangle équilatéral ABC tel que $Mes(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \frac{\pi}{3}$.
2. Détermine l'ensemble décrit par le point C lorsque B décrit la droite (D).

38 Soit ABC un triangle isocèle tel que AB = AC.

Par un point M de la droite (BC), on mène la droite parallèle à la droite (AB) qui coupe (AC) en D et la parallèle à (AC) qui coupe (AB) en E.

1. Justifie l'existence d'une rotation et une seule qui applique B sur A et E sur D.
2. Détermine l'image de A par cette rotation
3. Justifie que la médiatrice de [ED] passe par le même point lorsque M décrit la droite (BC).

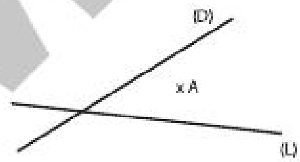
39 On considère un triangle isocèle ABC de sommet principal A. tel que $Mes(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \frac{\pi}{6}$.

On considère la rotation r_1 de centre B et d'angle orienté $\frac{5\pi}{12}$ et la rotation r_2 de centre C et d'angle orienté $-\frac{5\pi}{12}$.
On pose que r_1(C)= C' et r_2 (B) = B'.

1. Justifie que C' appartient à la droite (AB).
2. Justifie que B' appartient à la droite (AC).
3. Déduis –en la construction de B' et de C'.
4. Construis les points A_1 et A_2 tels que : $A_1 = r_1(A)$ et $A_2 = r_2(A)$.
5. Justifie que le triangle AB'C' est isocèle.
6. Justifie que les droite (C'A_1) et (B'A_2) sont parallèle à la droite (BC).
7. Déduis-en que les points A_1, A_2, C' et B' sont alignés.

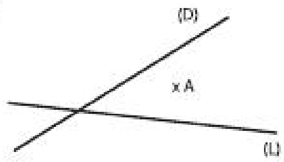
40

1. Reproduis la figure ci-dessous.
2. Construis deux triangles équilatéraux tels que un des sommets est le point A et les deux autres sommets appartiennent l'un à la droite (D) et l'autre à la droite (L).



41

1. Reproduis la figure ci-dessous.
2. Construis un carré tel que l'un des sommets est le point A et les deux autres sommets B et E appartiennent respectivement à la droite (D) et à la droite (L).



Situation complexe

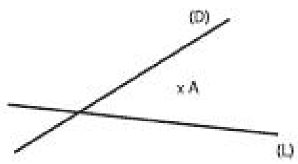
42 La figure ci-dessous représente le plan d'une région plane où deux fleuves supposés rectilignes en ce endroit sont représentés par deux droites (D) et (L).

Le point A représenté un village situé entre les deux fleuves.

Pour faciliter le déplacement des populations du village A de part et d'autre de ces deux fleuves, le conseil régional décide de la construction d'un pont P sur le fleuve (D) et d'un second pont Q sur le fleuve (L).

Informé le chef du village, après avoir remercié le président du conseil régional, souhaite cependant que son village et chacun des deux ponts soient situés deux à deux à la même distance l'un par rapport à l'autre.

Ton oncle, un notable du village te demande de leur proposer un plan sur lequel tu préciseras les positions des deux ponts.



15 INÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ DANS $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

Commentaire de la Leçon

La notion de système d'inéquations du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ n'est pas nouvelle en classe de 2^de^ C. En classe de troisième, les élèves savent trouver des couples de nombres réels solutions d'un tel système. Ils savent déterminer l'ensemble des solutions d'un système de deux inéquations du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ grâce au régionnement du plan. En classe de seconde, il s'agit de renforcer ces acquis à travers l'approfondissement de ces notions et la résolution des problèmes d'optimisation. En classe de première C ou D, l'étude des équations dans $\mathbb{R}^2$ et dans $\mathbb{R}^3$ sera abordée.

Les premiers problèmes d'optimisation auraient été formulés par Euclide, au troisième siècle de notre ère. Plus tard, Héron d'Alexandrie dans Cartoptrica énonce le "principe du plus court chemin".

Le terme de programmation linéaire utilisé dans la résolution de certains problèmes d'optimisation fut inventé par George Dantzig vers 1947.

Habiletés et Contenus

- ✓ **Connaitre** le théorème fondamental relatif à l'interprétation géométrique d'une inéquation du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.
- ✓ **Résoudre** graphiquement une inéquation du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.
- ✓ **Résoudre** graphiquement un système d'inéquations du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.
- ✓ **Traduire** en inéquations diverses situations concrètes.
- ✓ **Interpréter** géométriquement les solutions des systèmes d'inéquations dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.
- ✓ **Traiter une situation** faisant appel aux inéquations dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

Situation d'Apprentissage

Le père de Koronan, élève en 2[de] C au Lycée Moderne de Korhogo doit recevoir son ami français Delhom qui vient faire du tourisme dans la région du Poro. Monsieur Delhom demande de lui louer un véhicule pour faciliter ses déplacements. L'agence de location de voitures propose deux types de véhicules de type 4X4 :

- Pour le type A, la location coûte 25 000 F par jour plus 7 500 F par kilomètre parcouru
- Pour le type B, la location coûte 37 000 F par jour plus 4 800 F par kilomètre parcouru

La Direction Régionale du Tourisme propose des circuits :

- Un circuit de 1 jour et de 250 km
- Un circuit de 1 jour et de 350 km
- Un circuit de 2 jours et de 300 km
- Un circuit de 3 jours et de 150 km

Le père de Koronan lui demande de lui proposer un type de location et un circuit qui coûteront le moins cher à son ami Delhom. Koronan pose le problème à ses camarades de classe. Les élèves s'organisent pour s'informer sur la résolution d'inéquations du premier degré $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

Activité 1 Théorème fondamental

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), on donne la droite (D) d'équation : $2x - 3y + 6 = 0$.

1. Trace la droite (D).
2. a) Détermine l'ensemble (P_1) des points $M(x,y)$ du plan tels que : $2x - 3y + 6 > 0$.
   b) Détermine l'ensemble (P_2) des points $M(x,y)$ du plan tels que : $2x - 3y + 6 < 0$.
3. Soit $M(x,y)$ un point du plan. Justifie que M appartient à (P_1) ou à (P_2) ou à (D).

Récapitulons

La droite (D) partage le plan en deux demi-plans ouverts (P_1) et (P_2) de bord (D).

Exercices de fixation

1 Soit l'inéquation (I) : $-2x + 5y \leq 3$.
Parmi les couples de nombres réels suivants, donne ceux qui sont solutions de l'inéquation en justifiant ta réponse : (5 ; 1) ; (0 ; 0) ; (−2 ; 1) ; (−1 ; 0).

2 Le plan est muni d'un repère (O, I, J). (D) est la droite d'équation : $2x - 3y + 1 = 0$.
Associe à chacun des demi-plans (P_1) et (P_2) une des inéquations suivantes :
$(I_1) : 2x - 3y + 1 < 0$ et $(I_2) : 2x - 3y + 1 > 0$.

- (P_1) est l'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ du plan de bord (D) contenant le point O(0 ; 0).
- (P_2) est l'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ du plan de bord (D) ne contenant pas le point O(0 ; 0).

Activité 2 Résolution graphique d'une inéquation du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

1. Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), trace la droite (D) d'équation : $x - 2y + 2 = 0$.
2. a) Hachure l'ensemble des points M(x , y) tels que : $x - 2y + 2 < 0$.
   b) Détermine l'ensemble des solutions de l'inéquation : $x - 2y + 2 < 0$.

Récapitulons

Pour résoudre graphiquement une inéquation du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, on utilise la propriété fondamentale.

Exercice de fixation

3 Résous graphiquement dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ chacune des inéquations suivantes :
a) $6x + y - 5 \geq 0$; b) $x - 2y + 4 < 0$.

Activité 3 Résolution graphique d'un système d'inéquations du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

On considère le système (S) $\begin{cases} x - y + 2 < 0 \\ 2x + y - 4 > 0 \end{cases}$.

1. Dans le plan muni d'un repère (O, I, J) :
   a) hachure en bleu l'ensemble des solutions de l'inéquation : $x - y + 2 < 0$.
   b) hachure en rouge l'ensemble des solutions de l'inéquation : $2x + y - 4 > 0$.
2. Détermine la solution du système (S).

Récapitulons

Pour résoudre graphiquement un système d'inéquations du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, on représente l'ensemble des solutions de chaque inéquation et on détermine l'intersection de ces ensembles.

Exercices de fixation

4 On donne le système d'inéquations :

$$(S)\begin{cases} 3x-2y-9<0 \\ -3x-4y>-27 \end{cases}.$$

Vérifie si les points suivants appartiennent à l'ensemble de solution du système:

A(3 ; 2) ; B(0 ; 11) et C(-4 ; 3).

5 Résous graphiquement chacun des systèmes d'inéquations suivants :

a) $(S_1)\begin{cases} x+y-3>0 \\ x-y>0 \end{cases}$.

b) (S1) $\begin{cases} 4x+y-5>0 \\ -2x+y+1<0 \end{cases}$.

Activité 4 Traduire une situation à l'aide d'une inéquation

Tiéwolo est élève en 2^{de} C au Lycée Moderne de Sirasso. Elle doit acheter des stylos à 90 F l'unité et des cahiers à 240 F l'unité. Par ailleurs, elle ne dispose que de 2 100 F pour ces achats.

1. **a)** Tiéwolo achète 5 cahiers. Détermine le nombre maximum de stylos que Tiéwolo peut acheter.

   b) Tiéwolo achète 4 stylos. Détermine le nombre maximum de cahiers que Tiéwolo peut acheter.
2. Traduis cette situation par une inéquation.

Récapitulons

On peut traduire des situations par une inéquation du premier degré dans ℝ×ℝ.

Exercices de fixation

6 Fabienne, une élève du Lycée Moderne de Korhogo participe à un jeu de dame. Chaque partie gagnée lui rapporte deux points, et chaque partie nulle ne rapporte qu'un point. Son objectif est d'obtenir au moins 7 points. Écris une inéquation que doivent vérifier le nombre de parties gagnées et le nombre de parties nulles pour que Fabienne atteigne l'objectif qu'elle s'est fixé.

7 Keïta veut faire un petit élevage. Pour cela, il veut acheter des poulets à 2 500 F chacun et des pintades à 4 000 F chacun sans dépasser la somme de 25 000 F dont il dispose. Traduis cette situation par une inéquation.

Activité 5 Traduire une situation par un système d'inéquations

Une entreprise de transport de carburant a un stock de 240 tonnes de gasoil. Elle veut transporter en un seul voyage le maximum de son stock, avec des camions – citernes tous pleins. Pour cela, elle dispose de 20 camions - citernes pouvant transporter chacun 9 tonnes de gasoil et de 15 camions - citernes pouvant transporter chacun 12 tonnes de gasoil.

1. Cite des couples de nombres de camions - citernes de chaque type pouvant transporter le stock.
2. **a)** Tout le stock peut-il être transporté en un voyage ?

   b) Si oui, quel est le nombre minimum de chauffeurs à mobiliser pour transporter tout le stock en un voyage ?

Récapitulons

On peut traduire des situations par un système inéquations du premier degré dans ℝ×ℝ.

Exercices de fixation

8 Le boutiquier du quartier d'un élève de 2^{de} C lui dit ceci : « Si tu prends 3 boites d'allumettes et 2 crayons noirs, tu dépenses moins de 175 F. Par contre, si tu prends 2 boites d'allumettes et 3 crayons noirs tu dépenses plus de 200F ».

Traduis ce problème par un système d'inéquations.

9 Les frais de participation à un camp de vacances sont de 2000F pour un membre de l'organisation et de 2500F pour tout autre participant. On pense recueillir un minimum de 1.000.000 F grâce à la participation des membres et autres participants. Le camp peut accueillir au plus 125 personnes.

Traduis cette situation par un système d'inéquations.

1. INÉQUATIONS DANS $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Définition

On appelle inéquation du premier degré (ou inéquation linéaire) dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, toute inéquation de la forme $ax + by + c \geq 0$ (le symbole $\geq$ pouvant être remplacé par l'un des symboles suivants : $\leq$, $>$ ou $<$).
Une solution d'une inéquation est un couple (x, y) de nombres réels vérifiant cette inégalité.

Exemple :
$3x - 7y + 4 \leq 0$; $x + 2y + 1 > 0$ ... sont des inéquations du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

Régionnement du plan par une droite

Le plan est muni d'un repère (O, I, J).

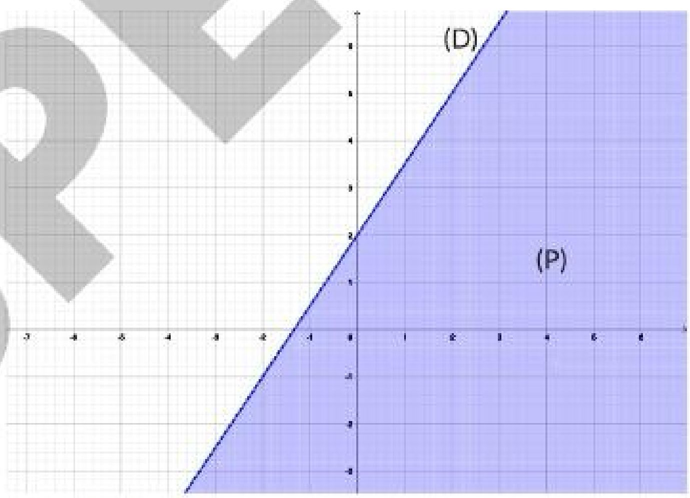
Théorème fondamental

- Toute droite (D) d'équation $ax + by + c = 0$ partage le plan en deux demi-plans ouverts de bord (D) :
- L'un est l'ensemble des points M(x, y) tels que : $ax + by + c > 0$;
- L'autre est l'ensemble des points M(x, y) tels que : $ax + by + c < 0$.

Remarque

Lorsque l'inégalité est large ($\leq$ ou $\geq$), le demi-plan est fermé.

Exemple :
Résous graphiquement l'inéquation (I) : $(x, y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $3x - 2y + 4 > 0$.
Soit (D) la droite d'équation : $3x - 2y + 4 = 0$.
$3 \times 0 - 2 \times 0 + 4 = 4$ et $4 > 0$, donc l'origine O du repère appartient à l'ensemble des solutions de (I). D'après donc la propriété fondamentale, l'ensemble des solutions est le demi-plan (P) ouvert de bord (D) contenant le point O.
Le demi-plan ouvert colorié est l'ensemble des points solutions de l'inéquation (I).



Remarque

Si le point O appartient au bord des demi-plans, on utilise un autre point.

Pour s'entraîner : Exercices 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 12 ; 13 ; 14

2. SYSTÈMES D'INÉQUATIONS DANS $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

Définition

Soit n un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2. Un système de n inéquations du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ est un système du type

(S) $\begin{cases}(I_1)\\(I_2)\\\dots\\(I_n)\end{cases}$ où chacune des inéquations $(I_k)(1 \le k \le n)$ est une inéquation du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

Dans le plan muni d'un repère (O, I, J), chaque inéquation (I_k), pour $1 \le k \le n$, est caractérisée par un demi-plan (P_k). L'ensemble des solutions de (S) est donc l'intersection des demi-plans (P_k) c'est-à-dire l'ensemble des couples de coordonnées de points communs à ces demi-plans.

Exemple 1:

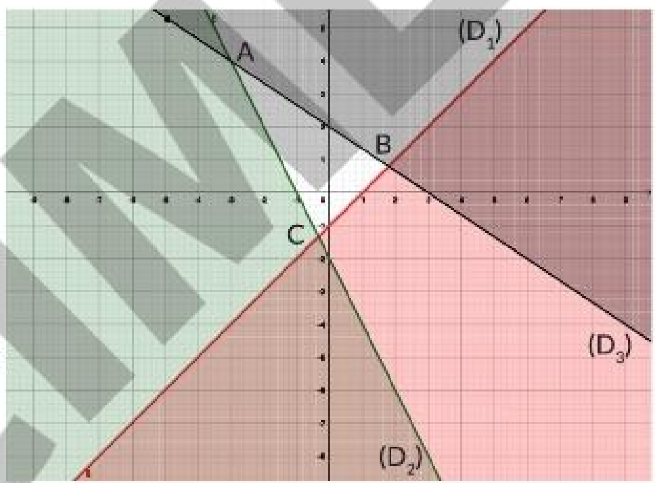
Résous graphiquement le système d'inéquations :

(S) $\begin{cases}x-y-1\le 0\\2x+y+2\ge 0\\2x+3y-6\le 0\end{cases}$

Notons (D_1), (D_2) et (D_3) les droites d'équations respectives :

$x-y-1=0$; $2x+y+2=0$ et $2x+3y-6=0$.

On vérifie que les coordonnées du point O (0, 0) satisfont aux trois inéquations. L'ensemble des solutions du système (S) est l'intérieur du triangle ABC, bords compris.



Pour s'entraîner : Exercices 9 ; 10 ; 11 ; 15 ; 16

Exemple 2:

Programmation linéaire

Les élèves de la classe de 2de C_2 du Lycée Moderne de Diko font une visite dans une unité de production de sachets de graines d'arachide et de sachets de graines d'anacarde. Le responsable de l'unité leur donne les informations suivantes :

l'unité de production utilise deux machines M_1 et M_2. Pour produire un sachet d'arachide, il faut utiliser M_1 pendant 5 minutes et M_2 pendant 2 minutes. Pour produire un sachet d'anacarde, il faut utiliser M_1 pendant 8 minutes et M_2 pendant 4 minutes. Pour pouvoir faire l'entretien, M_1 est disponible 140 minutes par jour et M_2 est disponible 64 minutes par jour.

Par ailleurs l'unité réalise un bénéfice de 100 F par sachet d'arachide et 180 F par sachet d'anacarde.

Retournés en classe, les élèves désirent savoir le nombre de sachets de chaque sorte à produire pour réaliser un bénéfice maximum par jour. Ils désirent également savoir ce bénéfice.

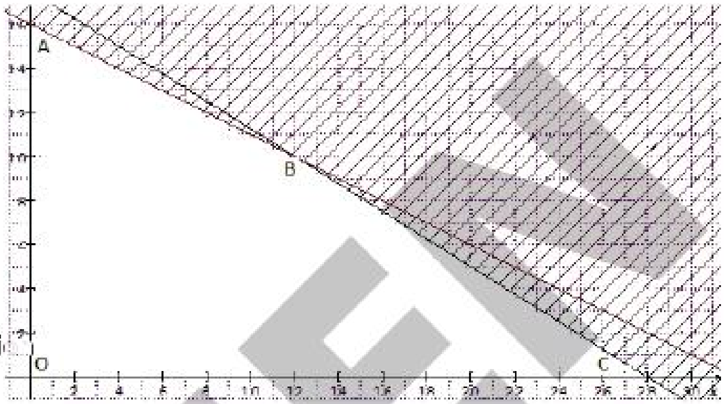
1. Établissons un tableau résumant les données du problème.

	Machine M_1 (minutes)	Machine M_2 (minutes)	Profit (F)
Sachets d'arachide	5	2	100
Sachets de grains d'anacarde	8	4	180
Contraintes	140	64	

2. Traduisons ces données par un système d'inéquations

Soit x le nombre de sachets d'arachide et y le nombre de sachets d'anacarde.

Les contraintes de la production sont :



$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 5x + 8y \leq 140 \ \text{(contraintes de } M_1) \\ 2x + 4y \leq 64 \ \text{(contraintes de } M_2) \end{cases}$$

3. Déterminons le bénéfice

Le bénéfice réalisé est : $b = 100x + 180y$.

4. Résolvons graphiquement le système d'inéquations

a) Déterminons les programmes réalisables

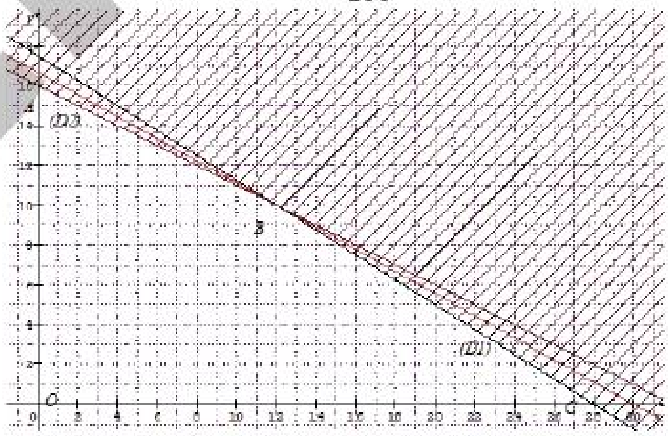
Tout couple (x,y) solution de (S) est appelé un programme réalisable (ici une production réalisable).

L'ensemble des productions réalisables est l'ensemble des points $M(x,y)$, où x et y sont des entiers naturels, de la partie (P) non hachurée ci-dessous de sommets les points O, A, B et C.

b) Déterminons les solutions du programme

Les coordonnées des points de la droite (D) d'équation $100x + 180y = b$ (ou encore $y = -\dfrac{5}{9}x + \dfrac{b}{180}$) correspondent aux programmes (x,y) qui, si elles sont solutions du système (S), assurent à l'unité de production le bénéfice b. Ce bénéfice est d'autant plus grand que l'ordonnée à l'origine de la droite (D) (c'est-à-dire $\dfrac{b}{180}$) est grande.

Ainsi, parmi toutes les droites de coefficient $-\dfrac{5}{9}$ et dont l'intersection avec le quadrilatère ABCO est non vide, celle dont l'ordonnée à l'origine est maximale donne la solution du problème. Graphiquement, l'intersection de la droite (D) et du quadrilatère ABCO est le point d'intersection B de (D_1) et (D_2). Sur le graphique ci-contre, cette droite est en rouge.



Déterminons les coordonnées $(x\ ;\ y)$ de B. Elles vérifient $\begin{cases} 5x + 8y - 140 = 0 \\ 2x + 4y - 64 = 0 \end{cases}$.

Vérifie que B(12, 10).

L'unité de production doit produire 12 sachets d'arachide et 10 sachets d'anacarde chaque jour pour réaliser un bénéfice maximal. Le bénéfice sera alors égal à : $100 \times 12 + 180 \times 10 = 3000$.

Remarque : Lorsqu'on détermine les coordonnées du point $M(x,y)$, M parcourant l'ensemble des productions réalisables, on dit qu'on a maximisé le bénéfice $100x + 180y$ en respectant les contraintes du système (S).

QUESTION 1

Comment résoudre une inéquation du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$?

Méthode

Pour savoir quel demi-plan représente l'ensemble des solutions d'une équation du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ du type: $ax + by + c < 0$ ou $ax + by + c > 0$, on peut procéder comme suit :

- on teste un point particulier, par exemple l'origine du repère ;
- si le test est positif, l'ensemble des solutions de l'inéquation est le demi-plan de bord la droite (D) d'équation $ax + by + c = 0$ contenant ce point, sinon c'est le demi-plan de bord la droite (D) ne contenant pas ce point.

Exercice

On considère dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ l'inéquation (I): $2x + 3y - 1 < 0$. Résous graphiquement l'inéquation (I).

Solution commentée

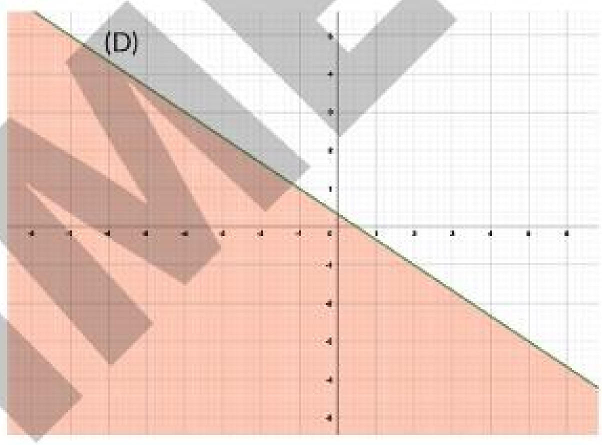
On donne la droite (D) d'équation : $2x + 3y - 1 = 0$.

On détermine la valeur numérique de l'expression pour un couple de nombres réels particulier.

Pour le couple (0;0), on a : $2 \times 0 + 3 \times 0 - 1 = -1$.

Donc tous les couples du demi-plan de frontière (D) contenant (0;0) vérifient : $2x + 3y - 1 \leq 0$.

Par conséquent, l'ensemble des solutions de l'inéquation est la partie coloriée du plan constituée de la droite (D) et du demi-plan de bord contenant le point O.



Exercice non corrigé

Résous graphiquement dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, l'inéquation : $2x - y - 5 > 0$.

QUESTION 2

Comment résoudre un système d'inéquations du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$?

Méthode

Pour résoudre graphiquement un système d'inéquations linéaires à deux inconnues, on représente dans un repère l'ensemble des points M dont les coordonnées $(x\,;y)$ vérifient simultanément toutes les inéquations du système.

Exercice

On donne le système suivant: (S) $\begin{cases} 3x - 2y - 9 < 0 \\ 3x + 4y - 27 < 0 \end{cases}$. Résous graphiquement le système (S).

■ Solution commentée

On trace la droite (D) d'équation : $3x - 2y - 9 = 0$.

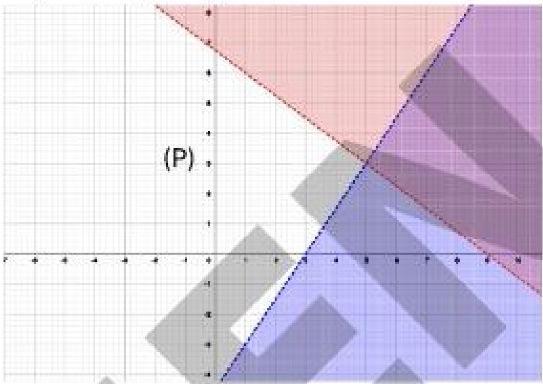
On trace la droite (D') d'équation : $3x + 4y - 27 = 0$.

Les coordonnées de O(0;0) vérifient la première inéquation car l'inégalité: $3 \times 0 - 2 \times 0 - 9 < 0$ est vraie.

Les coordonnées de O(0;0) vérifient la deuxième inéquation car l'inégalité: $3 \times 0 + 4 \times 0 - 27 < 0$ est vraie.

Donc les demi-plans qui représentent les solutions des deux inéquations du système sont respectivement les demi-plans de frontières (D) et (D'), contenant le point O.

Les solutions du système sont représentées par la partie du plan (P) non colorié.



■ Exercice non corrigé

Résous graphiquement dans ℝ×ℝ, le système suivant : (S) $\begin{cases} x+2y-3<0 \\ 2x-y-1 \geq 0 \end{cases}$.

QUESTION 3

Comment résoudre graphiquement des situations concrètes à l'aide d'inéquations du premier degré dans ℝ×ℝ ?

Méthode

Pour résoudre un problème concret se ramenant à une inéquation du premier degré dans ℝ×ℝ, on choisit les inconnues x et y, on traduit les données du problème à l'aide d'une inéquation du premier degré dans ℝ×ℝ, puis on utilise la méthode suggéré dans la question d'évaluation 1, tout en respectant les contraintes éventuelles sur x et y

■ Exercice

Le bureau du conseil scolaire d'un lycée souhaite se procurer des revenus pour financer ses activités. Pour cela, les membres ont décidé de la vente de yaourt dont les filles membres excellent à la fabrication.

La fabrication hebdomadaire ne nécessite que l'achat du sucre et du lait.

Le prix d'un kilogramme de sucre est actuellement de 750 F et celui du lait, 1500 F.

Le bureau ne veut pas excéder 11000 F de dépenses par semaine et discute avec ses membres de la quantité de sucre et de lait nécessaires. Aide les membres du bureau à l'aide d'une résolution graphique.

■ Solution commentée

Choix des inconnues

Soit x le nombre de kilogrammes de sucre et y le nombre de kilogrammes de lait. $x > 0$ et $y > 0$.

Mise en équation

*La somme à payer pour l'achat du sucre est: $750x$.

*La somme à payer pour l'achat du lait est: $1500y$.

Ainsi on peut traduire cette situation par l'inéquation suivante (I): $750x + 1500y \leq 11000$.

Recherche graphique des solutions de l'inéquation (I)

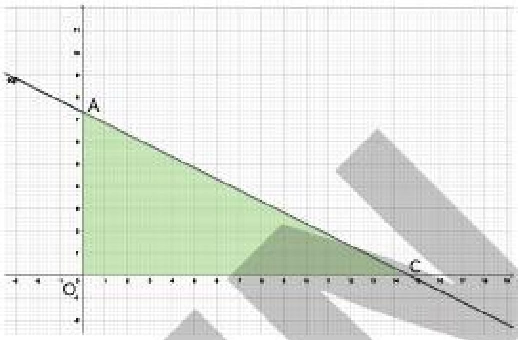
On a : $750x + 1500y \leq 11000 \Leftrightarrow 3x + 6y - 44 \leq 0$.

Construisons la droite (D) d'équation : $3x + 6y - 44 = 0$.

Vérifions si les coordonnées du point O sont solutions de l'inéquation: $3\times0+6\times0-44=-44$ et $-44<0$, donc l'origine O du repère appartient à l'ensemble des solutions. D'après donc la propriété fondamentale, l'ensemble des solutions est le demi-plan fermé (P) de bord (D) contenant le point O pour lesquels $x>0$ et $y>0$.

Le demi-plan fermé hachuré est l'ensemble des points solutions de l'inéquation (I).

C'est l'intérieur du triangle OAB, le point O exclu.



Exercice non corrigé

Tiengbé se rend au marché de gros de Bouaké pour acheter de la viande de bœuf et de mouton. Le prix du kilogramme de la viande de bœuf est fixé à 3.000 F et celui du mouton à 4.000 F. Tiengbé dispose de 45.000 F pour effectuer ses achats. Elle désire savoir les quantités possibles de viande de bœuf et de mouton qu'elle peux acheter. À l'aide d'une solution graphique, propose lui une solution.

QUESTION 4

Comment résoudre des situations concrètes à l'aide de système d'inéquations du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$?

Méthode

- Faire le choix des inconnues
- Déterminer les contraintes éventuelles sur ces inconnues
- Faire la mise en équation
- Rechercher graphiquement des solutions du système d'inéquations (voir la méthode de la question d'évaluation 2)

Exercice

Tchéplé se rend au marché Tchedal, le jour de grand marché de Korhogo pour acheter au moins 10 habits composés de robes et de jupes. Sachant qu'une robe est vendue ce jour-là à 400 F CFA et une jupe à 700 F CFA, elle désire savoir combien de jupes et de robes pourra-t-elle s'offrir avec 5000 F CFA.

Ne sachant pas résoudre ce problème, elle s'adresse à toi.

Propose-lui une solution.

Solution commentée

Choix des inconnues

Soit x le nombre de robes et y le nombre de jupes.

Mise en équation

- ✓ *La condition "Tchéplé veut acheter au moins 10 habits composés de robes et de jupes" se traduit par: $x+y\geq10$.
- ✓ *La condition "Elle désire savoir combien de jupes et de robes pourra t'elle s'offrir avec 5000 FCFA" se traduit par :

  $400x+700y\leq5000$.

- ✓ Ainsi cette situation se traduit par le système suivant: $\begin{cases} x+y\geq10 \\ 400x+700y\leq5000 \end{cases}$.

Recherche graphique des solutions du système(S)

$$\begin{cases} x+y\geq10 \\ 400x+700y\leq5000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y\geq10 \\ 4x+7y\leq50 \end{cases}$$

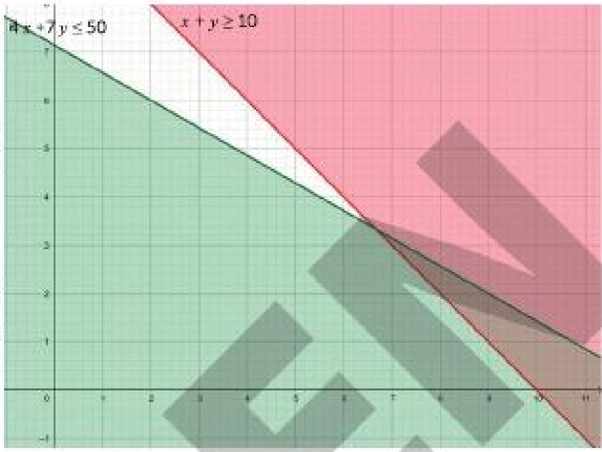
- ✓ Traçons la droite (D) d'équation : $y=-x+10$.

Les solutions de l'inéquation: $x+y\geq10$ sont les points M de coordonnées $(x\,,y)$ se trouvant dans la partie hachurée en-dessous de la droite (D).

✓ Traçons la droite (L) d'équation : $y=-\frac{4}{7}x+\frac{50}{7}$.

Les solutions de l'inéquation: $4x + 7y \leq 50$ sont les points M de coordonnées $(x\ ,y)$ se trouvant dans la partie hachurée au-dessus de la droite (L).

L'ensemble S des solutions du système est alors l'ensemble des couples $(x\ ,y)$ (où x et y sont des entiers naturels) correspondants aux coordonnées des points M se trouvant dans la partie avec les deux hachures, droites incluses.



Exercice non corrigé 1

Le club santé d'un lycée municipal veut acheter des casquettes et des chapeaux pour coiffer les participants à une campagne de sensibilisation contre le tabac à l'école. Une casquette est vendu à 100 F et un chapeau à 150 F. Il faut au moins 10 casquettes et au moins 7 chapeaux. En outre, le club souhaite que l'achat atteigne au moins 2100 F et ne doit pas dépasser 2400 F.

À l'aide d'une approche graphique, réponds à la préoccupation du club.

Exercice non corrigé 2

On désire acheter pour la salle d'attente des chaises en plastique à 6 000 F l'une, et des chaises en bois à 12 000 F l'une. On exige les trois conditions suivantes :

- au moins deux des chaises en plastique.
- plus de chaises en bois que de chaises en plastique.
- la dépense doit être inférieure ou égale à 90 000 F.

Détermine les diverses possibilités d'achats.

Exercices de fixation

Dans tous les exercices, le plan est rapporté à un repère (O, I, J).

Théorème fondamental relatif à l'interprétation géométrique d'une inéquation du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

1 Écris le numéro de chaque affirmation suivi de V si l'affirmation est vraie ou de F si elle est fausse.

N°	Affirmations
1	L'ensemble des points M(x ;y) tels que : $2x+3y-5\geq 0$ est un demi-plan .
2	La droite d'équation $y=2$ partage le plan en 3 demi-plans .
3	La droite d'équation $x-y=2$ partage le plan en 2 demi-plans.

2 On note (P) l'ensemble des points M(x ; y) tels que : $-x+3y+2\geq 0$.
Parmi les points ci-après, cite ceux qui appartiennent à (P) : O ; A(2, −1) ; B(3, −3) ; C(2, 0) ; D(5, 3).

3 Soit l'inéquation : $3y<6-2x$.

Vérifie si les couples de nombres réels suivants sont solutions de l'inéquation : (0 ; −2) ; (0 ; 0) ; (1 ; 3) ; (4 ; 2).

4 On considère l'inéquation suivante : $2x-3y+8\geq 0$.

Détermine une valeur de a pour que le couple $(\frac{a}{2};-a)$ soit solution de cette inéquation.

5 On note (S) le système : $\begin{cases}-x+3y+2\leq 0\\ x+y-5<0\end{cases}$.

Parmi les points ci-après, cite ceux qui appartiennent à (P), ensemble des points M(x ; y) solutions de (S) :

O(0 ;0) ; A(2, −1) ; B(3, −3) ; C(2, 0) ; D(5, 3).

Résolution graphique d'une inéquation du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

6 Parmi les programmes suivants, choisis celui qui permet de résoudre l'inéquation suivante :

$2x-y+1\geq 0$.

Programme 1

- Tracer la droite (D) d'équation $2x-y+1=0$;
- Vérifier que le point O est solution de l'inéquation $2x-y+1\geq 0$;
- Prendre pour ensemble de solutions le demi-plan ouvert de bord (D) contenant O.

Programme 2

- Tracer la droite (D) d'équation $2x-y+1=0$;
- Vérifier que le point O est solution de l'inéquation : $2x-y+1\geq 0$;
- Prendre pour ensemble de solutions le demi-plan fermé de bord (D) ne contenant pas O.

Programme 3

- Tracer la droite (D) d'équation : $2x-y+1=0$;
- Vérifier que le point O est solution de l'inéquation : $2x-y+1\geq 0$;
- Prendre pour ensemble de solutions le demi-plan fermé de bord (D) contenant O.

7 Résous graphiquement chacune des inéquations suivantes :

a) $x-4y+3<0$; b) $x-y+2\geq 0$; c) $3x+y>0$;

d) $y-2\leq 0$.

8 Résous graphiquement dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $y<0$; 2) $x\geq 1$;

3) $2y-\frac{3}{2}<x+\frac{5}{6}$; 4) $-4y-\frac{2}{3}>\frac{3}{2}x+4$.

Résolution graphique d'un système d'inéquations du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

9 Résous graphiquement chacun des systèmes d'inéquations suivants :

1) $\begin{cases}2x-2y+1<0\\ x-y+2<0\end{cases}$; 2) $\begin{cases}x+2y-1>0\\ x+5y+4<0\end{cases}$.

10 Résous graphiquement chacun des systèmes d'inéquations suivants :

1) $\begin{cases}2x+3y-5<0\\ 3x+y-2\leq 0\end{cases}$; 2) $\begin{cases}x+y+4\geq 0\\ 2x-y<0\end{cases}$.

3) $\begin{cases}2x-y\leq 3\\ 4x+3y>0\end{cases}$; 4) $\begin{cases}2x+3y-3\geq 0\\ 3x-2y-5\geq 0\end{cases}$.

11 Détermine la partie du plan dont les points de coordonnées (x,y) vérifient le système, dans chacun des cas suivants :

$(S_1)\begin{cases}-2x-3y+1<0\\ 5x-y+4\leq 0\end{cases}$; $(S_2)\begin{cases}3x+2y>1\\ 4x-3y<2\end{cases}$;

$(S_3)\begin{cases}x+\frac{1}{2}y\leq 2\\ 2x+y\geq 14\end{cases}$; $(S_4)\begin{cases}x-y+1>0\\ 2x+y-4\geq 0\end{cases}$.

Traduire en inéquations diverses situations concrètes

12 Traduis les propositions suivantes par une inéquation du premier degré à deux variables.

a) La somme de deux nombres ne dépasse pas 7.

b) Le double du premier nombre diminué du second nombre est supérieur à −6.

c) Le tiers du premier nombre augmenté du quadruple du second est au moins égal à 5.

d) La différence de deux nombres est inférieure à 9.

13 Pour un concert, les places valent 4 200 F ou 8000 F. Une association dispose de 150 000 F pour acheter des places au concert.

L'association veut déterminer le nombre maximum des personnes qu'elle peut envoyer au concert.

Traduis les données sous forme d'une inéquation du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

14 Une entreprise fabrique deux modèles de jouets A et B. La confection d'un jouet du modèle A nécessite 36 minutes de travail et celle du modèle B, 48 minutes de travail. Elle dispose de 624 minutes de travail par jour. Traduis cette situation par une inéquation du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

Traduire en systèmes d'inéquations diverses situations concrètes

15 Les élèves d'une classe de 2de C décident d'acheter plus de 8 annales de maths et de physiques, mais leur dépense doit être inférieure à 18 000 frs. Sachant qu'un annale de maths coute 1500 frs et un annale de science physique coute 2250 frs, quelles sont les possibilités d'achat par les élèves ?
Traduis cette situation par un système d'inéquations du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

16 Une entreprise fabrique des fauteuils et des chaises à l'aide de trois machines A, B et C. Pour fabriquer un fauteuil, il faut utiliser les machines A et B pendant une heure, la machines C pendant trois heures. Pour fabriquer une chaise, on utilise les machines A et C pendant une heure, la machines B pendant deux heures. Mais les machines ne sont disponibles que 60 heures pour A, 90 heures pour B , 150 heures pour C. Un fauteuil génère un bénéfice de 10 000 F et une chaise 5 000 F. Traduis cette situation par un système d'inéquations du premier degré dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

Exercices de renforcement/approfondissement

17 Résous graphiquement les inéquations suivantes:

$(I_1) : 3x + 2y - 6 \geq 0$;

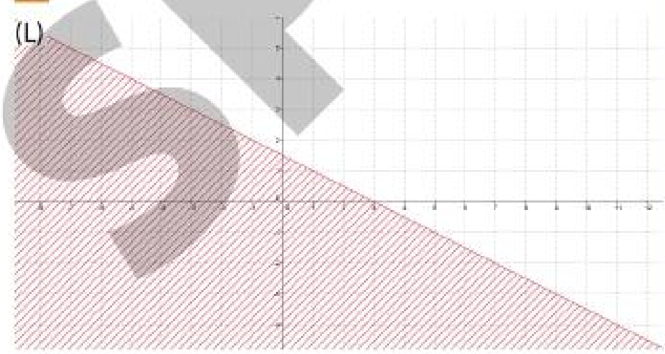
$(I_2) : x + 4y + 4 < 0$;

$(I_3) : 2x - y > 0$;

$(I_4) : -3x + y - 1 \leq 0$.

18

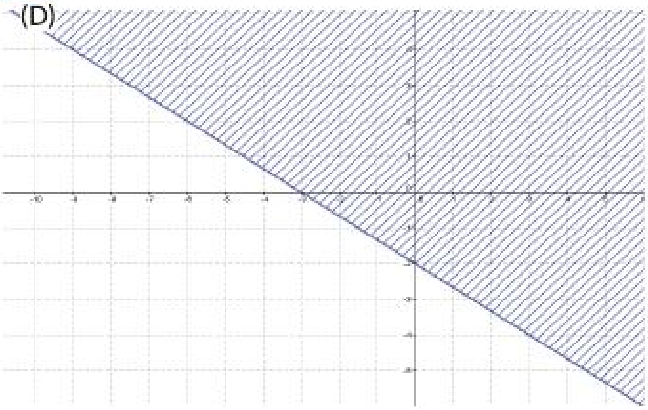
(L)



1. Détermine une équation de la droite (L).
2. Détermine une inéquation dont l'ensemble des solutions est la partie hachurée en rouge.

19

(D)



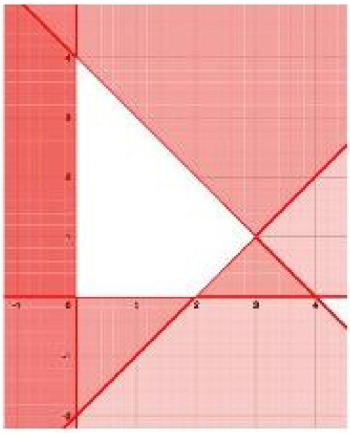
1. Détermine une équation de la droite (D).
2. Détermine une inéquation dont l'ensemble des solutions est la partie coloriée.

20 On donne le système (S) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x+y-4 \leq 0 \\ y-x+2 \geq 0 \end{cases}$.

On a représenté les droites d'équations :

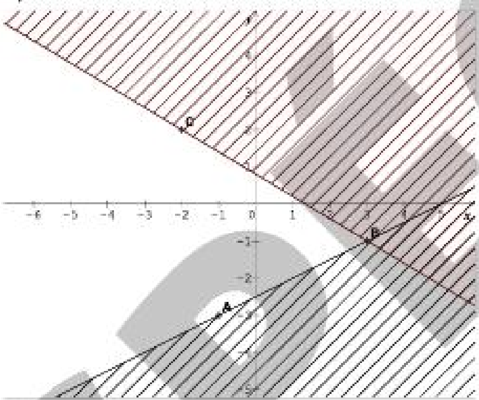
$x = 0$; $y = 0$; $x + y - 4 = 0$; $-x + y + 2 = 0$.

Interprète graphiquement les solutions du système (S).

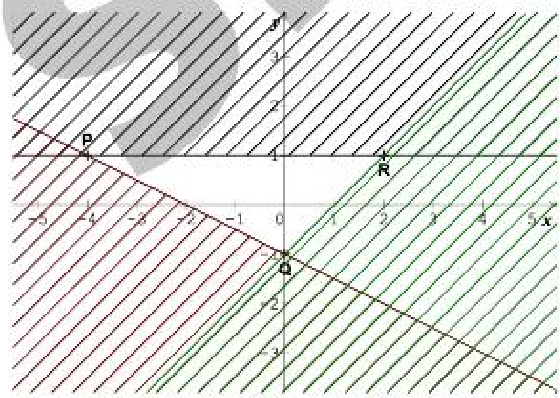


21 Détermine un système d'inéquations caractérisant, dans chacun des cas, la partie non hachurée, côtés inclus.

a)



b)



22 Moussa, installé au coin de la rue princesse, fait rapidement ses comptes : il lui reste 1 kg de pâte, 1600 g de tomates et 1080 g de champignons. Il cuit deux sortes de pizzas :

- La Stromboli pour laquelle il lui faut 100 g de pâte, 180 g de tomates et 80 g de champignons
- La Vesuvio pour laquelle il lui faut 100 g de pâte, 80 g de tomates et 120 g de champignons

Sachant qu'une Vesuvio lui rapporte 8 000 F et une Stromboli 9 000 F, détermine le nombre de pizzas de chaque sorte qui lui permet de maximiser son revenu.

23 Résous graphiquement chacun des systèmes d'inéquations suivants :

1) $\begin{cases} x+3y-5>0 \\ x+y-3<0 \\ x-2y>0 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x \leq y \\ 2x+y \geq 0 \\ x+2y-6 \leq 0 \end{cases}$;

3) $\begin{cases} 3x-y+3>0 \\ 0{,}5x+y-3 \geq 0 \\ 4x+3y-7<0 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} x \geq -5 \\ x+y-5 \leq 0 \\ 5x+2y \leq 20 \end{cases}$.

24 Représente graphiquement en couleur la partie du plan déterminée par chacun des systèmes d'inéquations suivants :

a) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \leq 0 \\ -0{,}5x-y+1 \leq 0 \\ 2{,}5x-y-5 \leq 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 0<y<3 \\ x+y>0 \\ -x+y+2>0 \end{cases}$.

25 Une entreprise fabrique deux modèles de jouets A et B. La confection d'un jouet du modèle A nécessite 36 minutes de travail et celle du modèle B, 48 minutes de travail. Elle dispose de 624 minutes de travail par jour et peut fabriquer 15 jouets par jour au plus.

1. Justifie que les contraintes de cette production de jouets sont caractérisées par le système d'inéquations suivant :

$$\begin{cases} x \in N \\ y \in N \\ x+y-15 \leq 0 \\ 3x+4y-52 \leq 0 \end{cases}.$$

2. Représente les solutions de ce système.

26 Pendant les grandes vacances, Rémi un élève de 2de C d'un lycée fait un petit commerce de pantalons et de chaussures. Le fournisseur lui propose des pantalons à 8000 F l'unité et des chaussures à 4000 F l'unité. Cependant, il dispose de moins de 32 000 F et veut commander plus de chaussures que de pantalons.

1. Justifie que les contraintes du problème peuvent être traduites par le système : $\begin{cases} 2x+y<8 \\ x<y \end{cases}$.
2. Résous graphiquement ce système.
3. Déduis-en toutes les possibilités de commandes qui s'offrent à Rémi.

27 On note (E) l'ensemble des points M(x, y) définis par le système : $\begin{cases} 2x+3y \leq 30 \\ x+y \leq 11 \\ 4x+y \leq 32 \end{cases}$.

1. Représente (E).
2. Maximise la fonction $f(x,y) = 3x + 2y$ en respectant les contraintes de (E).

28

1. Représente l'ensemble des points M(x, y) définis par le système :(S) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x-y+2 \geq 0 \\ x+y-4 \leq 0 \end{cases}$.
2. Minimise la fonction $(x,y) \mapsto 5x - 3y$ en respectant les contraintes du système (S).

Situations complexes

29 Monsieur Séri travaille dans une équipe de la société « COULEUR », qui fabrique de la peinture à eau et de la peinture à huile. Son neveu Ali, élève en seconde C dans un lycée, l'accompagne pendant les congés de Pâques. Ali suit attentivement les activités de l'équipe et pose des questions au chef de l'équipe. Celui-ci lui fournit les informations suivantes :

« L'équipe dispose de 360 minutes de travail par jour et peut engager jusqu'à 60 000 F dans la production quotidienne. La production d'un fût de peinture à eau coûte 1 500 F, demande 12 minutes de travail et rapporte 3000 F. Celle d'un fût de peinture à huile coûte 2 000 F, demande 8 minutes et rapporte 3000 F également ».

Ali se propose de déterminer le bénéfice maximum que peut réaliser cette équipe.

Propose-lui une solution en déterminant le nombre de fûts de chaque type qui réalise ce bénéfice maximum.

30 Tu es gérant d'une petite entreprise familiale qui fabrique deux produits A et B. L'entreprise doit produire chaque jour au moins 300 kg de produit A et 200 kg de produit B. L'entreprise dans son fonctionnement est confrontée aux contraintes suivantes :

- la fabrication journalière d'un kilogramme de produit A entraine une dépense de 30 F et celle d'un kilogramme de produit B entraine une dépense de 10 F.
- le budget de l'entreprise ne permet pas de consacrer plus de 22000 F par jour à la fabrication de ces deux produits.
- la fabrication journalière de 100 kg du produit A nécessite 1 h de travail et celle de 100 kg du produits B nécessite 2 h de travail alors que l'entreprise travaille au maximum 16 h par jour.
- les produits sont conditionnés séparément dans des sacs de 100 kg et la production journalière doit correspondre à un nombre entier de sacs.

Tu souhaites sous ces contraintes que la masse totale de produits fabriqués soit maximum.

Détermine graphiquement à l'aide de tes connaissances mathématiques, les couple (x, y) pour lesquels la masse totale $x + y$ de produits fabriqués par jour est maximum. (On prendra sur chaque axe 1 cm pour 100 kg de produit)

31 Les organisateurs d'un concours proposent aux classes lauréates un voyage. Ils s'adressent à un transporteur qui dispose de 10 cars de 40 places et de 8 cars de 50 places. Les cars devront transporter 540 personnes (les élèves et leurs accompagnateurs). Le transporteur demande 250 000 F par autocar de 40 places et 300 000 F par autocar de 50 places. Les organisateurs veulent que la dépense pour le transport soit la plus faible possible.

Informés de ces conditions, des élèves de 2de C se demandent combien de cars de chaque type faut-il pour ce voyage.

Sollicité, réponds à la préoccupation de ces élèves en basant ton raisonnement sur tes connaissance mathématiques.

Achevé d'imprimer sous les presses de : JD Éditions
pour le compte de JD éditions.
Tél. : 25 23 00 17 50
Mise en page : JD Éditions
2e trimestre 2022
Dépôt légal N° 18745 du 15 juin 2022

Mon livre de MATHÉMATIQUES

Découvrez nos manuels
de la même collection

COVID-19 / MESURES DE PREVENTIONS

Lavez-vous les mains fréquemment | Respectez la distanciation physique | Portez un masque | Toussez ou éternuez dans votre coude | Ouvrez les fenêtres | Faites-vous vacciner

ISBN : 978-2-493344-43-4