COLLECTION PYRAMIDE

Guide du Professeur

Mon livre de MATHÉMATIQUES

Tle D

CORRIGÉS DES EXERCICES

- Découverte des habiletés
- Des questions d'évaluation
- Mes séances d'exercices

MATÉRIALISEZ VOS IDÉES
JD Editions
L'Edition autrement

COLLECTION PYRAMIDE

Guide du Professeur

Mon livre de Mathématiques

T^{le} D

CORRIGÉS DES EXERCICES

- Découverte des habiletés
- Des questions d'évaluation
- Mes séances d'exercices

JD Éditions
21 B.P. 3636 Abidjan 21
Côte d'Ivoire

SOMMAIRE

Ce document pourrait contenir des erreurs au fautes de frappes.
Prière les signaler à l'adresse : kyoussouphou@gmail.com

1 LIMITES ET CONTINUITÉ

I- LA SITUATION D'APPRENTISSAGE

- Apres la lecture de la situation d'apprentissage (par le professeur, par un élève et une lecture silencieuse des élèves), l'enseignant pourra s'assurer que les élèves ont bien compris le texte.

- Il pourra ensuite faire dégager les constituants de la situation à travers une ou des questions du type :

Constituants de la situation	Exemples de questions possibles	Réponses possibles des élèves
Contexte	-De quel évènement parle le texte ? -Quels sont les acteurs principaux de cet évènement ? -A quel moment se déroule l'évènement ?	-La variation d'un cm^3 de phosphore en fonction de la température. -les acteurs sont des élèves de terminale. -C'est pendant le cours de physique-chimie.
Circonstance	Quel problème ou quelle difficulté rencontrent les élèves ?	Il s'agit d'un phénomène d'augmentation brusque de 35 mm^3 du volume autour de 44°.
Tâches	-Que décident de faire les élèves ? -Comment s'y prennent-ils ?	-Ils décident d'étudier le comportement du volume de phosphore. -Ils veulent prendre des valeurs proches de 44° par la gauche et par la droite.

Le professeur utilisera la tâche énoncée par ses élèves pour faire la synthèse de la situation et présentera le plan de la leçon. Il devra dans la mesure du possible se référer à la situation durant tout le déroulement de la leçon.

II. DECOUVERTE DES HABILETES

<u>ACTIVITE 1</u> : Limite d'une fonction en utilisant les limites de référence (Rappel)

- L'objectif de cette activité est de déterminer la limite d'une fonction en utilisant les limites de référence.
- Réponses aux questions de l'activité.

1. a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-6=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$

   b) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^5-1=-\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} x^5=-\infty$

   c) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^4+3=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} x^4=+\infty$

   d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^3}-1=0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^3}=0$

   e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}+2=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}=+\infty$

2.

Colonne A	Colonne B
$\lim\limits_{x\to3} \frac{1}{(x-3)^4}$ *	• 0
$\lim\limits_{\substack{x\to 8\\<}} \frac{1}{(x-8)^5}$ *	• $+\infty$
$\lim\limits_{x\to0} \frac{sinx}{x}$ *	• $-\infty$
$\lim\limits_{x\to0} \frac{cosx-1}{x}$ *	• 1

3. La limite : d

- Corrigé des exercices de fixation

<u>Exercice 1</u>

a) $\lim\limits_{\substack{x\to3\\>}} \frac{1}{x-3}=+\infty$; b) $\lim\limits_{\substack{x\to3\\<}} \frac{1}{x-3}=-\infty$

<u>Exercice 2</u>

a) $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}} \frac{1}{(x+1)^3}=+\infty$; b) $\lim\limits_{\substack{x\to5\\<}} \frac{1}{(x-5)^2}=+\infty$

<u>Exercice 3</u>

a) $\lim\limits_{x\to0} \frac{1-cosx}{x^2}=\frac{1}{2}$; b) $\lim\limits_{x\to0} \frac{x}{sinx}=1$

ACTIVITE 2 : Limite d'une restriction.

- L'objectif de cette activité est de déterminer la limite d'une fonction en utilisant la limite d'une restriction.
- Réponses aux questions de l'activité.

1) Comme $x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ *alors x est positif et alors* $x = (\sqrt{x})^2$; on a donc :

$\frac{\sqrt{x}-x}{x-1} = \frac{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}$. Comme $x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ *alors* , $\frac{\sqrt{x}-x}{x-1} = -\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$

2) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right) = \frac{1}{2}$

3) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-x}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \left(-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right) = -\frac{1}{2}$

* En multipliant numérateur et dénominateur par l'expression conjuguée de $\sqrt{x} - x$, on a :

$$\frac{\sqrt{x}-x}{x-1} = \frac{(\sqrt{x}-x)(\sqrt{x}+x)}{(x-1)(\sqrt{x}+x)} = \frac{x-x^2}{(x-1)(\sqrt{x}+x)}$$

Ce qui donne après factorisation et réduction : $\frac{\sqrt{x}-x}{x-1} = \frac{-x}{\sqrt{x}+x}$ (même limite)

- Corrigé de l'exercice de fixation

Exercice 4

a) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3} x+3 = 6$; b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} = \frac{1}{4}$; c) $\lim\limits_{\substack{x\to -2 \\ <}} \frac{|x|-2}{2x+4} = \lim\limits_{\substack{x\to -2 \\ <}} \frac{-x-2}{2(x+2)} = \lim\limits_{x\to -2} -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$.

ACTIVITE 3: Lien entre limite à gauche, limite à droite et limite d'une fonction en un point

- L'objectif de cette activité est d'étudier la limite d'une fonction en un point.
- Réponses aux questions de l'activité.

I.

1) $a)$ $\lim\limits_{x \underset{<}{\to} -1} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} (-x^2-1) = -2$ *donc* $l = -2$

$b)$ $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} -1} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1} (x-1) = -2$ *donc* $m = -2$

2) $f(-1) = -2$

3) on déduit que : $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = -2$ *car* $l = m = f(-1)$.

II.

1) La fonction f n'a pas d'image en 0 car 0 n'appartient pas à son ensemble de définition qui est $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

2) $\lim\limits_{x \underset{<}{\to} 0} \mathrm{f}(x) = \lim\limits_{x \underset{<}{\to} 0} \frac{x(x+1)}{2x} = \frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} \left(-\frac{x}{2x} + 1\right) = \frac{1}{2}$

3) On en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2}$ car on a la même limite à gauche et à droite en 0.

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 5

1-F ; 2-F ; 3-F.

Exercice 6

Pour $x \in]-\infty; -2]$, soit $x < -\frac{3}{2}$, on a : $f(x) = -2x - 3$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ <}} f(x) = 1$

$f(-2) = 1$

$si\ x \in]-2\,;+\infty[$ alors $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ >}} x + 3 = 1$

On en déduit que $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = 1$.

Exercice 7

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = \lim_{x \to 1} x^2 = 1\,;\ \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = \lim_{x \to 1} x + 1 = 2; f(1) = 2.$$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) \neq \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x)$ donc f n'admet pas de limite en 1.

ACTIVITE 4 : Limites et opérations sur les fonctions (Rappel)

- L'objectif de cette activité est de déterminer la limite d'une fonction en utilisant les opérations sur les fonctions.
- Réponses aux questions de l'activité.
  a) Somme de deux fonctions

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} - x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} - 2x = -\infty$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x^3 - 2x) = -\infty$; on ne peut pas conclure, pour $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{\sqrt{x}} - 2x\right)$ directement. On a une forme indéterminée.

   b) Produit de deux fonctions

   $\lim\limits_{x \to -\infty} (ft)(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} (gh)(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} (gt)(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} (th)(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} (fg)(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (fh)(x)$:on ne peut pas conclure pour ces deux limites.(forme indéterminée)

   c) Quotient de deux fonctions

1	$\lim\limits_{x \to a} f(x) = 1$	$\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x \to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$ =0
2	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$	$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$ =0
3	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$ F.I

4	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$ F.I
5	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -2$	$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$ $et\ \ g(x) > 0$	$\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = -\infty.$
6	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$	$\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$	$\lim\limits_{x\to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$ F.I

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 8

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ d'après les propriétés sur la limite de la somme de deux fonctions, $\lim\limits_{x\to+\infty} (f+g)(x) = +\infty$.

Exercice 9

1	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -4$	$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty} (fg)(x) = +\infty$
2	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$	$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} (fg)(x)$ F.I
3	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} (fg)(x) = -\infty$
4	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -1$	$\lim\limits_{x\to-\infty} (fg)(x) = -\infty$

Exercice 10

Comme $\lim\limits_{x\to2} f(x) = -\frac{3}{2}$ et $\lim\limits_{x\to2} g(x) = -6$ alors $\lim\limits_{x\to2} (fg)(x) = 9$

Exercice 11

1-F ; 2-F ; 3-F ; 4-V

Exercice 12

Comme $\lim\limits_{x\to0} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to0} g(x) = 0$, on ne peut conclure directement.

$\lim\limits_{x\to0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \lim\limits_{x\to0} \frac{-1+cosx}{sinx} = \lim\limits_{x\to0} \frac{cos^2x-1}{sinx(cosx+1)} = \lim\limits_{x\to0} \frac{-sinx}{cosx+1} = 0.$

Exercice 13

Comme $\lim\limits_{x\to0} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to0} g(x) = 0$, on ne peut conclure directement.

$$\lim_{x\to0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \lim_{x\to0} \frac{1-cos^2x}{xtanx} = \lim_{x\to0} \left(\frac{sinx}{x}\right) \times cosx = 1$$

ACTIVITE 5 : Limite d'une fonction composée

- L'objectif de cette activité est de déterminer la limite d'une fonction composée .
- Réponses aux questions de l'activité.

1) $h(x) = gof(x) = \sqrt{\frac{5x+4}{x+1}}$

2) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = 2$ et $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{\frac{5x+4}{x+1}} = 2$.

3) On a $\lim\limits_{x \to 0} gof(x) = \lim\limits_{x \to 0} \sqrt{\frac{5x+4}{x+1}} = 2$ donc $\lim\limits_{x \to 0} gof(x) = \lim\limits_{x \to 1} g(x) = 2.$.

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 14

Détermine les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to +\infty} xsin(\frac{2}{x})$ et $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tan3x}{x}$

❖ Corrigé :

a) Posons : $u(x) = \frac{2}{x}$; $v(x) = \frac{sinx}{x}$ et $h(x) = vou(x) = \frac{sin\frac{2}{x}}{\frac{2}{x}}$

on a donc $h(x) = \frac{1}{2}\, xsin\frac{2}{x}$ d'où $xsin\left(\frac{2}{x}\right) = \frac{1}{2}\, vou(x)$

par conséquent : $\lim\limits_{x \to +\infty} xsin\left(\frac{2}{x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{2}\, vou(x)$

c'est-à-dire $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} v(x) = 1$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} xsin\left(\frac{2}{x}\right) = \frac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tan3x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} 3\frac{tan3x}{3x}$ et en posant : $u(x) = 3x$ et $v(x) = \frac{tanx}{x}$ on a :

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{tan3x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} 3vou(x)$=3

Exercice 15

a) $\lim\limits_{x \to -1} x^2 + x + 2 = 2$ et $\lim\limits_{X \to 2} \sqrt{X} = \sqrt{2}$ donc $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x^2 + x + 2} = \sqrt{2}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 + x + 2 = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + x + 2} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 + x + 2 = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 + x + 2} = +\infty$

Exercice 16

a) $\lim\limits_{x \to -3} 7x - 1 = -22$ et $\lim\limits_{X \to -22} |X| = 22$ donc $\lim\limits_{x \to 0} |7x - 1| = 22$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} 7x - 1 = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} |X| = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} |7x - 1| = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} 7x - 1 = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} |X| = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} |7x - 1| = +\infty$

ACTIVITE 6 : Limite par comparaison

- L'objectif de cette activité est de déterminer la limite d'une fonction en utilisant les propriétés de comparaison.
- Réponses aux questions de l'activité.

1.

a) $\forall\, x \in]0\,;\,+\infty[\,,\ -1 \leq sinx \leq 1\ donc\ x-1 \leq sinx + x \leq x+1$

D'où $x-1 \leq sinx + x$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} x-1 = +\infty$

c) On en déduit : $\lim\limits_{x\to+\infty} sinx + x = +\infty$

2.

a) $\forall\, x \in]0\,;\,+\infty[\,, -1 \leq cosx \leq 1\,, on\ obtient\ -\frac{1}{x^2} \leq -\frac{cosx}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$ d'où

$1-\frac{1}{x^2} \leq 1-\frac{cosx}{x^2} \leq 1+\frac{1}{x^2}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\frac{1}{x^2} = 1 \quad et \quad \lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{x^2} = 1$

c) On en déduit que : $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\frac{cosx}{x^2} = 1$

- Corrigé de l'exercice de fixation

Exercice 17

Détermine $\lim\limits_{x\to+\infty} cosx + \sqrt{x}$, pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$

❖ Corrigé

pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[\,,\ -1 \leq cosx \leq 1$ d'où $\sqrt{x}-1 \leq cosx + \sqrt{x} \leq 1+\sqrt{x}$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}-1 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} cosx + \sqrt{x} = +\infty$

Exercice 18

a) pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[\,,\ -1 \leq sinx \leq 1$ d'où $-\frac{1}{x} \leq \frac{sinx}{x} \leq \frac{1}{x}$

or $\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{sinx}{x} = 0$

b) pour tout $x \in \mathbb{R}, 3x + E(x) \leq 4x$

or $\lim\limits_{x\to-\infty} 4x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} 3x + E(x) = -\infty$.

ACTIVITE 7 : Déterminer la limite en utilisant le nombre dérivé

- L'objectif de cette activité est de déterminer la limite en utilisant le nombre dérivé.
- Réponses aux questions de l'activité.

1. Posons : $f(x) = sinx$, on a : $\lim\limits_{x\to0} \frac{sinx}{x} = \lim\limits_{x\to0} \frac{\mathrm{f(x)-f(0)}}{x-0} = f'(0)$

Or $f'(x) = cosx \; et \cos(0) = 1$ donc $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sinx}{x} = 1.$

2. De même en posant : $g(x) = cosx$ on obtient : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{cosx-1}{x} = 0$

et $h(x) = tanx$ on obtient : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tanx}{x} = 1$

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 19

Posons $f(x) = \sqrt{x}$ et pour $x > 0, \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

On a alors : $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{1-x} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{-(x-1)} = -\frac{1}{2}$

Exercice 20

Posons $f(x) = \sqrt{x+5}$

Pour $x > -5, f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+5}}$

On a alors : $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+5}-2}{x+1} =: \lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-(-1)} = f'(-1)$

$\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+5}-2}{x+1} = \frac{1}{4}$

PROPRIETE ADMISE : Limite d'une fonction monotone sur un intervalle ouvert.

- L'objectif de cette activité est de connaître la propriété relative la limite d'une fonction monotone sur un intervalle ouvert.
- Réponses aux questions de l'activité.

a) f est une fonction croissante sur un intervalle $]\,a\,;b\,[$

1. On suppose que f est bornée sur $]\,a\,;b\,[$ donc $\forall\, x \in\,]\,a\,;b\,[$ on a : $m \leq f(x) \leq M$ avec $m \; et \; M$, deux réels.

On a : $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ <}} \mathrm{f}(x) = l \; et \; l \leq M$ d'où la limite est finie.

On a aussi : $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = l' \; et \; l' \leq m$ d'où la limite est finie.

2. On suppose que f est non majorée et non minorée sur $]\,a\,;b\,[$.

On suppose que $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ <}} \mathrm{f}(x) = l \; et \; l$ est réel, ce qui entraîne que

$\forall\, x \in\,]\,a\,;b\,[$ on a : $f(x) \leq l$ donc f serait majorée, contradiction et donc

$\lim\limits_{\substack{x \to b \\ <}} \mathrm{f}(x) = +\infty.$

On raisonne de la même manière pour f non minorée sur $]\,a\,;b\,[$ et on en déduit que

$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = -\infty$

b) f est une fonction décroissante sur un intervalle $]\,a\,;b\,[$

On utilise le même raisonnement en permutant les rôles de a et b.

- Corrigé de l'exercice de fixation

Exercice 21

a-Faux ; b-Vrai ; c-Faux ; d-Vrai

ACTIVITE 8 : Continuité en un point

- L'objectif de cette activité est d'étudier la continuité d'une fonction.
- Réponses aux questions de l'activité.

1.

a) $f(0) = 2$; $g(0) = 1$

b) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = f(0)$ *donc* $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$

c) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} g(x) = -2 \neq g(0)$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} g(x) = g(0)$

On dit que la fonction f est continue au point 0 mais g ne l'est pas.

2.

a) Comme $p\ et\ q$ sont définies sur E alors

$\forall a \epsilon E,\ \lim\limits_{x \to a} p(x) = p(a)\ \ et\ \ \lim\limits_{x \to a} q(x) = q(a)$

$$\lim_{x \to a} (p+q)(x) = \lim_{x \to a} p(x) + \lim_{x \to a} q(x) = p(a) + q(a) = (p+q)(a)$$

$\lim\limits_{x \to a} (p+q)(x) = (p+q)(a)$ d'où $p + q$ est continue sur E

b) $$\lim_{x \to a} (pq)(x) = \lim_{x \to a} p(x) \times \lim_{x \to a} q(x) = p(a) \times q(a) = (pq)(a)$$

$\lim\limits_{x \to a} (pq)(x) = (pq)(a)$ d'où $p \times q$ est continue sur E

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 22

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} (-x) = 0$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \sqrt{x} = 0\ et\ f(0) = 0$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = f(0)$ donc f est continue en 0.

Exercice 23

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} (x+1) = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} 2x - 5 = -7$ et $f(-1) = -7$.

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) \neq \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x)$ donc f n'est pas continue en -1.

Exercice 24

1 et 2.

ACTIVITE 9 : Prolongement par continuité

- L'objectif de cette activité est de déterminer un prolongement par continuité d'une fonction en un point.
- Réponses aux questions de l'activité.

1) $E = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

2) $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} 3 - \frac{x^2-1}{x-1} = 1$; $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} 2\left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\right) = 1$

On a donc $\lim_{x \to 1} f(x) = l = 1$

3) $\lim_{x \to 1} g(x) = \lim_{x \to 1} f(x) = 1$ et $g(1) = 1$ donc g est continue au point 1

On dit que la fonction g est le prolongement par continuité de f au point 1.

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 25

1) On a $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ et $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$ donc f admet un prolongement par continuité en 2.
2) Le prolongement par continuité de f est la fonction g définie par :
$\begin{cases} pour\ x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}, g(x) = f(x) \\ g(2) \end{cases}$

Exercice 26

$f(x) = \dfrac{\sin(2x)}{5x}$

1) On a $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{2}{5}$ donc f admet un prolongement par continuité en 2.
2) Le prolongement par continuité de f est la fonction h définie par :
$\begin{cases} pour\ x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}, h(x) = f(x) \\ h(2) \end{cases}$

ACTIVITE 10 : Continuité sur un intervalle - Opérations sur les fonctions continues

- L'objectif de cette activité est de connaître les propriétés relatives aux opérations sur les fonctions continues sur un intervalle.
- Réponses aux questions de l'activité.

1) La fonction p est la somme des fonctions de référence (monômes) continues sur $\mathbb{R}$, donc elle est continue sur $\mathbb{R}$.
2) a. Comme $f et\ g$ sont continues sur I alors

$\forall\, a \in I,\ \lim_{x \to a} f(x) = f(a)\ \ et\ \ \lim_{x \to a} g(x) = g(a)$

$\forall\, a \in I,\ \lim_{x \to a} (f+g)(x) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = f(a) + g(a) = (f+g)(a)$

$\forall\, a \in I, \quad \lim\limits_{x \to a} (f+g)(x) = (f+g)(a)$ d'où $f+g$ est continue sur I.

b. Comme f est continue sur I, alors $\forall\, a \in I, \quad \lim\limits_{x \to a} |f(x)| = |f(a)|$ d'où $|f|$ est continue sur I.

c. Comme $f et\ g$ sont continues sur I tel que g ne s'annule pas sur I alors

$\forall a \epsilon I, \quad \lim\limits_{x \to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)}$ avec $g(a) \neq 0$.

On a $\forall\, a \in I, \lim\limits_{x \to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \left(\frac{f}{g}\right)(a)$

d. f étant positive et continue sur I, $\forall\, a \in I$, $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{f(a)}$ donc la fonction $\sqrt{f}$ est continue sur I.

- Corrigé de l'exercice de fixation

Exercice 27

1-Vrai ; 2- Faux ; 3- Vrai

Exercice 28

Ensemble de définition : E $=]-\infty\,; 3] \setminus \{-2\}$

La fonction $x \to 3 - x$ est continue et positive sur E donc $u(x) = \sqrt{3-x}$ est continue sur E. La fonction $v(x) = x + 2$ est continue et ne s'annule pas sur E ;

On en déduit que $f = \frac{u}{v}$ est continue sur E.

ACTIVITE 11 : Image d'un intervalle par une fonction continue

- L'objectif de cette activité est de connaître les propriétés relatives à l'image d'un intervalle par une fonction continue.
- Réponses aux questions de l'activité.

1.

a) $\forall x \epsilon$ I , on a : $1 \leq x \leq 4$ ce qui donne $-5 \leq -2x + 3 \leq 1$

Donc $\forall x \epsilon$ I, on a $f(x) \epsilon [-5\,; 1]$

b) L'image de I par la fonction continue f est un intervalle

2.

$\forall\, x \in [1; 3]$, on a : $1 \leq x \leq 3$ donc $1 \leq x^2 \leq 9$ d'où 1 est un minorant de f et 9 est un majorant de f sur $[1; 3]$, or $f(1) = 1\ et\ f(3) = 9$ donc 1 et 9 sont respectivement le minimum et le maximum de f sur $[1; 3]$.

On conclut $([1; 3]) = [1; 9]$.

- Corrigé de l'exercice de fixation

Exercice 29

f est continue sur I, $\forall x \epsilon$ I , on a : $-2 \leq x \leq 0$ ce qui donne $0 \leq x^2 \leq 4$

$soit -2 \leq x^2 - 2 \leq 2$

Donc $\forall x \epsilon$ I, on a $f(x) \epsilon [-2\,;2]$.

L'image de I par la fonction continue f est incluse dans l'intervalle I'=[-2 ; 2].

Exercice 30

Comme f est continue et croissante sur $]-1;3]$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = 5$ et $f(3) = 19$ alors

$f(]-1;3]) = \left]\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x); f(3)\right] =]5;19]$

Exercice 31

Comme f est continue et décroissante sur $[7;13]$et $f(7) = 0$ et $f(13) = -10$ alors

$f([7;13]) = [f(13); f(7)] = [-10; 0]$.

Exercice 32

1. Comme g est continue et décroissante sur $[-3;-1]$et $g(-3) = 9$ et $g(-1) = 1$ alors

$g([-3;-1]) = [g(-1); g(-3)] = [1;9]$.

2. Comme g est continue et croissante sur $[1;4]$et $g(1) = 1$ et $g(4) = 16$ alors

$g([1;4]) = [g(1); g(4)] = [1;16]$.

ACTIVITE 12 : Continuité d'une fonction composée

- L'objectif de cette activité est de connaître la propriété relative à la composée de deux fonctions continues sur un intervalle .
- Réponses aux questions de l'activité.

Soit u un élément de I. On a : $\lim\limits_{x \to u} f(x) = f(u)$

g est continue en $f(u)$, donc : a $\lim\limits_{y \to f(u)} g(y) = g[f(u)]$

On en déduit que : $\lim\limits_{x \to u} gof(x) = gof(u)$ donc gof est continue en tout élément u de I c'est-à-dire g est continue sur I.

- Corrigé de l'exercice de fixation

Exercice 33

1. V ; 2. V ; 3. F

ACTIVITE 13 : Théorème des valeurs intermédiaires

- L'objectif de cette activité est de connaître le théorème des valeurs intermédiaires.
- Réponses aux questions de l'activité.

D'après les résultats de l'activité 11, $\forall\, x \in [a; b]$ on a : $m \leq f(x) \leq M$

donc $f([a; b]) = [m; M]$ et l'intervalle d'extrémités $f(a)$ et $f(b)$ est inclus dans $[m; M]$. Il en résulte que tout réel c compris entre $f(a)$ et $f(b)$ admet au moins un antécédent compris entre a et b.

De plus si $c = 0$, on a $f(a) \leq 0 \leq f(b)$, soit $f(a) \times f(b) < 0$. On conclut que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution comprise entre $a \; et \; b$.

- Corrigé de l'exercice de fixation

Exercice 34

1. V ; 2. F ; 3. V

ACTIVITE 14 : Fonction continue et strictement monotone

- L'objectif de cette activité est connaître les propriétés relatives aux fonctions continues et strictement monotones sur un intervalle.
- Réponses aux questions de l'activité.

1. Par le théorème des valeurs intermédiaires, on sait que tout élément de $f(I)$ a au moins un antécédent dans I . Comme f est strictement monotone (strictement croissante dans notre cas) alors il existe un seul antécédent d'où f réalise une bijection de I vers $f(I)$.
2. B

a) La fonction f est continue en tant que somme de fonctions continues sur I et elle est strictement croissante donc c'est une bijection de I vers $f(I) = [f(0)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)[$ d'où $[1 ; +\infty[= K$.

b) C'est une bijection donc elle admet une bijection réciproque f^{-1} définie de $f(I) = K$ vers I et $f(x) = y$ entraine $1 + \sqrt{x} = y$ soit $x = (y - 1)^2$ car $et\; y \epsilon K$, $x \geq 0 \;\; et \;\; y - 1 \geq 0$ par conséquent $f^{-1}(x) = (x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$

c) f^{-1} est continue sur K en tant que fonction polynôme continue sur K

d) Pour tout élément a et b de K tels que $a < b$ on a : $f^{-1}(a) < f^{-1}(b)$ donc f^{-1} est strictement croissante comme f .

- Corrigé de l'exercice de fixation

Exercice 35

a) f est continue et strictement décroissante sur $]1;+\infty[$ et

$f(]1;+\infty[) = \left]\lim_{x\to+\infty} f(x);\ \lim_{\substack{x\to1\\>}} f(x)\right[=]0;+\infty[$ donc f est une bijection de $]1;+\infty[$ dans $]0;+\infty[$.

b) $Soit\ y \in]0;+\infty[, f(x) = y \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} = y$ c'est-à-dire $x = \frac{1+y}{y}$ donc

$$f^{-1}:]0;+\infty[\longrightarrow]1;+\infty[$$
$$x \longmapsto \frac{1+x}{x}$$

ACTIVITE 15 : Asymptotes (Rappel)

- L'objectif de cette activité est de déterminer les propriétés relatives aux asymptotes.
- Réponses aux questions de l'activité.

1. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+3}{1-2x} = -\frac{1}{2}$: On dit que la droite d'équation $y = -\frac{1}{2}$ est une asymptote à (C) en $-\infty$; elle est parallèle à l'axe (OI) des abscisses.

$\lim_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\<}} f(x) = \lim_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\<}} \frac{x+3}{1-2x} = +\infty$ car : $\lim_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\<}} 1-2x = 0$ et $1-2x > 0$; $\lim_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\<}} x+3 = \frac{7}{2}$

On dit que la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ est une asymptote à (C) et elle est parallèle à l'axe (OJ).

2. a) $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(x+1-\frac{2}{x-1}\right) = -\infty$;

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} x+1-\frac{2}{x-1} = +\infty$$

b) $\lim_{x\to-\infty} g(x)-(x+1) = \lim_{x\to-\infty} -\frac{2}{x-1} = 0$

$\lim_{x\to+\infty} g(x)-(x+1) = \lim_{x\to+\infty} -\frac{2}{x-1} = 0$

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 36

$D_g =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$

- $\forall\, x \in]1; +\infty[, g(x) = \frac{2-\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 2$ donc la droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale à la courbe (C) en $+\infty$.
- $\forall\, x \in]-\infty; -1[, g(x) = \frac{-2+\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -2$ donc la droite d'équation $y = -2$ est asymptote horizontale à la courbe (C) en $-\infty$.
- $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\<}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to-1\\<}} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-1}} = \lim\limits_{\substack{x\to-1\\<}} (2x-1) \times \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = -\infty$ donc la droite d'équation $x = -1$ est asymptote verticale à la courbe (C).
- $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-1}} = \lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} (2x-1) \times \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = +\infty$ donc la droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à la courbe (C).

Exercice 37

$\forall\, x \neq 0, g(x) - (2-x) = \frac{1}{x}$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} [g(x) - (2-x)] = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc la droite d'équation $y = 2 - x$ est asymptote oblique à la courbe (C) en $+\infty$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} [g(x) - (2-x)] = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc la droite d'équation $y = 2 - x$ est asymptote oblique à la courbe (C) en $-\infty$.

ACTIVITE 16 : Branches paraboliques

- L'objectif de cette activité est d'interpréter $[\lim\limits_{x\to\mp\infty} f(x) = +\infty\ (resp. -\infty)]$ et $[\lim\limits_{x\to\mp\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty\ (resp. -\infty)$ ou $\lim\limits_{x\to\mp\infty} \frac{f(x)}{x} = 0]$
- Réponses aux questions de l'activité.

1. a) Le coefficient directeur de la droite (OM) est égal à : $\frac{y_M - y_O}{x_M - x_O} = \frac{f(x)-0}{x-0} = \frac{f(x)}{x}$

   b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} + x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} + x = -\infty$

On dit que (C) admet une branche parabolique de direction celle de l'axe (OJ) en $-\infty$.

2. a) Le coefficient directeur de la droite (ON) est égal à : $\frac{y_N - y_O}{x_N - x_O} = \frac{g(x)-0}{x-0} = \frac{g(x)}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} -2\sqrt{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} -2\frac{\sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} -2\frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

On dit que (C) admet une branche parabolique de direction celle de l'axe (OI) en $+\infty$

- Corrigé de l'exercice de fixation

Exercice 38

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[x + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right] = +\infty$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ donc la courbe de la fonction f admet une branche parabolique en $+\infty$ et de direction l'axe des ordonnées.

ACTIVITE 17 : Fonction racine n-ième

- L'objectif de cette activité est de justifier que la fonction f suivante est une bijection et d'identifier sa bijection réciproque.
  $f: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$
  $x \longmapsto x^n$
- Réponses aux questions de l'activité.

On sait que f est une fonction monôme donc continue sur $\mathbb{R}_+$; pour tout x *et* y *éléments* de $\mathbb{R}_+$ tels que $x < y$, on a : $x^n < y^n$ d'où la fonction f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$; elle réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ vers $f(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+ = K$

La bijection réciproque de f est appelée fonction racine n-ième

Exercice 39

La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$et la fonction $x \longmapsto \sqrt[3]{x}$ est la bijection réciproque de f sur $\mathbb{R}_+$ donc elle est aussi croissante sur $\mathbb{R}_+$.

ACTIVITE 2 : Fonction puissance d'exposant rationnel

- L'objectif de cette activité est de connaître les propriétés relatives aux puissances d'exposants rationnels.
- Réponses aux questions de l'activité.

$p \in \mathbb{Z}, p' \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$ et $q' \in \mathbb{N}$

1) $On\ a :\ x^{\frac{p}{q}} = x^{p\times\frac{1}{q}} = (x^p)^{\frac{1}{q}}$ et $x^{\frac{p'}{q'}} = x^{p'\times\frac{1}{q'}} = (x^{p'})^{\frac{1}{q'}}$

Si $r = \frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$ alors $(x^p)^{\frac{1}{q}} = (x^{p'})^{\frac{1}{q'}}$

2) Soit $r \in \mathbb{Q}$ et $r' \in \mathbb{Q}$, il existe des nombres $p, p' et\ q$ tels que $r = \frac{p}{q}$ et $r' = \frac{p'}{q}$

$$(x^r x^{r'})^q = (x^r)^q\,(x^{r'})^q = \left(x^{\frac{p}{q}}\right)^q\ \left(x^{\frac{p'}{q}}\right)^q = x^{\frac{pq}{q}}\,x^{\frac{p'q}{q}} = x^p x^{p'}$$

$$(x^{r+r'})^q = \left(x^{\frac{p+p'}{q}}\right)^q = \left(x^{\frac{q}{q}}\right)^{p+p'} = x^{p+p'} = x^p x^{p'}$$

On en déduit que $(x^r x^{r'})^q = (x^{r+r'})^q$ donc $x^r x^{r'} = x^{r+r'}$

Exercice 40

a) $\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{2}{3}} \times \left(\frac{10}{21}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{7\times2\times5}{5\times3\times7}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$; b) $\left(5^{\frac{5}{3}}\right)^{\frac{6}{25}} = 5^{\frac{5}{3}\times\frac{6}{25}} = 5^{\frac{2}{5}}$; c) $\frac{7^{\frac{3}{4}}}{8^{\frac{3}{4}}} = \left(\frac{7}{8}\right)^{\frac{3}{4}}$;

d) $2^{\frac{2}{3}} \times 2^{-\frac{3}{5}} = 2^{\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{5}\right)} = 2^{\frac{1}{15}}$.

Des questions d'évaluation

Question 1 : Comment calculer la limite d'une fonction dans le cas où les opérations sur les limites conduisent à une forme indéterminée ?

Exercice non corrigé

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{tanx} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\frac{sinx}{x}} \times cosx = 1$ car $\lim\limits_{x\to 0}\frac{Sinx}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} cosx = 1$.

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-sinx}{x-\frac{\pi}{2}} = -\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{sinx-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}\right) = -cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x-\sqrt{1+x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(2 - \sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right) = 1$

- ❖ **Question 2** : Comment calculer la limite à l'infini d'une fonction contenant des radicaux ?

Exercice non corrigé

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2+3} - 5x)$

-on met sous le radical $4x^2$ en facteur : $\sqrt{4x^2(1+\frac{3}{4x^2})} - 5x$

-on la propriété de la racine carrée d'un produit et la règle de la valeur absolue : $2x(\sqrt{(1+\frac{3}{4x^2})} - 5x = 2x\,(\sqrt{(1+\frac{3}{4x^2})} - \frac{5}{2})$

-on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+3} - 5x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x\,(\sqrt{(1+\frac{3}{4x^2})} - \frac{5}{2}) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2-2} + 3x\right)$

-on introduit l'expression conjuguée avant d'appliquer si nécessaire ce qui précède :

$\sqrt{9x^2-2} + 3x = \frac{-2}{\sqrt{9x^2-2}-3x}$ d'où $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2-2} + 3x\right) = 0$

- ❖ **Question 3 : Comment encadrer une solution $\boldsymbol{\alpha}$ de l'équation** $f(x) = 0$ avec $\alpha\epsilon\,]\boldsymbol{a}\,;\boldsymbol{b}[$

Exercice non corrigé 1

méthode de dichotomie

$f(0) > 0$; $f(1) < 0$ donc $\beta\epsilon\,]0\,;1[$

$f(0,5) > 0$ et $f(1) < 0$ donc $\beta \epsilon\ ]0,5\,;1[$

$f(0,75) < 0$ et $f(0,5) > 0$ donc $\beta \epsilon\ ]0,5\,;0,75[$

$f(0,625) > 0$ et $f(0,75) < 0$ donc $\beta \epsilon\ ]0,625\,;0,75[$

$f(0,6875) < 0$ et $f(0,625) > 0$ donc $\beta \in\ ]0,625\,;0,6875[$ d'où $\beta \in\ ]0,6;0,7[$.

Donc l'équation (E) : $\frac{6}{5}x^5 - 4x^3 + 1 = 0$ admet au moins une solution $\beta \epsilon\ ]0\,;1[$

Exercice non corrigé 2

on utilisera la méthode de balayage

1) $\alpha \in\ ]0\,;1[\quad et \quad f(x) = 2x^3 + 5x - 1$

$f(0,1) < 0$; $f(0,2) > 0$; d'où $\alpha \in\ ]0,1\,;0,2[$.

2) $f(0,11) < 0$; $f(0,12) < 0$; $f(0,13) < 0$; $f(0,14) < 0$; $f(0,15) < 0$; $f(0,16) < 0$; $f(0,17) < 0$; $f(0,18) < 0$; $f(0,19) < 0$ et ; $f(0,20) > 0$ d'où $\alpha \in\ ]0,19\,;0,20[$.

Donc l'équation $2x^3 + 5x - 1 = 0$ possède une unique solution α tel que $\alpha \in\ ]0,19\,;0,20[$.

Mes séances d'exercices

❖ Exercices de fixation

- Limites de référence

Exercice 1

a)-F ; b)-V ; c)-F ; d)-V

Exercice 2

a) $\lim\limits_{\substack{x\to -3\\ <}} \frac{1}{(x+3)^3} = -\infty$; b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-cosx}{2x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{sinx}{x}\right)^2 \times \frac{1}{2(1+cosx)} = \frac{1}{4}\,\frac{1}{4}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{xcosx}{sinx} = \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{x}{sinx}\right) \times cosx = 1\ 1$

- **Limite d'une restriction**

Exercice 3

a) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^4-16}{x+2} = \lim\limits_{x\to -2} (x-2)(x^2+4) = -32$; b) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x+1}{x^3+1} = \lim\limits_{x\to -1} \frac{1}{x^2-x+1} = \frac{1}{3}$

Exercice 4

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{2x}{|x|} = -2$ -2 ; b) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{1}{\sqrt{x+7}+3} = \frac{1}{6}\ \frac{1}{6}$

- **Limite à gauche, limite à droite et limite d'une fonction**

Exercice 5

n° 3

Exercice 6

$\lim\limits_{x \underset{<}{\to} -2} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} -2} f(x) = \sqrt{5}$ donc elle n'a pas de limite en -2.

Exercice 7

1- g a pour limite 1 en - 1 ;
2- g n'a pas de limite en 2.

- **Limites et opérations sur les fonctions**

Exercice 8

1- $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 - |x| + \sqrt{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} x\left(x - 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = +\infty$; 2- $\lim\limits_{x \underset{<}{\to} 1} \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{1-x}} = +\infty$

Exercice 9

a) $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{x+1}+2}=\frac{1}{4}$; b) $\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{3}}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{x-2}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{3}}=\frac{-2\sqrt{3}}{3}$;

c) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-cosx}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{sinx}\right)^2\times(1+cosx)=2.$

Exercice 10

1-F ; 2-V ; 3- F ; 4- V

Exercice 11

a) $\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+3}-\frac{x}{2}\right)=\lim_{x\to +\infty}x\left(\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}-\frac{1}{2}\right)=+\infty$;

b) $\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x-2}=\lim_{x\to +\infty}\frac{-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{1-\frac{2}{x}}=-1$; c) $\lim_{x\to -\infty}\sqrt{x^2-4}-5x=-\infty$

- Limite d’une fonction composée

Exercice 12

a) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{x}=\lim_{x\to 0}5\times\frac{\sin(5x)}{5x}=5$;

b) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(4\pi x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(4\pi x)}{4\pi x}\right)^2\times\frac{(4\pi)^2}{(1+\cos(4\pi x))}=8\pi^2$;

c) Comme $\lim_{x\to +\infty}\frac{3x-1}{x+2}=3$ et $\lim_{X\to 3}\sqrt{X}=\sqrt{3}$ donc $\lim_{x\to +\infty}\sqrt{\frac{3x-1}{x+2}}=\sqrt{3}.$

Exercice 13

1. $\lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{sin8x}{2x}}=2$; 2. $\lim_{x\to +\infty}\left|\frac{2+5x-3x^2}{1+6x^2}\right|=\frac{1}{2}$; 3. $\lim_{x\to 3}\sqrt{4-|x|}=1.$

3- $\lim_{x\to 3}\sqrt{4-|x|}=1$

Exercice 14

$\lim_{x\to 0}\sin(2x-\frac{\pi}{6})$		$-\frac{1}{2}$
$\lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{2x+1}{x+4}}$		$\frac{1}{2}$
$\lim_{x\to +\infty}\frac{-x^2+3}{2(x+1)}$		$-\infty$
$\lim_{x\to +\infty}\cos(\frac{1}{2\sqrt{x}})$		1

- **Limite par comparaison**

Exercice 15

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; 2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$; 3. la limite de f est comprise entre 1,9 et 2

Exercice 16

1	$f \geq g\ et\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$	F
2	$g \geq f\ et\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$	V
3	$h \leq f \leq g$, $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = -1$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -0{,}9999$ donc $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -1$	F
4	$\lvert f\rvert \leq g\ et\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$	V

Exercice 17

1. $x > 0, -1 \leq\ sinx\ \leq 1$ donc $-\frac{\sqrt{x}}{x^2} \leq \frac{\sqrt{x}}{x^2} sinx \leq \frac{\sqrt{x}}{x^2}$ d'où $-\frac{1}{x\sqrt{x}} \leq f(x) \leq \frac{1}{x\sqrt{x}}$.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

Exercice 18

1. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3}{1+\sqrt{x}} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$
2. Posons : $u = \frac{1}{x}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{1}{x} = -\infty\ et\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{1}{x} = +\infty$; on a : $x^2 cos\frac{1}{x} = \frac{1}{u^2} cosu$ avec u

   qui tend vers l'infini.

Comme $-1 \leq cosu \leq 1$ on obtient : $-\frac{1}{u^2} \leq \frac{1}{u^2} cosu \leq \frac{1}{u^2}$; $\lim\limits_{u\to+\infty} -\frac{1}{u^2} = \lim\limits_{u\to+\infty} \frac{1}{u^2} = 0$

(même résultat en $-\infty$).

Donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

3- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3}{x^2} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$

- **Limite d'une fonction monotone sur un intervalle**

Exercice 19

- Si g est non minoré sur $]a; b[$ alors g a pour limite $-\infty$ à gauche en b.

- Si f est minorée sur $]a;b[$ alors f admet une limite finie à droite en a.

Exercice 20

1) $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ >}} f(x) = m$;
2) $\lim\limits_{\substack{x\to b \\ <}} f(x) = +\infty$.

- **Continuité en un point**

Exercice 21

1. f n'est pas définie en 0 donc elle n'est pas continue en 0 ;

f est définie en 2 ;$f(2) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 0$ donc f est continue en 2.

2. g est définie en - 1 ;$g(-1) = 0$ et $\lim\limits_{x\to -1} g(x) = 0$ donc elle est continue en 2

Exercice 22

1. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -2$ *et* $f(0) \neq -2$: donc f n'est pas continue en 0.
2. $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = \frac{1}{2} = g(1)$: g est continue en 1.
3. $h(-1) = 1$; $\lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ <}} h(x) = \lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ >}} h(x) = 1 = h(-1)$ donc h est continue en -1.

$\lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ <}} h(x) = 4$; $\lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ >}} h(x) = 0$ et $h(2) = 0$. On a $\lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ <}} h(x) \neq \lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ >}} h(x)$ *donc* h n'a pas de limite en 2 donc elle n'est pas continue en 2.

Exercice 23

$f(-1) = 5$ et $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = 5$; on obtient : 2 – a + 1 =5 soit a $= -2$

$f(0) = -1 + b$ et $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$; on obtient : $1 = -1 + b$ soit $b = 2$

- **Prolongement par continuité**

Exercice 24

1- V ; 2- F

Exercice 25

f est définie sur $]-4;16[\setminus\{0\}$ et $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\frac{5}{8}$

Exercice 26

La limite à gauche en 0 est différente de celle à droite en 0 donc elle n'admet pas de prolongement par continuité en 0.

1. f n'est pas définie en 1, de plus comme $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x+1} = 0$

donc $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$ par suite f admet un prolongement par continuité en 1 .

2. Soit h ce prolongement défini par : $\begin{cases} h(x) = f(x) \;\; si \;\; x \in I \\ h(1) = 2 \end{cases}$

Exercice 28

1) f n'est pas définie en -1 et $\lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = -\infty$ donc f n'admet pas de prolongement par continuité en -1.
2) f n'est pas définie en 1 et $\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = -\infty$ donc f n'admet pas de prolongement par continuité en -1.
3) f n'est pas définie en 0 et $\lim_{x \to 0} f(x) = 2 \in \mathbb{R}$ donc f admet un prolongement par continuité en 0.

- **Continuité sur un intervalle – Opérations sur les fonctions continues**

Exercice 29

f est une somme de fonctions continues sur $]0; +\infty[$ donc sur $]0; 5[$.

- **Image d'un intervalle par une fonction continue**

Exercice 30

1- F ; 2- F ; 3- F

Exercice 31

$f([0; 1]) = [4; 7]$

Exercice 32

1. $f([2; 4]) = [0; 4]$;
2. $f([4; +\infty[) = [0; +\infty\{$;
3. $f(]-\infty; 2[) =]-\infty; 4[$

- **Continuité d'une fonction composée**

Exercice 33

f est continue sur $\mathbb{R}$ et g est continue sur $\mathbb{R}$; $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ donc g est continue sur $f(\mathbb{R})$. En conclusion $g \circ f$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 34

$x \longmapsto 2x - 3$ est continue sur $\mathbb{R}$ et positive sur $[\frac{3}{2}; +\infty[$ donc g est continue sur $[\frac{3}{2}; +\infty[$ d'où sur $\left]\frac{3}{2}; +\infty\right[$.

- **Théorème des valeurs intermédiaires**

Exercice 35

Soit f une fonction **continue** sur un **intervalle** I, **contenant** a et b deux éléments de I. **Tout** nombre **réel compris** entre $f(a) et\ f(b)$ a **au moins** un **antécédent** par f compris entre $a\ et\ b$.

Exercice 36

1- F ; 2- V ; 3- V

Exercice 37

$f(x) = x^5 - 3x + 1$ est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme. $f(0) = 1\ et\ f(1) = -1$, on a donc $f(0) \times f(1) < 0$ donc $f(x) = 0$ admet au moins une solution comprise entre 0 et 1.

Exercice 38

$f(x) = x^3 - 3x - 1$ est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme.

$f(1) = -3\ et\ f(2) = 1$, on a donc $f(1) \times f(2) < 0$ donc $f(x) = 0$ admet au moins une solution comprise entre 1 et 2.

- **Fonction continue et strictement monotone**

Exercice 39

1- V ; 2- F ; 3- V ; 4- V ; 5- F ; 6- F

Exercice 40

f est continue et strictement croissante sur]0 ;1[et $f(]0;1[)=]1;+\infty[=I$. f réalise donc une bijection de]0 ;1[sur $]1;+\infty[=I$.

Exercice 41

f est une bijection et $2 \epsilon\,]1;+\infty[$ donc l'équation $f(x)=2$ a une seule solution dans]0 ;1[.

Exercice 42

1. g est une bijection strictement croissante sur $]-\infty;0[$;

$g(]-\infty;0[)=]0;1[$.

2. $\frac{1}{2}\epsilon\,]0;1[$ donc $g(x)=\frac{1}{2}$ a une seule solution dans $]-\infty;0[$.

- **Asymptotes**

Exercice 43

les droites d'équations : $y=3 \;\; et\; x=1$

Exercice 44

1. la limite de f en $\frac{1}{2}$ est infinie donc : $x=\frac{1}{2}$ est une asymptote verticale à (C).
2. La limite de f en l'infini est $-\frac{3}{2}$ donc $y=-\frac{3}{2}$ est une asymptote horizontale à (C).

Exercice 45

$t(x)=g(x)-\left(-x-\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{7}{2\sqrt{x^2+3x+4}-2x-3}\right)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} t(x)=0$ donc la droite d'équation $y=-x-\frac{3}{2}$ est une asymptote oblique à la courbe représentative de g.

Exercice 46

1. les droites d'équations : $x=0$ et $y=-x+1$ sont les asymptotes.
2. les droites d'équations : $x=2$ et $y=-2$sont les asymptotes

- **Branches paraboliques**

Exercice 47

1-F ; 2-V ; 3-V

Exercice 48

a) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; b) $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$; c) La courbe représentative de f admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (OJ).

Exercice 49

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = +\infty$ donc la courbe représentative de g admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (OI) en $+\infty$.

- **Fonction racine n-ième – Fonction puissance d'exposant rationnel**

Exercice 50

$a = \sqrt[7]{b} \Leftrightarrow b = a^7$; $b^{10} = a \Leftrightarrow a^{\frac{1}{10}} = b$.

Exercice 51

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{\sqrt[5]{x^4}}$; on a $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Exercice 52

$A = \sqrt{2^7} = 8\sqrt{2}$

Exercice 53

$B = 16\frac{\sqrt{10}}{5}$

Exercice 54

$A = \sqrt[3]{2}$

❖ **Exercices de renforcement / approfondissement**

Exercice 55

1) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x-3} = +\infty$; $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1-\frac{3}{x}}{\sqrt{x-3}} = 0$.

2) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ donc la courbe représentative de g admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (OI) en $+\infty$.

Exercice 56

1) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} + x^2 = +\infty$;

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}+x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + x = +\infty.$

2) On a : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ donc la courbe représentative de f admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (OJ) en $+\infty$.

Exercice 57

1. f est décroissante sur $[-5; 5]$ et $\forall\, x \in [-5; 5], f'(x) = 3(x-3)^2$.

On a $\forall\, x \in [-5; 5], f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $[-5; 5]$ d'où f est une bijection de $[-5; 5]$ sur $[-517; 3]$.

2. a) f est continue et strictement croissante sur $[-5; 5]$ de plus $f(-5) = -517$ et $f(5) = 3$ soit $f(-5) \times f(5) < 0$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [-5; 5]$.
   b) $f(4{,}7) = -0{,}087$ *et* $f(4{,}71) = 0{,}000211$ *soit* $f(4{,}7) \times f(4{,}71) < 0$ donc $4{,}7 < \alpha < 4{,}71$.
3. f est continue et strictement croissante sur $[-5; 5]$ donc f est une bijection de $[-5; 5]$ sur $[-517; 3]$ or $-1 \in [-517; 3]$ donc l'équation $f(x) = -1$ admet une unique solution dans $[-5; 5]$.

Exercice 58

$\lim_{x\to-\infty} [f(x) - (2x-3)] = \lim_{x\to-\infty} \frac{-8x+20}{x^2+5} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-8}{x} = 0$ donc la droite d'équation

$y = 2x - 3$ est asymptote à (C) en $-\infty$.

$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (2x-3)] = \lim_{x\to+\infty} \frac{-8x+20}{x^2+5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-8}{x} = 0$ donc la droite d'équation

$y = 2x - 3$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

Exercice 59

1.

- $\lim_{\substack{x\to1\\<}} f(x) = +\infty$; $\lim_{\substack{x\to1\\>}} f(x) = -\infty$ donc $(D_1)\colon x = 1$ est asymptote à (C).
- $\lim_{\substack{x\to-1\\<}} f(x) = -\infty$; $\lim_{\substack{x\to-1\\>}} f(x) = +\infty$ donc $(D_2)\colon x = -1$ est asymptote à (C).

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - (x+2) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (x+2) = 0$ donc $(D_3): y = x + 2$ est asymptote à (C).

2.

$\forall\, x \in [-3; -1[, f(x) - (x+2) < 0$ car (C) est au-dessous de (D_3) sur $[-3; -1[$.

$\forall\, x \in]1; 3], f(x) - (x+2) < 0$ car (C) est au-dessous de (D_3) sur $]1; 3]$.

$\forall\, x \in]-1; 1], f(x) - (x+2) > 0$ car (C) est au-dessus de (D_3) sur $]-1; 1]$.

Exercice 60

1. $f'(x) = \frac{13}{(x+5)^2}$ Soit $\forall\, x \in]-5; +\infty[$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]-5; +\infty[$.
2. f est continue et strictement croissante sur $]-5; +\infty[$.

De plus $f(]-5; +\infty[) =]-\infty; 2[$, donc f est une bijection de$]-5; +\infty[$ sur $]-\infty; 2[$.

3. $\forall\, y \in]-\infty; 2[, f(x) = y \Leftrightarrow \frac{2x-3}{x+5} = y$

$$f(x) = y \Leftrightarrow x \longmapsto \frac{3+5x}{2-x}$$

$$f^{-1}:]-\infty; 2[\longrightarrow]-5; +\infty[$$
$$x \longmapsto \frac{3+5x}{2-x}$$

4. $\lim\limits_{\substack{x \to -5 \\ >}} f(x) = -\infty$ donc la droite d'équation $x = -5$ est asymptote verticale à (C).
5. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x-3}{x+5} = 2$ donc la droite d'équation $y = 2$ est une asymptote horizontale à (C) en $+\infty$.

❖ **Situation complexe**

Exercice 61

Hypothèse de ABOU : $f(t) < 11 \Leftrightarrow \frac{210}{t} + 10 < 11$

$\frac{210-t}{t} < 0$ donc $f(t) < 11$ pour $t \in]210; +\infty[$

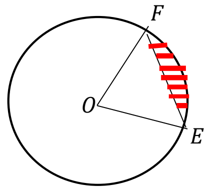
Hypothèse de KONAN : $\forall\, t > 1, f(t) > 10$, il n'existe donc pas de temps long pendant lequel $f(t) = 10$. En effet la droite d'équation $y = 10$ étant une asymptote à la courbe de la fonction f, aucun temps ne peut correspondre à une température de 10 degrés. Le vendredi correspond à $t = 24 \times 60 = 1440\, mn$. Ainsi pour $t \in]210; 1440[$, on a $f(t) < 11$.

L'hypothèse de Abou est donc celle qui est plausible.

Exercice 62

L'aire d'un secteur en radian : si α est en radian alors l'aire $A = \frac{\alpha R^2}{2}$.

Posons $EF = x$ et h la hauteur du triangle isocèle OEF.



L'aire du secteur OEF est : $\frac{\alpha}{2}$

On a : OE = OF = 1. On a : $x = 2h\tan(\frac{\alpha}{2})$ (relation trigonométrique dans un triangle rectangle). On a aussi :$h = \cos(\frac{\alpha}{2})$. Si l'on désigne par S l'aire du triangle isocèle OEF, on a donc : $S = \frac{hx}{2}$, soit $S = h^2 tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ ou encore $S = cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$. On a donc $S = \frac{1}{2}sin\alpha$.
Donc l'aire comprise entre [EF] et l'arc $\widehat{EF}$ est : $\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}sin\alpha$. Le problème revient donc à résoudre l'équation : $\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}sin\alpha = \frac{1}{2}sin\alpha$. Il s'agit de donner une approximation décimale d'une solution si elle existe de l'équation : $2sinx - x = 0$. Posons $f(x) = 2sinx - x$. La fonction est continue sur $]0; \pi[$.

$f(1{,}85)$ vaut environ $0{,}072$ et $f(1{,}9) = -0{,}007$. $f(1{,}8)$ et $f(1{,}9)$ sont de signe contraire donc $1{,}85 < \alpha < 1{,}9$

1,9 radian est une bonne approximation de α. En dégré on obtient environs **109 degrés**.

2 PROBABILITÉ CONDITIONNELLE ET VARIABLE ALÉATOIRE

I- LA SITUATION D'APPRENTISSAGE

- Apres la lecture de la situation d'apprentissage (par le professeur, par un élève et une lecture silencieuse des élèves), l'enseignant pourra s'assurer que les élèves ont bien compris le texte.
- Il pourra ensuite faire dégager les constituants de la situation à travers une ou des questions du type :

Constituants de la situation	Exemples de questions possibles	Réponses possibles des élèves
Contexte	-De quel évènement parle le texte ? -Quels sont les acteurs principaux de cet évènement ? -A quel moment se déroule l'évènement ?	- D'augmentation conditionnée d'argent de poche d'un élève. -les acteurs sont le père et la mère d'un élève de terminale ainsi que ses amis de classe. -A la maison puis en classe.
Circonstance	Quel problème ou quelle difficulté rencontre l'élève ?	Il doit gagner au moins deux parties consécutives contre sa mère et son père en changeant d'adversaire à chaque partie.
Tâches	-Que décident de faire les élèves ? -Comment s'y prennent-ils ?	-Ils décident de déterminer s'il est probable que leur camarade de classe gagne. -Ils se mettent à faire des calculs.

Le professeur utilisera la tâche énoncée par ses élèves pour faire la synthèse de la situation et présentera le plan de la leçon. Il devra dans la mesure du possible se référer à la situation durant tout le déroulement de la leçon.

II. DECOUVERTE DES HABILETES

<u>Activité 1</u> : Définition, conséquence d'une probabilité conditionnelle

- L'objectif de cette activité est de connaître la définition d'une probabilité conditionnelle.
- Réponses aux questions de l'activité.

Age / sexe	17 ans	Autre que 17ans	Total
Fille	14	10	24
Garçon	4	8	12
Total	18	18	36

1) Ω est l'ensemble des élèves de la classe et card(Ω) = 36
2) Calculons

a) $P(B) = \frac{card\ (B)}{card(\Omega)} = \frac{18}{36}$, $P(B) = \frac{1}{2}$

b) $P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{24}{36}$, $P(A) = \frac{2}{3}$

c) $P(A \cap B) = \frac{card(A\cap B)}{card(\Omega)} = \frac{14}{36}$ donc $P(A \cap B) = \frac{7}{18}$

3-a) L'univers c'est les filles, il n'est pas le même que dans la question 1.

On a : card(A) = 24

b) $p = \frac{card(A\cap B)}{card(A)} = \frac{14}{24}$ donc $p = \frac{7}{12}$

c) Comparons p et $\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$

On a : $\frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{7}{18} \times \frac{3}{2} = \frac{7}{12}$ donc $p = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice de fixation 1

1. $P(A) = \frac{5}{8}$

   $P_A(B) = \frac{4}{7}$ (probabilité d'obtenir une boule rouge dans l'urne qui ne contient plus que 4 boules rouges et 3 boules blanches)

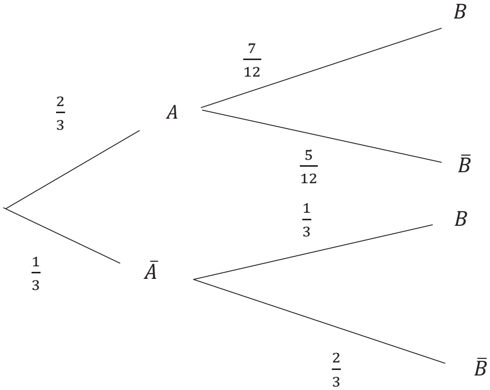
2. On a : $P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$ donc $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{5}{14}$

Exercice de fixation 2

$$P_R(G) = \frac{P(R \cap G)}{P(R)} = \frac{0{,}3}{0{,}4} = 0{,}75$$

Activité 2 : Arbre pondéré

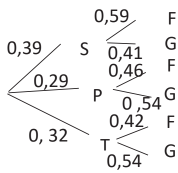
- L'objectif de cette activité est de construire un arbre pondéré.
- Réponses aux questions de l'activité.



- Corrigé des exercices de fixation

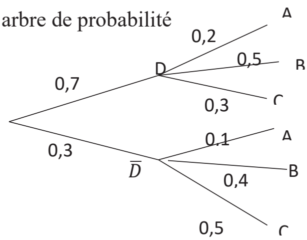
Exercice de fixation 3

Arbre de pondéré



Exercice de fixation 4

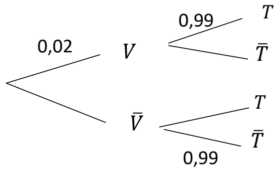
1. arbre de probabilité



2. $P_{\overline{D}}(A) = 1 - (0{,}4 + 0{,}5) = 0{,}1$
3. $P(D \cap B) = P(D) \times P_D(B) = 0{,}7 \times \left(1 - (0{,}2 + 0{,}3)\right) = 0{,}7 \times 0{,}5 = 0{,}35$

Exercice de fixation 5

Arbre de pondéré



Activité 3 : Formules de probabilités totales

- L'objectif de cette activité est de calculer la probabilité d'un événement en utilisant la formule des probabilités totales.
- Réponses aux questions de l'activité.

1. On a : $B = B \cap \Omega = B \cap (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n)$
$= (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup (B \cap A_3) \cup \dots \cup (B \cap A_n)$

2. a) $P(B) = P[(B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup (B \cap A_3) \cup \dots \cup (B \cap A_n)]$
$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \cdots + P(B \cap A_n)$
Car $(B \cap A_1) \cap (B \cap A_2) \subset (A_1 \cap A_2)$ et $A_1 \cap A_2 = \emptyset$

b) $P(B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + \cdots + P(A_n) \times P_{A_n}(B)$

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice de fixation 6

$P(G) = P(G \cap R) + P(G \cap \bar{R}) = P(G \cap R) + P_{\bar{R}}(G) \times P(\bar{R}) = 0{,}3 + (0{,}6 \times 0{,}3) = 0{,}48$

Exercice de fixation 7

$P(T) = P(V \cap T) + P(T \cap \bar{V}) = P(V) \times P_V(T) + P_{\bar{V}}(T) \times P(\bar{V})$
$= (0{,}02 \times 0{,}99) + (0{,}01 \times 0{,}99) = 0{,}0296$

Activité 4 : Définition de deux événements indépendants

- L'objectif de cette activité est de justifier que deux événements sont indépendants ou non.
- Réponses aux questions de l'activité.

1. a) $\Omega = \{(P,P)\,;(P,F)\,;(F,P)\,;(F,F)\}$

b) $A = \{(F,P)\,;(F,F)\}$; $B = \{(P,F)\,;(F,F)\}$ et $A \cap B = \{(F,F)\}$

2. a) $P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$; $P(B) = \frac{card(B)}{card(\Omega)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ et $P(A \cap B) = \frac{card(A \cap B)}{card(\Omega)} = \frac{1}{4}$

On a : $P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ et $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ donc $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice de fixation 8

1. Faux ; 2. Vrai ; 3. Faux ; 4. vrai

Exercice de fixation 9

On a : $A = \{2, 4, 6\}$ d'où $P(A) = \frac{1}{2}$; $B = \{3, 6\}$ d'où $P(B) = \frac{1}{3}$

et $A \cap B = \{6\}$ d'où $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$

de plus $P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} = P(A \cap B)$

donc les évènements A et B sont indépendants.

Activité 5 : Propriété de deux événements indépendants

- L'objectif de cette activité est de justifier si A et B sont indépendants alors $P_A(B) = P(B)$.
- Réponses aux questions de l'activité.

1. a) D'après la définition de la probabilité conditionnelle on sait que

$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$ (1)

b) Si A et B sont indépendants alors $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ (2)

c) Par identification de (1) et (2) on a $P(A) \times P(B) = P(A) \times P_A(B)$ donc $P_A(B) = P(B)$

2. D'après la définition de la probabilité conditionnelle on sait que

$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$

Si $P_A(B) = P(B)$ alors $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ donc A et B sont indépendants.

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice de fixation 10

1. Vrai
2. Vrai

Activité 6 : Propriété et conséquence de deux événements indépendants

- L'objectif de cette activité est de connaître la conséquence de la propriété de deux événements indépendants.
- Réponses aux questions de l'activité.

1. a) En appliquant la formule des probabilités totales avec $\{B ; \overline{B}\}$, on a :

$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = P(A) \times P(B) + P(A) \times P_A(\bar{B}) = P(A)\big(P(B) + P_A(\bar{B})\big)$

b) On a : $P(A) = P(A)\big(P(B) + P_A(\bar{B})\big)$ d'où $P(B) + P_A(\bar{B}) = 1$ donc

$P_A(\bar{B}) = 1 - P(B) = P(\bar{B})$

2. On a : $P(A \cap \bar{B}) = P(A) \times P_A(\bar{B}) = P(A) \times P(\bar{B})$ donc A et $\bar{B}$ sont indépendants.

3. On a : $P(\bar{A}) = P(\bar{A} \cap B) + P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \times P(B) + P(\bar{A} \cap \bar{B})$

D'où $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) - P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) - P(\bar{A}) \times P(B) = P(\bar{A})\big(1 - P(B)\big)$

Donc $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A})\big(1 - P(B)\big) = P(\bar{A})P(\bar{B})$ ainsi $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants.

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice de fixation 11

On a : $P(A \cap \bar{B}) = 0{,}28 = P(A) \times P(\bar{B})$ donc les évènements A et $\bar{B}$ sont indépendants

De plus $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$ c'est-à-dire $P(A) = P(A \cap B) + P(A) \times P(\bar{B})$

D'où $P(A \cap B) = P(A)[1 - P(\bar{B})]$ Ainsi $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Par suite les évènements A et B sont indépendants.

Exercice de fixation 12

$P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}1}{0{,}5} = 0{,}2$ et $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}6$

Exercice de fixation 13

$P(C) = P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\bar{A}) + P(\bar{B}) - P(\bar{A} \cap \bar{B}) = (0{,}8 + 0{,}9) - (0{,}8 \times 0{,}9) = 0{,}98$

Activité 7 : Définition d'une variable aléatoire

- L'objectif de cette activité est de connaître la définition d'une variable aléatoire.
- Réponses aux questions de l'activité.

1. a) $\Omega = \{ PPP\,; PPF\,; PFP\,; FPP\,; PFF\,; FPF\,; FFP\,; FFF \}$

b) $card\ (\Omega) = 8$

2. on a :

$PPF\,; PFP\,; FPP \rightarrow +15$

$FFF \rightarrow -15$

$PFF\,; FPF\,; FFP \rightarrow 0$

$PPP \rightarrow +30$

Les différents gains possibles sont : $-15\,; 0\,; 15\ et\ 30$

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice de fixation 14

On considère une expérience aléatoire d'univers Ω. On appelle variable aléatoire Toute application de Ω dans $\mathbb{R}$.

Exercice de fixation 15

1. Vrai
2. Faux
3. Vrai

Activité 8 : Notation et vocabulaire

- L'objectif de cette activité est de noter un événement en utilisant une variable aléatoire.
- Réponses aux questions de l'activité.

1. a) $(X = +15) = \{PPF ; PFP ; FPP\}$; b) $(X = -15) = \{FFF\}$

2. a) $(X = 0) = \{PFF ; FPF ; FFP\}$; b) $(X \geq +15) = \{PPF ; PFP ; FPP ; PPP\}$

3. $(X = +30) = \{PPP\}$

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice de fixation 16

a) $(X = 1) = \{2 ; 4 ; 6\}$; b) $(X = 0) = \{1 ; 3\}$

c) $(X < 1) = \{1 ; 3 ; 5\}$; d) $(X \geq 2) = \emptyset$

Activité 9 : Définition de la loi de probabilité d'une variable aléatoire

- L'objectif de cette activité est de connaître la définition d'une loi de probabilité.
- Réponses aux questions de l'activité.

1. $X(\Omega) = \{-15 ; 0 ; 15 ; 30\}$

2. $P\big((X = 15)\big) = \frac{3}{8}$

3. $P\big((X = 0)\big) = \frac{3}{8}$; $P\big((X = -15)\big) = \frac{1}{8}$; $P\big((X = 30)\big) = \frac{1}{8}$

4. L'application P qui à chaque valeur x prise par X associe la probabilité de l'événement $(X = x)$ est telle que :

- $P\big((0 \leq X \leq 15)\big) = P\big((X = 0)\big) + P\big((X = 15)\big) = \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{6}{8}$
- $P\big((-15 \leq X \leq 30)\big) = P\big((X = -15)\big) + P\big((X = 0)\big) + P\big((X = 15)\big) + P\big((X = 30)\big) = 1$
- $P\big((X > 30)\big) = 0$

Donc P est une probabilité définie sur $\{-15\,;0\,;15\,;30\}$.

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice de fixation 17

1. $X(\Omega) = \{0\,,1\,,2\,\}$
2. $P(X=0) = \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10}$; $P(X=1) = \frac{C_2^1 \times C_3^1}{C_5^2} = \frac{6}{10}$; $P(X=2) = \frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{1}{10}$

x_i	0	1	2
$P_i = P(X = x_i)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$

Exercice de fixation 18

$X(\Omega) = \{-2\ ;\ 0\ ;\ 1\,\}$

$P(X=-2) = \frac{1}{6}$; $P(X=0) = \frac{2}{6}$; $P(X=1) = \frac{3}{6}$

x_i	-2	0	1
$P_i = P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$

Activité 10 : Espérance mathématique d'une variable aléatoire

- L'objectif de cette activité est de connaître la définition de l'espérance mathématique d'une variable aléatoire.
- Réponses aux questions de l'activité.

1. $(-15) \times \frac{1}{8} + 0 \times \frac{3}{8} + (15) \times \frac{3}{8} + (30) \times \frac{1}{8} = \frac{-15+45+30}{8} = \frac{60}{8} = \frac{15}{2}$.
2. $p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + p_4x_4 = \frac{p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3+p_4x_4}{p_1+p_2+p_3+p_4}$ car $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$.

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice de fixation 19

1. $E(X) = 0 \times \frac{3}{10} + 1 \times \frac{6}{10} + 2 \times \frac{1}{10} = \frac{6+2}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$
2. En moyenne le nombre de boule noire par tirage est égale à 0,8 soit environ 1 boule noire.

Exercice de fixation 20

$E(X) = -2 \times 0{,}1 + 1 \times 0{,}5 + 6 \times 0{,}07 + 9 \times 0{,}06 + 10 \times 0{,}08 + 14 \times 0{,}19 = 4{,}72$

Activité 11 : Variance et écart-type d'une variable aléatoire

- L'objectif de cette activité est de connaître la définition de la variance et écart-type d'une variable aléatoire et les calculer.
- Réponses aux questions de l'activité.

1. a) $V(X) = \left(-15 - \frac{15}{2}\right)^2 \times \frac{1}{8} + \left(0 - \frac{15}{2}\right)^2 \times \frac{3}{8} + \left(15 - \frac{15}{2}\right)^2 \times \frac{3}{8} + \left(30 - \frac{15}{2}\right)^2 \times \frac{1}{8}$

$= \frac{675}{4}$

b) $W(X) = \left((-15)^2 \times \frac{1}{8} + (0)^2 \times \frac{3}{8} + (15)^2 \times \frac{3}{8} + (30)^2 \times \frac{1}{8} \right) - \left(\frac{15}{2}\right)^2$

$= \frac{675}{4}$

c) On a : $W(X) = V(X)$

2. $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

$\sigma(X) = \frac{15\sqrt{3}}{2}$

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice de fixation 21

$$V(X) = (-2)^2 \times 0{,}1 + 1 \times 0{,}5 + 6^2 \times 0{,}07 + 9^2 \times 0{,}06 + 10^2 \times 0{,}08 + 14^2 \times 0{,}19 - (4{,}72)^2 = 31{,}24$$

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 5{,}58$

Exercice de fixation 22

1. $E(X) = (-2) \times \frac{1}{11} + (-1) \times \frac{2}{11} + (0) \times \frac{23}{66} + (1) \times \frac{5}{22} + 2 \times \frac{5}{33}$

$E(X) = 0{,}17$

2.a) $V(X) = \left((-2)^2 \times \frac{1}{11} + (-1)^2 \times \frac{2}{11} + (0)^2 \times \frac{23}{66} + (1)^2 \times \frac{5}{22} + (2)^2 \times \frac{5}{33}\right) - (0{,}17)^2$

$V(X) = 1{,}35$

b) $\sigma(X) = 1{,}16$

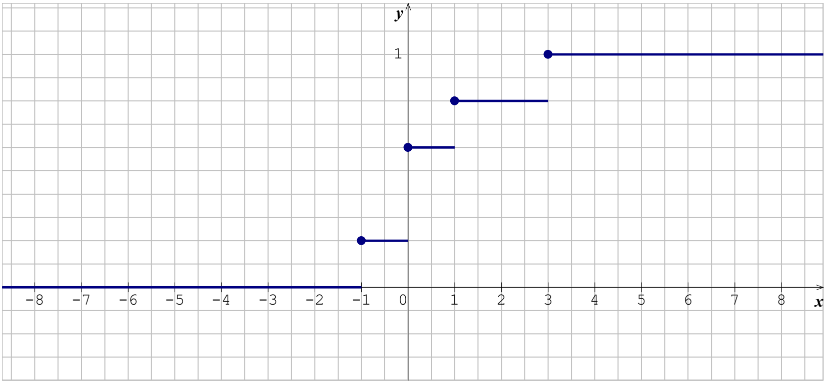
Activité 12 : Fonction de répartition d'une variable aléatoire

- L'objectif de cette activité est de déterminer et construire la fonction de répartition d'une variable aléatoire.
- Réponses aux questions de l'activité.

1) Si $x < -1$, $F(x) = 0$; Si $-1 \leq x < 0$, $F(x) = \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$; Si $0 \leq x < 1$, $F(x) = \frac{3}{5}$

Si $1 \leq x < 3$, $F(x) = \frac{4}{5}$; Si $3 \leq x$, $F(x) = 1$

2) Représentation graphique de F



- Corrigé des exercices de fixation

Exercice de fixation 23

Soit F la fonction de répartition de la variable aléatoire X.

F est définie par :

Si $x < -15$, $F(x) = 0$

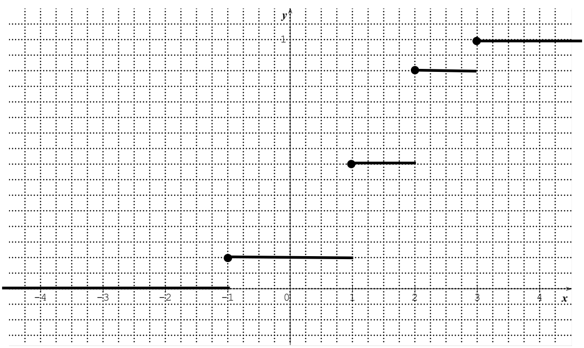
Si $-15 \leq x < 0$, $F(x) = 0 + \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$

Si $0 \leq x < 15$, $F(x) = 0 + \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

Si $15 \leq x < 30$, $F(x) = 0 + \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$

Si $30 \leq x$, $F(x) = \frac{7}{8} + \frac{1}{8} = \frac{8}{8} = 1$

Représentation graphique



Exercice de fixation 24

x_i	0	1	2	3
$P_i = P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Soit F la fonction de répartition de la variable aléatoire X.

F est définie par :

Si $x < 0$, $F(x) = 0$

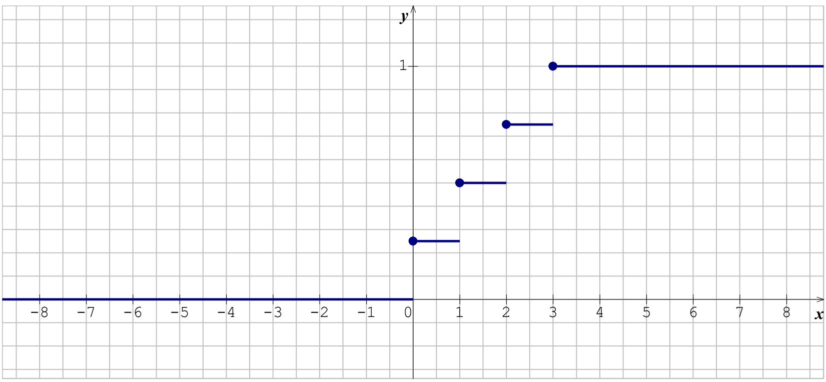
Si $0 \leq x < 1$, $F(x) = \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

Si $1 \leq x < 2$, $F(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Si $2 \leq x < 3$, $F(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

Si $3 \leq x$, $F(x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$

Représentation graphique



Activité 13 : Epreuve de Bernoulli- Schéma de Bernoulli

- L'objectif de cette activité est de connaître la définition d'une épreuve de Bernoulli et d'un schéma de Bernoulli.
- Réponses aux questions de l'activité.

1. Il y'a deux possibilités « PILE » et « FACE ».
2. Dans cette expérience, « lancer une pièce de monnaie équilibrée et noter le résultat obtenu» est répété trois fois et les résultats suivants ne dépendent pas des précédents.

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice de fixation 25

1. Vrai ; 2. Faux ; 3. Vrai ; 4. Vrai

Exercice de fixation 26

L'expérience qui consiste à choisir un ordinateur parmi les 50 ordinateurs est une épreuve de Bernoulli car il n'y a que deux issues possibles :
« L'ordinateur est en panne » ou « l'ordinateur n'est pas en panne ».
Comme l'expérience est répétée trois de façon indépendante alors on a un schéma de Bernoulli.

Exercice de fixation 27

L'expérience qui consiste à jouer une fois à la roulette est une épreuve de Bernoulli car il n'y a que deux issues possibilités :
« la boule tombe sur le rouge » ou « la boule ne tombe pas sur le rouge »
Comme l'expérience est répétée vingt fois de façon indépendante alors on a un schéma de Bernoulli.

Activité 14 : Loi binomiale

- L'objectif de cette activité est de connaître la définition de la loi binomiale de paramètres n et p.
- Réponses aux questions de l'activité.

1. Un participant peut gagner : 0 partie, 1 partie, 2 parties ou 3 parties.

2.a) On a les possibilités suivantes : $(SS\bar{S})$ ou $(S\bar{S}S)$ ou $(\bar{S}SS)$
Comme les épreuves sont indépendantes on a :

$$P = \frac{18}{37}\times\frac{18}{37}\times\frac{19}{37}+\frac{18}{37}\times\frac{19}{37}\times\frac{18}{37}+\frac{19}{37}\times\frac{18}{37}\times\frac{18}{37} = 0{,}36$$

b) $P' = C_3^2 \times \left(\frac{18}{37}\right)^2 \times \left(\frac{19}{37}\right)^1 = 0{,}36$

c) On remarque que $P = P'$

3. $P(X=0) = C_3^0 \times \left(\frac{18}{37}\right)^0 \times \left(\frac{19}{37}\right)^3 = \left(\frac{19}{37}\right)^3 = 0{,}14$

$P(X=1) = C_3^1 \times \left(\frac{18}{37}\right)^1 \times \left(\frac{19}{37}\right)^2 = 3 \times \frac{18\times19^2}{37^3} = 0{,}38$

$P(X=3) = C_3^3 \times \left(\frac{18}{37}\right)^3 \times \left(\frac{19}{37}\right)^0 = \left(\frac{18}{37}\right)^3 = 0{,}12$

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice de fixation 28

$P(X=6) = C_{10}^6 \times \left(\frac{9}{11}\right)^6 \times \left(\frac{2}{11}\right)^4 = 0{,}068$

Exercice de fixation 29

Le tireur atteint la cible ou n'atteint pas la cible il n'y a que deux résultats possibles, de plus l'expérience est répétée trois fois de façon indépendante. Ainsi X suit une loi binomiale de paramètres 3 et 0,7.

Activité 15 : Espérance mathématique et variance d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale

- L'objectif de cette activité est de connaître la propriété relative à l'espérance mathématique et la variance d'une variable aléatoire et de calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart type d'une variable aléatoire donnée.
- Réponses aux questions de l'activité.

1. X suit la loi binomiale de paramètres 3 et $\frac{18}{37}$.

$$P(X=0) = C_3^0 \times \left(\frac{18}{37}\right)^0 \times \left(\frac{19}{37}\right)^3 = \left(\frac{19}{37}\right)^3 = 0{,}14$$

$$P(X=1) = C_3^1 \times \left(\frac{18}{37}\right)^1 \times \left(\frac{19}{37}\right)^2 = 3 \times \frac{18 \times 19^2}{37^3} = 0{,}38$$

$$P(X=2) = C_3^2 \times \left(\frac{18}{37}\right)^2 \times \left(\frac{19}{37}\right)^1 = 3 \times \frac{19 \times 18^2}{37^3} = 0{,}36$$

$$P(X=3) = C_3^3 \times \left(\frac{18}{37}\right)^3 \times \left(\frac{19}{37}\right)^0 = \left(\frac{18}{37}\right)^3 = 0{,}12$$

La loi de X est donc

x_i	0	1	2	3
$P_i = P(X = x_i)$	0,14	0,38	0,36	0,12

$0{,}14 + 0{,}38 + 0{,}36 + 0{,}12 = 1$

2.a) $E(X) = 0 \times 0{,}14 + 1 \times 0{,}38 + 2 \times 0{,}36 + 3 \times 0{,}12 = 1{,}46$

b) on a : $E' = 3 \times \frac{18}{37} = 1{,}46$ donc $E(X) = E'$

3.a) $V(X) = (0^2 \times 0{,}14 + 1^2 \times 0{,}38 + 2^2 \times 0{,}36 + 3^2 \times 0{,}12) - (1{,}46)^2 = 0{,}74$

b) On a : $V' = 3 \times \frac{18}{37} \times \frac{19}{37} = 0{,}74$ donc $V(X) = V'$

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice de fixation 30

1. $E(X) = 3 \times 0{,}7 = 2{,}1$
2. $V(X) = 3 \times 0{,}7 \times 0{,}3 = 0{,}63$
3. $\sigma(X) = 0{,}79$

Exercice de fixation 31

1. Soit la réponse est juste soit elle n'est pas juste ; il n'y a que deux résultats possibles et comme l'expérience est répétée dix fois de façon indépendante alors X suite une loi binomiale. La probabilité de succès est $\frac{1}{4}$.

Les paramètres de cette loi sont : 10 et $\frac{1}{4}$.

3. $E(X) = 10 \times \frac{1}{4} = 2{,}5$

   $V(X) = 10 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = 1{,}875$

   $\sigma(X) = 1{,}37$

.

DES QUESTIONS D'EVALUATIONS

Question 1 : Comment calculer des probabilités à l'aide d'un arbre de probabilité ou de la formule des probabilités totales ?

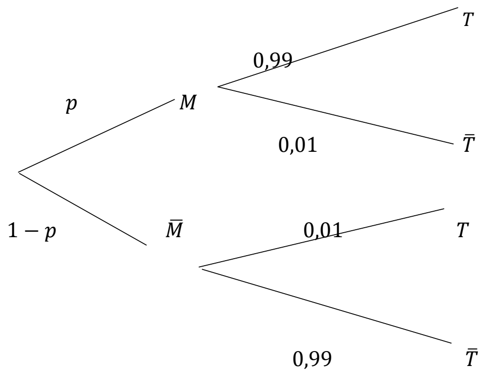
Exercice non corrigé

Soit les évènements suivants :

M : « la personne est malade » ; T : « le test est positif ».

L'énoncé nous demande de calculer $P_T(M)$.

Cela nécessite de calculer $P(U_1 \cap B)$ et $P(B)$ à l'aide d'un arbre pondéré.



On en déduit :

$P(T) = P(M \cap T) + P(\bar{M} \cap T) = 0{,}99\,p + 0{,}01(1-p) = 0{,}98\,p + 0{,}01$

Par suite

$P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0{,}99\,p}{0{,}98\,p + 0{,}01} = \frac{99\,p}{98\,p + 1}$

Question 2 : Comment déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire qui suit une loi binomiale ?

Exercice non corrigé

1. La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres 10 et $\frac{1}{3}$.
2. X suit $B(10; \frac{1}{3})$ donc $P(X = k) = C_{10}^{k} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{k} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{10-k}$

Question 3 : Comment calculer l'espérance mathématique et la variance d'une variable aléatoire qui suit une loi binomiale ?

Exercice non corrigé

La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres 10 et $\frac{1}{3}$.(réponse exacte ou pas)

donc $E(X) = 10 \times \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$ et $V(X) = 10 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{20}{9}$

MES SÉANCES D'EXERCICES

Exercices de fixation

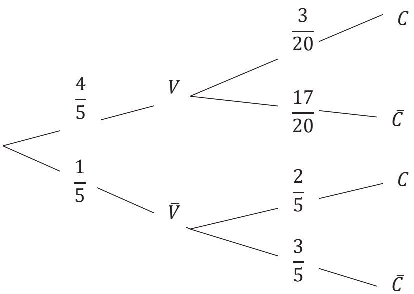
Probabilité conditionnelle

Exercice 1

1.b ; 2.a ; 3.c ; 4.b

Exercice 2

1. a) Construction de l'arbre pondéré



b) on a : $P(V) = \frac{80}{100} = \frac{4}{5}$ et $P_V(C) = \frac{15}{100} = \frac{3}{20}$

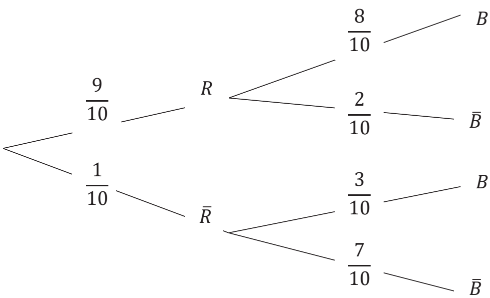
2. a) $P(V \cap C) = \frac{4}{5} \times \frac{3}{20} = \frac{3}{25}$

b) $P(\bar{V} \cap C) = \frac{1}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{25}$

Exercice 3

1. a) $P(R) = \frac{9}{10}$; $P_R(B) = \frac{8}{10}$ et $P_{\bar{R}}(B) = \frac{3}{10}$

b)



2.a) $P\ (\ R \cap B\ ) = \frac{9}{10} \times \frac{8}{10} = \frac{72}{100}$ et $P\ (\ \bar{R} \cap B\ ) = \frac{1}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{3}{100}$

b) $P\ (\ B\ ) = P\ (\ R \cap B\ ) + P\ (\ \bar{R} \cap B\ ) = \frac{72}{100} + \frac{3}{100} = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$

Exercice 4

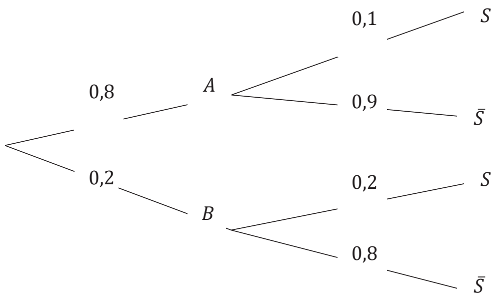
1. En appliquant la formule des probabilités totales avec $\{\ V\ ;\ \bar{V}\}$ on a :

$$P(C) = P(V \cap C) + P(\bar{V} \cap C) = \frac{3}{25} + \frac{2}{25} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$$

2. $P_C(V) = \frac{P(V \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{3}{25}}{\frac{1}{5}} = \frac{3}{5}$

Exercice 5

1.



2. $P\ (B \cap \bar{S}) = P(B) \times P_B(\ \bar{S}\ ) = (1 - 0{,}8) \times (1 - 0{,}2) = 0{,}2 \times 0{,}8 = 0{,}16$
3. $P\ (\bar{S}) = P\ (B \cap \bar{S}) + P\ (A \cap \bar{S}) = 0{,}16 + 0{,}8 \times 0{,}9 = 0{,}16 + 0{,}72 = 0{,}88$
4. $P_S(\ B\ ) = \frac{P\ (B \cap S)}{P\ (S)} = \frac{P\ (B \cap S)}{P\ (B \cap S) + P\ (A \cap S)} = \frac{0{,}2 \times 0{,}2}{0{,}2 \times 0{,}2 + 0{,}8 \times 0{,}1} = 0{,}33$

Exercice 6

L'univers E est l'ensemble des boules des trois urnes.
Nous devons calculer $P(R)$. Or $U_1; U_2$ et U_3 constituent une partition de E.
D'après la formule des probabilités totales :
$P(R) = P(U_1 \cap R) + P(U_2 \cap R) + P(U_3 \cap R)$
Calculons ces trois probabilités ; il es clair que :

$P(U_1) = P(U_2) = P(U_3) = \frac{1}{3}$
D'autre part, $P_{U_1}(R) = \frac{1}{6}$ (c'est la probabilité de tire une boule rouge dans l'urne 1)
De même $P_{U_2}(R) = \frac{3}{4}$ et $P_{U_3}(R) = \frac{1}{3}$
Il en résulte :
$P(U_1 \cap R) = P(U_1) \times P_{U_1}(R) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$ et de façon analogique, on a :
$P(U_2 \cap R) = P(U_2) \times P_{U_2}(R) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

$P(U_3 \cap R) = P(U_3) \times P_{U_3}(R) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

Finalement
$P(R) = \frac{1}{18} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} = \frac{5}{12}$

Exercice 7

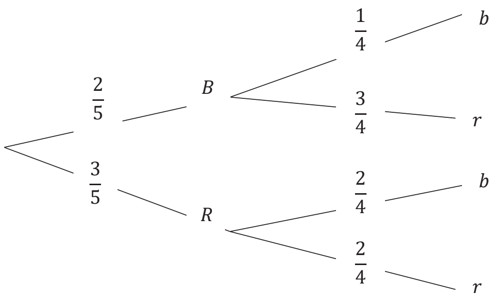
1. Nombre d'issue possible

Si la première est bleue, le jeton tiré peut être bleu ou rouge.

Si la première est rouge, le jeton tiré peut être bleu ou rouge.

Il y a 4 issues possibles.

2. Arbre pondéré



$P(B,b) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$; $P(B,r) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{10}$;

$P(R,b) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$; $P(R,r) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$

3. $P(A) = P(B,b) + P(R,r) = \frac{1}{10} + \frac{3}{10} = \frac{2}{5}$

Exercice 8

$P(A) = \frac{12}{96} = \frac{1}{8}$; $P(B) = \frac{32}{96} = \frac{1}{3}$

$P(A \cap B) = \frac{4}{96} = \frac{1}{24}$

$P(A) \times P(B) = \frac{1}{24}$ et $P(A \cap B) = \frac{1}{24}$

Donc A et B sont indépendants

$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{24}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{8} = P(A)$

Exercice 9

A et B sont indépendants donc $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Or $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

D'où $\frac{1}{2} = \frac{1}{5} + P(B) - \frac{1}{5}P(B)$

Donc $\frac{4}{5}P(B) = \frac{3}{10}$

Par suite $P(B) = \frac{3}{8}$

Exercice 10

1. $P(E) = \frac{60}{150} = \frac{2}{5}$; $P(H) = \frac{78}{150} = \frac{2}{5}$ et $P(E \cap H) = \frac{33}{150} = 0{,}22$

On a $P(E) \times P(H) = 0{,}208$ et $P(E \cap H) = 0{,}22$, comme $P(E \cap H) \neq P(E) \times P(H)$ donc les évènements « étudier l'espagnol » et « pratiquer le Handball » ne sont pas indépendants

2. $P(A) = \frac{90}{150} = \frac{3}{5}$; $P(B) = \frac{45}{150} = \frac{3}{10}$ et $P(A \cap B) = \frac{27}{150} = 0{,}18$

On a $P(A) \times P(B) = 0{,}18$ et $P(A \cap B) = 0{,}18$, comme $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ Alors les événements « étudier l'anglais » et « pratiquer le Basket » sont indépendants

Exercice 11

$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 1$ donc le tableau détermine la loi de probabilité d'une variable aléatoire X

Exercice 12

$a = \frac{1}{3}$

Exercice 13

1.a) Soit Ω l'univers de cette expérience aléatoire.

X est définie de Ω dans $\mathbb{R}$ car à chaque éventualité on associe la somme des points qui est un nombre réel.

Par suite X est une variable aléatoire.

b) On a : $X(\Omega) = \{-1; 0; 1; 2; 3\}$

2. La loi de probabilité de X est donc

x_i	-1	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{4}{36}$

Exercice 14

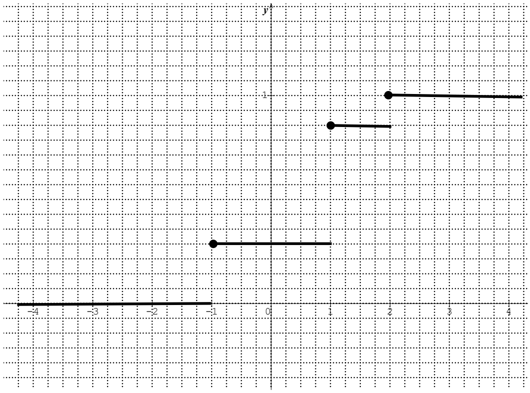
1. Faux ; 2. Vrai ; 3. Faux ; 4. Vrai

Exercice 15

1. La fonction de répartition F de la variable aléatoire X est définie par :

$$\begin{cases} si\ x < -1, F(x) = 0 \\ si -1 \leq x < 1, F(x) = \dfrac{2}{7} \\ si\ 1 \leq x < 2, F(x) = \dfrac{2}{7} + \dfrac{4}{7} = \dfrac{6}{7} \\ si\ 2 \leq x, F(x) = \dfrac{2}{7} + \dfrac{4}{7} + \dfrac{1}{7} = 1 \end{cases}$$

2. Représentation graphique de la fonction F



Exercice 16

1.

Dé noir / Dé blanc	**0**	**1**	**1**	**1**	**2**	**2**
-1	-1	0	0	0	1	1
-1	-1	0	0	0	1	1
0	0	1	1	1	2	2
0	0	1	1	1	2	2
1	1	2	2	2	3	3
1	1	2	2	2	3	3

X étant la somme des points obtenus, on a donc $X(\Omega) = \{-1; 0; 1; 2; 3\}$

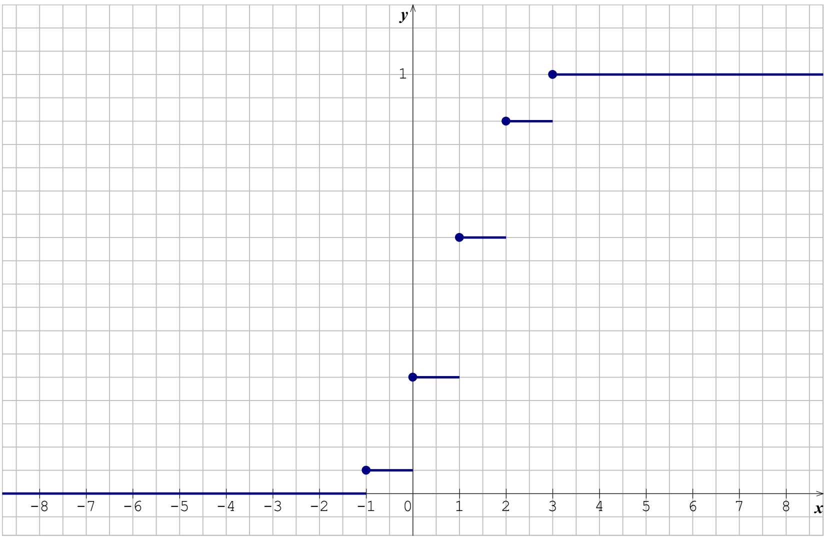
La loi de probabilité de X est donc

x_i	-1	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{4}{36}$

2.a) la fonction de répartition F de X est définie par : $F(x) = P(X \leq x)$, ainsi

$$\begin{cases} si\ x < -1, F(x) = 0 \\ si -1 \leq x < 0, F(x) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} \\ si\ 0 \leq x < 1, F(x) = \frac{2}{36} + \frac{8}{36} = \frac{5}{18} \\ si\ 1 \leq x < 2, F(x) = \frac{2}{36} + \frac{8}{36} + \frac{12}{36} = \frac{11}{18} \\ si\ 2 \leq x < 3, F(x) = \frac{2}{36} + \frac{8}{36} + \frac{12}{36} + \frac{10}{36} = \frac{8}{9} \\ si\ 3 \leq x, F(x) = \frac{2}{36} + \frac{8}{36} + \frac{12}{36} + \frac{10}{36} + \frac{4}{36} = 1 \end{cases}$$

b) Courbe représentative de F



Exercice 17

1.a) ; 2.c)

Exercice 18

$$E(X) = (-1) \times \frac{2}{36} + 0 \times \frac{8}{36} + (1) \times \frac{12}{36} + (2) \times \frac{10}{36} + 3 \times \frac{4}{36} = \frac{-2+12+20+12}{36} = \frac{42}{36} = \frac{7}{6}$$

Exercice 19

La variance

$$V(X) = \left((-1)^2 \times \frac{2}{36} + (0)^2 \times \frac{8}{36} + (1)^2 \times \frac{12}{36} + (2)^2 \times \frac{10}{36} + (3)^2 \times \frac{4}{36} \right) - \left(\frac{7}{6}\right)^2$$

$$V(X) = \frac{2+12+40+36}{36} - \frac{49}{36} = \frac{90}{36} - \frac{49}{36} = \frac{41}{36}$$

L'écart type

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{41}{36}} = \frac{\sqrt{41}}{6}$$

Exercice 20

On a : $E(X) = (1 \times p) + 0 \times (1-p) = p$

$$V(X) = [1^2 \times p + 0^2 \times (1-p)] - p^2 = p - p^2 = p(1-p)$$

Exercice 21

1. $E(X) = 43{,}2$ d'où $np = 43{,}2$ (1)

   $V(X) = 27{,}648$ d'où $np(1-p) = 27{,}648$ (2)

   De (1) et (2) on a : $1 - p = \frac{27{,}648}{43{,}2} = 0{,}64$

2. $1 - p = 0{,}64$ donc $p = 1 - 0{,}64 = 0{,}36$ par suite $n = \frac{43{,}2}{0{,}36} = 120$

Exercice 22

$\sigma(X) = 1{,}5$; $\sqrt{np(1-p)} = 1{,}5$; $\sqrt{25p(1-p)} = 1{,}5$;
$\sqrt{p(1-p)} = \frac{1{,}5}{5} = 0{,}3$;

$\sqrt{p(1-p)} = 0{,}3 \quad \Leftrightarrow p - p^2 = 0{,}09$

$\Leftrightarrow p^2 - p + 0{,}09 = 0$

On a : $\Delta = 0{,}64$ donc $p = 0{,}1$ ou $p = 0{,}9$

Exercice 23

La naissance d'un enfant conduit à deux issues soit l'enfant est un garçon soit c'est une fille
On a donc une épreuve de Bernoulli.

Exercice 24

Un élève de cette classe est soit admis soit non admis, c'est une épreuve de Bernoulli comme elle est répétée 60 fois de façon indépendante on alors c'est un schéma de Bernoulli.

Exercice 25
La naissance d'un enfant conduit à deux issues soit l'enfant est un garçon soit c'est une fille. Dans une famille de cinq enfants, cette expérience est répétée 5 fois de manière identique et indépendante. On a donc une épreuve de Bernoulli.
La variable aléatoire égale au nombre de fille suit une loi binomiale.

Exercice 26

1. La loi de X est déterminée par : $P(X = k) = C_{20}^{k} \times (0{,}36)^{k} \times (0{,}64)^{20-k}$

2. a) $P(X = 3) = C_{20}^{3} \times (0{,}36)^{3} \times (0{,}64)^{17} = 0{,}0269$

b) $P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$

$= C_{20}^{0} \times (0{,}36)^{0} \times (0{,}64)^{20} + C_{20}^{1} \times (0{,}36)^{1} \times (0{,}64)^{19} + C_{20}^{2} \times (0{,}36)^{2} \times (0{,}64)^{18}$

$= 0{,}000132 + 0{,}001495 + 0{,}007990 = 0{,}009617$

c) $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - C_{20}^{0} \times (0{,}36)^{0} \times (0{,}64)^{20} = 1 - 0{,}000132 = 0{,}999$

Exercice 27

$P(X = 1) = 0{,}3$ d'où $C_{2}^{1} \times (p)^{1} \times (1-p)^{1} = 0{,}3$

Donc $2p(1-p) = 0{,}3$ pars suite $p^{2} - p + 0{,}15 = 0$

On a : $\Delta = 0{,}4$ donc $p = 0{,}18$ ou $p = 0{,}82$

Exercice 28

1. $E(X) = np = 2022 \times \frac{1}{4} = 505$

2. $V(X) = np(1-p) = 2022 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{1515}{4}$

Exercice 29

1. Soit un joueur gagne soit il perd il n'y a que deux résultats possibles et comme l'expérience est répétée 100 fois de façon indépendante alors on a un schéma de Bernoulli.

Par suite X suit une loi Binomiale de paramètre 100 et 0,1.

2.a) $P(X = 12) = C_{100}^{12} \times (0{,}1)^{12} \times (0{,}9)^{88} = 0{,}098$

b) $P(X > 1) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)]$

$= 1 - [C_{100}^{0} \times (0{,}1)^{0} \times (0{,}9)^{100} + C_{100}^{1} \times (0{,}1)^{1} \times (0{,}9)^{99}]$

$= 1 - (0{,}00002 + 0{,}00029\ ) = 0{,}99$

Exercice 30

1. a) Soit un joueur gagne soit il perd il n'y a que deux résultats possibles et comme l'expérience est répétée n fois de façon indépendante alors on a un schéma de Bernoulli.

Par suite X suit une loi Binomiale de paramètre n et $\frac{1}{10}$.

b) La loi de X est déterminée par : $P(X=k) = C_n^k \times \left(\frac{1}{10}\right)^k \times \left(\frac{9}{10}\right)^{n-k}$

2. $P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - C_n^0 \times \left(\frac{1}{10}\right)^0 \times \left(\frac{9}{10}\right)^n = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^n$

$1 - \left(\frac{9}{10}\right)^n \geq 0{,}99$ d'où $n \geq \frac{ln(0{,}01)}{ln(0{,}9)}$ donc $n \geq 43{,}70$

ainsi la plus petite valeur de n est 44.

Exercice 31

1. Un élève a soit 18 ans et plus soit moins de 18 ans, il n'y a que deux résultats possibles comme l'expérience est répétée 35 fois de façon indépendante on a un schéma de Bernoulli D'où X suit une loi Binomiale de paramètre 35 et $1 - 0{,}67$ soit 35 et $0{,}33$

2.a) $P(X = 10) = C_{35}^{10} \times (0{,}33)^{10} \times (0{,}67)^{25} = 0{,}12$

b) $P\big(X \geq 2\big) = 1 - [P(X=0) + P(X=1)] = 1 - (0{,}0000008 + 0{,}0000140)$

$= 0{,}99$

3. $E(X) = 35 \times 0{,}33 = 11{,}55$

$V(X) = 35 \times 0{,}33 \times 0{,}67 = 7{,}73$

Exercice 32

1. Dans ce stock une boîte présente des traces de pesticide ou ne présente aucune trace de Pesticides. Il n'y a que deux résultats possibles et comme l'expérience est répétée 10 fois de manière indépendante nous avons un schéma de Bernoulli.

X suit donc une loi Binomiale de paramètre 10 et 0,88.

2. $P(X = 10) = C_{10}^{10} \times (0{,}88)^{10} \times (0{,}12)^0 = 0{,}27$

3 $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - C_{10}^0 \times (0{,}88)^0 \times (0{,}12)^{10} = 0{,}62 \times 10^{-9}$

Exercice 33

1. A un tirage on a soit une boule verte soit une boule rouge il n'y a que deux résultats et deux seulement comme on en tire trois de façon indépendante on a un schéma de Bernoulli, par suite X suit une loi binomiale de paramètre 3 et $\frac{1}{4}$

2. On a : $E(X) = 3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$V(X) = 3 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$ donc $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$

Par suite $E(X) = \sigma(X)$.

Exercice 34

1. La variable aléatoire nombre de réponses justes au QCM est une loi binomiale de de paramètres 6 et $\frac{1}{4}$

2. La loi de probabilité de X est : $P(X = k) = C_6^k \times \left(\frac{1}{4}\right)^k \times \left(\frac{3}{4}\right)^{6-k}$

   a) $P(X = 3) = C_6^3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^3 = 0{,}13$

   b) $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - C_6^0 \times \left(\frac{1}{4}\right)^0 \times \left(\frac{3}{4}\right)^6 = 0{,}82$

3. $E(X) = 6 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{2} = 1{,}5$

   En moyenne l'élève répond juste à une question et demie.

Exercice 35

1. X suit une loi binomiale de paramètres 4 et $\frac{1}{10}$.

La loi de probabilité de X est : $P(X = k) = C_4^k \times \left(\frac{1}{10}\right)^k \times \left(\frac{9}{10}\right)^{4-k}$

a) $P(X = 2) = C_4^2 \times \left(\frac{1}{10}\right)^2 \times \left(\frac{9}{10}\right)^2 = 0{,}048$

b) $P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4)$

$= C_4^3 \times \left(\frac{1}{10}\right)^3 \times \left(\frac{9}{10}\right)^1 + C_4^4 \times \left(\frac{1}{10}\right)^4 \times \left(\frac{9}{10}\right)^0$

$= 0{,}0037$

2. $E(X) = 4 \times \frac{1}{10} = 0{,}4$

$E(X) = 0{,}4$ donc en moyenne dans cette famille il y'a moins d'un enfant qui présente le caractère C.

Exercice 36

Notons : M : « l'individu prend le médicament »

G : « l'individu a une baisse du taux de glycémie »

1. $P_M(G) = 0{,}8$
2. $P(G) = P(G \cap M) + P(G \cap \bar{M}) = 0{,}6 \times 0{,}8 + 0{,}4 \times 0{,}1 = 0{,}52$
3. $P_G(M) = \frac{P(G \cap M)}{P(G)} = \frac{0{,}6 \times 0{,}8}{0{,}52} = 0{,}92$
4. Chez un individu soit le taux de glycémie a baissé soit il n'a pas baissé. Comme l'expérience est répétée 5 fois de façon indépendante alors on a un schéma de Bernoulli

La probabilité d'avoir exactement k individus dont le taux de glycémie a baissé est

$P_k = C_5^k \times 0{,}52^k \times 0{,}48^{5-k}$

a) Ainsi $P_2 = C_5^2 \times 0{,}52^2 \times 0{,}48^3 = 0{,}29$

b) $1 - P_0 = 1 - C_5^0 \times 0{,}52^0 \times 0{,}48^5 = 0{,}97$

Exercice 37

1. si le numéro est 2 il gagne 2000; si le numéro est 3 il gagne 3000

   si le numéro est 5 il gagne 5000 ; si le numéro est 1 il gagne -1000

si le numéro est 4 il gagne -4000; si le numéro est 6 il gagne -6000
ainsi $X(\Omega) = \{-6000\ ;\ -4000\ ;\ -1000\ ;\ 2\,000\ ;\ 3\,000\ ;\ 5\,000\}$

2. La loi de probabilité de X est donnée par le tableau ci-dessous.

x_i	-6000	-4000	-1000	2000	3000	5000
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

3.a) $E(X) = \frac{-6000-4000-1000+2000+3000+5000}{6} = -\frac{1000}{6}$

$V(X) = \frac{6000^2+4000^2+1000^2+2000^2+3000^2+5000^2}{6} - \left(\frac{1000}{6}\right)^2 = 151638888{,}8$

b) Comme $E(X) < 0$ alors le jeu est défavorable au joueur

4. La fonction de répartition F de X

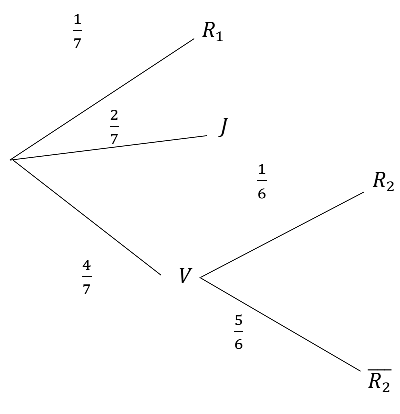
$$\begin{cases} si\ x < -6000, F(x) = 0 \\ si -6000 \leq x < -4000, F(x) = \frac{1}{6} \\ si -4000 \leq x < -1000, F(x) = \frac{2}{6} \\ si -1000 \leq x < 2000, F(x) = \frac{3}{6} \\ si\ 2000 \leq x < 3000, F(x) = \frac{4}{6} \\ si\ 3000 \leq x < 5000, F(x) = \frac{5}{6} \\ si\ 5000 \leq x, F(x) = 1 \end{cases}$$

Exercice 38

1. a) Il y'a une boule rouge parmi les 7 boules donc $p(R_1) = \frac{1}{7}$

Il y'a cinq boules non rouge parmi les 6 boules restantes donc $p(\overline{R_2}) = \frac{5}{6}$

b) Arbre pondéré



2. a) Au premier tirage :

Si elle est rouge, il gagne 10 000 francs

Si elle est jaune, il gagne - 5 000 francs

Au second tirage :

Si elle est rouge, il gagne 8 000 francs

Si elle n'est pas rouge, il gagne - 4 000 francs

Ainsi $X(\Omega) = \{-5\,000\,;\ -4\,000\,;\ 8\,000\,;\ 10\,000\}$

b) on a :

$P(X = -5000) = P(J) = \frac{2}{7}$; $\quad P(X = 10000) = P(R_1) = \frac{1}{7}$

$P(X = -4000) = \frac{4}{7} \times \frac{5}{6} = \frac{10}{21}$; $P(X = 8000) = \frac{4}{7} \times \frac{1}{6} = \frac{2}{21}$

la loi de probabilité de X est donnée dans le tableau ci-dessous

x_i	-5000	-4000	8000	10000
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{1}{7}$

c) $E(X) = \frac{-5000\times6-4000\times10+8000\times2+10000\times3}{21} = -\frac{8000}{7}$

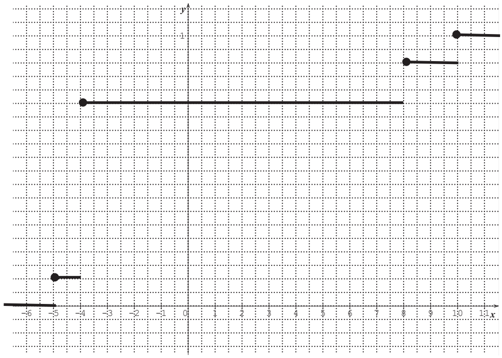
Sur un grand nombre de partie le joueur perd en moyenne $\frac{8000}{7}$

Comme $E(X) < 0$ le jeu est défavorable au joueur

d) $V(X) = \frac{5000^2\times6+4000^2\times10+8000^2\times2+10000^2\times3}{21} - \left(\frac{8000}{7}\right)^2 = 3383674{,}69$

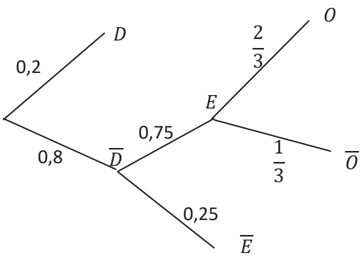
3. La fonction de répartition F de X est :

$$\begin{cases} si\ x < -5000, F(x) = 0 \\ si -5000 \leq x < -4000, F(x) = \frac{6}{21} \\ si -4000 \leq x < 8000, F(x) = \frac{6}{21} + \frac{10}{21} = \frac{16}{21} \\ si\ 8000 \leq x < 10000, F(x) = \frac{16}{21} + \frac{2}{21} = \frac{18}{21} \\ si\ 2 \leq x, F(x) = \frac{18}{21} + \frac{3}{21} = 1 \end{cases}$$



Exercice 39

1- Arbre pondéré



2-a) Cette probabilité est : $P(\overline{D} \cap E \cap \overline{O}) = 0{,}8 \times 0{,}75 \times \frac{1}{3} = 0{,}2$. Car la probabilité d'un chemin est le produit des probabilités sur ce chemin.

b) Cette probabilité est : $P(\overline{D} \cap E \cap O) = 0{,}8 \times 0{,}75 \times \frac{2}{3} = 0{,}4$. Car la probabilité d'un chemin est le produit des probabilités sur ce chemin.

3- Pour être admis à ce concours, il faut être admis sur dossier ou bien être passé par l'écrit, subir l'oral et être admis à l'issue de l'oral. La probabilité cherchée est : $P(D) + P(\overline{D} \cap E \cap O)$ qui vaut 0,6.

Exercice 40

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

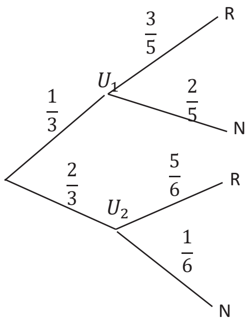
1- $P(A) = \frac{1}{2}$.
2- $P(B) = \frac{1}{6}$.

3- $P(C) = P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$; $P(C) = \frac{1}{2}$.

Exercice 41

Soit :
U_1 l'évènement : « Tirer une boule de l'urne U_1 » ;
U_2 l'évènement : « Tirer une boule de l'urne U_2 » ;
R l'évènement : « Tirer une boule rouge » ;
N l'évènement : « Tirer une boule noire ».
La répartition des boules dans l'urne fournit les probabilités suivantes :
$P_{U1}(R) = \frac{3}{5}$; $P_{U1}(N) = \frac{2}{5}$; $P_{U2}(R) = \frac{5}{6}$ et $P_{U2}(N) = \frac{1}{6}$.
Le dé étant parfaitement équilibré, on a : $P(U_1) = \frac{1}{3}$; $P(U_2) = \frac{2}{3}$.

Tous ces résultats sont résumés dans l'arbre pondéré ci-dessous :



$P(N) = P(N\cap U_1) + P(N\cap U_2)$
$= P(U_1)\times P_{U1}(N) + P(U_2)\times P_{U2}(N)$

$= \frac{1}{3}\times\frac{2}{5} + \frac{2}{3}\times\frac{1}{6}$

$P(N) = \frac{11}{45}$.

2- Cette probabilité est : $P_N(U_1)$.

On a : $P_N(U_1) = \frac{P(U_1) \times P_{U_1}(N)}{P(N)}$

$P_N(U_1) = \frac{6}{11}$.

Exercice 42

On considère les évènements suivants :
H : « la personne choisie est un homme » ;
F : « la personne choisie est une femme » ;
P : « la personne choisie présente le caractère P ».
On a les probabilités suivantes :
$P(H) = 0,45$; $P(F) = 0,55$; $P(P/H) = 0,04$; $P(P/F) = 0,05$.

1. Détermination de la proportion de personnes qui présentent le caractère P.

$P(P) = P(H)\,P(P/H) + P(F)\,P(P/F)$
$P(P) = 0,45 \times 0,04 + 0,55 \times 0,05 = 0,0455$; soit 4,55 % des personnes de cette population.

2. Il s'agit de déterminer $P(H/P)$.

$P(H/P) = \frac{P(H)\,P(P/H)}{P(P)} = 0,4$.

Exercice 43

On considère les évènements suivants :
M : « la personne choisie est malade » ;
T : « la personne choisie est testée positif » ;
On en déduit les évènements suivants :
$\overline{M}$: « la personne choisie est saine » ;
$\overline{T}$: « la personne choisie est testée négatif ».
On a les probabilités suivantes :
$P(M) = 0,03$;
$P_M(T)$ est la probabilité qu'une personne malade soit testée positif : $P_M(T) = 0,95$;
$P_{\overline{M}}(T)$ est la probabilité qu'une personne saine soit testée positif : $P_{\overline{M}}(T) = 0,1$.

1- a) Cette probabilité est $P(M \cap T)$
$P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T)$; $P(M \cap T) = 0,03 \times 0,95 = 0,0285$.
b) Cette probabilité est $P(\overline{M} \cap T)$
$P(\overline{M} \cap T) = P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(T)$; $P(\overline{M} \cap T) = 0,97 \times 0,1 = 0,097$.
c) Avec la formule des probabilités totales appliquée à $\{M ; \overline{M}\}$, on a :
$P(T) = P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T)$; $P(T) = 0,0285 + 0,097 = 0,1255$.
2-a) Cette probabilité est $P_T(M)$
$P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)}$; $P_T(M) = \frac{0,0285}{0,1255} = 0,2271$.
3. Cette probabilité est $P_T(\overline{M})$
$P_T(\overline{M}) = \frac{P(\overline{M} \cap T)}{P(T)}$; $P_T(\overline{M}) = \frac{0,097}{0,1255} = 0,7729$.
On pourrait remarquer que : $P_T(\overline{M}) = 1 - P_T(M)$.
4. Cette probabilité est $P_{\overline{T}}(M)$
$P_{\overline{T}}(M) = \frac{P(M \cap \overline{T})}{P(\overline{T})}$.
Avec la formule des probabilités totales appliquée à $\{T ; \overline{T}\}$, on a :

P(M) = P(M∩T) + P(M∩ $\overline{T}$) ; d'où : P(M∩ $\overline{T}$) = P(M) −P(M∩T) = 0,03−0,0285 = 0,0015.

$P_{\overline{T}}(M) = \frac{0,0015}{1-0,1255} = 0,0017$.

5. Cette probabilité est $P_{\overline{T}}(\overline{M})$

$P_{\overline{T}}(\overline{M}) = 1 - P_{\overline{T}}(M)$; $P_{\overline{T}}(\overline{M}) = 1 - 0,0017 = 0,9983$.

Exercice 44

1) A chaque règle choisie au hasard, il y a deux issues possibles : la règle présente un défaut avec une probabilité constante égale à 0,1 ou bien la règle ne présente aucun défaut une probabilité de 0,9 car le tirage est supposé fait avec remise. Il y a répétition de 8 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. La variable aléatoire X qui prend pour valeur le nombre de règles présentant un défaut suit donc une binomiale B(8 ; 0,1).

2) P(A) = P(X= 0) = $0,9^8$ = 0,43.

P(B) = P(X=2) = $C_8^2(0,1)^2(0,9)^6$= 0,149.

P(C)= 1−P(A) = 0,57.

3) E(X) = 8×0,1= 0,8. L'arrondi d'ordre 0 du résultat est 1.
En moyenne 1 règle sur 8 Choisies au hasard présente un défaut au contrôle.

Exercice 45

1. Le nombre de cas possibles : $C_5^2 \times C_5^2 = 100$.

Pour avoir un cas favorable à E : tirer exactement 1 boule blanche dans chaque urne ou bien 2 boules blanches dans une seule des deux urnes. Soit au total:

$C_3^1 \times C_2^1 + C_2^1 \times C_3^1 + C_3^2 \times C_3^2 + C_2^2 \times C_2^2 = 46$. D'où : P(E)= $\frac{46}{100} = 0,46$.

2. a) Les valeurs prises par X sont : 0 ;1 ; 2 ;3 ; 4.

La loi de probabilité est donnée par le tableau ci-dessous :

k	0	1	2	3	4
P(X=k)	0,03	0,24	0,46	0,24	0,03

b) E(X) =2.

Le nombre moyen de boules blanches tirées est 2. Le gain par boule blanche tirée étant de 600 F, le gain moyen est de 2×600 −1500 qui est −300. La gain étant non nul, le jeu n'est pas équitable.

3. On peut considérer la variable aléatoire Y = 600X−1500. Cette variable aléatoire donne le gain du joueur. E(Y) = 600E(X) −1500 = −300.

Sur un grand nombre de tirages qui donnent lieu au jeu, ce jeu n'est pas favorable au joueur car le gain obtenu est négatif (perte).

On considère les évènements suivants :

B : « tirer exactement deux boules blanches »

U_1 : « tirer une et une seule boule blanche de U_1 »

$P(B|U_1) = \frac{P(B\cap U_1)}{P(U_1)}$; $P(B|U_1) = \frac{3}{5}$.

4. Soit l'évènement succès S : « tirer deux boules blanches ».

La probabilité d'un succès est : P(S) = $\frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10}$.

La variable aléatoire X prenant pour valeurs le nombre de succès au cours des 10 tirages suit une loi binomiale de paramètres 10 et $\frac{3}{10}$.

La probabilité cherchée est P(X ≥ 2).

$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X=1)$.
$P(X \geq 2) = 1-(\frac{7}{10})^{\mathbf{10}} - C_{10}^{1}(\frac{3}{10})^{\mathbf{1}}(\frac{7}{10})^{\mathbf{9}} = 0{,}851$.

Exercice 46

1)
a) Pour réaliser A, on doit tirer une boule blanche de l'urne U_1 et la remettre dans l'urne U_2 puis tirer une boule blanche de l'urne U_2 et la remettre dans U_1 ou bien tirer une boule noire de l'urne U_1 et la remettre dans l'urne U_2 puis tirer une boule noire de l'urne U_2 et la remettre dans U_1.

$P(A) = \frac{n}{n+3} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{n+3} \times \frac{2}{4}$; d'où : $P(A) = \frac{3}{4}(\frac{n+2}{n+3})$.

b) Cette limite vaut $\frac{3}{4}$.

2) Pour réaliser B , on doit tirer une boule noire de l'urne U_1 et la remettre dans l'urne U_2 puis tirer une boule blanche de l'urne U_2 et la remettre dans U_1.

$P(B) = \frac{3}{n+3} \times \frac{2}{4}$; d'où : $P(B) = \frac{6}{4(n+3)}$.

3) a) D'après les trois cas décrits dans l'énoncé, les gains algébriques du joueur en franc peuvent être : $2(n-10)$; $n-20$; -20. C'est pour n supérieur à 10, que le joueur peut espérer gagner.

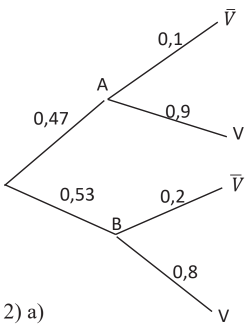
b) Les valeurs prises par X sont : $2(n-10)$; $n-20$; -20.
La loi de probabilité est donnée par le tableau ci-dessous :

k	-20	$n-20$	$2(n-10)$
P(X=k)	$\frac{n}{4(n+3)}$	$\frac{3}{4}(\frac{n+2}{n+3})$	$\frac{6}{4(n+3)}$

c) $E(X) = \frac{3n^2-62n-240}{4(n+3)}$.
d) E(X) est strictement positive si et seulement si n est supérieur ou égal à 25.
Dès que l'urne U_1 contient au moins 25 boules blanches, le jeu est favorable au joueur.

Exercice 47

1) Tous ces résultats sont résumés dans l'arbre pondéré ci-dessous :



2) a)
$P(V) = P(V \cap A) + P(V \cap B)$
$= P(A) \times P_A(V) + P(B) \times P_B(V)$
$= 0{,}47 \times 0{,}9 + 0{,}53 \times 0{,}8$

P(V) = 0,847.
b) Cette probabilité est : $P_V(A)$
$P_V(A) = \frac{P(V \cap A)}{P(V)}$; $P_V(A) = \frac{0,47 \times 0,9}{0,847} = \frac{423}{847}$, soit environ 50 %.

3. La personne choisie vote effectivement le candidat A si elle affirme voter le candidat A et dit la vérité ou affirme voter le candidat B et ne dit pas la vérité.
Cette probabilité est : $P(A \cap V) + P(B \cap \bar{V})$
$P(A \cap V) + P(B \cap \bar{V}) = 0,47 \times 0,9 + 0,53 \times 0,2 = 0,529$.

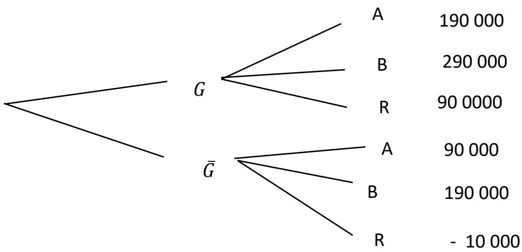
4. En une demi-heure, on répète 10 expériences de Bernoulli indépendantes dont la probabilité de succès est 0,4. La variable aléatoire X qui compte le nombre de personnes qui accepte de répondre au cours de la demi-heure suit une loi binomiale de paramètres 10 et 0,4.
On a : E(X) = 10×0,4 = 4. Cela signifie que l'institut de sondage espère en une demi-heure obtenir 4 personnes qui acceptent de répondre à l'enquête. Or : $\frac{1200}{4} = 300$, donc l'institut de sondage doit prévoir en moyenne 300 demi-heures, soit 150 heures pour parvenir à l'atteinte de son objectif.

Exercice 48

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre d'ordinateurs tombés en panne parmi les 100 disponibles.
Les 100 ordinateurs tombant en panne de façon indépendante avec une probabilité de 0,01 à chaque panne, la variable aléatoire X suit une loi binomiale de probabilité de paramètres 100 et 0,01.
1. La probabilité qu'aucun ordinateur ne tombe en panne est : P(X = 0).
$P(X = 0) = (1 - 0,01)^{100}$; P(X = 0) = 0,366.
2. La probabilité qu'au moins un ordinateur tombe en panne est : $P(X \geq 1)$.
$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 0,634$.
3. La probabilité qu'exactement trois ordinateurs tombent en panne est : P(X = 3).
$P(X = 3) = C_{100}^{3}(0,01)^3 \times (0,99)^{97}$; P(X = 3) =0,061.
4. La probabilité qu'au plus trois ordinateurs tombent en panne est : $P(X \leq 3)$.
$P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$;
On a : $P(X = 1) = C_{100}^{1}(0,01)^1 \times (0,99)^{99} = 0,37$;
$P(X = 2) = C_{100}^{2}(0,01)^2 \times (0,99)^{98} = 0,185$.
$P(X \leq 3) = 0,366 + 0,37 + 0,185 + 0,061 = 0,982$.
5. X suivant une loi binomiale de paramètres 100 et 0,01, le nombre moyen d'ordinateurs qui tombent en panne dans cette entreprise est 100×0,01 = 1.

Exercice 49

Arbre de probabilité



2) On a : $P_{\bar{G}}(R) = 1 - \left(\frac{1}{70} + \frac{1}{490}\right) = 1 - \frac{8}{490} = \frac{482}{490}$

3)a) voir figure

b) $X(\Omega) = \{-10\,000\,; 90\,000\,; 190\,000\,; 290\,000\}$

4) a) on a : $P_G(A) \times P(G) + P(B \cap \bar{G}\,) = \frac{1}{125}$ donc

$$P_G(A) = \left(\frac{1}{125} - \frac{1}{490} \times \frac{49}{50}\right) \times 50 = \frac{50}{125} - \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$$

b) on a : $P_G(R) \times P(G) + P(A \cap \bar{G}\,) = \frac{13}{500}$ donc

$$P_G(R) = \left(\frac{13}{500} - \frac{1}{70} \times \frac{49}{50}\right) \times 50 = \frac{13}{10} - \frac{7}{10} = \frac{6}{10}$$

5) a) la loi de probabilité de X

On a $P(\,X = -10\,000\,) = P(\bar{G}) \times P_{\bar{G}}(R) = \frac{482}{490} \times \frac{49}{50} = \frac{482}{500}$

Et $P(\,X = 290\,000\,) = P(G) \times P_G(B) = \frac{1}{50} \times \left(1 - \frac{9}{10}\right) = \frac{1}{500}$

$X = x_i$	$-10\,000$	$90\,000$	$190\,000$	$290\,000$
$P(X = x_i)$	$\frac{482}{500}$	$\frac{13}{500}$	$\frac{1}{125}$	$\frac{1}{500}$

b) Calculons l'espérance mathématique $E\,(X)$.

$$E\,(X) = \frac{-10\,000 \times 482 + 13 \times 90000 + 4 \times 190000 + 290000}{500} = \frac{-\,2600000}{500} = -5200$$

Sur un grand nombre de parties le joueur perd en moyenne 5 200

De plus comme $E\,(X) < 0$, le jeu est défavorable au joueur

Exercice 50

1. Vrai
2. vrai
3. Faux

Situations complexes

Exercice 51

Identification du problème à résoudre
Il s'agit de donner une argumentation au fabricant sur le bénéfice qu'il espère avoir basée sur ton cours de mathématiques.
Modélisation
Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de consoles conformes parmi les 400 produits et vendus par mois. Le fabricant faisant réaliser un test de conformité, dans les mêmes conditions, sur chacun de ses objets fabriqués, X suit une loi binomiale dont le succès est « la console de jeu est conforme » avec une probabilité de 0,93.
Calcul du bénéfice
L'espérance de la variable aléatoire X est 400×0,93 = 372. Cela signifie que le fabricant espère produire et vendre mensuellement 372 consoles conformes. Le nombre de consoles non conformes que le fabricant espère produire et vendre est : 400 −372 = 28.
Le montant total des ventes en FCFA est donc : 290 000×372 + 150 000×28 = 112 080 000.
Le coût total de la production des 400 consoles en FCFA est : 160 000× 400 = 64 000 000.
Le bénéfice en FCFA que le fabricant espère réaliser est : 48 080 000.
Solution à la préoccupation du fabricant
Le bénéfice espéré par le fabricant de 45 000 000 FCFA est inférieur à 48 080 000 FCFA.
Il n'a donc pas à s'inquiéter. Il lui suffira de suivre ses activités correctement et il n'y aura pas de problème.

Exercice 52

Option 1

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de « faces » obtenu à l'issu des trois lancers.

X suit la loi binomiale de paramètres 3 et $\frac{1}{2}$.

$P(X = 2) = C_3^2(\frac{1}{2})^2 \times (\frac{1}{2})^1$

$P(X = 2) = \frac{3}{8}$

Option 2

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de « faces » obtenu à l'issu des quatre lancers.

Y suit la loi binomiale de paramètre 4 et $\frac{1}{2}$.

$$P(Y = 3) + P(Y = 4) = C_4^3(\frac{1}{2})^3 \times (\frac{1}{2})^1 + (\frac{1}{2})^4$$

$$P(Y = 3) + P(Y = 4) = \frac{5}{16}$$

Conclusion

$\frac{3}{8} > \frac{5}{16}$. Donc je choisis l'option1.

3 DÉRIVABILITÉ ET ÉTUDE DE FONCTIONS

I- LA SITUATION D'APPRENTISSAGE

- Apres la lecture de la situation d'apprentissage (par le professeur, par un élève et une lecture silencieuse des élèves), l'enseignant pourra s'assurer que les élèves ont bien compris le texte.
- Il pourra ensuite faire dégager les constituants de la situation à travers une ou des questions du type :

Constituants de la situation	Exemples de questions possibles	Réponses possibles des élèves
Contexte	-De quel évènement parle le texte ? -Quels sont les acteurs principaux de cet évènement ? -Où se déroule l'évènement ?	- Il s'agit de la mise en place d'un système de collecte des eaux de pluie sur un mur. -les acteurs sont le proviseur et les élèves d'une classe du lycée. -Dans un lycée.
Circonstance	Quel problème ou quelle difficulté rencontrent les élèves ?	Il s'agit de chercher la position du point M sur le mur afin de minimiser la longueur des tuyaux à acheter.
Tâches	-Que décident de faire les élèves ? -Comment s'y prennent-ils ?	-Ils décident de minimiser la longueur totale des tuyaux. -Ils étudient une fonction.

Le professeur utilisera la tâche énoncée par ses élèves pour faire la synthèse de la situation et présentera le plan de la leçon. Il devra dans la mesure du possible se référer à la situation durant tout le déroulement de la leçon.

II. DECOUVERTE DES HABILETES

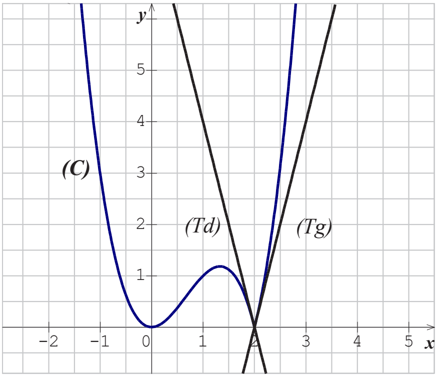
Activité 1 : Dérivabilité d'une fonction à gauche (respectivement à droite) en un point.

- L'objectif de cette activité est de connaître la définition d'une fonction dérivable à gauche (respectivement à droite) en un point.
- Réponses aux questions de l'activité.

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} -x^2 = -4$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$

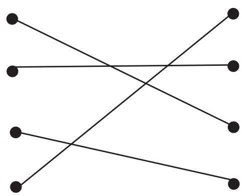
2) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \neq \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$

3)



- Corrigé de l'exercice de fixation

Exercice de fixation 1

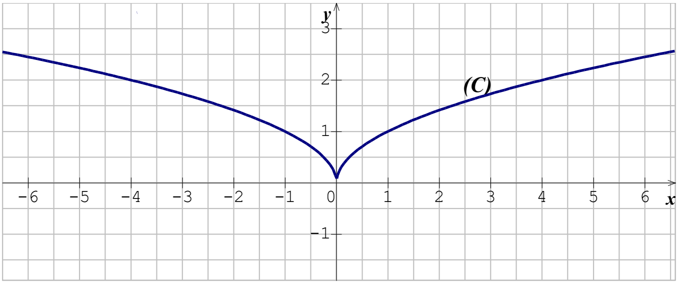


α est	la tangente à droite de f en a
β est	le nombre dérivé de f à droite en a
(D) est	le nombre dérivé de f à gauche en a
(Δ) est	la tangente à gauche de f en a

Activité 2 : Tangente et demi-tangente verticale.

- L'objectif de cette activité est de justifier que la représentation graphique d'une fonction f admet une demi-tangente verticale en un point.
- Réponses aux questions de l'activité.

1.



2. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{-1}{\sqrt{-x}} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ donc la courbe (C) admet une tangente verticale au point O.

3.

a) Le coefficient directeur de la droite (OM) est : $\frac{f(x)}{x}$

b) La «position limite » de la droite (OM) lorsque x se rapproche de plus en plus de 0 par valeurs supérieures ou inférieures est la droite (OJ).

- Corrigé de l'exercice de fixation

Exercice de fixation 2

On a : $\begin{cases} \forall \mathrm{x} \in]-\infty;-1[\cup [1;+\infty[, f(\mathrm{x}) = \sqrt{x^2-1} \\ \forall \mathrm{x} \in [-1;1], f(\mathrm{x}) = \sqrt{1-x^2} \end{cases}$

$$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{-1-x}{\sqrt{1-x^2}} = -\infty$$

$$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}} = +\infty$$

$$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\infty \text{ et } \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = +\infty$$

Donc la courbe (C) admet au point d'abscisse 1 une tangente verticale.

Activité 3 : Dérivabilité d'une fonction sur un intervalle $[a;b]$

- L'objectif de cette activité est de connaître les propriétés relatives à la dérivabilité d'une fonction sur un intervalle.
- Réponses aux questions de l'activité.

1. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{x\sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \sqrt{x} = 0$; $0 \in \mathbb{R}$ donc f est dérivable à droite en 0.

2. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{x\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+x+1}{x\sqrt{x}+1} = \frac{3}{2}$; $\frac{3}{2} \in \mathbb{R}$ donc f est dérivable à gauche en 1.

3. f est dérivable sur $]0; 1[$ et f est dérivable à droite en 0 et f est dérivable à gauche en 1 donc f est dérivable sur $[0; 1]$.

- Corrigé de l'exercice de fixation

Exercice de fixation 2

$\forall x \in [-1; 1], f(x) = \sqrt{1-x^2}$

- **Etudions la dérivabilité de f à droite en -1 et à gauche en 1**

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{-1-x}{\sqrt{1-x^2}} = -\infty$ donc f n'est pas dérivable à gauche en 1.

$\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} \frac{f(x)-f(1)}{x+1} = \lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x+1} = \lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty$ donc f n'est pas dérivable à droite en 1.

- La fonction $u: \mapsto 1-x^2$ est dérivable sur $]-1; 1[$ et $u(]-1; 1[) =]0; 1[$

  De plus la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0; 1[$

  Donc $\sqrt{u}$ est dérivable sur $]-1; 1[$.

On en déduit que $f = \sqrt{u}$ est dérivable sur $]-1; 1[$

Activité 4 : Dérivée d'une fonction composée

- L'objectif de cette activité est de connaître les propriétés relatives à la dérivée d'une fonction composée.
- Réponses aux questions de l'activité.

Partie I

1. a) $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = 9x^2 + 12x + 4$

   b) $\forall x \in \mathbb{R}, gof(x) = g[f(x)] = g(3x+2) = (3x+2)^2$

   Donc $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = gof(x)$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 3$; $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = 2x$ *et* $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = 18x + 12$

   a) $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) \times g'(f(x)) = 3 \times 2(3x+2) = 18x + 12$

   b) $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = f'(x) \times g'(f(x))$
3. a) $\frac{g[f(x)]-g[f(x_0)]}{f(x)-f(x_0)} \times \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{g[f(x)]-g[f(x_0)]}{x-x_0} = T(x)$

   b) f est dérivable sur I et $x_0 \in I$ donc f est continue en x_0.

   Donc $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

   c) $\lim\limits_{x\to x_0} T(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{g[f(x)]-g[f(x_0)]}{f(x)-f(x_0)} \times \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = g'(f(x_0)) \times f'(x_0)$

Partie II

$\forall\, x \in I, h'_1(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

$\forall\, x \in I, h'_2(x) = ru'(x)[u(x)]^{r-1}$

$\forall\, x \in I, h'_3(x) = -u'(x) \times \sin(u(x))$

$\forall\, x \in I, h'_4(x) = u'(x) \times \cos(u(x))$

- Corrigé de l'exercice de fixation

Exercice de fixation 4

1. $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 8(2x-1)^3$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -2sin(2x-3)$
3. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}, f'(x) = 3\left(\frac{4x-1}{x+2}\right)'\left(\frac{4x-1}{x+2}\right)^2 = 3 \times \frac{9}{(x+2)^2}\left(\frac{4x-1}{x+2}\right)^2$

   $f'(x) = \frac{27}{(x+2)^2}\left(\frac{4x-1}{x+2}\right)^2$
4. $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$

Activité 5 : Nombre dérivé de la bijection réciproque

- L'objectif de cette activité est de connaître les propriétés relatives à la dérivée d'une fonction composée.
- Réponses aux questions de l'activité.

1. a) $\forall\, b \in I, fof^{-1}(b) = b$

   b) $\forall\, b \in I, (fof^{-1})'(b) = 1.$
2. $\forall\, b \in I, (fof^{-1})'(b) = (f^{-1})'(b) \times f'[f^{-1}(b)]$
3. $(f^{-1})'(b) \times f'[f^{-1}(b)] = 1$ donc si $f'[f^{-1}(b)] \neq 0$ alors $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'[f^{-1}(b)]}$

- Corrigé de l'exercice de fixation

Exercice de fixation 5

Calcul de $(f^{-1})'(\alpha)$

1. $f(x) = x^3$ et $\alpha = 1$

   $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 3x^2$

   On a : $f(1) = 1$ donc $f^{-1}(1) = 1$

   $f'\big(f^{-1}(1)\big) = f'(1) = 3$ et $3 \neq 0$

   Donc et f^{-1} est dérivable en 1 et on a : $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(1))} = \frac{1}{3}$
2. $f(x) = \frac{x}{x+1}$ et $\alpha = 0$

   $\forall x \in [0; +\infty[, f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$

On a : $f(0) = 0$ donc $f^{-1}(0) = 0$
$f'(f^{-1}(0)) = f'(0) = 1$ et $1 \neq 0$
Donc et f^{-1} est dérivable en 0 et on a : $(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(0))} = \frac{1}{1} = 1$

Activité 6 : Dérivées successives

- L'objectif de cette activité est de connaître les nouvelles notations des dérivées successives.
- Réponses aux questions de l'activité.

1) $\forall\, x \in \mathbb{R}, f'(x) = 6x^5 + 5x^4 - 20x^3 + 2x$
2) $\forall\, x \in \mathbb{R}, f''(x) = 30x^4 + 20x^3 - 60x^2 + 2$
3) $\forall\, x \in \mathbb{R}, f^{(3)}(x) = 120x^3 + 60x^2 - 120x$
4) $\forall\, x \in \mathbb{R}, f^{(4)}(x) = 360x^2 + 120x - 120$
   $\forall\, x \in \mathbb{R}, f^{(5)}(x) = 720x + 120$
   $\forall\, x \in \mathbb{R}, f^{(6)}(x) = 720$
   $Pour\ n \geq 7, \forall\, x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = 0$

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice de fixation 6

$f(x) = 2x^6 + 3x^2 - 5$
$\frac{df}{dx} = 12x^5 + 6x$; $\frac{d^2f}{dx^2} = 60x^4 + 6$; $\frac{d^3f}{dx^3} = 240x^3$; $\frac{d^4f}{dx^4} = 720x^2$

La plus petite valeur de l'entier n pour laquelle $\frac{d^nf(x)}{dx^n} = 0$ est 7.

Exercice de fixation 7

1) $f(x) = x^4 + 3x^2 + 1$

$\frac{df}{dx} = 4x^3 + 6x$; $\frac{d^2f}{dx^2} = 12x + 6$

2) $f(x) = x^3 + 4x^2 + 2$

$\frac{df}{dx} = 3x^2 + 12x$; $\frac{d^2f}{dx^2} = 6x + 12$; $\frac{d^3f}{dx^3} = 6$; $\frac{d^4f}{dx^4} = 0$

3) $f(x) = sinx$

$\frac{df}{dx} = cosx$; $\frac{d^2f}{dx^2} = -sinx$; $\frac{d^3f}{dx^3} = -cosx$

4) $f(x) = cosx$

$\frac{df}{dx} = -sinx$; $\frac{d^2f}{dx^2} = -cosx$; $\frac{d^3f}{dx^3} = sinx$; $\frac{d^4f}{dx^4} = cosx$

Activité 7 : Point d'inflexion

- L'objectif de cette activité est de déterminer un point d'inflexion d'une courbe représentative d'une fonction.
- Réponses aux questions de l'activité.

I.

1. La courbe traverse la tangente (D) en A dans le cas de la figure 1.
2. **Figure 1:** (C_f) est au-dessous de (D) sur $]-\infty; a[$ et (C_f) est au-dessus de (D) sur $]a; +\infty[$.
   Figure 2 : (C_f) est au-dessous de (D) sur $\mathbb{R}$.

II.

1. $\forall\, x \in \mathbb{R}, f'(x) = 3x^2 + 4x$
   $\forall\, x \in \mathbb{R}, f''(x) = 6x + 4$
2. a) $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$
   b) $\forall\, x \in \left]-\infty; -\frac{2}{3}\right[, f''(x) < 0$ et $\forall\, x \in \left]-\frac{2}{3}; +\infty\right[, f''(x) > 0$
3. $\forall\, x \in \left]-\infty; -\frac{2}{3}\right[, f''(x) < 0$ donc (C_f) est au-dessous de (D) sur $\left]-\infty; -\frac{2}{3}\right[$.
   $\forall\, x \in \left]-\frac{2}{3}; +\infty\right[, f''(x) > 0$ donc (C_f) est au-dessus de (D) sur $\left]-\frac{2}{3}; +\infty\right[$.

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice de fixation 8

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$

f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a : $f'(x) = 6x^2 - 6x$ et $f''(x) = 12x - 6$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

$f''(x)$ s'annule en $\frac{1}{2}$ en changeant de signe donc le point de (C) d'abscisse $\frac{1}{2}$ est un point d'inflexion de la courbe (C).

Exercice de fixation 9

$f(x) = x^4$

f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a : $f'(x) = 4x^3$ et $f''(x) = 12x^2$

$\forall\, x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$, donc $f''(x)$ ne change pas de signe sur $\mathbb{R}$, alors la courbe représentative de f n'admet pas de point invariant.

Activité 8 : Inégalité des accroissements finis

- L'objectif de cette activité est de déterminer un point d'inflexion d'une courbe représentative d'une fonction.
- Réponses aux questions de l'activité.

I. $\forall\, x \in [a; b],\ m \leq f'(x) \leq M$

1. La fonction g définie sur $[a; b]$ par : $g(x) = f(x) - mx$

g est dérivable sur $]a; b[$ et on a : $\forall\, x \in]a; b[, g'(x) = f'(x) - m$; donc g' est positive sur $[a; b]$.

La fonction g est croissante sur $[a; b]$, donc $g(a) \leq g(b)$.

On en déduit que : $f(a) - ma \leq f(b) - mb$; donc $m(b - a) \leq f(b) - f(a)$.

2. La fonction h définie sur $[a; b]$ par : $h(x) = Mx - f(x)$

h est dérivable sur $]a; b[$ et on a : $\forall\, x \in]a; b[, h'(x) = M - f'(x)$; donc h' est positive sur $[a; b]$.

La fonction h est croissante sur $[a; b]$, donc $h(a) \leq h(b)$.

On en déduit que : $Ma - f(a) \leq Mb - f(b)$; donc $f(b) - f(a) \leq M(b - a)$.

3. D'après les questions 1 et 2, $m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$

II. $\forall\, x \in I, |f'(x)| \leq M$

$\forall\, x \in I, -M \leq f'(x) \leq M$; D'après les résultats précédents, on a :

$\forall\, x \in [a; b]: -M(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$

D'où $|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice de fixation 10

Soit $f(x) = cosx$

$\forall\, x \in \mathbb{R}, f'(x) = -sinx$

$\forall\, x \in [a; b], |f'(x)| \leq 1$, d'après le théorème de l'inégalité des accroissements finis, on a :

$|f(b) - f(a)| \leq |b - a|$, donc $|cosb - cosa| \leq |b - a|$.

Exercice de fixation 11

1) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; $|f'(x)| < \frac{1}{2\sqrt{400}}$;

$|f'(x)| < \dfrac{1}{40}$

$\left|\sqrt{401} - \sqrt{400}\right| < \frac{1}{40}|401 - 400|$;

$\left|\sqrt{401} - \sqrt{400}\right| < \frac{1}{40}$ donc

$-\frac{1}{40}+20<\sqrt{401}<\frac{1}{40}+20$

Soit $19{,}975<\sqrt{401}<20{,}025$

Un majorant de l'erreur commise en remplaçant $\sqrt{401}$ par 20 est $\frac{1}{40}$.

Activité 9 : Etude d'une fonction rationnelle

Exercice de fixation 12

La fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x)=\frac{2x^2-3x+3}{x^2-2x+2}$.

- Ensemble de définition

L'ensemble de définition de la fonction g est : $\mathbb{R}$.

- Limites

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=2$ donc la droite d'équation $y=2$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de g en $-\infty$ et en $+\infty$.

- Dérivée

La fonction rationnelle g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall\, x\in\mathbb{R}, g'(x)=\frac{x(-x+2)}{(x^2-2x+2)^2}$

- Sens de variation

$\forall\, x\in\,]-\infty;0[\,\cup\,]2;+\infty[, g'(x)<0$ donc g est strictement décroissante sur$]-\infty;0[$ et sur $]2;+\infty[$.

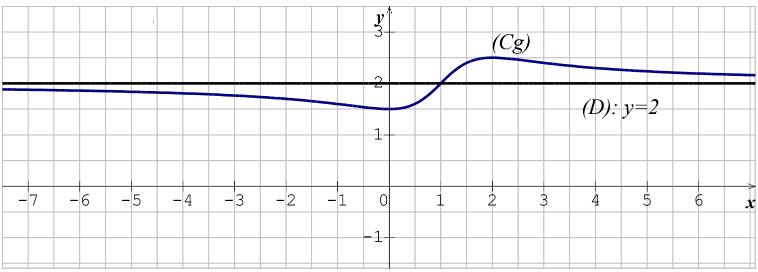
$\forall\, x\in\,]0;2[, g'(x)>0$ donc g est strictement croissante sur $]0;2[$.

$\forall\, x\in\{0;2\}, g'(x)=0.$

- Tableau de variation

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	2	$\searrow$	$\frac{3}{2}$	$\nearrow$	$\frac{5}{2}$	$\searrow$	2

- Représentation graphique



Activité 10 : Etude d'une fonction trigonométrique

Exercice de fixation 13

$f(x) = cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$

$D_f = \mathbb{R}$

$\forall\, x \in \mathbb{R}, cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = sin(3x)$ donc $f(x) = sin(3x)$

- Périodicité

$\forall\, x \in \mathbb{R}, f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = f(x)$, donc f est périodique de période $\frac{2\pi}{3}$, on peut donc réduire son étude à l'intervalle $\left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$ et compléter sa représentation graphique grâce à la translation de vecteur $\frac{2\pi}{3}\overrightarrow{OI}$ et de la translation de vecteur $-\frac{2\pi}{3}\overrightarrow{OI}$.

- Dérivée

$\forall\, x \in \mathbb{R}, f'(x) = 3cos(3x)$

- Etude du signe de la dérivée

$\forall\, x \in \mathbb{R}, 3\cos(3x) \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3}\ (k \in \mathbb{Z})$

Donnons les solutions de $f'(x) \geq 0$ sur $\left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$

Pour $k = 0$, $x \in \left[0; \frac{\pi}{6}\right]$

Pour $k = 1$, $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}\right]$

On en déduit que : $\forall\, x \in \left]0; \frac{\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}\right[, f'(x) > 0$

$\forall\, x \in \left]\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right[, f'(x) < 0$

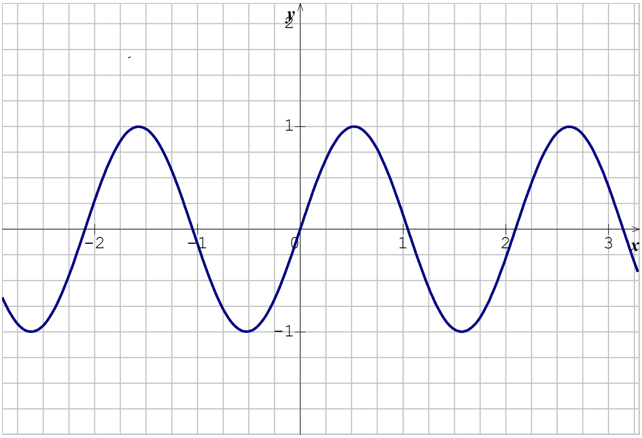
- Variations de f

f est strictement croissante sur $\left]0; \frac{\pi}{6}\right[$ et sur $\left]\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}\right[$ et f est strictement décroissante sur $\left]\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right[$.

- Tableau de variations

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

- Représentation graphique



Exercice de fixation 14

$k(x) = tan\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$

- Périodicité

$\forall\, x \in \mathbb{R}, k\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = k(x)$, donc k est périodique de période $\frac{\pi}{2}$, on peut donc réduire son étude à l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et compléter sa représentation graphique grâce à la translation de vecteur $\frac{\pi}{2}\overrightarrow{OI}$ et de la translation de vecteur $-\frac{\pi}{2}\overrightarrow{OI}$.

- Dérivée

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, k'(x) = \frac{-2}{cos^2\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)}$$

- Etude du signe de la dérivée

$\forall\, x \in \mathbb{R}, k'(x) < 0$

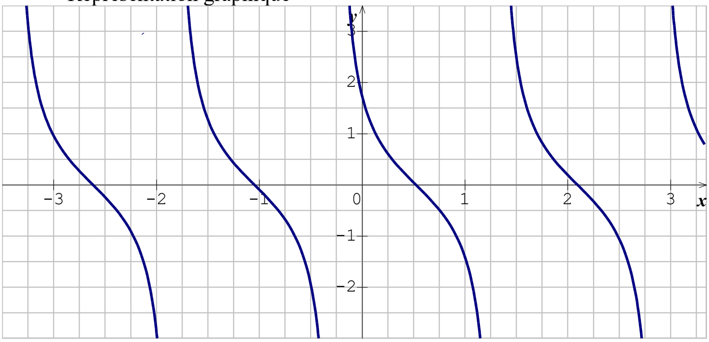
- Variations de f

f est strictement décroissante sur $\left]0; \frac{5\pi}{12}\right[$ et sur $\left]\frac{5\pi}{12}; \frac{\pi}{2}\right[$

- Tableau de variations

x	0		$\frac{5\pi}{12}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	$\sqrt{3}$	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↘	$\sqrt{3}$

- Représentation graphique



Des questions d'évaluation

Question 1 : Comment étudier la dérivabilité d'une fonction en un point lorsqu'elle est définie à gauche et à droite en ce point ?

➢ **Exercice non corrigé**

On a : :

- $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} \frac{\frac{1}{2-x}+1}{x-3} = \lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} \frac{3-x}{(x-3)(2-x)} = \lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} \frac{-1}{2-x} = 1$

Donc f est dérivable à gauche en 3 et $f'_g(3) = 1$

- $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} \frac{x^3-28+1}{x-3} = \lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} \frac{x^3-27}{x-3} = \lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} \frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{x-3}$

  $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} (x^2+3x+9) = 27$

Donc f est dérivable à droite en 3 et $f'_d(3) = 27$.

- $f'_d(3) \neq f'_g(3)$ donc f n'est pas dérivable en 3.

Question 2 : Comment justifier que la courbe représentative d'une fonction f admet un point d'inflexion ?

➢ **Exercice non corrigé**

- Calculons f'' la dérivée seconde de f

$\forall x \epsilon [0; \pi], f'(x) = 1 + tan^2(x)$

$\forall x \epsilon [0; \pi], f''(x) = 2(1 + tan^2(x))tan(x)$

- Résolvons dans $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ l'équation $f''(x) = 0$.

On a : $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2(1 + tan^2(x))tan(x) = 0 \Leftrightarrow tanx = 0 \Leftrightarrow x = 0$

- Etudions le signe de f''

f'' s'annule en 0 et $\forall x \epsilon \left]-\frac{\pi}{2}; 0\right[, f''(x) < 0$ et $\forall x \epsilon \left]0; \frac{\pi}{2}\right[, f''(x) > 0$

- f'' s'annule en 0 en changeant de signe donc le point $O(0; 0)$ est un point d'inflexion de (C).

Question 3 : **Comment calculer le nombre dérivé de la réciproque d'une bijection en un point ?**

➢ **Exercice non corrigé**

1. Résolvons l'équation $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

On a : $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow sinx = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$

2. Calculons $f'(\frac{\pi}{3})$

$\forall x \epsilon \left]0; \frac{\pi}{2}\right[, f'(x) = cosx$

$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$

$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) \neq 0$ donc f^{-1} est dérivable en $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Calculons $(f^{-1})'(\frac{\sqrt{3}}{2})$.

$(f^{-1})'(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{3}\right)} = 2$

Mes séances d'exercices

Exercices de fixation

Dérivabilité à gauche, dérivabilité à droite.

Exercice 1

1. Faux .
2. Vrai
3. Faux
4. Faux

Exercice 2

Etudions la dérivabilité de g en 2.

On a : $g(2) = 4$

$\forall x \epsilon]-\infty; 2], g(x) = x^2 - x + 2$ et $\forall x \epsilon [2; +\infty[, g(x) = x^2 + x - 2$

- $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} \frac{g(x)-g(2)}{x-2} = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} \frac{x^2-x+2-4}{x-2} = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} \frac{x^2-x-2}{x-2} = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} \frac{(x-2)(x+1)}{x-2} = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} (x + 1) = 3$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{g(x)-g(2)}{x-2} = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{x^2+x-2-4}{x-2} = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{x^2+x-6}{x-2} = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{(x-2)(x+3)}{x-2} = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} (x + 3) = 5$

$\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} \frac{g(x)-g(2)}{x-2} \neq \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{g(x)-g(2)}{x-2}$ donc g n'est pas dérivable en 2.

Exercice 3

Etudions la dérivabilité de f en 0.

- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{x^2+3x-1+1}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{x(x^2+3)}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} (x^2+3) = 3$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{3x-1+1}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{3x}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} 3 = 3$

  $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = 3$ donc f est dérivable en 0.

Dérivabilité d'une fonction sur un intervalle.

Exercice 4

1. Faux.
2. Faux
3. Vrai

Exercice 5

Etudions la dérivabilité de f sur $[-1; 0]$.

- Dérivabilité de f à droite en -1.

  On a : $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} \frac{(x+1)\sqrt{x+1}}{x+1} = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \sqrt{x+1} = 0$

Donc f est dérivable à droite en -1.

- Les fonctions $x \longmapsto x+1$ et $x \longmapsto \sqrt{x+1}$ sont dérivables en 0. Donc f est dérivable en 0.
- La fonction : $x \longmapsto (x+1)\sqrt{x+1}$ est dérivable sur $]-1; 0[$. Donc f est dérivable sur $]-1; 0[$.

  D'où f est dérivable sur $[-1; 0]$.

Tangente - tangente verticale.

Exercice 6

1. Faux
2. Faux
3. Faux
4. Vrai.

Exercice 7

Calculons $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ puis donnons une interprétation graphique du résultat obtenu.

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{\sqrt{x-1}}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = +\infty$

Donc la courbe (C) admet une tangente verticale au point d'abscisse 1.

Dérivées successives

Exercice 8

1 .c) 2.b) 3.a)

Exercice 9

Calculons la dérivée 3ième de f sur l'intervalle I dans chacun des cas suivants :

1. $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 7\ ; I = \mathbb{R}$.

$\forall x \epsilon \mathbb{R}, f'(x) = 12x^3 - 10x$

$\forall x \epsilon \mathbb{R}, f''(x) = 36x^2 - 10$

$\forall x \epsilon \mathbb{R}, f^{(3)}(x) = 72x$

2. $f(x) = 2sinx - 3cosx\ ; I = \mathbb{R}$.
$\forall x \epsilon \mathbb{R}, f'(x) = 2cosx + 3sinx$
$\forall x \epsilon \mathbb{R}, f''(x) = -2sinx + 3cosx$
$\forall x \epsilon \mathbb{R}, f^{(3)}(x) = -2cosx - 3sinx$

3. $f(x) = \frac{1}{x-1}; I =]1; +\infty[$
$\forall x \epsilon]1; +\infty[, f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}$
$\forall x \epsilon]1; +\infty[, f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$

$\forall x \epsilon]1; +\infty[, f^{(3)}(x) = -\frac{6}{(x-1)^4}$

Dérivée d'une fonction composée

Exercice 10

COLONNE A	COLONNE B
$u \circ v$	$u' \times v' \circ u$
$v \circ u$	$ru'u^{r-1}$
$\sqrt{u}$	$-u'\sin(u)$
u^r	$v' \times u' \circ v$
$\cos(u)$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\sin(u)$	$u'\cos(u)$

Exercice 11

1.b) 2.b) 3.a)

Exercice 12

Calculons la dérivée de f sur l'intervalle I dans chacun des cas suivants :

1. $f(x) = \sin(3x-4)$; $I = \mathbb{R}$.

$\forall x \epsilon \mathbb{R}, f'(x) = 3\cos(3x-4)$

2. $f(x) = (-2x+5)^6$; $I = \mathbb{R}$.

$\forall x \epsilon \mathbb{R}, f'(x) = 6 \times (-2)(-2x+5)^5 = -12(-2x+5)^5$

3. $f(x) = \sqrt[3]{x^2+1}; I =]0;+\infty[$.

$\forall x \epsilon]0;+\infty[, f'(x) = \frac{1}{3} \times 2x(x^2+1)^{\frac{1}{3}-1} = \frac{2}{3}x(x^2+1)^{-\frac{2}{3}}$

$\forall x \epsilon]0;+\infty[, f'(x) = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}$

4. $f(x) = cos^4 x$; $I = \mathbb{R}$.

$\forall x \epsilon \mathbb{R}, f'(x) = 4 \times (-sinx)cos^3 x = -4sinxcos^3 x$

Inégalités des accroissements finis

Exercice 13

Soit f est une **fonction dérivable** sur un intervalle ouvert I, $\boldsymbol{a}$ **et** $\boldsymbol{b}$ deux éléments de I tels que $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$ **.** S'il existe des nombres réels $\boldsymbol{m}$ **et** $\boldsymbol{M}$ tels que pour tout $\boldsymbol{x}$ **élément de** $[\,\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}\,]$,
$m \leq f'(x) \leq M$, alors $\boldsymbol{m}(\,\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}) \leq f(b) - f(a) \leq \boldsymbol{M}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$**.**

Exercice 14

Justifions que : $\frac{a}{2} \leq f(a) \leq \frac{a}{3}$
$\forall x \epsilon [0;a], \frac{1}{2} \leq f'(x) \leq \frac{1}{3}$
En appliquant l'inégalité des accroissements finis sur $[0;a]$
On a : $\frac{1}{2}(a-0) \leq f(a) - f(0) \leq \frac{1}{3}(a-0)$
Donc $\frac{a}{2} \leq f(a) \leq \frac{a}{3}$

Exercice 15

Soit la fonction f dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = sinx$
$\forall x \epsilon \mathbb{R}, f'(x) = cosx$
$\forall x \epsilon \mathbb{R}, |cosx| \leq 1$
Donc $\forall x \epsilon \mathbb{R}, |f'(x)| \leq 1$.

Soit $x\epsilon\mathbb{R}$, en appliquant l'inégalité des accroissements finis sur $[0; x]$ ou $[x; 0]$, on a :
$|f(x) - f(0)| \leq 1|x - 0|$.
D'où $|sinx| \leq |x|$.

Point d'inflexion

Exercice 16

Sur la **FIGURE1** le point A est un point d'inflexion de la courbe (C_f).

Exercice 17

Déterminons un point d'inflexion de la courbe (C).
$\forall x\epsilon\mathbb{R}, f'(x) = -3x^2 + 6x$
$\forall x\epsilon\mathbb{R}, f''(x) = -6x + 6$
On a : $f''(x) = 0 \Leftrightarrow -6x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$
$\forall x\epsilon]-\infty; 1[, f''(x) > 0$ et $\forall x\epsilon]1; +\infty[, f''(x) < 0$
f'' s'annule en 1 en changeant de signe donc le point $A(1; 0)$ est un point d'inflexion de (C).

Exercice 18

1. Faux 2.Vrai 3. Faux 4. Vrai.

Nombre dérivée de la réciproque d'une bijection en un point

Exercice 19

1. Faux 2.Vrai 3. Vrai 4. Vrai

Exercice 20

On a : $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ donc $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$.
$f'\left(f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right) = f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$f'\left(f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right) \neq 0$ donc f^{-1} est dérivable en $\frac{1}{2}$
Donc $(f^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{f'(\frac{\pi}{6})} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

Exercice 21

Calculons $(g^{-1})'\left(-\frac{1}{3}\right)$.
Résolvons l'équation $g(x) = -\frac{1}{3}$
$g(x) = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{x-1}{2x+1} = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow 3x - 3 = -2x - 1 \Leftrightarrow x = \frac{2}{5}$
Calculons $g'(\frac{2}{5})$.

On a : $g'\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{3}{(2\times\frac{2}{5}+1)^2} = 3 \times \frac{25}{81} = \frac{25}{27}$.

$g'\left(\frac{2}{5}\right) \neq 0$ donc g^{-1} est dérivable en $-\frac{1}{3}$.

On a : $(g^{-1})'\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{g'\left(\frac{2}{5}\right)} = \frac{27}{25}$.

Exercices de renforcement/ approfondissement

Exercice 22

La fonction $f: x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable et définie sur $[1000; 1001]$

$\forall x \in [1000; 1001], f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$\forall x \in [1000; 1001], \frac{1}{2\sqrt{1001}} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{1000}}$

En appliquant l'inégalité des accroissements finis sur $[1000; 1001]$, on a :

$\frac{1}{2\sqrt{1001}} \leq f(1001) - f(1000) \leq \frac{1}{2\sqrt{1000}}$

donc $\frac{1}{2\sqrt{1001}} + f(1000) \leq f(1001) \leq \frac{1}{2\sqrt{1000}} + f(1000)$

D'où $\frac{1}{2\sqrt{1001}} + \sqrt{1000} \leq \sqrt{1001} \leq \frac{1}{2\sqrt{1000}} + \sqrt{1000}$

Exercice 23

1. Démontrons que $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right], 1 \leq g'(x) \leq 2$

$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right], g'(x) = 1 + tan^2 x$

g est strictement croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ donc $\tan(0) \leq \tan(x) \leq \tan(\frac{\pi}{4})$

D'où $0 \leq tanx \leq 1 \Longrightarrow 1 \leq 1 + tan^2 x \leq 2$

D'où $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right], 1 \leq g'(x) \leq 2$

2. Pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, on applique l'inégalité des accroissements finis sur $[0; x]$ et on obtient : $1(x - 0) \leq g(x) - g(0) \leq 2(x - 0)$ d'où $x \leq tanx \leq 2x$

Exercice 24

Démontrons que $\forall x \in \left[0; \frac{1}{2}\right], 1 + \frac{x}{\sqrt{6}} \leq \sqrt{1 + x} \leq 1 + \frac{x}{2}$

La fonction $f: x \mapsto \sqrt{1 + x}$ est dérivable et définie sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$

On a : $\forall x \in \left[0; \frac{1}{2}\right], f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$ et $\frac{1}{\sqrt{6}} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$

Pour tout $\forall x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$, on applique l'inégalité des accroissements finis sur $[0; x]$ et on obtient : $\frac{1}{\sqrt{6}}(x-0) \leq f(x) - f(0) \leq \frac{1}{2}(x-0)$
D'où $\frac{x}{\sqrt{6}} \leq \sqrt{1+x} - 1 \leq \frac{x}{2}$
On en déduit que $\forall x \in \left[0; \frac{1}{2}\right], 1 + \frac{x}{\sqrt{6}} \leq \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$

Exercice 25

1. a) Tableau de variation de h.

$\forall x \in [1; +\infty[, h'(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$

$\forall x \in [1; +\infty[, h'(x) < 0$ donc h est strictement décroissante sur $[1; +\infty[$

x	1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	
$h(x)$	2	$\searrow$	1

b) Soit la fonction g dérivable et définie sur $[1; +\infty[$ par : $g(x) = h(x) - x$
$\forall x \in [1; +\infty[, g'(x) = h'(x) - 1$
$\forall x \in [1; +\infty[, g'(x) < 0$ donc g est strictement décroissante sur $[1; +\infty[$.
g est continue et strictement décroissante sur $[1; +\infty[$ et $g([1; +\infty[) =]-\infty; 1]$.
Or $0 \in]-\infty; 1]$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[1; +\infty[$.
On en déduit que l'équation $h(x) = x$ admet une unique solution α dans $[1; +\infty[$.
2. a) Démontrons que : $\forall x \in [1; +\infty[, |h'(x)| \leq \frac{1}{2}$
$\forall x \in [1; +\infty[, |h'(x)| = \frac{1}{2x\sqrt{x}}$ or $\forall x \in [1; +\infty[, \frac{1}{2x\sqrt{x}} \leq \frac{1}{2}$
Donc $\forall x \in [1; +\infty[, |h'(x)| \leq \frac{1}{2}$
b) Soit $x \in [1; +\infty[$, on a aussi $\alpha \in [1; +\infty[$.
Comme $\forall x \in [1; +\infty[, |h'(x)| \leq \frac{1}{2}$, en appliquant l'inégalité des accroissements finis sur $[x; \alpha]$ ou $[\alpha; x]$ on a : $|h(x) - h(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$
D'où $|h(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$

Exercice 26

1. Dérivées première, deuxième et troisième de chacune des fonctions f et g.

$\forall x \in]-1;1[, f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ $\forall x \in]-1;1[, f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$ $\forall x \in]-1;1[, f^{(3)}(x) = \frac{6}{(1-x)^4}$	$\forall x \in]-1;1[, g'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$ $\forall x \in]-1;1[, g''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$ $\forall x \in]-1;1[, g^{(3)}(x) = \frac{-6}{(1+x)^4}$

2. Dérivées nième de f et g ($n \geq 1$)

- $\forall x \in]-1;1[, f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$
- $\forall x \in]-1;1[, g^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \times n!}{(1-x)^{n+1}}$

Exercice 27

1. Déterminons $a\ et\ b$.

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

On a : $f'(0) = b = -3$

$f'(1) = f'(-1) \Leftrightarrow 3 + 2a + b = 3 - 2a + b \Leftrightarrow a = 0$

On obtient : $\begin{cases} a = 0 \\ b = -3 \end{cases}$ donc $f(x) = x^3 - 3x + 1$

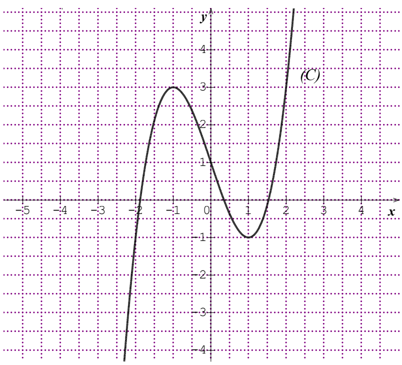
2. Variations de f

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1\ ou\ x = 1$

- f est strictement croissante sur $]-\infty;-1[$ et sur $]1;+\infty[$
- f est strictement croissante sur $]-1;1[$

3. Construction de (C).



Exercice 28

1. Détermination de a

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}, f'(x) = \frac{a-4}{(2x+1)^2}$

La tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 0 est parallèle à la droite (D) : $y = -5x + 2$ si et seulement si $f'(0) = -5$

On obtient : $a - 4 = -5 \Leftrightarrow a = -1$

2. Tableau de variation de f pour $a = -1$

On a : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}, f'(x) = \frac{-5}{(2x+1)^2}$

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}, f'(x) < 0$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	$\frac{-1}{2}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{-1}{2}$

Exercice 29

1. Détermination de $a\ et\ b$

On a : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, f'(x) = \frac{x^2-2x-a-b}{(x-1)^2}$

(C) admet au point de coordonnées $(-3; 1)$ une tangente horizontale donc $\begin{cases} f'(-3) = 0 \\ f(-3) = 1 \end{cases}$

Ce qui donne : $\begin{cases} a + b = 15 \\ -3a + b = -13 \end{cases}$, le résolution de ce système donne : $\begin{cases} a = 7 \\ b = 8 \end{cases}$

D'où $f(x) = \frac{x^2+7x+8}{x-1}$

2. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, f'(x) = \frac{x^2-2x-15}{(x-1)^2} = \frac{(x+3)(x-5)}{(x-1)^2}$

x	$-\infty$		-3		1		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	17	↗	$+\infty$

Exercice 30

1.a) $D_f =]-\infty; 0[\cup]0; 1[\cup]1; +\infty[$

b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \frac{1}{2}$

et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$.

c) Les asymptotes : les droites d'équations $x = 0$; $x = 2$ et $x = \frac{1}{2}$

2. Calcul de $f'(x)$

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0; 2\}, f'(x) = \frac{-3x+3}{x^2(x-2)^2}$

3. a) Variations f.

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$
- $\forall x \in]-\infty; 0[\cup]0; 1[, f'(x) > 0$
- $\forall x \in]1; 2[\cup]2; +\infty[, f'(x) < 0$

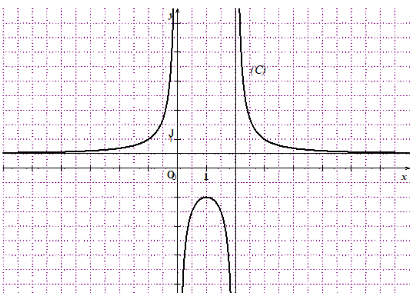
Donc f est strictement croissante sur $]-\infty; 0[$ *et sur* $]0; 1[$

f est strictement décroissante sur $]1; 2[$ *et sur* $]2; +\infty[$

b) Tableau de variation de f.

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$+$	0	$-$	||	$-$	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$-\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$

4. Représentation graphique de f.



Exercice 31

1.a) $D_f =]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$

b) $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (-x + 3)] = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x - 3)] = 0$ donc les droites d'équations $y = -x + 3$ et $y = x - 3$ sont asymptotes à (C) respectivement en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. a) Dérivabilité de f en 3.

On a : $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = -2$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = 0$

$\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ <}} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} \neq \lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ >}} \frac{f(x)-f(3)}{x-3}$ donc f n'est pas dérivable en 3.

b) Calcul de $f'(x)$.

On a : $\begin{cases} \forall x \in]-\infty; 2[\cup]2; 3], f(x) = -x + 3 + \frac{1}{x-2} \\ \forall x \in [3; +\infty[, f(x) = x - 3 + \frac{1}{x-2} \end{cases}$

Donc $\begin{cases} \forall x \in]-\infty; 2[\cup]2; 3[, f'(x) = -1 - \frac{1}{(x-2)^2} \\ \forall x \in]3; +\infty[, f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-2)^2} = \frac{(x-3)(x-1)}{(x-2)^2} \end{cases}$

c) Sens de variation de f

- $\forall x \in]-\infty; 2[\cup]2; 3[, f'(x) < 0$
- $\forall x \in]3; +\infty[, f'(x) > 0$

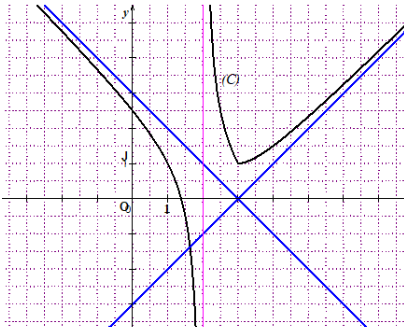
  Donc f est strictement décroissante sur $]-\infty; 2[$ *et sur* $]2; 3[$

  f est strictement croissante sur $]3; +\infty[$

d) Tableau de variation de f

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

3. Construction de (C).



Exercice 32

1.a) $D_f =]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$

b) $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

2. a) Variations de f.

Calcul de $f'(x)$.

On a : $\begin{cases} \forall x \in]-\infty; 2[, f(x) = x - 3 - \frac{1}{x-2} \\ \forall x \in]2; +\infty[, f(x) = x - 3 + \frac{1}{x-2} \end{cases}$

Donc $\begin{cases} \forall x \in]-\infty; 2[, f'(x) = 1 + \frac{1}{(x-2)^2} \\ \forall x \in]2; +\infty[, f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-2)^2} = \frac{(x-3)(x-1)}{(x-2)^2} \end{cases}$

- $\forall x \in]-\infty; 2[\cup]3; +\infty[, f'(x) > 0$
- $\forall x \in]2; 3[, f'(x) < 0$

Donc f est strictement croissante sur $]-\infty; 2[$ *et sur* $]3; +\infty[$.
f est strictement décroissante sur $]2; 3[$.

b) Tableau de variation de f.

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	‖	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗		$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

Exercice 33

Calculons si possible le nombre dérivé à gauche et à droite, en x_0 de la fonction f définie par:

1. $f(x) = -3x^2 + 7|x| \quad en\ x_0 = 0$

On a : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{-3x^2-7x}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{x(-3x-7)}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} (-3x-7) = -7$

Donc $f'_g(0) = -7$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{-3x^2+7x}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{x(-3x+7)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} (-3x+7) = 7$$

Donc $f'_d(0) = 7$

2. $f(x) = \frac{|x+2|}{x-1} \quad en\ x_0 = -2$

On a :

- $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ <}} \frac{f(x)-f(0)}{x+2} = \lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ <}} \frac{\frac{-x-2}{x-1}}{x+2} = \lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ <}} \frac{-1}{x-1} = \frac{1}{3}$

Donc $f'_g(-2) = \frac{1}{3}$

- $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x+2} = \lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ >}} \frac{\frac{x+2}{x-1}}{x+2} = \lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ >}} \frac{1}{x-1} = -\frac{1}{3}$

Donc $f'_d(-2) = -\frac{1}{3}$

3. $f(x) = \sqrt{x|x-1|} \quad en\ x_0 = 1$

On a :

- $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{\sqrt{x(-x+1)}}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{-x}{\sqrt{x(-x+1)}} = -\infty$

Donc f n'est pas dérivable à gauche en 1.

- $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{\sqrt{x(x-1)}}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{x}{\sqrt{x(x-1)}} = +\infty$

Donc f n'est pas dérivable à droite en 1.

Exercice 34

1) Démontrons que fonction f est dérivable en 1 et calculons son nombre dérivé en 1.

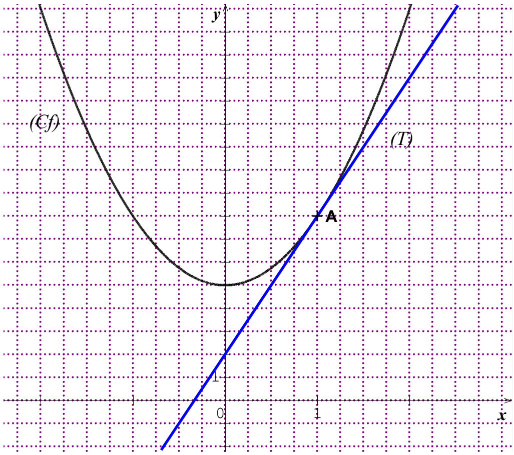
On a : $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{3x^2+5-8}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{3(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} 3(x+1) = 6$

Donc f est dérivable en 1 et $f'(1) = 6$

2) Déterminons une équation de la tangente (T) en A à (Cf).

$$\begin{aligned} (T): y &= f'(1)(x-1) + f(1) \\ y &= 6(x-1) + 8 \\ y &= 6x + 2 \end{aligned}$$

3) Construis la courbe (Cf) et trace tangente (T).



Exercice 35

- **Dérivabilité de f en 0.**

On a : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{-x^3}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} -x^2 = 0$

Donc $f'_g(0) = 0$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{x^3}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} x^2 = 0$

Donc $f'_d(0) = 0$

$f'_g(0) = f'_d(0)$, on en déduis que f est dérivable en 0.

- **Dérivabilité de g en 0.**

On a : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{-x^2}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} -x = 0$

Donc $g'_g(0) = 0$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{x^2}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} x = 0$

Donc $g'_d(0) = 0$

$g'_g(0) = g'_d(0)$, on en déduis que g est dérivable en 0.

- **Dérivabilité de h en 0.**

On a :

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{h(x)-h(0)}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{\sqrt{x}+x}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

Donc h n'est pas dérivable en 0.

Exercice 36

1) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - \frac{3}{4}x - 5$

   f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

   $\forall x \epsilon \mathbb{R}, f'(x) = x^2 + 6x - \frac{3}{4}$

2) $f(x) = 3x - 4 + \frac{2}{2x+7}$

   f est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{7}{2}\right\}$

   $\forall x \epsilon \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{7}{2}\right\}, f'(x) = 3 - \frac{4}{(2x+7)^2}$

3) $f(x) = 2x - cosx$

   f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

   $\forall x \epsilon \mathbb{R}, f'(x) = 2 + sinx$

4) $f(x) = \frac{3x^2 - x + 2}{3x - 1}$

   f est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$

   $\forall x \epsilon \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}, f'(x) = \frac{(6x-1)(3x-1) - 3(3x^2 - x + 2)}{(3x-1)^2} = \frac{18x^2 - 9x + 1 - 9x^2 + 3x - 6}{(3x-1)^2}$

   $f'(x) = \frac{9x^2 - 6x - 5}{(3x-1)^2}$

5) $f(x) = \sqrt{\frac{2-x}{2+x}}$

f est définie sur $]-2; 2]$ et dérivable sur $]-2; 2[$.

$\forall x \epsilon]-2; 2[, f'(x) = \frac{-2}{(2+x)^2 \sqrt{\frac{2-x}{2+x}}}$

6) $f(x) = cos^3(x^2 - 2x)$

   f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

   $\forall x \epsilon \mathbb{R}, f'(x) = 3 \times [\cos(x^2 - 2x)]' \, cos^2(x^2 - 2x)$

   $f'(x) = -3(2x - 2)\sin(x^2 - 2x)cos^2(x^2 - 2x)$

7) $f(x) = x\sqrt{3x - 2}$

   f est définie sur $\left[\frac{2}{3}; +\infty\right[$ et dérivable sur $\left]\frac{2}{3}; +\infty\right[$.

   $$\forall x \epsilon \left]\frac{2}{3}; +\infty\right[, f'(x) = \sqrt{3x - 2} + x \times \frac{3}{2\sqrt{3x - 2}} = \sqrt{3x - 2} + \frac{3x}{2\sqrt{3x - 2}}$$

   $f'(x) = \frac{9x - 4}{2\sqrt{3x - 2}}$

8) $f(x) = \left(\frac{2x-1}{x+1}\right)^{\frac{2}{3}}$.

   f est définie sur $]-\infty; -1[\cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$ et dérivable sur $]-\infty; -1[\cup \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$

   $\forall x \epsilon]-\infty; -1[\cup \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[, f'(x) = \frac{2}{3}\left(\frac{3}{(x+1)^2}\right)\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{(x+1)^2 \sqrt[3]{\frac{2x-1}{x+1}}}$

Exercice 37

On considère la fonction g définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \frac{2x^2+1}{x^2+3}$

1) Déterminons l'ensemble de définition de g.

$D_g = \mathbb{R}$

2) Calculons la dérivée de g et donne son ensemble de dérivabilité.

g est une fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R}$ donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a : $\forall x \epsilon \mathbb{R}, g'(x) = \frac{4x(x^2+3)-2x(2x^2+1)}{(x^2+3)^2} = \frac{4x^3+12x-4x^3-2x}{(x^2+3)^2} = \frac{10x}{(x^2+3)^2}$

3) Calcule les nombres dérivés de la fonction g en -2 et 3.

On a : $g'(-2) = \frac{10\times(-2)}{((-2)^2+3)^2} = \frac{-20}{49}$

$g'(3) = \frac{10\times 3}{(3^2+3)^2} = \frac{30}{144} = \frac{5}{24}$

4) Détermine une équation de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse -2.

$(T): y = g'(-2)(x+2) + g(-2)$

On a : $g'(-2) = \frac{-20}{49}$ et $g(-2) = \frac{9}{7}$

Donc $(T): y = -\frac{20}{49}(x+2) + \frac{9}{7}$

$y = -\frac{20}{49}x + \frac{23}{49}$

Exercice 38

1) Donnons l'ensemble de définition de f.

f est une fonction polynôme donc : $D_f = \mathbb{R}$.

2) Calculons les limites aux bornes de son ensemble de définition.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - 2 = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - 2 = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$

3) Etudions le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.

$\forall x \epsilon \mathbb{R}, f'(x) = 3x^2 - x - 2$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - x - 2 = 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4\times 3\times(-2) = 25$

$\Delta > 0$ donc l'équation $f'(x) = 0$ admet deux solutions :

$x_1 = \frac{1-5}{6} = -\frac{2}{3}$ et $x_1 = \frac{1+5}{6} = 1$

Donc $\begin{cases} \forall x\epsilon \left]-\infty; -\frac{2}{3}\right] \cup [1; +\infty[, f'(x) \geq 0 \\ \forall \epsilon \left[-\frac{2}{3}; 1\right], f'(x) \leq 0 \end{cases}$

4) Déduisons le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.

f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Tableau de variation de f.

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{50}{27}$	$\searrow$	$-\frac{5}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

5) Déterminons les extrémums relatifs de f.
   - f admet en $-\frac{2}{3}$ un maximum relatif égal à $-\frac{50}{27}$
   - f admet en 1 un minimum relatif égal à $-\frac{5}{2}$

Exercice 39

1) Déterminons l'ensemble de définition de f.
   $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

2) a- Calculons : $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x)$ puis interprétons graphiquement les résultats.

   $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} \frac{x^2+x-2}{x-2} = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} (x^2+x-2) \times \frac{1}{x-2}$

   $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = -\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} (x^2+x-2) = 4$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} \frac{1}{x-2} = -\infty$.

   $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{x^2+x-2}{x-2} = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} (x^2+x-2) \times \frac{1}{x-2}$

   $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} (x^2+x-2) = 4$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} \frac{1}{x-2} = +\infty$.

   La droite d'équation $x = 2$ est une asymptote à le courbe (Cf).

   b- Calculons $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

   $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$

3) Déterminons les réels a, b et c tels que $\forall x \epsilon Df,\ f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$

   $\forall x \epsilon Df,\ f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2} = \frac{(ax+b)(x-2)+c}{x-2} = \frac{ax^2+(b-2a)x+c-2b}{x-2}$

   Par identification on a : $\begin{cases} a = 1 \\ b - 2a = 1 \\ c - 2b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c = 4 \end{cases}$

   donc $\forall x \epsilon Df,\ f(x) = x + 3 + \frac{4}{x-2}$

4) a- Démontre que la droite (D) d'équation y = x + 3 est une asymptote à la courbe (Cf) en $+\infty$ et en $-\infty$.

   $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (x+3)) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4}{x-2} = 0$

   et $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - (x+3)) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{4}{x-2} = 0$

   donc la droite (D) d'équation y = x + 3 est une asymptote à la courbe (Cf) en $+\infty$ et en $-\infty$.

   b- Etudie les positions relatives de (Cf) et de la droite (D).

   $\forall x \epsilon \mathbb{R} \setminus \{2\},\ f(x) - (x+3) = \frac{4}{x-2}$

Tableau de signe

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)-(x+3)$		$-$	||	$+$	

- $\forall x \epsilon]-\infty; 2[, f(x)-(x+3) < 0$ donc (Cf) est au-dessous de la droite (D) sur $]-\infty; 2[$.
- $\forall x \epsilon]2; +\infty[, f(x)-(x+3) > 0$ donc (Cf) est au-dessus de la droite (D) sur $]2; +\infty[$.

5) a- Démontre que $\forall x \epsilon Df$, $f'(x) = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$

$\forall x \epsilon \mathbb{R} \setminus \{2\}, f(x) = x + 3 + \frac{4}{x-2}$

$\forall x \epsilon \mathbb{R} \setminus \{2\}, f'(x) = 1 - \frac{4}{(x-2)^2} = \frac{(x-2)^2-4}{(x-2)^2} = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$

b- Détermine le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.

$\forall x \epsilon \mathbb{R} \setminus \{2\}, (x-2)^2 > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $x(x-4)$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \; ou \; x = 4$

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	

$\forall x \epsilon]-\infty; 0[\cup]4; +\infty[, f'(x) > 0$

$\forall x \epsilon]0; 2[\cup]2; 4[, f'(x) < 0$

c- Déduis-en le sens de variation de f puis dresse le tableau de variation de f.

- f est strictement croissante sur $]-\infty \,; 0[\; et \; sur \;]4 \,; +\infty[$.
- f est strictement décroissante sur $]0; 2[\; et \; sur \;]2; 4[$

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	9	↗	$+\infty$

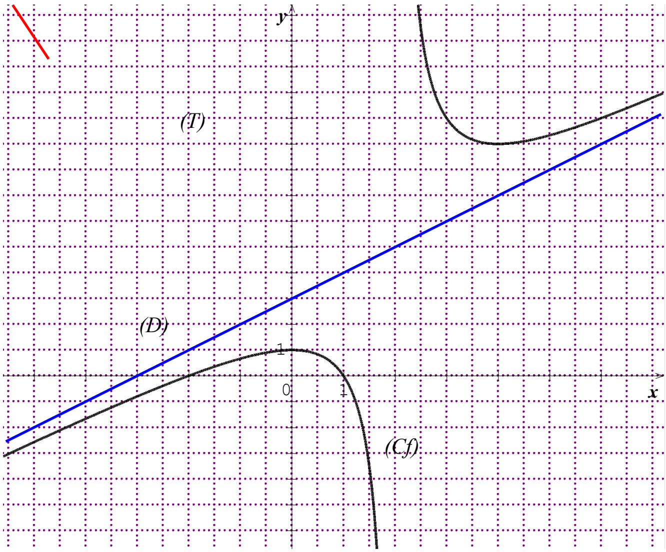
6) Détermine une équation de la tangente (T) à (Cf) au point d'abscisse 1.

$(T): y = f'(1)(x-1) + f(1)$, $f'(1) = -3$ et $f(1) = 0$

$y = -3(x-1) = -3x + 3$

7) Détermine si possible les extrémums relatifs de f.
- f admet en 0 un maximum relatif égal à 1.
- f admet en 4 un minimum relatif égal à 9.

8) Construisons (Cf), (D) et (T).



Exercice 40

1) Vérifie que $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Le triangle ABH est rectangle en H.
Donc $sin\widehat{ABH} = \frac{AH}{AB}$ et on a : $mes\widehat{ABH} = \frac{\pi}{3}$
D'où $AH = ABsin\widehat{ABH} = a \times sin\frac{\pi}{3}$
Donc $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

2) Démontre que $MQ = x\sqrt{3}$.

Le triangle MBQ est rectangle en Q.
Donc $tan\widehat{MBQ} = \frac{MQ}{BQ}$ et on a : $mes\widehat{MBQ} = \frac{\pi}{3}$
D'où $MQ = BQ \times tan\widehat{MBQ} = x \times tan\frac{\pi}{3}$
Donc $MQ = x\sqrt{3}$.

3) Exprimons l'aire du rectangle MNPQ en fonction de x.

$\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}ire(MNPQ) = PQ \times MQ$
On a : $BQ = PC = x$ donc $PQ = a - 2x$
D'où $\mathcal{A}(x) = x\sqrt{3}(a - 2x) = -2\sqrt{3}x^2 + a\sqrt{3}x$

$$\mathcal{A}(x) = -2\sqrt{3}x^2 + a\sqrt{3}x$$

4) Déterminons la position du point Q pour laquelle l'aire du rectangle est maximale.

L'aire du rectangle est maximale si $\mathcal{A}'(x) = 0$.
Or $\mathcal{A}'(x) = -4\sqrt{3}x + a\sqrt{3}$
On a : $\mathcal{A}'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{4}$
$\forall x \epsilon \left]0; \frac{a}{4}\right[, \mathcal{A}'(x) > 0$ et $\forall x \epsilon \left]\frac{a}{4}; a\right[, \mathcal{A}'(x) < 0$
Donc $\mathcal{A}$ atteint son maximum pour $x = \frac{a}{4}$.
D'où la position de Q est telle que : $BQ = \frac{a}{4}$

5) Calcule alors l'aire maximale du rectangle MNPQ.

l'aire maximale du rectangle MNPQ est : $\mathcal{A}\left(\frac{a}{4}\right) = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$.

Exercice 41

1. Etudie la continuité de f en 3.

f est définie en 3 et $f(3) = 2$
On a : $\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} x|x-3| + 2 = 2 = f(3)$
Donc f est continue en 3.

2. Etudie la dérivabilité de f en 3. Interprète graphiquement le résultat.

On a : $\lim_{\substack{x\to 3 \\ <}} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{\substack{x\to 3 \\ <}} \frac{x(3-x)+2-2}{x-3} = \lim_{\substack{x\to 3 \\ <}} \frac{-x(x-3)}{x-3} = \lim_{\substack{x\to 3 \\ <}} -x = -3$
Donc $f'_g(3) = -3$

$\lim_{\substack{x\to 3 \\ >}} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{\substack{x\to 3 \\ >}} \frac{x(x-3)}{x-3} = 3$
Donc $f'_d(3) = 3$
$f'_g(3) \neq f'_d(3)$ donc f n'est pas dérivable en 3.

3. Etudie les variations de f et dresse son tableau de variation.

$$\begin{cases} \forall x \epsilon]-\infty; 3[, f(x) = -x^2 + 3x + 2 \\ \forall x \epsilon]3; +\infty[, f(x) = x^2 - 3x + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \forall x \epsilon]-\infty; 3[, f'(x) = -2x + 3 \\ \forall x \epsilon]3; +\infty[, f'(x) = 2x - 3 \end{cases}$$

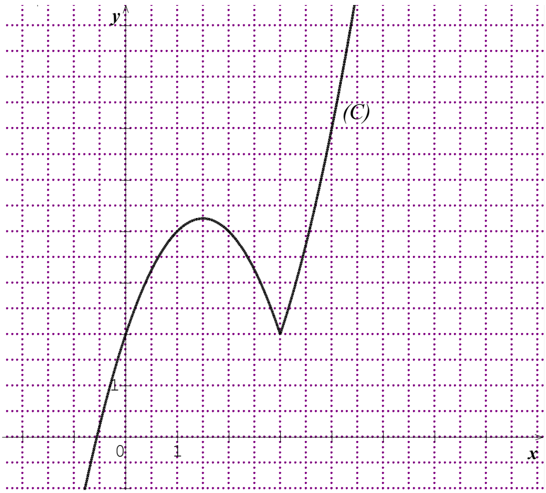
$\forall x \epsilon]-\infty; 3[, f'(x) = -2x + 3$
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$
Donc $\forall x \epsilon \left]-\infty; \frac{3}{2}\right[\cup]3; +\infty[, f'(x) > 0$
$\forall x \epsilon \left]\frac{3}{2}; 3\right[, f'(x) < 0$
On en déduit que :

- f est strictement croissante sur $\left]-\infty; \frac{3}{2}\right[$ et sur $]3; +\infty[$.

- f est strictement décroissante sur $\left]\frac{3}{2};3\right[$.

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	▨	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-\frac{1}{4}$	↘	2	↗	$+\infty$

4. Trace (C).



Exercice 42

1. Etudions la dérivabilité de f en 0 puis interpréter graphiquement le résultat.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{x^2-2\sqrt{x}}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \left(x-\frac{2}{\sqrt{x}}\right) = -\infty$$

Donc f n'est pas dérivable en 0.
La courbe (C) admet une tangente verticale au point d'abscisse 0.

2. Calcule les limites de $f(x)$ et $\frac{f(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$ puis interprète graphiquement les résultats.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2-2\sqrt{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\left(x\sqrt{x}-2\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-2\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(x-\frac{2}{\sqrt{x}}\right) = +\infty$$

La courbe (C) admet une branche parabolique de direction celle de (OJ) en $+\infty$.

3. Etudie les variations de f et dresse son tableau de variation.

$\forall x \epsilon]0; +\infty[, f'(x) = 2x - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2x\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$

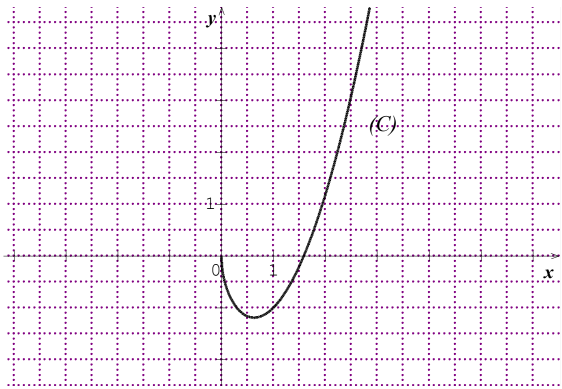
$\forall x \epsilon]0; +\infty[, \sqrt{x} > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $2x\sqrt{x} - 1$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$

Donc $\forall x \epsilon \left]0; \sqrt[3]{\frac{1}{4}}\right[, f'(x) < 0$ et $\forall x \epsilon \left]\sqrt[3]{\frac{1}{4}} ; +\infty\right[, f'(x) > 0$

f est strictement décroissante sur $\left]0; \sqrt[3]{\frac{1}{4}}\right[$ et strictement croissante sur $\left]\sqrt[3]{\frac{1}{4}} ; +\infty\right[$

4. Trace (C).



Exercice 43

1. Déterminons l'ensemble de définition de f
   $D_f = \mathbb{R}$
2. Etudie la continuité de f en 0.

f est définie en 0 et $f(0) = 0$

On a : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$

Donc f est continue en 0.

3. Démontre que (C) admet au point d'abscisse 0 une tangente dont on précisera une équation.
   Etudie la dérivabilité de f en 0.

On a : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{\frac{x}{-x+1}}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{1}{1-x} = 1$

Donc $f'_g(0) = 1$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{x+1} = 1$

Donc $f'_d(0) = 1$

$f'_g(0) = f'_d(0) = 1$ donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$

D'où (C) admet au point d'abscisse 0 une tangente (T) de coefficient directeur 1.
$(T): y = f'(0)(x-0) + f(0)$
$y = x$

4. Etudions la parité de f et donne une interprétation graphique du résultat.
$\forall x \epsilon \mathbb{R}, -x \epsilon \mathbb{R}$ et $f(-x) = \frac{-x}{|-x|+1} = -\frac{x}{|x|+1} = -f(x)$
Donc f est impaire.
Le point O est un centre de symétrie de (C).
5. Calculons la limite de f en $+\infty$. Interprète graphiquement le résultat.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{x+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{x} = 1$

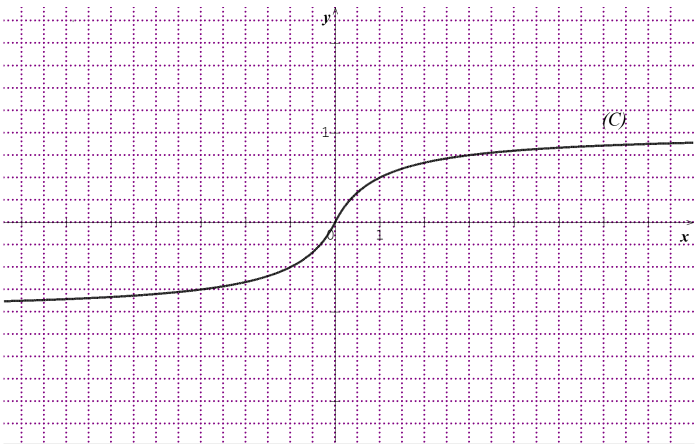
Donc la droite d'équation $y = 1$ est une asymptote à (C) en $+\infty$.

6. Etudie les variations de f sur $[0\,;\,+\infty[$ et dresse le tableau de variation de f.

$\forall x \epsilon [0; +\infty[, f(x) = \frac{x}{x+1}$
$\forall x \epsilon [0; +\infty[, f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$
$\forall x \epsilon [0; +\infty[, f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	0 ↗	1

7. Trace la courbe (C).



Exercice 44

1. Etudions la continuité de f en 2.

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
f est définie en 2 et $f(2) = \frac{4}{3}$.

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2+|x-2|}{x+1} = \frac{4}{3} = f(2)$ donc f est continue en 2.

2. Etudions la dérivabilité de f en 2. Interprète graphiquement les résultats.

On a : $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} \frac{\frac{x^2-x+2}{x+1}-\frac{4}{3}}{x-2} = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} \frac{3x-1}{3(x+1)} = \frac{5}{9}$

Donc $f'_g(2) = \frac{5}{9}$

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} \frac{\frac{x^2+x-2}{x+1}-\frac{4}{3}}{x-2} = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} \frac{3x+5}{3(x+1)} = \frac{11}{9}$

Donc $f'_d(2) = \frac{11}{9}$

$f'_g(2) \neq f'_d(2)$ donc f n'est pas dérivable en 2.

La courbe (C) admet deux demi-tangentes : une demi-tangente à gauche de coefficient directeur $\frac{5}{9}$ et une demi-tangente à droite de coefficient directeur $\frac{11}{9}$.

3. Calculons les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x^2-x+2}{x+1} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2-x+2}{x+1} = +\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to -1\\ <}} \frac{x^2+|x-2|}{x+1} = -\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} \frac{x^2+|x-2|}{x+1} = +\infty$

4. Etudions les variations de f et dresse son tableau de variation.

$$\begin{cases} \forall x \epsilon]-\infty;-1[\cup]-1;2[, f(x) = \frac{x^2-x+2}{x+1} \\ \forall x \epsilon]2;+\infty[, f(x) = \frac{x^2+x-2}{x+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \forall x \epsilon]-\infty;-1[\cup]-1;2[, f'(x) = \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2} \\ \forall x \epsilon]2;+\infty[, f'(x) = \frac{x^2+2x+3}{(x+1)^2} \end{cases}$$

- $\forall x \epsilon]-\infty;-1[\cup]-1;2[, f'(x) = \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$

$\forall x \epsilon]-\infty;-1[\cup]-1;2[, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2+2x-3 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+3) = 0$

$\forall x \epsilon]-\infty;-1[\cup]-1;2[, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \; ou \; x = -3$

Donc $\forall x \epsilon]-\infty;-3[\cup]1;2[f'(x) > 0$ et $\forall x \epsilon]-3;-1[\cup]-1;1[, f'(x) < 0$

f est strictement croissante sur $]-\infty;-3[\; et \; sur \;]1;2[$

f est strictement décroissante sur $]-3;-1[\; et \; sur \;]-1;1[$

- $\forall x \epsilon]2;+\infty[, f'(x) = \frac{x^2+2x+3}{(x+1)^2}$

  $\forall x \epsilon]2;+\infty[, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2+2x+3 = 0$

  $\Delta = 2^2 - 4\times 1\times 3 = -8$, $\Delta < 0$ donc $\forall x \epsilon]2;+\infty[, f'(x) > 0$

f est strictement croissante sur $]2;+\infty[$

x	$-\infty$		-3		-1		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$\bullet$	0	$+$	‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-7	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$			$+\infty$

5.

a) Démontrons que les droites (D_1) et (D_2) d'équations respectives $y = x - 2$ et $y = x$ sont asymptotes à (C) respectivement en -∞ et en + ∞ .

$\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - (x-2)] = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4}{x+1} = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - x] = \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{2}{x+1} = 0$

Donc les droites (D_1) et (D_2) d'équations respectives $y = x - 2$ et $y = x$ sont asymptotes à (C) respectivement en -∞ et en + ∞ .

b) Etudions la position de (C) par rapport à (D_1) sur $]-\infty; -1[\cup]-1; 2]$.

$\forall x \epsilon]-\infty; -1[\cup]-1; 2], f(x) - (x-2) = \frac{4}{x+1}$

$\forall x \epsilon]-\infty; -1[, f(x) - (x-2) < 0$

$\forall x \epsilon]-1; 2], f(x) - (x-2) > 0$

Donc (C) est au-dessous de (D_1) sur $]-\infty; -1[$ et au-dessus de (D_1) sur $]-1; 2]$

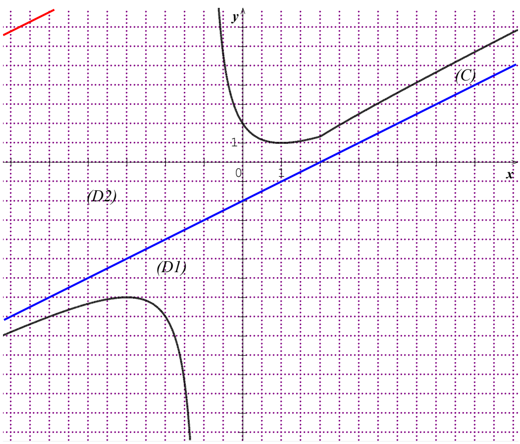
c) Etudions la position de (C) par rapport à (D_2) sur $[2; +\infty[$.

$\forall x \epsilon [2; +\infty[, f(x) - x = -\frac{2}{x+1}$

$\forall x \epsilon [2; +\infty[, f(x) - x < 0$

Donc (C) est au-dessous de (D_2) sur $[2; +\infty[$.

6. Traçons (D_1), (D_2) et (C).



Exercice 45

Partie A

1. Justifions que l'ensemble de définition de f est $]-\infty;-2]U[-1;+\infty[$.
   $x\epsilon D_f \Leftrightarrow x^2+3x+2 \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x+2) \geq 0$

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$(x+1)(x+2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   Donc $D_f =]-\infty;-2]U[-1;+\infty[$.

1. Etudions la dérivabilité de f en -1 et en -2 puis interprétons graphiquement les résultats.

On a :

- $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ >}} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{\substack{x\to-1\\ >}} \frac{\sqrt{(x+1)(x+2)}}{x+1} = \lim\limits_{\substack{x\to-1\\ >}} \frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)\sqrt{(x+1)(x+2)}}$

  $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ >}} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{\substack{x\to-1\\ >}} \frac{x+2}{\sqrt{(x+1)(x+2)}} = +\infty$

f n'est pas dérivable en -1.
La courbe (C) admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse -1.

- $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\ <}} \frac{f(x)-f(-1)}{x+2} = \lim\limits_{\substack{x\to-2\\ <}} \frac{\sqrt{(x+1)(x+2)}}{x+2} = \lim\limits_{\substack{x\to-2\\ <}} \frac{(x+1)(x+2)}{(x+2)\sqrt{(x+1)(x+2)}}$

  $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\ <}} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{\substack{x\to-2\\ <}} \frac{x+1}{\sqrt{(x+1)(x+2)}} = -\infty$

f n'est pas dérivable en -2.
La courbe (C) admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse -2.

2. Calculons les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+3x+2} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+3x+2} = = +\infty$

3. Etudions les variations de f et dresse son tableau de variation.

$\forall x\epsilon]-\infty;-2[\cup]-1;+\infty[, f'(x) = \frac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x+2}}$
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x+3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$
Donc $\forall x\epsilon]-\infty;-2[, f'(x) < 0$ et $\forall x\epsilon]-1;+\infty[, f'(x) > 0$
On en déduit que f est strictement décroissante sur $]-\infty;-2[$ et strictement croissante sur $]-1;+\infty[$.

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$				$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0		0	$\nearrow$	$+\infty$

4. Démontrons que les droites (D_1) : $y = -x - \frac{3}{2}$ et (D_2) : $y = x + \frac{3}{2}$ sont asymptotes à (C) respectivement en $-\infty$ et en $+\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x) - (-x - \tfrac{3}{2})\right] = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+3x+2} + x + \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x) - (-x - \tfrac{3}{2})\right] = \lim_{x\to-\infty} \frac{3+\frac{2}{x}}{-\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}-1} + \frac{3}{2} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - (x + \tfrac{3}{2})\right] = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+3x+2} - x - \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - (x + \tfrac{3}{2})\right] = \lim_{x\to-\infty} \frac{3+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+1} - \frac{3}{2} = 0$$

Donc les droites (D_1) : $y = -x - \frac{3}{2}$ et (D_2) : $y = x + \frac{3}{2}$ sont asymptotes à (C) respectivement en $-\infty$ et en $+\infty$.

5. Démontre que la droite (Δ) d'équation $x = -\frac{3}{2}$ est un axe de symétrie de (C).

$\forall x \epsilon \mathbb{R}$, $-\frac{3}{2} - x \epsilon D_f \Leftrightarrow -\frac{3}{2} + x \epsilon D_f$

On a : $f\left(-\frac{3}{2} - x\right) = \sqrt{x^2 - \frac{1}{4}}$ et $f\left(-\frac{3}{2} + x\right) = \sqrt{x^2 - \frac{1}{4}}$

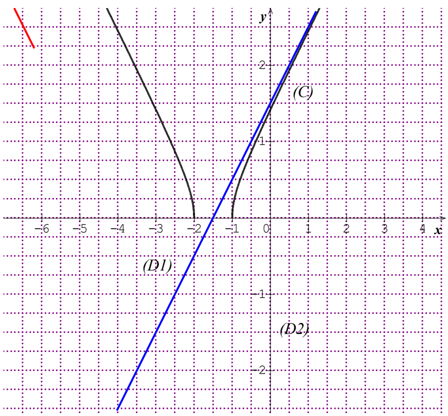
$f\left(-\frac{3}{2} - x\right) = f\left(-\frac{3}{2} + x\right)$ donc la droite (Δ) d'équation $x = -\frac{3}{2}$ est un axe de symétrie de (C).

6. Donne une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.

$(T): y = f'(0)x + f(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \sqrt{2}$

$y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \sqrt{2}$

7. Trace (D_1), (D_2),(T) et (C).



Partie B

Soit g la restriction de f à [-1 ; +∞ [.

1. Démontrons que g est une bijection de [-1 ; +∞ [sur [0 ; +∞ [.
   g est continue et strictement croissante sur [-1 ; +∞ [et $g([-1;+\infty[) = [0;+\infty[$.
   Donc g est une bijection de [-1 ; +∞ [sur [0 ; +∞ [.

2. Justifions que la bijection réciproque g^{-1} de g est dérivable en $\sqrt{2}$ etcalcule $(g^{-1})'(\sqrt{2})$.

On a : $g(x) = \sqrt{2} \Leftrightarrow x = 0$

Donc $g'\left(g^{-1}(\sqrt{2})\right) = g'(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$g'\left(g^{-1}(\sqrt{2})\right) \neq 0$ donc g^{-1} est dérivable en $\sqrt{2}$.

$(g^{-1})'(\sqrt{2}) = \frac{1}{g'(0)} = \sqrt{2}$

Exercice 46

1. Démontrons que f est une bijection de IR sur un intervalle K que l'on précisera.

$\forall x \epsilon \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$

$\forall x \epsilon \mathbb{R}, f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $f(\mathbb{R}) =]0;2[$

Donc f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0;2[$.

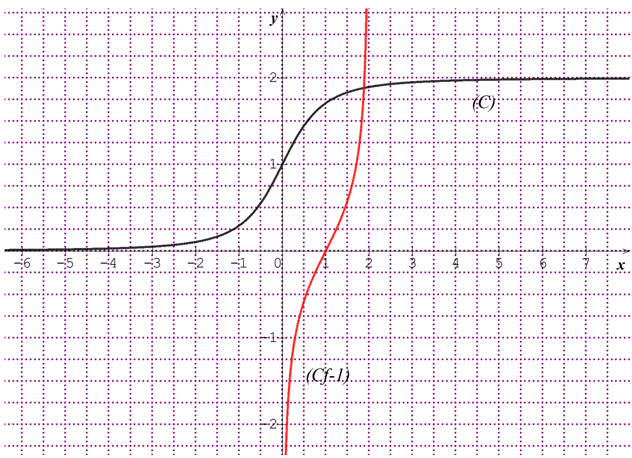
2. Justifie que la bijection réciproque f^{-1} de f est dérivable en 1 et calcule $(f^{-1})'(1)$.

On a : $f(0) = 1$ donc $f^{-1}(1) = 0$.

$f'(f^{-1}(1)) = f'(0) = \frac{1}{(1+0^2)\sqrt{1+0^2}} = 1$

$f'(f^{-1}(1)) \neq 0$ donc f^{-1} est dérivable en 1 et on a : $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(1))} = 1$.

3.
   a) Trace (C).



   b) Trace (C') la courbe représentative de f^{-1}. (voir figure)

Exercice 47

1. Etudie la dérivabilité de f en 0.
   $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{x+2\sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{x}}\right) = +\infty$
   Donc f n'est pas dérivable en 0.
2. Interprète graphiquement le résultat obtenu.
   La courbe (C) admet une tangente verticale au point d'abscisse 0.
3. Démontre que f est une bijection de [0 ;1] sur [0 ; 1]

$\forall x \epsilon]0;1], f'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$

$\forall x \epsilon]0;1], f'(x) \leq 00$ donc f est décroissante sur $]0;1]$.

f est continue et strictement décroissante sur $[0;1]$ et $f([0;1]) = [0;1]$

4. Démontre que pour tout $x \in [0\,;1]$,$f \circ f(x) = x$.

$\forall x \epsilon [0;1], f \circ f(x) = f\big(f(x)\big) = f(x) - 2\sqrt{f(x)} + 1$

Or $f(x) = \big(\sqrt{x} - 1)^2\big)$

Donc

$$\forall x \epsilon [0;1], f \circ f(x) = x - 2\sqrt{x} + 1 - 2\sqrt{\left(\sqrt{x} - 1\right)^2} + 1 = x - 2\sqrt{x} + 1 - 2\left|\sqrt{x} - 1\right| + 1$$

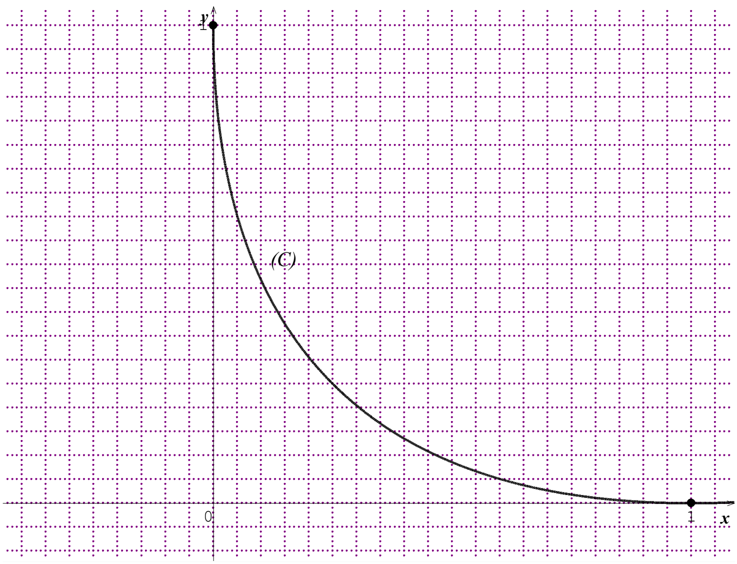
$f \circ f(x) = x - 2\sqrt{x} + 1 - 2\left(-\sqrt{x} + 1\right) + 1 = x$, car $\left|\sqrt{x} - 1\right| = -\sqrt{x} + 1$

$\forall x \epsilon [0;1], f \circ f(x) = x$

5. Déduis en la bijection réciproque f^{-1} de f.

On a : $\forall x \epsilon [0;1], f \circ f(x) = x$ donc $f \circ f = Id_{[0;1]}$ donc $f^{-1} = f$

6. Construis (C).



Situations complexes

Exercice 48

Détermination de la valeur exacte de θ qui minimise la longueur totale des tuyaux.

Calcul de $g'(\theta)$

$\forall \theta \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[, g'(\theta) = \frac{-5+10sin\theta}{cos^2\theta}$

Variations de g

$g'(\theta) = 0 \Leftrightarrow -5 + 10sin\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$

Donc $\forall \theta \in \left]0; \frac{\pi}{6}\right[, g'(\theta) < 0$ et $\forall \theta \in \left]\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right[, g'(\theta) > 0$

D'où g est strictement décroissante sur $\left]0\,; \frac{\pi}{6}\right[$ et strictement croissante sur $\left]\frac{\pi}{6}\,; \frac{\pi}{2}\right[$.

Tableau de variation de g

θ	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$g'(\theta)$		$-$		$+$	
$g(\theta)$	16	$\searrow$	$6+5\sqrt{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

La valeur de de θ qui minimise la longueur totale des tuyaux est $\frac{\pi}{6}$.

Exercice 49

Le bénéfice est défini par la fonction B telle que :
$\forall x[0; 60], B(x) = 3x - f(x) = -x^2 + 84x$
Calculons $B'(x)$
$\forall x[0; 60], B'(x) = -2x + 84$
$B'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 42$
Tableau de variation de B.

x	0		42		60
$B'(x)$		$+$	0	$-$	
$B(x)$	0	$\nearrow$	1764	$\searrow$	60

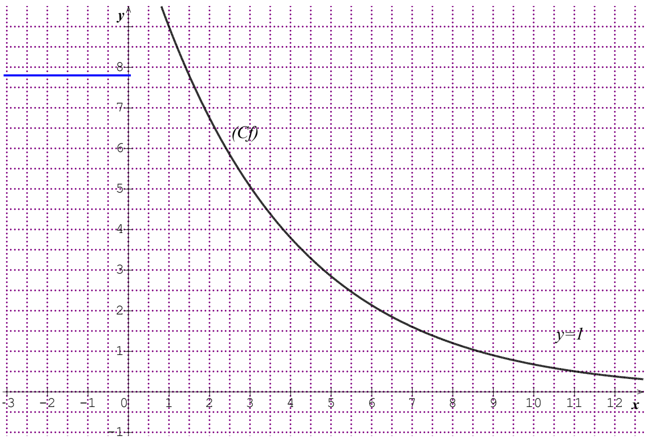
Le Bénéfice est maximal pour une production journalière de 42 parapluies.
Ce bénéfice est de 1 760 000 Francs.

Exercice 50

Détermination de l'âge à partir duquel la concentration en anticorps maternel du bébé est inférieure à 1 g/l.
Calcule de la dérivée de f
$\forall x \in [0; 12], f'(x) = 12\ln(0{,}75) \times 0{,}75^x$
$\forall x \in [0; 12], f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $[0; 12]$
Tableau de variation de f

x	0	12
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	12 ↘	$f(12)$

Représentation graphique de f



Résolution graphique de l'inéquation $f(x) < 1$

Graphiquement, l'inéquation $x \in [0; 12],\ f(x) < 1$ a pour ensemble de solutions $[8{,}64; 12]$

Donc l'âge à partir duquel la concentration en anticorps maternel du bébé est inférieure à 1 g/l est environ 8ans 8 mois.

4 PRIMITIVES

I- *Situation d'apprentissage*

- Après la lecture de la situation d'apprentissage (par un élève, par le professeur et une lecture silencieuse des élèves), l'enseignant pourra s'assurer que les élèves ont bien compris le texte. Dans le cas de cette situation, le texte ne semble pas contenir de mots ou expressions difficiles pour un élève de terminale. Toutefois le professeur donnera la parole à ses élèves afin de s'assurer que tout le monde a compris le texte.
- Il pourra ensuite faire dégager les constituants de la situation à travers une ou des questions du type :

Constituants de la situation	Exemples de questions possibles	Réponses possibles des élèves
Contexte	Où et quand se déroule la scène ?	Lors d'une expérience menée par des élèves, portant sur l'efficacité d'un bactéricide.
Circonstances	Indique la raison pour laquelle tu es sollicité ?	Pour vérifier l'efficacité du bactéricide : sachant qu'il est jugé efficace si après son introduction, le maximum de la population de bactéries est inférieur à 460 000.
Tâche	Qu'as-tu décidé de faire après avoir été sollicité ?	Face à mes difficultés, j'ai décidé de former un groupe de travail afin d'effectuer des recherches sur la question.

Le professeur profitera donc de la tâche énoncée par ses élèves pour faire faire la synthèse de la situation et annoncera le plan de la leçon. Il devra dans la mesure du possible se référer à la situation durant tout le déroulement de la leçon.

Réponse à la préoccupation posée dans la situation

- Signe de f'
  $f'(t) = -10^3t^2 + 3 \times 10^3t + 10^4$ et $f(0) = 10^3$.

  Calcul du discriminant, on sait que $\Delta = b^2 - 4ac$. On trouve $\Delta = 49 \times 10^6$

  $\Delta > 0$ alors f' admet deux zéros distincts $x_1$et x_2.

  On trouve $x_1 = 5$ et $x_2 = -2$.

Comme $t \geq 0$ donc $f'(t) = 0 \iff t = 5$

Tableau de signe de f'

t	0	5	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	0	$+$

- Sens de variation de f

  $\forall\, t \in [0; 5[, f'(t) > 0$ donc f est strictement croissante sur $[0; 5[$.

  $\forall\, t \in\,]5; +\infty[, f'(t) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]5; +\infty[$.

- Détermination de la formule explicite de f
  f' est continue sur $[0; +\infty[$ donc f' admet une primitive f sur $[0; +\infty[$.

$$\forall\, t \in [0; +\infty[, f(t) = -\frac{10^3}{3}t^3 + \frac{3 \times 10^3}{2}t^2 + 10^4 t + c, c \in \mathbb{R}$$
$$f(0) = 10^3 \iff c = 10^3$$
$$f(0) = 10^3 \iff \forall\, t \in [0; +\infty[, f(t) = -\frac{10^3}{3}t^3 + \frac{3 \times 10^3}{2}t^2 + 10^4 t + 10^3$$

- Tableau de variation

t	0	5	$+\infty$
$f'(t)$	$+$		$-$
$f(t)$	$10^3 \nearrow$	$f(5)$	$\searrow -\infty$

$f(5) = \frac{140500}{3}$; $f(5) \approx 46833$

- Interprétation des résultats

Le maximum de la population de bactéries est atteint 5 heures après l'introduction du bactéricide et vaut environ 46833 bactéries.

Or $46833 < 460\,000$ donc le bactéricide est efficace.

Découverte des habiletés

Activité 1 : Primitive d'une fonction (Voir page 105)

- L'objectif de cette activité est de connaître la définition d'une primitive d'une fonction continue.
- Réponses aux questions de l'activité

1) $\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = 3x^2 - 14x + 3$
2) $\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = f(x)$

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice de fixation 1 (page 105)

F est dérivable sur$]0;+\infty[$, donc $\forall x \in]0;+\infty[, F'(x) = f(x)$. Ainsi F est une primitive de f sur $]0;+\infty[$.

Exercice de fixation 2 : (page 105)

Associe chacune des fonctions de la colonne A à sa primitive sur $\mathbb{R}$ dans la colonne B.

Colonne A	Colonne B
$7x^6 - 8x + 6$	$3x + 2$
$-21x^2$	$x^2 + 3x - 5$
$2x + 3$	$x^7 - 4x^2 + 6x - 9$
3	$-7x^3 - 1$

Activité 2 : Primitive et fonction continue sur un intervalle.

- L'objectif de cette activité est de justifier qu'une fonction admet une primitive sur un intervalle.
- Réponses aux questions de l'activité

1. f est définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$, Justifions que f est continue sur $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$.

La fonction $g: x \longmapsto 2x - 1$ est continue sur $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ et $g\left(\left]\frac{1}{2};+\infty\right[\right) =]0;+\infty[$.

La fonction $h: x \longmapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0;+\infty[$ et $]0;+\infty[\subset [0;+\infty[$.

La fonction $h: x \longmapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $]0;+\infty[$. Donc la fonction $f = lohog$ est continue sur $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$.

2. g est dérivable sur $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$.
   On a : $\forall x \in \left]\frac{1}{2};+\infty\right[, g'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$ donc g est une primitive de f sur $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

- Corrigé de l'exercice de fixation

Exercice de fixation 3 :

- Les fonction $f: x \mapsto x^3 - 1$ et $u: x \mapsto \frac{x}{x^2+1}$ ont pour ensemble de définition $\mathbb{R}$ et sont continues sur $\mathbb{R}$ donc f et u admettent une primitive sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $h: x \mapsto \sqrt{x}$ a pour ensemble de définition $\mathbb{R}^+$ et est continue sur $\mathbb{R}^+$donc h admet une primitive sur $\mathbb{R}^+$

Activité 3 : Primitives d'une fonction (page 106)

- L'objectif de cette activité est de déterminer les primitives d'une fonction sur un intervalle.
- Réponses aux questions de l'activité

1. F et G sont des primitives de f sur I donc $\begin{cases} F'(x) = f(x), \ \forall\, x \in I \\ G'(x) = f(x), \ \forall x \in I \end{cases}$ d'où $\forall\, x \in I, F'(x) = G'(x)$
2. $\forall\, x \in I,\ G'(x) - F'(x) = 0$
3. $\forall\, x \in I,\ G(x) - F(x) = c, c \in \mathbb{R}$
4. $\forall\, x \in I,\ G(x) = F(x) + c, c \in \mathbb{R}$

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice de fixation 4 (page 106)

$f, h\ et\ t$ sont des primitives de g sur $\mathbb{R}$.

Exercice de fixation 5 (page 106)

$\forall x \in \mathbb{R}, G(x) = \frac{x^3}{3} - 3x + 5$

$\forall x \in \mathbb{R}, H(x) = \frac{x^3}{3} - 3x - 100$

Activité 4 : Primitive prenant une valeur donnée en un point donné

- L'objectif de cette activité est de déterminer la primitive d'une fonction prenant une valeur donnée en un point donné .
- Réponses aux questions de l'activité

1. $\forall x \in I, G(x) = F(x) + c, c \in \mathbb{R}$
2. a) On a $G(a) = b \Leftrightarrow c = -F(a) + b$
   On obtient $G(a) = b \Leftrightarrow G(x) = F(x) - F(a) + b$
   b) La fonction G définie par $G(x) = F(x) - F(a) + b$ est l'unique primitive sur I qui prend la valeur b en a.

- Corrigé de l'exercice de fixation

Exercice de fixation 6 (page 107)

La fonction f est continue sur ℝ, f admet donc une primitive F sur ℝ.

$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \frac{1}{4}x^4 - 5x + c,\ avec\ c \in \mathbb{R}$

Déterminons la primitive de f sur ℝ qui s'annule en -1.

$F(-1) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}(-1)^4 - 5(-1) + c = 0$

On obtient $c = -\frac{21}{4}$ donc $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - 5x - \frac{21}{4}$

Exercice de fixation 7 (page 107)

1) Déterminons la primitive G de f sur ℝ qui prend la valeur 5 en 0.
   $G(x) = x^2 - x + 5$
2) Déterminons la primitive H de f sur ℝ qui prend la valeur $\frac{3}{2}$ $en - 1$.
   $H(x) = x^2 - x - \frac{1}{2}$

Activité 5 : Primitives des fonctions usuelles.

- L'objectif de cette activité est de connaître les primitives des fonctions usuelles.
- Réponses aux questions de l'activité.

1. $D_f = \mathbb{R}, D_g = \mathbb{R}, D_h = \mathbb{R}^*, D_m = [0; +\infty[, D_n = \mathbb{R}, D_p = \mathbb{R}$,
   $D_q = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}, k \in \mathbb{Z}$.
2. a) $f'(x) = a$, $g'(x) = x^n$, $h'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $m'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $n'(x) = sinx$,
   $p'(x) = cosx$ et $q'(x) = 1 + tan^2x$.

   b)

- f' est continue sur ℝ.
- g' est continue sur ℝ.
- h' est continue sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$
- m' est continue sur $]0; +\infty[$.
- n' est continue sur ℝ.
- p' est continue sur ℝ.
- q' est continue sur les intervalles du type $\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$ où $k \in \mathbb{Z}$ ℝ.

3. a) Une primitive de $x \mapsto a$ sur ℝ est la fonction $f: x \mapsto ax$
   b) Une primitive de $x \mapsto x^n$ sur ℝ est la fonction $g: x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$
   c) Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ sur ℝ est la fonction : $x \mapsto -\frac{1}{x}$
   d) Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ sur ℝ est la fonction $m: x \mapsto 2\sqrt{x}$

e) Une primitive de $x \mapsto sinx$ sur $\mathbb{R}$ est la fonction $n: x \mapsto -cosx$
f) Une primitive de $x \mapsto cosx$ sur $\mathbb{R}$ est la fonction $p: x \mapsto sinx$
g) Une primitive de $x \mapsto 1 + tan^2x$ sur $\mathbb{R}$ est la fonction $q: x \mapsto tanx$

- Corrigé de l'exercice de fixation

Exercice de fixation 8 (page 107)

Fonction f	Primitive F
-2	$-2x + c$
x^5	$\frac{x^6}{6} + c$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$
$sinx$	$-cosx$
$cosx$	$sinx$
$1 + tan^2x$	$tanx$

Activité 6 : Opérations sur les primitives (page 108)

- L'objectif de cette activité est de connaître et de déterminer les primitives des fonctions de la forme $u' + v'$, $u'u^r (r \neq -1)$, $\frac{u'}{u^r}$ $(r \neq 1)$, $\frac{u'}{\sqrt{u}}$
- Réponses aux questions de l'activité.

1) a- $F(x) = x^2 + x$ et $G(x) = \frac{x^4}{4}$

b- $h(x) = x^3 + 2x + 1$ on a $H(x) = \frac{x^4}{4} + x^2 + x$

c- Ainsi on remarque que : $H(x) = F(x) + G(x)$

2) a- $j(x) = k(2x + 1)$

b- La primitive J de j sur $\mathbb{R}$: $J(x) = kx^2 + kx$

c- On a : $kF(x) = k(x^2 + x) = kx^2 + kx$ donc $\forall\, x \in \mathbb{R}, J(x) = kF(x)$

3) a- $l'(x) = u'(x)u^n(x)$; $m'(x) = \frac{u'(x)}{u^n(x)}$; $n'(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$; $p'(x) = u'(x)cos(u(x))$; $q'(x) = u'(x)sin(u(x))$.

b- $u'(x)u^n(x)$ a pour primitive $\frac{u^{n+1}(x)}{n+1}$; $\frac{u'(x)}{u^n(x)}$ a pour primitive $-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}(x)}$;
$\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$ a pour primitive $2\sqrt{u(x)}$; $u'(x)cos(u(x))$ a pour primitive $sin(u(x))$;
$u'(x)sin(u(x))$ a pour primitive $-cos(u(x))$.

- Corrigé de l'exercice de fixation

Exercice de fixation 9 (page 108)

a) $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \frac{x^2}{2} - cosx$; b) $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \frac{x^3}{3} + 2\sqrt{x}$;

c) $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = sinx + cosx$

Exercice de fixation 10 (page 108)

1) $\forall x \in]0;\ +\infty[, F(x) = \frac{(x^2-5x+1)^4}{4}$;
2) 2) $\forall x \in]0;\ +\infty[, F(x) = -\frac{1}{x^3+1}$;

3) $\forall x \in]0;\ +\infty[, F(x) = 2\sqrt{2x+3}$;

4) $\forall x \in]0;\ +\infty[, F(x) = sin(-3x)$;

5) $\forall x \in]0;\ +\infty[, F(x) = -cos(x\sqrt{3} - 7)$

DES QUESTIONS D'EVALUATION

Question 1 : Comment justifier qu'une fonction f est une primitive d'une fonction g ?

- Correction de l'exercice non corrigé (page 112)

  f est dérivable sur $\mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 3x^2 + 7$. On constate que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = g(x)$ donc f est une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

Question 2 : Comment justifier qu'une fonction f admet des primitives sur un intervalle I donné ?

- Correction de l'exercice non corrigé (Page 112)
  f est une fonction polynôme, elle est continue sur $\mathbb{R}$ donc f admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

Question 3 : Comment déterminer la primitive F d'une fonction f qui prend la valeur b en un point a ?

- Correction de l'exercice non corrigé (Page 113)
  Déterminons les primitives F de f.
  On a : $F(x) = 2\sqrt{x-1} + c,\ c \in \mathbb{R}$
  Déterminons la valeur de c pour laquelle $F(2) = 3$.
  On a : $F(2) = 3$ donc $2\sqrt{2-1} + c = 3$
  $c = 1$. Ainsi la primitive F de f qui prend la valeur 3 en 2 est $F(x) = 2\sqrt{x-1} + 1$.

MES SEANCES D'EXERCICES

Exercices de fixation

Primitive d'une fonction

Exercice 1 (Page 114)

$\forall\, x \in \mathbb{R}, f'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 2x + 7$. On constate que $\forall\, x \in \mathbb{R}, f'(x) = g(x)$ donc f est une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 (Page 114)

Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions G et P.

Primitive d'une fonction continue sur un intervalle.

Exercice 3 (Page 114)

Les fonctions $g: x \longmapsto |x|$ et $h: x \longmapsto 1$ sont continues sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $f = g + h$ est continue sur $\mathbb{R}$. On en déduit que f admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4

Les fonctions qui admettent une primitive sur leur ensemble de définition sont : f, h et u

Primitives d'une fonction donnée

Exercice 5 (Page 114)

Tout autre primitive de g est de la forme : $x \longmapsto G(x) + c,\ c \in \mathbb{R}$.

Les fonctions : $x \longmapsto \frac{1}{4}x^4 - x^2 + 27$, $x \longmapsto \frac{1}{4}x^4 - x^2 + 13$ et : $x \longmapsto \frac{1}{4}x^4 - x^2 - 41$ sont donc trois autres primitives de g sur $\mathbb{R}$,

Exercice 6 (Page 114)

1) $\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}, F'(x) = 5x^4$
   $\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}, F'(x) = f(x)$ donc F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$
2) Quatre autres primitives de f sont: $x \longmapsto x^5 + 15$; $x \longmapsto x^5$; $x \longmapsto x^5 - 2030$; $x \longmapsto x^5 - 1$

Primitive prenant une valeur donnée en un point donné

Exercice 7 (Page 114)

Déterminons la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

On a $F(x) = x^3 - x^2 + 5x + c,\ c \in \mathbb{R}$ tel que $F(0) = 0$. On obtient $c = 0$ donc $F(x) = x^3 - x^2 + 5x$.

Exercice 8 (Page 114)

Les primitives F de f sur $]0; +\infty[$ sont de la forme $F(x) = \frac{3}{2}x^2 - x - \frac{1}{x^2} + c$, $c \in \mathbb{R}$.

$F(1) = 0 \iff \frac{3}{2} - 1 - 1 + c = 0$, on trouve $c = \frac{1}{2}$

Donc $F(1) = 0 \iff F(x) = \frac{3}{2}x^2 - x - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2}$

Primitives des fonctions usuelles

Exercice 9 (Page 114)

1) $\forall\, x \in \mathbb{R},\ F(x) = x^2 + x$
2) $\forall\, x \in \mathbb{R},\ F(x) = \frac{1}{3x^4}$
3) $\forall\, x \in]0; +\infty[,\ F(x) = \frac{x^2}{2} + 2\sqrt{x}$
4) $\forall\, x \in \mathbb{R},\ F(x) = -cosx - 2sinx$

Exercice 10 (Page 114)

1) $\forall\, x \in]0; +\infty[, F(x) = \frac{x^4}{4} + c, c \in \mathbb{R}$

2) $\forall\, x \in]0; +\infty[, F(x) = \frac{-1}{4x^4} + c, c \in \mathbb{R}$

3) $\forall\, x \in]0; +\infty[, F(x) = -\cos(x) + c, c \in \mathbb{R}$

4) $\forall\, x \in]0; +\infty[, F(x) = sin(x) + c, c \in \mathbb{R}$

5) $\forall\, x \in]0; +\infty[, F(x) = 2\sqrt{x} + 2x + c, c \in \mathbb{R}$

6) $\forall\, x \in]0; +\infty[, F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + c, c \in \mathbb{R}$

Opérations sur les primitives

Exercice 11 (Page 114)

$a)$ $\forall\, x \in]0; +\infty[, F(x) = \cos(-3x) + c, c \in \mathbb{R}$

$b)$ $\forall\, x \in]0; +\infty[, F(x) = 2\sqrt{2x + 1} + c, c \in \mathbb{R}$

$c)$ $\forall\, x \in]0; +\infty[, F(x) = \frac{1}{2x-5} + c, c \in \mathbb{R}$

$d)$ $\forall\, x \in]0; +\infty[, F(x) = \frac{(x^2+7)^3}{3} + c, c \in \mathbb{R}$

Exercice 12 (Page 114)

$a)$ $\forall\, x \in]0; +\infty[, F(x) = \frac{(x^2-x+6)^4}{4} + c, c \in \mathbb{R}$

$b)$ $\forall\, x \in]0; +\infty[, F(x) = -\frac{1}{2(x^2+3x+2)^2} + c, c \in \mathbb{R}$

$c)\ \forall\, x \in]0;+\infty[, F(x) = 2\sqrt{x^2+x+1} + c, c \in \mathbb{R}$

$d)\ \forall\, x \in]0;+\infty[, F(x) = -\frac{\cos^3(x)}{3} + c, c \in \mathbb{R}$

Exercices de renforcement/ approfondissement

Exercice 13 (Page 114) (Dans le manuel, corriger la numérotation des questions dans l'énoncé de l'exercice)

1- Faux ; 2- Vrai ; 3- Vrai ; 4- Vrai

Exercice 14 (Page 115)

1) $\forall\, x \in \mathbb{R}, F(x) = \frac{x^3}{3} + 2$

2) $\forall\, x \in]0;+\infty[, F(x) = 2\sqrt{x} + 4$

3) $\forall\, x \in]0;+\infty[, F(x) = -\frac{1}{x} - 1$

4) $\forall\, x \in]0;+\infty[, F(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + 100$

5) $\forall\, x \in]0;+\infty[, F(x) = -\frac{1}{2x^2} + 700$

6) $\forall\, x \in \mathbb{R}, F(x) = -cos(x)$

Exercice 15 (Page 115)

1) $\forall\, x \in \left]-\frac{1}{3};+\infty\right[$ ...

1) $\forall\, x \in \mathbb{R}, F(x) = -4{,}9x^2 + 5x$

2) $\forall\, x \in \left]-\frac{1}{3};+\infty\right[, F(x) = -\frac{1}{3x+1}$

3) $\forall\, x \in \left]\frac{1}{2};+\infty\right[, F(x) = 5\sqrt{2x-1}$

4) $\forall\, x \in \mathbb{R}, F(x) = sin(x^2-1)$

5) $\forall\, x \in \mathbb{R}, F(x) = \frac{2}{3}(x^2-x+5)^{\frac{3}{2}}$

Exercice 16 (Page 115)

La fonction g définie par $g(x) = 3x^2 - 4x + 7$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc g admet une primitive sur $\mathbb{R}$. $\forall\, x \in \mathbb{R}, G(x) = x^3 - 2x^2 + 7x + c, c \in \mathbb{R}$.

$$G(1) = 3 \Leftrightarrow c = -3$$
$$G(1) = 3 \Leftrightarrow \ \forall\, x \in \mathbb{R}, G(x) = x^3 - 2x^2 + 7x - 3$$

Exercice 17 (Page 115)

La fonction g définie par $g(x) = cos(3x) - \frac{1}{2}cos(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc g admet une primitive sur $\mathbb{R}$. $\forall\, x \in \mathbb{R}, G(x) = \frac{1}{3}sin(3x) - \frac{1}{2}sin(x) + c, c \in \mathbb{R}$.

$$G\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow c = \frac{\sqrt{2}}{12}$$

$$G\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \ \forall\, x \in \mathbb{R}, G(x) = \frac{1}{3}sin(3x) - \frac{1}{2}sin(x) + \frac{\sqrt{2}}{12}$$

Exercice 18 (Page 115)

1- Déterminons trois nombres réels $a, b \ et \ c$ tels que
pour tout $x > 1$, $h(x) = ax + b + \frac{c}{(x-1)^2}$
pour tout $x > 1$, $h(x) = \frac{ax^3+(b-2a)x^2+(a-2b)x+b+c}{(x-1)^2}$
Par identification, on obtient :

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \\ c = 2 \end{cases}$$

pour tout $x > 1$, $h(x) = 2x - 3 + \frac{2}{(x-1)^2}$

2- h est continue sur $]1;\ +\infty[$ donc h admet une primitive H sur $]1;\ +\infty[$.

$$\forall\, x \in\,]1;\ +\infty[, H(x) = x^2 - 3x - \frac{2}{x-1} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$H(2) = 0 \Leftrightarrow c = 4$$

$$H(2) = 0 \Leftrightarrow \forall\, x \in\,]1;\ +\infty[, H(x) = x^2 - 3x - \frac{2}{x-1} + 4$$

Exercice 19 (Page 115)

1- $D_f = \{x \in \mathbb{R} / 3 - x \geq 0\}$ donc$D_f =]-\infty; 3]$.

2- La fonction F définie par $F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{3-x}$ est dérivable sur $]-\infty; 3[$.
$\forall\, x \in\,]-\infty; 3[, F'(x) = (2ax + b)\sqrt{3-x} + (ax^2 + bx + c)\frac{-1}{2\sqrt{3-x}}$

$$\forall\, x \in\,]-\infty; 3[, F'(x) = \frac{-5ax^2 + (12a - 3b)x + 6b - c}{2\sqrt{3-x}}$$

On a $\forall\, x \in\,]-\infty; 3[, f(x) = x\sqrt{3-x}$. Ainsi $\forall\, x \in\,]-\infty; 3[, f(x) = \frac{-2x^2+6x}{2\sqrt{3-x}}$

$$\forall\, x \in\,]-\infty; 3[, F'(x) = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} -5a = -2 \\ 12a - 3b = 6 \\ 6b - c = 0 \end{cases}$$

$$\forall\, x \in\,]-\infty; 3[, F'(x) = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{5} \\ b = -\frac{2}{5} \\ c = -\frac{12}{5} \end{cases}$$

$$\forall\, x \in\,]-\infty; 3[, F(x) = \frac{2}{5}(x^2 - x - 6)\sqrt{3-x} + c, c \ \in \mathbb{R}$$

3- $F(-1) = 0 \Leftrightarrow c = \frac{16}{5}$

$$F(-1) = 0 \Leftrightarrow \forall\, x \in]-\infty; 3[, F(x) = \frac{2}{5}(x^2 - x - 6)\sqrt{3-x} + \frac{16}{5}$$

Exercice 20 (Page 115)

1- $\forall\, x \in \mathbb{R}, sin^3(x) = sin(x)(1 - cos^2 x)$
   $\forall\, x \in \mathbb{R}, sin^3(x) = sin(x) - sin(x)cos^2(x)$

2- La fonction h définie par $h(x) = sin^3(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$. h admet donc une primitive sur $\mathbb{R}$. $\forall\, x \in \mathbb{R}, H(x) = -cos(x) + \frac{1}{3}cos^3(x) + c,\ c \in \mathbb{R}$.

3- $H(\pi) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow c = 0$
   $H(\pi) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \forall\, x \in \mathbb{R}, H(x) = -cos(x) + \frac{1}{3}cos^3(x)$

Exercice 21 (Page 115)

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = cos^3 x\ sin^6 x$.

f est continue sur $\mathbb{R}$ donc f admet une primitive F sur $\mathbb{R}$.

$\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) = (1 - sin^2 x)cosxsin^6 x$

$\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) = cosxsin^6 x - cosxsin^8 x$

$\forall\, x \in \mathbb{R}, F(x) = \frac{1}{7}sin^7 x - \frac{1}{9}sin^9 x$

Exercice 22 (Page 115)

f de $[0; 1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = E(x)$

f n'admet pas de limite en 0 donc f n'est pas continue en 0.

f n'admet pas de limite en 1 donc f n'est pas continue en 1.

f n'est ni continue en 0 ni continue en 1 donc f n'est pas continue sur $[0; 1]$.

Exercice 23 (Page 115)

Justifions que $F(x) = x|x|$ est une primitive de $f(x) = 2|x|$ sur $\mathbb{R}$.

- $\forall\, x \in]-\infty; 0[, F(x) = -x^2$

F est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et $\forall\, x \in]-\infty; 0[, F'(x) = -2x = 2(-x) = 2|x|$

donc F est une primitive de f sur $]-\infty; 0[$.

- $\forall\, x \in [0; +\infty[, F(x) = x^2$

F est dérivable sur $[0; +\infty[$, $\forall\, x \in [0; +\infty[, F'(x) = 2x = 2|x|$

donc F est une primitive de f sur $[0; +\infty[$.

En conclusion, la fonction F définie par $F(x) = x|x|$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 24 (Page 115)

a) $\forall\, x \in]0;+\infty[, f(x) = x^3 + x^2 + 3$

Ainsi $\forall\, x \in]0;+\infty[, F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + 3x + c,\ c \in \mathbb{R}$

$F(1) = 0 \Leftrightarrow c = -\frac{43}{12}$

$F(1) = 0 \Leftrightarrow \forall\, x \in]0;+\infty[, F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + 3x - \frac{43}{12}$

b) $\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) = 2x^4 + 4x^2$

Ainsi $\forall\, x \in \mathbb{R}, F(x) = \frac{2}{5}x^5 + \frac{4}{3}x^3 + c, c \in \mathbb{R}$

$F(0) = 0 \Leftrightarrow c = 0$

Donc $F(0) = 0 \Leftrightarrow \forall\, x \in \mathbb{R}, F(x) = \frac{2}{5}x^5 + \frac{4}{3}x^3$

c) $\forall\, x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[, F(x) = -\frac{1}{sinx} + c$

$F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow c = 1 + \sqrt{2}$

$F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \forall\, x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[, F(x) = -\frac{1}{sinx} + 1 + \sqrt{2}$

d) $\forall\, x \in \mathbb{R}, F(x) = \frac{1}{4}sin^4(x) + c$

$F(\pi) = 0 \Leftrightarrow c = 0$

Donc $F(\pi) = 0 \Leftrightarrow\ F(x) = \frac{1}{4}sin^4(x)$

Exercice 25 (Page 115)

1) $\forall\, x \in \mathbb{R}, m(x) = \cos(2x)$

Donc $\forall\, x \in \mathbb{R}, M(x) = \frac{1}{2}sin(2x)$

$\forall\, x \in \mathbb{R}, n(x) = 1$

Donc $\forall\, x \in \mathbb{R}, N(x) = x$

2) a- $cos(4x) = cos^4(x) + sin^4(x) - 6cos^2(x)sin^2(x)$

b- $\forall\, x \in \mathbb{R}, t(x) = \cos(4\,x)$

$\forall\, x \in \mathbb{R}, T(x) = \frac{1}{4}\sin(4\,x)$

3) $\forall\, x \in \mathbb{R}, h(x) = \frac{1}{4}(n(x) - t(x))$

$\forall\, x \in \mathbb{R}, H(x) = \frac{x}{4} - \frac{1}{16}sin(4x)$

$\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2}\big(\ m(x) + t(x) + 3h(x)\big)$

$\forall\, x \in \mathbb{R}, F(x) = \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{32}\sin(4x) + \frac{3}{8}x$

$\forall\, x \in \mathbb{R}, g(x) = f(x) - m(x)$

Donc $\forall\, x \in \mathbb{R}, G(x) = -\frac{1}{4}sin(2x) + \frac{1}{32}sin(4x) + \frac{3}{8}x$

Exercice 26 (Page 115)

1- $\forall\, x \in \mathbb{R}, F(x) = \frac{(3x+1)^5}{5}$

2- $\forall\, x \in \mathbb{R}, F(x) = \frac{(2x+7)^7}{14}$

3- $\forall\, x \in \mathbb{R}, F(x) = \frac{(3x^2-2x+3)^6}{6}$

4- $\forall\, x \in \mathbb{R}, F(x) = -\frac{1}{2}cos^2 x$

Exercice 27 (Page 115)

1) $\forall\, x \in \left]-\frac{1}{4}; +\infty\right[, F(x) = -\frac{1}{1+4x}$

2) $\forall\, x \in \left]-\infty; \frac{4}{3}\right[, F(x) = \frac{2}{3(4-3x)}$

3) $\forall\, x \in]3; +\infty[, F(x) = -\frac{1}{(x^2-5x+6)^2}$

Exercice 28 (Page 116)

1- $\forall\, x \in \left]-\frac{1}{4}; +\infty\right[, F(x) = 2\sqrt{4x+1}$

2- $\forall\, x \in \left]-\infty; \frac{2}{7}\right[, F(x) = -\frac{2}{7}\sqrt{2-7x}$

3- $\forall\, x \in \mathbb{R}, F(x) = 2\sqrt{x^2+x+1}$

4- Comme $\forall\, x \in \mathbb{R}, -1 \leq sinx \leq 1$ donc $1 \leq 2 + sinx \leq 3$

On a $\forall\, x \in \mathbb{R}, 2 + sinx > 0$ donc f est continue sur $\mathbb{R}$ et admet une primitive F sur $\mathbb{R}$.

$\forall\, x \in \mathbb{R}, F(x) = 2\sqrt{2+sinx}$

Exercice 29 (Page 116)

1- g est dérivable sur $]0; +\infty[$

$\forall x \in]0; +\infty[, g'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

2- $\forall x \in]0; +\infty[, f(x) = \frac{2}{3}g'(x)$ donc $\forall x \in]0; +\infty[, F(x) = \frac{2}{3}g(x)$.

$\forall x \in]0; +\infty[, F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$

Exercice 30 (Page 116)

1. Déterminons les réels $a\ et\ b$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, f(x) = \frac{a}{(x+1)^2} + \frac{b}{(x+1)^3}.$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, f(x) = \frac{ax+a+b}{(x+1)^3}$$

Par identification on obtient : $a = 3\ et\ b = 1$

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, f(x) = \frac{3}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)^3}.$$

2. Déterminons une primitive F de f sur $]-1;+\infty[$

$\forall x \in]-1;+\infty[, F(x) = \frac{-3}{x+1} - \frac{1}{2(x+1)^2}$

Exercice 31 (Page 116)

3. Déterminons les réels a, b et c tels que

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}, f(x) = ax + b + \frac{c}{(x+2)^2}$.

$ax + b + \frac{c}{(x+2)^2} = \frac{ax^3+(4a+b)x^2+4(a+b)x+4b+c}{(x+2)^2}$

On obtient par identification $a = 2, b = -3$ et $c = 5$

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}, f(x) = 2x - 3 + \frac{5}{(x+2)^2}$.

4. Déterminons la primitive F de f sur $]-2;+\infty[$ telle que $F(0) = 3$

$\forall x \in]-2;+\infty[, F(x) = x^2 - 3x - \frac{5}{x+2} + c,\ c \in \mathbb{R}$

$F(0) = 3 \Leftrightarrow c = \frac{11}{2}$

$\forall x \in]-2;+\infty[, F(x) = x^2 - 3x - \frac{5}{x+2} + \frac{11}{2}$

Exercice 32 (Page 116)

1. Déterminons les réels a et b tels que : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, f(x) = a + \frac{b}{(x+1)^2}$

$a + \frac{b}{(x+1)^2} = \frac{ax^2+2ax+a+b}{(x+1)^2}$

Par identification, on obtient :

$a = 3$ et $b = 1$ c'est-à-dire :

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, f(x) = 3 + \frac{1}{(x+1)^2}$

2. $\forall x \in]-1;+\infty[, F(x) = 3x - \frac{1}{x+1} + c,\ c \in \mathbb{R}$

$F(2) = -1 \Leftrightarrow c = -\frac{20}{3}$

$F(2) = -1 \Leftrightarrow F(x) = 3x - \frac{1}{x+1} - \frac{20}{3}$

Exercice 33 (Page 116)

$\forall\, x \in \mathbb{R},\ h(x) = f(x) + g(x)$

$\forall\, x \in \mathbb{R}, h(x) = (2x+1)(cos^2x + sin^2x)$

$\forall\, x \in \mathbb{R}, h(x) = 2x + 1$

$\forall\, x \in \mathbb{R}, H(x) = x^2 + x + c, c \in \mathbb{R}$

$H(-1) = 0 \iff c = 0$

$H(-1) = 0 \iff H(x) = x^2 + x$

Exercice 34 (Page 116)

1) $\forall\, x \in]-2; +\infty[, 3 - \frac{13}{(x+2)^2} = \frac{3x^2+12x-1}{(x+2)^2}$

Donc $\forall\, x \in]-2; +\infty[, g(x) = 3 - \frac{13}{(x+2)^2}$

2) Déduisons-en la primitive G de g sur $]-2; +\infty[$ telle que $G(1) = 4$
   $\forall\, x \in]-2; +\infty[, G(x) = 3x + \frac{13}{x+2} + c,\ c \in \mathbb{R}$
   $G(1) = 4 \iff c = -\frac{10}{3}$ c'est-à-dire :
   $G(1) = 4 \iff G(x) = 3x + \frac{13}{x+2} - \frac{10}{3}$

Exercice 35 (Page 116)

$\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) = cos^2(x)$ et $g(x) = sin^2(x)$

1. $\forall\, x \in \mathbb{R}, m(x) = f(x) - g(x)$
   $\forall\, x \in \mathbb{R}, m(x) = cos(2x)$ donc $M(x) = \frac{1}{2} sin(2x)$
   $\forall\, x \in \mathbb{R}, n(x) = f(x) + g(x)$
   $\forall\, x \in \mathbb{R}, n(x) = 1$ donc $\forall\, x \in \mathbb{R}, N(x) = x$
2. On obtient le système $\begin{cases} m(x) = f(x) - g(x) \\ n(x) = f(x) + g(x) \end{cases}$ d'où on tire
   $\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2}(m(x) + n(x))$ et $\forall\, x \in \mathbb{R}, g(x) = \frac{1}{2}(n(x) - m(x))$
   Ainsi $\forall\, x \in \mathbb{R}, F(x) = \frac{1}{2}\big(M(x) + N(x)\big)$, on trouve $x \in \mathbb{R}, F(x) = \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{x}{2}$
   et $\forall\, x \in \mathbb{R}, G(x) = \frac{1}{2}\big(N(x) - M(x)\big)$, on trouve $x \in \mathbb{R}, G(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin(2x)$

Exercice 36 (Page 116)

1. $(x+3)(x^2 + 2x + 1) + 1 = x^3 + 5x^2 + 7x + 4$
2. $\forall x \in]-\infty; -1[, f(x) = x + 3 + \frac{1}{(x+1)^2}$
   f est continue sur $]-\infty; -1[$ donc f admet une primitive F sur $]-\infty; -1[$.
   $\forall x \in]-\infty; -1[, F(x) = \frac{x^2}{2} + 3x - \frac{1}{x+1}$
3. $\forall x \in]-\infty; -1[, G(x) = F(x) + c,\ c \in \mathbb{R}$
   $G(-2) = 5 \iff F(-2) + c = 5$ on obtient $c = 8$
   $\forall x \in]-\infty; -1[, G(x) = \frac{x^2}{2} + 3x - \frac{1}{x+1} + 8$

Exercice 37 (Page 116)

1. Déterminons les réels $a \; et \; b$ tels que :
$$\forall x \in \,]1; +\infty[, f(x) = \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{(x+1)^2}.$$

$$\forall x \in \,]1; +\infty[, f(x) = \frac{a(x+1)^2+b(x-1)^2}{(x^2-1)^2}$$

$$\forall x \in \,]1; +\infty[, f(x) = \frac{(a+b)x^2+2(a-b)x+a+b}{(x^2-1)^2}$$

Par identification

$$\begin{cases} a+b=1 \\ 2(a-b)=1 \end{cases} \text{donc} \begin{cases} a = \frac{3}{4} \\ b = \frac{1}{4} \end{cases}$$

On obtient : $\forall x \in \,]1; +\infty[, f(x) = \frac{3}{4(x-1)^2} + \frac{1}{4(x+1)^2}$

2. f est continue $]1; +\infty[$
$$\forall x \in \,]1; +\infty[, F(x) = \frac{-3}{4(x-1)} + \frac{-1}{4(x+1)} + c$$
$$F(2) = 0 \Leftrightarrow c = \frac{5}{6}$$
$$F(2) = 0 \Leftrightarrow \; F(x) = \frac{-3}{4(x-1)} + \frac{-1}{4(x+1)} + \frac{5}{6}$$

Situations complexes

Exercice 38 (Page 116)

- Signe de f'

  $f'(t) = -10^3t^2 + 3 \times 10^3t + 10^4$ et $f(0) = 10^3$.

  Calcul du discriminant, on sait que $\Delta = b^2 - 4ac$. On trouve $\Delta = 49 \times 10^6$

  $\Delta > 0$ alors f' admet deux zéros distincts x_1 et x_2.

  On trouve $x_1 = 5$ et $x_2 = -2$.

  Comme $t \geq 0$ donc $f'(t) = 0 \;\Leftrightarrow t = 5$

  Tableau de signe de f'

t	0	5	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	0	$+$

- Sens de variation de f

  $\forall\, t \in \;[0; 5[, f'(t) > 0$ donc f est strictement croissante sur $[0; 5[$.

$\forall\, t \in\ ]5;+\infty[, f'(t) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]5;+\infty[$.

- Détermination de la formule explicite de f

  f' est continue sur $[0;+\infty[$ donc f' admet une primitive f sur $[0;+\infty[$.

$$\forall\, t \in [0;+\infty[, f(t) = -\frac{10^3}{3}t^3 + \frac{3\times 10^3}{2}t^2 + 10^4 t + c, c \in \mathbb{R}$$

$$f(0) = 10^3 \Leftrightarrow c = 10^3$$

$$f(0) = 10^3 \Leftrightarrow \forall\, t \in [0;+\infty[, f(t) = -\frac{10^3}{3}t^3 + \frac{3\times 10^3}{2}t^2 + 10^4 t + 10^3$$

- Tableau de variation

t	0	5	$+\infty$
$f'(t)$	$+$		$-$
$f(t)$	$10^3 \nearrow$	$f(5)$	$\searrow -\infty$

$f(5) = \frac{140500}{3}$; $f(5) \approx 46833$

- Interprétation des résultats

Le maximum de la population de bactéries est atteint 5 heures après l'introduction du bactéricide et vaut environ 46833 bactéries.

Or $46833 < 460\,000$ donc le bactéricide est efficace.

5 FONCTIONS LOGARITHMES

SITUATION D'APPRENTISSAGE

- Après la lecture de la situation d'apprentissage (par un élève, par le professeur et une lecture silencieuse des élèves), l'enseignant pourra s'assurer que les élèves ont bien compris le texte. Dans le cas de cette situation, le texte ne semble pas contenir de mots ou expressions difficiles pour un élève de terminale. Toutefois le professeur donnera la parole à ses élèves afin de s'assurer que tout le monde a compris le texte.
- Il pourra ensuite faire dégager les constituants de la situation à travers une ou des questions du type :

Constituants de la situation	Exemples de questions possibles	Réponses possibles des élèves
Contexte	Où et quand se déroule la scène ?	M. Kouassi a acheté une voiture neuve à 8.000.000 de francs CFA le premier Janvier 2020 .
Circonstances	Indique la raison pour laquelle tu es sollicité ?	Le concessionnaire affirme que, compte tenu des innovations technologiques, cette voiture perd 8%de sa valeur par an. M. Kouassi a décidé de donner sa voiture à sa fille Henriette lorsqu'elle vaudra moins que le quart de son prix initial. Au cours d'une discussion, ta camarade Annick Henriette se demande en quelle année la voiture lui reviendra .N'ayant pas la solution
Tâche	Qu'as-tu décidé de faire après avoir été sollicité ?	Partageant l'inquiétude d'Henriette, vous décidez d'exprimer la valeur de la voiture au bout de n années puis d'effectuer des calculs afin de répondre à sa préoccupation.

Le professeur profitera donc de la tâche énoncée par ses élèves pour faire faire la synthèse de la situation et annoncera le plan de la leçon. Il devra dans la mesure du possible se référer à la situation durant tout le déroulement de la leçon.

Corrigé

- **Détermination du prix de la voilure en 2020+n :**

On pose u_0 = 8000000 francs CFA le prix de la voiture en 2020 ;

Notons u_n le prix de la voiture en 2020 + n

On a : u_n = 8000000$(0{,}92)^n$

- **Comparaison du prix au quart de son prix initial :**
  d'où $u_n < \frac{1}{4}(8000000) \Leftrightarrow 8000000(0{,}92)^n < 2000000 \Leftrightarrow 4(0{,}92)^n < 1$

$$\Leftrightarrow (0{,}92)^n < 0{,}25$$

$$\Leftrightarrow n \ln(0{,}92) < \ln(0{,}25)$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{\ln(0{,}25)}{\ln(0{,}92)}$$

$$\Leftrightarrow n > 16{,}6223$$

Donc on prend n = 17

Conclusion

La voiture lui reviendra en 2020+17 =2037

Découverte des habiletés :

Activité 1 : Définition de la fonction logarithme népérien

- L'objectif de cette activité est de connaître la définition de la fonction logarithme népérien.
- Réponses aux questions de l'activité

1. On a : f(1)=f(1)+f(1) d'où f(1)=0
2. Pour tout x élément de] 0 ; + ∞[, g(x)=f(a)+f(x)-f(x)
   g(x)=f(a)
   Donc g est une fonction constante.
3. a) g est dérivable sur] 0 ; + ∞[car f est dérivable sur] 0 ; + ∞[.

   b) pour tout x élément de] 0 ; + ∞[, on a g'(x).= af'(ax)-f'(x)

   c) g'(1)=af'(a× 1)-f'(1)= af'(ax)-f'(x)

4. On pose f'(1)=k

D'après 2) g est constante d'où g'(x)=0 et avec 3)b) on a : af'(a)-f'(1)=0

Or f'(1)=k alors g'(1)=af'(a)-k=0 d'où k=af'(a) donc f'(a)=$\frac{k}{a}$; ainsi par extension on a , pour tout réel x >0 , f'(x)=$\frac{k}{x}$

Par conséquent, f est la primitive de x$\longmapsto \frac{k}{x}$ sur] 0 ; + ∞[qui s'annule en 1.

- Corrigé de l'exercice de fixation

Exercice 1 :

1. F ; 2. **V** ; 3. **F ;** 4.**F**

Activité 2 : Conséquences de la définition

- L'objectif de cette activité est de connaître la dérivée, le sens de variation et les conséquence de la variation de la fonction logarithme népérien.
- Réponses aux questions de l'activité

1. On a : $\mathcal{D}_{ln}$=**]** 0 ; + ∞[
2. D'après la définition, ln est la primitive sur] 0 ; + ∞[de la fonction :
   $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1, donc ln est dérivable sur] 0 ; + ∞[.
3. ∀x∈ **]** 0 ; + ∞[, ln'x=$\frac{1}{x}$ or $\frac{1}{x}$ >0 alors ln est strictement croissante sur]0 ; + ∞[.
4. On a : a < b ⟺ lna <lnb

   a = b ⟺ lna =lnb

5. ln1= 0
6. On a : lnx < 0 ⟺ 0 < x < 1
   lnx >0 ⟺ x > 1
   lnx = 0 ⟺ x=1

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 2

1. F ; 2. V ; 3. F ; 4.F ; 5.F ; 6.V ; 7.F

Exercice 3

a)Comme 7 > 5 alors ln7 > ln5 ;
b) on a : 29 < $4\sqrt{5}$ donc ln29 <ln$4\sqrt{5}$
c) $on\ a$: $\sqrt{3} > \frac{1}{2}$ donc ln$\sqrt{3}$ > ln$\frac{1}{2}$

Activité 3 : le nombre ***e***

- L'objectif de cette activité est de connaître le nombre e l'unique antécédent de 1 par la fonction logarithme népérien.
- Réponses aux questions de l'activité

1. La fonction ln est continue et strictement croissante sur$]0 ; +\infty[$alors elle réalise une bijection de$]0 ; +\infty[$ sur ln ($]0 ; +\infty[$) = $\mathbb{R}$ donc ln est une bijection de $]0 ; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.
2. Comme $1 \in \mathbb{R}$ alors 1 admet un antécédent unique par ln.

Activité 4 : Propriété fondamentale

- L'objectif de cette activité est de connaître la propriété algébrique fondamentale de la fonction logarithme népérien et
- Réponses aux questions de l'activité

1) f est dérivable sur$]0 ; +\infty[$car ln l'est aussi et $\forall x \in]0 ; +\infty[$on a :
   $f'(x)=\frac{1}{x}$
2) Ainsi f est aussi une primitive de $x \longmapsto \frac{1}{x}$ sur$]0 ; +\infty[$donc $\forall x \in]0 ; +\infty[$on a :
   $f(x) = \ln x + c$, $c \in \mathbb{R}$; or $f(1) = \ln(a)=\ln 1+c$.
   Comme $\ln 1=0$ alors $c = \ln a$ donc $\forall x \in]0 ; +\infty[$, $f(x) = \ln a +\ln x$

- Correction de l'exercice de fixation

Exercice de fixation

Exercice 4

1.V ; 2. F ; 3. V ; 4. F

Activité 5: Conséquences de la propriété fondamentale

- L'objectif de cette activité est de connaître les autres propriétés algébriques de la fonction logarithme népérien et utiliser les propriétés algébriques de la fonction logarithme népérien pour transformer une écriture.
- Réponses aux questions de l'activité

1. On pose : $1 = b \times \frac{1}{b}$ d'où $\ln 1 = \ln(b\times \frac{1}{b})$
   $0 = \ln b +\ln (\frac{1}{b})$, d'après la propriété fondamentale donc $\ln (\frac{1}{b}) = - \ln b$

2. On pose : $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$ d'où ln ($\frac{a}{b}$) =lna + ln ($\frac{1}{b}$) d'après la propriété fondamentale ; or ln ($\frac{1}{b}$) = - lnb donc ln ($\frac{a}{b}$) = lna -lnb
3. Pour a = b on a : ln (a^2) = ln (a×a)
   = lna +lna
   = 2lna
   D'une façon générale, pour tout r ∈ ℚ , ln (a^r) = r lna

- Correction des exercices de fixation

Exercice 5

1.

a)ln4+ln7 = ln (4×7) = ln28 b)ln$\sqrt{3}$ +ln$\sqrt{12}$ = ln($\sqrt{3} \times \sqrt{12}$) = ln($\sqrt{36}$ =ln 6

c)ln7 – ln21 = ln ($\frac{7}{21}$) = ln$\frac{1}{3}$ = - ln 3

2. On a : ln (1+$\sqrt{2}$) + ln($\sqrt{2}$-1) = ln [(1+$\sqrt{2}$) ($\sqrt{2}$-1)] = ln[($\sqrt{2}$)²-1²] = ln(2-1)

= ln1=0

Exercice 6

1.V ; 2.F ; 3.V ; 4.F ; 5.F

Exercice 7 : (A supprimer car évalue les mêmes habiletés que l'exercice 5)

a) ln4+ln5= ln(20) ; b) ln$\sqrt{3}$ +ln$\sqrt{12}$ = ln$\sqrt{36}$ = ln6 ; c) ln8+ln$\frac{1}{4}$ = ln2

Activité 6 : Limites aux bornes de son ensemble de définition

- L'objectif de cette activité est de connaître les limites de référence aux bornes de l'ensemble de définition de la fonction logarithme népérien.
- Réponses aux questions de l'activité

1. On a: ∀x∈]0 ; + ∞[, ln ($\frac{1}{x}$) = - lnx

2. La fonction x⟼ ln ($\frac{1}{x}$) est la composée de la fonction

x ⟼ $\frac{1}{x}$ et de la fonction x ⟼lnx

3. On a : $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} lnx = +\infty$

D'après la propriété de la limite des fonctions composées, on déduit que $\lim_{x \to 0} lnx = -\infty$

4. La droite d'équation x = 0 est une asymptote verticale à la courbe de ln.

5. Tableau de variations de la fonction ln.

x	0		$+\infty$
$\frac{1}{x}$	‖	+	
lnx	‖	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

Activité 7 : Représentation graphique de la fonction ln

- L'objectif de cette activité est de connaître la représentation graphique de la fonction logarithme népérien et la limite de référence : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{lnx}{x}$
- Réponses aux questions de l'activité

1. On a : : (T_I) : y = ln'(1) (x-1) +ln1 et (T_e) : y = ln'(e) (x-e) +lne

   y = 1(x-1)+0 $\qquad$ $y = \frac{x}{e} - \frac{e}{e} + 1$

   y= x-1 $\qquad$ $y = \frac{x}{e}$

2. ∀x∈]0 ;+∞[, lnx < $\frac{x}{e}$ <x et lnx <x-1<x donc la courbe $(\mathcal{C}_{ln})$ est en dessous de (T_I) et (T_e) .

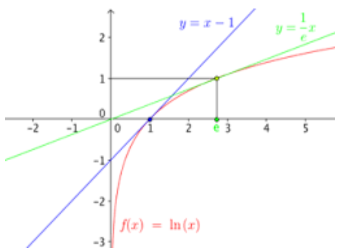
3. a) On a : ∀x∈]0 ;+∞[; $0 < \frac{1}{2}\ln x < \sqrt{x} \Leftrightarrow 0 < \frac{lnx}{x} < \frac{2\sqrt{x}}{x}$

   $\Leftrightarrow 0 < \frac{lnx}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}$

a) Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}}=0$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{lnx}{x}=0$

b) La courbe $(\mathcal{C}_{ln})$ admet une branche parabolique de direction (OI) en +∞ .

c) Voir dessin



- Correction des exercices de fixation

Exercice 8 (7)

a) La courbe ($\mathcal{C}_{ln}$) admet une branche infinie en +∞ ;

b) La courbe ($\mathcal{C}_{ln}$) admet une branche parabolique de direction (OI) en +∞ .

Exercice 9 (8)

C'est la courbe de la figure 1

Exercice 10 (9)

a) $\lim_{x\to+\infty}(x - lnx) = \lim_{x\to+\infty} x(1 - \frac{lnx}{x}) = +\infty$ car $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{lnx}{x} = 0$

b) $\lim_{x\to+\infty}(\ln x + \frac{1}{lnx}) = +\infty$ car $\lim_{x\to+\infty} lnx = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{lnx} = 0$

c) $\lim_{x\to 0}(\ln x + \frac{1}{lnx}) = -\infty$ car $\lim_{x\to 0} lnx = -\infty$ et $\lim_{x\to 0} \frac{1}{lnx} = 0$

Activité 8 : Autres limites

- L'objectif de cette activité est de connaître les autres limites de référence.
- Réponses aux questions de l'activité

1. a)On peut écrire : $x\ln x = -\frac{\ln(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}$; or $\frac{\ln(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}$ est la composée des fonctions :

$x \longmapsto \frac{1}{x}$ et $x \longmapsto \frac{lnx}{x}$

b) Comme $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{lnx}{x} = 0$ donc en utilisant la propriété de la limite des fonctions composées, on obtient : $\lim_{x\to 0} xlnx = 0$

2. On a : $\frac{lnx}{x-1} = \frac{lnx - ln1}{x-1}$ d'ou $\lim_{x\to 1}\frac{lnx-ln1}{x-1} = \ln'(1) = 1$

donc $\lim_{x\to 1}\frac{lnx}{x-1} = 1$

3) On pose X= x+1; quand x⟶ 0 ; X⟶1 et x = X-1

Ainsi $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{X\to 1}\frac{lnX}{X-1} = 1$

- Correction des exercices de fixation

Exercice 11

1) On a : x(1-lnx) = (x- $xln\,x$) or $\lim_{x\to 0} xln\,x = 0$ et $\lim_{x\to 0} x = 0$

Donc $\lim\limits_{x \to 0} x - xlnx = 0$.

2) On a : $\lim\limits_{x \to 0} xlnx = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} x + 1 = 1$ donc $\lim\limits_{x \to 0} \frac{xlnx}{x+1} = 0$

3) On a : $\frac{xlnx}{x-1} = x\,(\frac{lnx}{x-1})$; or $\lim\limits_{x \to 1} x = 1$ et $\lim\limits_{x \to 1} \frac{lnx}{x-1} = 1$

Donc $\lim\limits_{x \to 1} \frac{xlnx}{x-1} = 1$

Exercice 12

1. V ; 2. F ; 3.V

Activité 9 : Equations et inéquations faisant intervenir la fonction ln.

- L'objectif de cette activité est de résoudre des équations ou inéquations faisant intervenir la fonction *ln*
- Réponses aux questions de l'activité

1.

a) Soit V l'ensemble de validité :

$$x \in V \iff \begin{cases} 3x - 2 > 0 \\ x - 1 > 0 \\ 4x + 2 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > \frac{2}{3} \\ x > 1 \\ x > -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{donc } V =]1 ; +\infty[$$

b)

Soit $x \in]1 ; +\infty[$

$\ln(3x-2) + \ln(x-1) = \ln(4x+2) \iff \ln[(3x-2)(x-1)] = \ln(4x+2)$

c) On a: $\ln[(3x-2)(x-1)] = \ln(4x+2) \iff (3x-2)(x-1) = 4x+2$

$\iff 3x^2 - 9x = 0$

$\iff 3x(x-3) = 0$

$\iff x = 0$ ou $x = 3$

- Vérification :
  $0 \notin V$ et $3 \in V$ donc $S_{\mathbb{R}} = \{3\}$

2.
a) Soit V l'ensemble de validité :

$$x \in V \iff \begin{cases} 3x-2>0 \\ x-1>0 \\ 4x+2>0 \end{cases} \iff \begin{cases} x>\frac{2}{3} \\ x>1 \\ x>-\frac{1}{2} \end{cases}$$ donc V =] 1 ; + ∞[

b)

Soit x ∈] 1 ; + ∞[

ln (3x-2) +ln(x-1) < ln (4x+2) ⇔ ln (3x-2) (x-1) < ln (4x+2)

c) On a : ln (3x-2) (x-1) < ln (4x+2) ⇔ $3x^2-9x<0$

⇔ 3x (x-3) <0

⇔ $3x^2-9x<0$

⇔ 3x (x-3) <0

⇔ x∈]0 ; 3[

On a : $S_{\mathbb{R}}$ = V ∩]0 ; 3[

=] 1 ; 3[

- Correction des exercices de fixation

Exercice 13

1 :{1} ; 2 :{0} ; 3 :{-2}

Exercice 14

1 :]-∞ ;-1[; 2 :]0 ;+∞[; 3 : {}

Exercice 15

On a: $1-\left(\frac{3}{4}\right)^n > 0{,}95 \iff 1-0{,}95 > (\frac{3}{4})^n \iff 0{,}05 > (\frac{3}{4})^n$

$\iff \ln(0{,}05) > n\ln(\frac{3}{4})$

$\iff n > \frac{\ln(0{,}05)}{\ln(\frac{3}{4})}$

$\iff n > 10{,}41$

Donc le plus petit entier naturel est : 11

Activité 10 : Fonctions du type : lnou ou ln|u|

- L'objectif de cette activité est de connaître et de déterminer les dérivées des fonctions du type : ln∘u et ln∘$|u|$; de connaître et de déterminer les primitives des fonctions du type : $\frac{u'}{u}$,où u est une fonction dérivable non nulle.
- Réponses aux questions de l'activité

1.

a) On sait que ln est dérivable sur]0 ;+∞[; de plus $\forall x \in I$, u(x) ∈]0 ;+∞[donc lnou est dérivable sur I .

b) Ainsi (lnou)'= u'$\times \frac{1}{u} = = \frac{u'}{u}$

2.

a) lno|v| est dérivable sur toute partie de J sur laquelle v ne s'annule pas .

b) On a: (lno|v|)'= ($\frac{1}{2}$ ln(v^2))'

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times v' \times \frac{1}{v}$$

$$= \frac{v'}{v}$$

c) Les primitives des fonctions de la forme $\frac{v'}{v}$ sont les fonctions de la forme : ln (|v(x)|+c, c étant une constante.

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 16

1 : **]**-∞ **;** 2[; 2 :]-∞ ;0[; 3 : ℝ\{-3}

Exercice 17

1. $\frac{-1}{2-x}$ **;** 2. $\frac{3}{3x-1}$ **;** 3. $\frac{-1}{x}$

Exercice 18

1.V ; 2 . F ; 3 . F ; 4. F

Activité 11 : Fonction logarithme de base a (a>0 et a#1)

- L'objectif de cette activité est de connaître la définition de la fonction logarithme de base a ($a > 0$ et $a \neq 1$) et la définition de la fonction logarithme décimal.

- Réponses aux questions de l'activité

1. Comme ln est une bijection sur]0 ; + ∞[, alors f_k est une bijection de]0 ; + ∞[vers ℝ .

2. Comme ln est dérivable sur]0 ; + ∞[, alors $f_k$est dérivable sur]0 ; + ∞[.

3. Soit a et b deux réels strictement positifs.

On a: f_k(ab) = kln (ab)

=k (lna +lnb)

= klna +klnb

= f_k(a)+f_k(b)

Donc f_k vérifie la propriété fondamentale

4. a) On a : f_k(a)=1 ⟺ kln(a) =1

⟺ k = $\frac{1}{\ln(a)}$

b) Pour le cas a = 10, on a : k = $\frac{1}{\ln(10)}$.

- Correction des exercices de fixation

Exercice 19

1 .V ; 2.F ; 3.F ; 4. V ; 5. V.

Exercice 20

La bonne réponse est : d)

Exercice 21

La bonne réponse est : a)

- **Questions d'évaluation**

Correction de l'exercice non corrigé

Calcul la limite de f en 0.

On a f(x)=$2lnx + \frac{1}{x}$ d'où $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$(2xlnx + 1)

Donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0}$(2xlnx + 1) =1 .

Calcul la limite de f en $+\infty$.

On a f(x)=$2lnx + \frac{1}{x}$ d'où $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}$ (2lnx + $\frac{1}{x}$)

Donc $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to +\infty}$(2lnx) =+∞ .

- ✓ **Question 2 :** Comment calculer (lnou)' , après avoir détermine son ensemble de dérivabilité ?

Méthode

Pour traiter cette question, on peut procéder comme suit :

- On détermine l'ensemble de dérivabilité D de la fonctionb u .
- On résout l'inéquation : x∈ D, u(x)>0 .
- On applique la formule (lnou)' = $\frac{u'}{u}$.

Exercice

Détermine l'ensemble de définition de la fonction f telle que : f(x)= ln (-x).

Corrigé

On a : f(x) est du type f(x)=ln (u(x)) avec u(x)= -x ; or pour f(x)= ln (u(x)) c'est-à-dire f = lnou : x∈ D_f ⟺ u(x) >0, donc on a : –x >0 soit x <0, par suite D_f=]-∞ ; 0[.

Exercice

Détermine le plus grand ensemble sur lequel la fonction g définie par : g(x) = ln ($\frac{1-x}{2+x}$) est dérivable puis calcule g'(x).

Corrigé

Soit la fonction rationnelle u définie par : u(x) = $\frac{1-x}{2+x}$

La fonction u est dérivable sur ℝ-{-2} ;

On résout l'inéquation: x∈ ℝ-{-2} , u(x) >0

On a x∈ ℝ-{-2}, u(x) >0 ⟺ x∈]-2;1[donc g est dérivable sur]-2;1[

On applique la formule :(lnou)'= $\frac{u'}{u}$

Pour x∈]-2;1[, u'(x) = $\frac{-3}{(2+x)^2}$ donc g'(x) = $\frac{\frac{-3}{(2+x)^2}}{\frac{1-x}{2+x}} = \frac{3}{(x-1)(x+2)}$

Correction de l'exercice non corrigé

Soit la fonction k définie par : k(x) = ln($\sqrt{1-x^2}$) .

Détermine le plus grand ensemble I sur lequel k est dérivable, puis calcule k'(x) pour tout x élément de I.

Soit la fonction rationnelle u définie par : $u(x) = \sqrt{1-x^2}$

La fonction u est dérivable sur $]-1;1[$

On résout l'inéquation: x$\in$ $]-1;1[$, u(x) >0

Or x$\in$ $]-1;1[$, u(x) >0 donc k est dérivable sur]-1;1[

On applique la formule :(lnou)'= $\frac{u'}{u}$

Pour x$\in$]-1;1[, u'(x) = $\frac{-2X}{2\sqrt{1-X^2}}$ donc k'(x) = $\frac{\frac{-2X}{2\sqrt{1-X^2}}}{\sqrt{1-x^2}}$ = $\frac{-x}{1-x^2}$

Question 3 : Comment déterminer les primitives des fonctions du type : $\frac{u'}{u}$?

Méthode

Pour traiter cette question, on peut procéder comme suit :

- Identifier u qui est le dénominateur ; son exposant doit être 1.
- On calcule u'.
- On réécrit la fonction en fonction de u et u'.
- On retrouve la forme $\frac{u'}{u}$

Exercice

Détermine les primitives sur]-∞ ;$\frac{1}{5}$[de la fonction f telle que :

f(x) = $\frac{1}{5x-1}$

Corrigé

Ici, on prend u(x) = 5x-1 ; on a u'(x)=5 d'où f(x) = $\frac{1}{5} \times \frac{5}{5x-1}$

$= \frac{1}{5} \times \frac{u'(x)}{u(x)}$

Donc les primitives sont : F(x) = $\frac{1}{5}$ ln (|5x − 1|)+c ; c ∈ ℝ soit

F(x) = $\frac{1}{5}$ln (1-5x) +c ; c ∈ ℝ sur]-∞ ;$\frac{1}{5}$[.

Correction de l'exercice non corrigé

Déterminons les primitives sur]-∞;1[de la fonction f telle que f(x)=$\frac{x^2}{x^3-1}$.

Ici, on prend u(x) = $x^3 - 1$; on a u'(x)=$3x^2$ d'où f(x) = $\frac{1}{3} \times \frac{3x^2}{x^3-1}$

$= \frac{1}{3} \times \frac{u'(x)}{u(x)}$

Donc les primitives sont : F(x) = $\frac{1}{3}$ ln ($|x^3 - 1|$)+c ; c ∈ ℝ

$\forall x \in]-\infty; 1[, x^3 - 1 < 0$

Donc F(x) = $\frac{1}{3}$ln (1-x^3) +c ; c ∈ ℝ sur]-∞ ;-1 [.

- **Mes séances d'exercices**
  - ✓ **Exercices de fixation**
    - **Définition et propriété algébriques de la fonction logarithme népérien.**

Exercice 1

2. F ; 2. V ; 3. F ; 4. F ; 5. V ; 6. V

Exercice 2

1. B ; 2. C ; 3. B

- **Equations comportant des logarithmes.**

Exercice 3

a)

✓ Soit V l'ensemble de validité :

x∈V ⇔ 1-x > 0

⇔ x<1

Donc V=]- ∞ ; 1[

✓ Résolution

Soit x un élément de V ; on a :

ln(1-x) = 0 ⇔ ln(1-x)=ln1

⇔1-x =1

⇔x =0

Comme 0 ∈V alors S = {0}

b)

✓ Soit V l'ensemble de validité :

x∈V ⇔ 4-x >0 et x-1>0

⇔ x <4 et x >1

⇔ x∈]1 ; 4[

Donc V =] 1 ; 4[

✓ Résolution

Soit x un élément de V ; on a :

ln (4-x) = ln(x-1) ⇔ 4-x = x-1

⇔ 2x = 5

⇔ x = $\frac{5}{2}$

Comme $\frac{5}{2} \in V$ alors $S = \{\frac{5}{2}\}$

c)

- ✓ Soit V l'ensemble de validité :
  $x \in V \Leftrightarrow x^2-5x+4 > 0$ et $x^2-x-6 > 0$
  $\Leftrightarrow x < 1$ ou $x > 4$ et $x < -2$ ou $x > 3$
  $\Leftrightarrow x < -2$ ou $x > 4$
  D'où $V =]-\infty ;-2[\cup] 4 ; +\infty[$
- ✓ Résolution
  Soit x un élément de V ; on a
  $\ln(x^2-5x+4) = \ln(x^2-x-6) \Leftrightarrow \ln(x^2-5x+4) = \ln(x^2-x-6)$
  $\Leftrightarrow x^2-5x+4 = x^2-x-6$
  $\Leftrightarrow -4x = -10$
  $\Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$

Or $\frac{5}{2} \notin V$ donc $S = \{\}$

Exercice 4

a)

- ✓ Soit V l'ensemble de validité :
  $x \in V \Leftrightarrow x > 0$
  Donc $V =] 0 ; +\infty [$
- ✓ Résolution
  Soit x un élément de V ; on a :
  $(x^2-1)\ln x = 0 \Leftrightarrow x^2-1=0$ ou $\ln x=0$
  $\Leftrightarrow x=1$ou $x=-1$ ou $x= 1$
- ✓ Vérification
  On a : $-1 \notin V$ et $1 \in V$ donc $S= \{1\}$

b)

- ✓ Soit V l'ensemble de validité :
  $x \in V \Leftrightarrow x+5 > 0$ et $x-2 > 0$
  $\Leftrightarrow x > -5$ et $x > 2$
  $\Leftrightarrow x > 2$
  Donc $V =] 2 ; +\infty[$
- ✓ Résolution
  Soit x un élément de V ; on a :
  $\ln(x+5) = 2\ln 2-\ln(x-2) \Leftrightarrow \ln(x+2)+\ln(x-2)= 2\ln 2$
  $\Leftrightarrow \ln[(x+2)(x-2)] = \ln 4$
  $\Leftrightarrow x^2-4 = 4$

$\Leftrightarrow x^2-8=0$

$\Leftrightarrow x = 2\sqrt{2}$ ou $-2\sqrt{2}$

- ✓ Vérification

  On a : $2\sqrt{2} \in V$ et $-2\sqrt{2} \notin V$ donc $S = \{2\sqrt{2}\}$

c)

- ✓ Soit V l'ensemble de validité :

  $x \in V \Leftrightarrow x > 0$

  Donc V =]0 ;+∞ [
- ✓ Résolution

  Soit x un élément de V ; on a :

  $\ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$

Comme $e \in V$ alors S = {e}

Exercice 5

1. A ; 2. B ; 3. C

Exercice 6

a) $\mathbb{R}^*$; b)]-∞ ;-2[∪] 0 ; + ∞[; c)] 0 ; + ∞[

Inéquations comportant des logarithmes

Exercice 7

a)

- ✓ Soit V l'ensemble de validité :

  $x \in V \Leftrightarrow 2+3x > 0$ et $x-1 > 0$

  $\Leftrightarrow x > \frac{-3}{2}$ et $x > 1$

Donc V =] 1 ; + ∞[

- ✓ Résolution

  Soit x un élément de V ; on a :

  $\ln(2+3x) < \ln(x-1) \Leftrightarrow 2+3x < x-1$

  $\Leftrightarrow x < -\frac{3}{2}$

  $\Leftrightarrow x \in]-\infty ; -\frac{3}{2}[$

Donc $S = V \cap]-\infty ; -\frac{3}{2}[= \{\}$

b)

- ✓ Soit V l'ensemble de validité :
  $x \in V \Leftrightarrow -x > 0$
  $\Leftrightarrow x < 0$

Donc $V =]-\infty\ ;\ 0[$

- ✓ Résolution
  Soit x un élément de V ; on a :
  $\ln(-x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(-x) \geq \ln 1$
  $\Leftrightarrow -x \geq 1$
  $\Leftrightarrow x \leq -1$
  $\Leftrightarrow x \in]-\infty\ ;-1[$

Donc $S = V \cap]-\infty\ ;-1[=]-\infty\ ;-1[$

Exercice 8

a)

- ✓ Soit V l'ensemble de validité :
  $x \in V \Leftrightarrow 1-x^2 > 0$
  $\Leftrightarrow x \in\ ]-1\ ;\ 1[$
  Donc $V =]-1\ ;\ 1[$
- ✓ Résolution
  Soit x un élément de V
  On a : $\ln(1-x^2) > 1 \Leftrightarrow \ln(1-x^2) > \ln e$
  $\Leftrightarrow 1-x^2 > e$
  $\Leftrightarrow -x^2+1-e > 0$

Comme le discriminant $\Delta = 4(1-e) < 0$, alors $S = \{\}$

b)

- ✓ Soit V l'ensemble de validité :
  $x \in V \Leftrightarrow x^2-4e^2 > 0$ et $3x > 0$
  $\Leftrightarrow x \in]-\infty\ ;-2e\ [\cup]\ 2e;+\infty[$ et $x > 0$
  $\Leftrightarrow x > 2e$

Donc $V =]\ 2e;+\infty[$

- ✓ Résolution
  Soit x un élément de V ; on a :

ln(x²-4e²) < 1+ln (3x) ⇔ ln(x²-4e²) < lne +ln3x

⇔ln(x²-4e²) < ln (3ex)

⇔ x²-3ex-4e² < 0

Le discriminant $\Delta = 25e^2$ d'où $\sqrt{\Delta} = 5e$ ainsi les racines du polynôme sont : -e et 4e donc x ∈]-e ;4e[

S= V∩]-e ; 4e [=] 2e ; 4e [

Limites de référence et limites aux bornes de l'ensemble de l'ensemble de définition d'une comportant des logarithmes

Exercice 9

1. C ; 2. A ; 3.A ; 4. B

Exercice 10

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{lnx} = \lim\limits_{x \to} + \infty \frac{1}{\frac{lnx}{x}} = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{lnx}{x} = 0$ et $\frac{lnx}{x} > 0$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - lnx) = \lim\limits_{x \to \leftarrow +\infty} x(1 - \frac{lnx}{x}) = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{lnx}{x} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{lnx}{x^3} = 0$

Exercice 11

a) $\lim\limits_{x \to 0} \ln(\frac{x+1}{x}) = \lim\limits_{x \to 0} ln(\frac{1}{x}+1)$

$= +\infty$ car $\lim\limits_{x \to 0} (1 + \frac{1}{x}) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} lnx = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{lnx}{1-x^2} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{-lnx}{(x-1)(x+1)}$

$= \lim\limits_{x \to 1} \frac{-1}{x+1} (\frac{lnx}{x-1})$

$= -\frac{1}{2}$ car $\lim\limits_{x \to 1} \frac{-1}{x+1} = -\frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x \to 1} \frac{lnx}{x-1} = 1$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x}\ln x = \lim\limits_{x \to 0} x^{\frac{1}{2}}\ln x = 0$

Dérivée d'une fonction comportant des logarithmes.

Exercice 12

1. B ; 2. B ; 3. C

Exercice 13

a) $f'(x) = \frac{2}{2x-4}$; b) $g'(x) = \frac{2x}{x^2}$; c) $h'(x) = \frac{2x-2}{X^2-2x+4}$

Primitives d'une fonction du type $\frac{u'}{u}$

Exercice 14

a) $F(x)= \ln(x-4) +c$; $c\in \mathbb{R}$
b) $F(x)= \frac{1}{3}\ln (x^3 -1) +c$; $c\in \mathbb{R}$
c) $F(x)= \frac{1}{2}(\ln x)^2+c$; $c\in \mathbb{R}$
d) $F(x)= \frac{1}{3}\ln(-3x-1)+5\ln(-x+2)+c$; $c\in \mathbb{R}$

Exercice 15

1. C ; 2. B ; 3. B

Définition et propriété de la fonction logarithme de base a

Exercice 16

1. V ; 2. F ; 3. F ; 4. F ; 5. V ; 6. V

Exercice 17

a) $log_2(4\times \frac{1}{2})= log_2(2)$
b) $log_3(\frac{9}{27})= log_3 (\frac{1}{3})$
c) $log_4(5\times 8)= log_4(40)$

✓ **Exercices de renforcement /Approfondissement**

Exercice 18

$\ln(\sqrt{3} +1) + \ln(\sqrt{3} -1) = \ln[(\sqrt{3} +1) (\sqrt{3}-1)]$
$= \ln(3-1)$
$= \ln 2$

a) $\ln(2+\sqrt{3}) +\ln(2- \sqrt{3}) = \ln[(2+\sqrt{3}) (2- \sqrt{3})]$
$= \ln(4-3)$
$= \ln 1$
$= 0$

b) $\ln 2+\ln(2+\sqrt{2}) +\ln[(2+\sqrt{2+\sqrt{2}}) (2- \sqrt{2+\sqrt{2}})] = \ln 2+\ln(2+\sqrt{2})+\ln(4- 2-\sqrt{2})$
$= \ln 2+\ln(2+\sqrt{2})+\ln(2- \sqrt{2})$
$= \ln 2+\ln(4-2)$
$= \ln 2+\ln 2$
$= 2\ln 2$

Exercice 19

1) $\ln(\frac{1}{e}) = -\ln e = -1$; $\ln(\sqrt{e}) = \frac{1}{2}\ln e = \frac{1}{2}$; $\ln(e\sqrt{e}) = \ln e + \ln(\sqrt{e}) = \frac{3}{2}$;
   $\ln(\frac{\sqrt{e}}{e}) = \ln(\sqrt{e}) - \ln e = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$
2) On a : $\ln(e^3) - \ln(e^2) = 3\ln e - 2\ln e = 3 - 2 = 1$
   $5\ln(\frac{1}{e}) + 4\ln(e\sqrt{e}) = -5 + 4\times\frac{3}{2} = 1$

Exercice 20

1.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x\ln x}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{1+\frac{1}{x}} = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ et

$\lim\limits_{x\to+\infty} (1+\frac{1}{x}) = 1$

b) On a : $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \frac{\ln(\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}} = \frac{2\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = 0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

c) On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(1+\frac{1}{x}) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = 1$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

d) On a : $f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} = \frac{\ln(x^2)+\ln(1+\frac{1}{x^2})}{x^2} = \frac{\ln(x^2)}{x^2} + \frac{\ln(1+\frac{1}{x^2})}{x^2} = \frac{\ln(x^2)}{x^2} + \frac{1}{x^2}\ln(1+\frac{1}{x^2})$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

2. a) $f(x) = \frac{\ln x - 2}{\ln x + 1} = \frac{1-\frac{2}{\ln x}}{1+\frac{1}{\ln x}}$ donc $\lim\limits_{x\to0} f(x) = 1$ car $\lim\limits_{x\to0} \frac{1}{\ln x} = 0$

b) $f(x) = x\ln(\frac{x+1}{x}) = x\ln(x+1) - x\ln x$ donc $\lim\limits_{x\to0} f(x) = 0$

c) $\forall x > 0$, $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{x}\times\frac{\ln(1+x)}{x}$; comme $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ alors $\lim\limits_{x\to0} f(x) = +\infty$ **(Dans l'énoncé préciser pour ce cas que $x > 0$)**

Exercice 21

1. $(x+1)(2x^2-5x+2) = 2x^3-3x^2-3x+2$
2. a) Posons $X = \ln x$
   On a: $2X^3-3X^2-3X+2 = 0 \Leftrightarrow (X+1)(2X^2-5X+2) = 0$
   $\Leftrightarrow X = -1$ ou $2X^2-5X+2 = 0$
   $\Leftrightarrow X = -1$ ou $X = 1$ ou $X = 4$

$\Leftrightarrow$ x= e^{-1} ou x = e ou x = e^4

Donc S = {e^{-1} ; e ;e^4}

b) (I) : ln(3x-2) –ln(2x-3) ≤ 2lnx $\Leftrightarrow$ 2x^3-3x²-3x+2 ≥ 0

$\Leftrightarrow$ x∈]-1 ; 1]∪[4 ;+∞[

Donc S =]-1 ; 1]∪[4 ;+∞[

Exercice 22

a) Ensemble de validité : $V =]0; +\infty[\times]0; +\infty[$

Posons : X = lnx et Y = lny , on a : $\begin{cases} -X + 2Y = 4 \\ 3X + Y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = -2 \\ Y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = e^{-2} \\ y = e \end{cases}$

b) On obtient le système : $\begin{cases} x + y = 1 \\ xy = -2 \end{cases}$ d'où x et y s'ils existent sont solutions de l'équation :

X²-X-2 = 0 $\Leftrightarrow$ X = 2 ou X = - 1 donc les couples solutions sont : (2 ;-1) et (-1 ; 2).

c) Ensemble de validité : $V =]0; +\infty[\times]0; +\infty[$

On pose : X = lnx et Y = lny ; on obtient le système : $\begin{cases} XY = -\frac{3}{2} \\ X - Y = \frac{7}{2} \end{cases}$ d'où X = $\frac{1}{2}$ et Y = -3 ou X = 3 et Y = - $\frac{1}{2}$ donc les couples solutions sont : ($e^{\frac{1}{2}}$;e^{-3}) et (e^3 ;$e^{-\frac{1}{2}}$).

Exercice 23

a)

- Soit V l'ensemble de validité :
  x∈V $\Leftrightarrow$ x-2 >0
  $\Leftrightarrow$ x >2 donc V =]2 ;+∞[
- Résolution
  Soit x un élément de V ; on a :
  (x-2) ln(x-2) = 0 $\Leftrightarrow$ x-2 = 0 ou ln(x-2) = 0 = ln1
  $\Leftrightarrow$ x = 2 ou x = 3
  Comme 2 ∉V et 3 ∈ V donc S = {3}

b)

- Soit V l'ensemble de validité :
  x∈V $\Leftrightarrow$ x+2 > 0 et x-2 > 0
  $\Leftrightarrow$ x > -2 et x > 2 donc V =] 2 ; + ∞[
- Résolution
  Soit x un élément de V ; on a :
  ln(x+2)+ln(x-2) = ln(45) $\Leftrightarrow$ln[(x+2)(x-2)] = ln(45)
  $\Leftrightarrow$ x²- 4 = 45

$\Leftrightarrow x^2 - 49 = 0$

$\Leftrightarrow x = 7$ ou $x = -7$

Comme $7 \in V$ et $-7 \notin V$ donc $S = \{7\}$

c)

- Soit V l'ensemble de validité :

$x \in V \Leftrightarrow x+4 > 0$ et $x-2 > 0$ et $5x-4 > 0$

$\Leftrightarrow x > -4$ et $x > 2$ et $x > \frac{4}{5}$ donc $V =]\frac{4}{5} ; +\infty[$

- Résolution

Soit x un élément de V ; on a :

$\ln(x+4) + \ln(x-2) = \ln(5x-4) \Leftrightarrow \ln[(x+4)(x-2)] = \ln(5x-4)$

$\Leftrightarrow (x+4)(x-2) = 5x-4$

$\Leftrightarrow x^2-3x-4 = 0$

$\Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 4$

Comme $-1 \notin V$ et $4 \in V$ donc $S = \{4\}$

d)

- Soit V l'ensemble de validité :

$x \in V \Leftrightarrow x+1 \# 0$ et $x+5 \# 0$

$\Leftrightarrow x \# -1$ et $x \# -5$ donc $V = \mathbb{R} \setminus \{-1 ; -5\}$

- Résolution

Soit x un élément de V ; on a :

$\ln(|x+1|) + \ln(|x+5|) = \ln 15 \Leftrightarrow \ln(|(x+1)(x+5)| = \ln 15$

$\Leftrightarrow |(x+1)(x+5)| = 15 = |15|$

$\Leftrightarrow (x+1)(x+5) = 15$ ou $(x+1)(x+5) = -15$

$S = \{-3-\sqrt{19} ; -3+\sqrt{19}\}$

Exercice 24

a)

- Soit V l'ensemble de validité :

$x \in V \Leftrightarrow 2-3x > 0$

$\Leftrightarrow x < \frac{2}{3}$ donc $V =]-\infty ; \frac{2}{3}[$

- Résolution

Soit x un élément de V ; on a :

$\ln(2-3x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(2-3x) \geq \ln 1$

$\Leftrightarrow 2-3x \geq 1$

$\Leftrightarrow x \leq \frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow x \in]-\infty; \frac{1}{3}]$

$S = V \cap \in]-\infty; \frac{1}{3}] =]-\infty; \frac{1}{3}]$

a)

- Soit V l'ensemble de validité :

$x \in V \Leftrightarrow 2x-e > 0$

$\Leftrightarrow x > \frac{e}{2}$ donc $V =]\frac{e}{2}; +\infty[$

- Résolution

Soit x un élément de V ; on a :

$\ln(2x-e) \geq 1 \Leftrightarrow \ln(2x-e) \geq \ln e$

$\Leftrightarrow 2x-e \geq e$

$\Leftrightarrow x \geq e$ donc $x \in [e; +\infty[$

$S = V \cap [e; +\infty[= [e; +\infty[$

c)

- Soit V l'ensemble de validité :

$x \in V \Leftrightarrow 2-x > 0$ et $x+4 > 0$ et $3x+2 > 0$

$\Leftrightarrow x < 2$ et $x > -4$ et $x > -\frac{2}{3}$

Donc $V =]-\frac{2}{3}; 2[$

- Résolution

Soit x un élément de V ; on a :

$\ln(2-x)+\ln(x+4) > \ln(3x+2) \Leftrightarrow \ln[(2-x)(x+4)] > \ln(3x+2)$

$\Leftrightarrow (2-x)(x+4) > 3x+2$

$\Leftrightarrow x^2+5x-5 < 0$

$\Leftrightarrow x \in]-6; 1[$

$S = V \cap]-6; 1[=]-\frac{2}{3}; 1[$

d)

- Soit V l'ensemble de validité :

$x \in V \Leftrightarrow x+2 > 0$ et $x^2-4 > 0$

$\Leftrightarrow x > -2$ et $x < -2$ ou $x > 2$

Donc $V =]2; +\infty[$

- Résolution

Soit x un élément de V ; on a :

$\ln(x+2) \leq \ln(x^2-4) \Leftrightarrow x+2 \leq x^2-4$

$\Leftrightarrow x \in]-\infty; -2] \cup [3; +\infty[$

$S = V \cap]-\infty; -2] \cup [3; +\infty[=]2; +\infty[$

Exercice 25

a) f'(x) = $\frac{-1+\ln(2x)}{x^2}$
b) f'(x) = - $\frac{1}{x}(\frac{1}{2}+\sqrt{x})$
c) f'(x) = - 1-ln(1-x)
d) f'(x)= 2x+$\frac{1+lnx}{x^2}$
e) f'(x) = $\frac{lnx(lnx-2)}{x^2}$

Exercice 26

a)

- Les primitives de f sur]$\frac{3}{2}$;+ ∞[sont : F(x) = - $\frac{5}{2}$ ln (2x-3) +c ; c ∈ ℝ
- on a : F(2) = -3 ⟺ - $\frac{5}{2}$ln1+c = -3
  ⟺ c = -3

Donc F(x) = - $\frac{5}{2}$ ln (2x-3)-3

b)

- Les primitives de f sur] 1 ; + ∞[sont : F(x) = ln (lnx)) +c ; c ∈ ℝ
- On a : F (e^2) = 2ln2 ⟺ ln (lne^2)) +c = 2ln2
  ⟺ ln2+c = 2ln2 d'où c = ln2

Donc F(x) = = ln (lnx)) +ln2

c)

- Les primitives de f sur]0 ;+∞[sont : F(x) = $\frac{1}{2}$(lnx)²+c ; ; c ∈ ℝ
  - On a : F(e)= $\frac{3}{2}$ ⟺ $\frac{1}{2}$(lne)²+c = $\frac{3}{2}$
    ⟺ c = 1

  Donc F(x) = $\frac{1}{2}$(lnx)²+1

Exercice 27

1. On a : a = 1 ; b = 3 et c = 8
2. On a : f(x) = 1+$\frac{3}{1-3x}$ - $\frac{8}{1-x}$ d'où les primitives sur =] 1 ; +∞[sont les fonctions F : x⟼ x – 3ln (3x-1) +8ln(x-1) +k ; k étant une constante.
   F(2) = $\frac{\ln(25)}{3}$ alors 2-3ln5+k = $\frac{\ln(25)}{3}$
   k = -2+3ln5+$\frac{2ln5}{3}$
   k = -2+$\frac{11ln5}{3}$
   Donc F(x) = x-3ln (3x-1) +8ln(x-1)-2+$\frac{11ln5}{3}$

Exercice 28

1. x$\in D_f \Leftrightarrow$ x $>$ 0 et 1-x $\neq$ 0

   $\Leftrightarrow$ x $>$ 0 et x $\neq$ 1

   Donc D_f =] 0 ; 1[$\cup$] 1 ; + ∞[

2. On a :

- 1 $\notin D_f$
- $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \frac{xlnx}{1-x}$

  $= \lim\limits_{x \to 1} -x \frac{lnx}{x-1}$

  = -1 car $\lim\limits_{x \to 1} -x$ = - 1 et $\lim\limits_{x \to 1} \frac{lnx}{x-1}$= 1

  Comme - 1$\in \mathbb{R}$ alors on peut prolonger f par continuité en 1.

3. Notons g ce prolongement ; g est définie par : $\begin{cases} g(x) = f(x); x \notin D_f \\ g(1) = -1 \end{cases}$

   On a : la limite à gauche en 1 de $\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$ est - ∞ et la limite à droite en 1 de $\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$ est + ∞ donc g n'est pas dérivable en 1.

4. Graphiquement, la courbe représentative de g admet au point d'abscisse 1 une tangente verticale.

Exercice 29

1) On a: f (1+x) +f (1-x) = $\frac{-1-x-ln|x|}{x}$ +$\frac{1-x+ln|x|}{x}$ = - 2 = 2(-1).
2) On conclut que la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé admet un centre de symétrie le point A (1 ;-1).

Exercice 30

Désignons par u_0 = 500000 le capital initial et u_n le capital au bout de n années ; n $\geq$ 1. On a : u_n = 500.000 $(1{,}06)^n$

Pour acheter le terrain, il faut que : $u_n \geq$ 1250.000 soit 500.000 $(1{,}06)^n \geq$ 1250.000 d'où n $\geq \frac{\ln(2{,}5)}{\ln(1{,}06)}$ soit n $\geq$15,793 donc n =16

Il pourra acheter ce terrain au bout de 16 années.

Exercice 31

1. a) on a: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{h(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{2}$xlnx-$\frac{3}{4}$x = 0

c) h est dérivable en 0 et h'(0) = 0.

d) $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{2}$x²lnx-$\frac{3}{4}$x²= 0 = h(0) donc h est continue en 0.

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{2}$ xlnx- $\frac{3}{4}$x = $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{2}$x (lnx-$\frac{3}{4}$)= +$\infty$

f) Interprétation graphique :

- La courbe $(\mathcal{C})$ admet au point d'abscisse 0 une tangente horizontale
- La courbe $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique de direction (OJ) en $+\infty$

2. a) h est dérivable sur l'intervalle] 0 ; + ∞[et h'(x) = x (lnx- 1)

a) h est décroissante sur [0 ; e] et h est croissante sur [e ; +∞[

b) Tableau de variation

x	0		e		$+\infty$
h'(x)	‖	-	0	+	
h(x)	‖ 0	↘	$\frac{-1}{e^2}$	↗	$+\infty$

3. On résout l'équation h(x) = 0 d'où x = 0 ou x = $e^{\frac{3}{4}}$ donc il y a deux points d'intersection O (0 ; 0) et K ($e^{\frac{3}{4}}$; 0)

4. Equation de la tangente (T) :

(T) : y = - x+$\frac{1}{4}$

5. Construction de (T) et $(\mathcal{C})$.

Exercice 32 (Dans l'énoncé le numéro de la question 1. N'est pas mentionné)

1. On a : S(en décibels) = 10log(10000)= 40
2. On a : I = I_0ln (10^{10}) = 10^{-12}ln (10^{10})
   = 10^{-11}ln10 =23. 10^{-12}Watt/m²
3. On a: I = 10^{-13} ln10 = 23.10^{-14} Watt/m²

Exercice 33

1. Calculons l'énergie E libérée au foyer de chaque séisme :

- Séisme de magnitude 3 :
  On a : logE = 11,4+1,5(3) =11,4+4,5=15,9 donc E=$e^{15,9ln10}$
- Séisme de magnitude 7 :
  On a : logE= 11,4+1,5(7)= 11,4+10,5 =21,9 donc E= $e^{21,9ln10}$
  Comme $e^{21,9ln10} > e^{15,9ln10}$ donc un séisme de 7 est plus puissante qu'un séisme de magnitude 3.

2. L'énergie E libérée par un séisme de magnitude 4 est telle que : logE=17,4.

Désignons par E’ et M respectivement l’énergie libérée et la magnitude du séisme de Skopje en 1963 ; on a : E’≥ 1000 E ⟺ logE’ ≥ log (1000 E)

⟺ 11,4+1,5M ≥ log1000+logE

⟺ 11,4+1,5M ≥ 3+17,4

⟺ 11,4+1,5M ≥ 20,4

⟺ M ≥ 6

Donc la magnitude du séisme de Skopje en 1963est au moins 6.

3. Soit E_1 , E_2 et E_3 les énergies libérées respectives des séismes de Skopje, de Los Angeles et de Lisbonne. On a :

$E_1 = e^{20,4ln10}$; $E_2 = e^{22,65ln10}$ et $E_3 = e^{24,9}$

On a : $E_1 < E_2 < E_3$

Exercice 34

Dans tout le problème, on se place dans un repère orthonormé (O, I J). L’unité graphique est 2cm.

Partie I : Etude d’une fonction g.

Soit g la fonction définie sur]0 ; + ∞[par : g(x)= xlnx-x+1 et (C) sa courbe représentative dans le plan muni du repère (O, I, J).

1. Etude des limites de g en 0 et +∞ .

$$\lim_{x\to 0} g(x) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to +\infty} g(x) = \lim_{x\to +\infty} x\left(lnx - 1 + \frac{1}{x}\right) = +\infty$$

On suppose que g est dérivable sur]0 ; + ∞[.

2.

a)Etudie les variations de g.

- Dérivée de g
  $\forall x \in]0; +\infty[, g'(x) = lnx$
- $\forall x \in]0; 1[, g'(x) < 0$ donc g est strictement décroissante sur $]0; 1[$
  $\forall x \in]1; +\infty[, g'(x) > 0$ donc g est strictement croissante sur $]1; +\infty[$

b) Déduis –en le signe de g(x) en fonction de x.

0 est le mininum de g sur $]0; +\infty[$ donc $\forall x \in]0; +\infty[, g(x) \geq 0$

Partie II : Etude d’une fonction f.

Soit la fonction f définie sur]1 ; + ∞[par : f(x) = $\frac{1}{x-1}$ln x

1. Etudie les limites de f en +∞ et en 1 .

- $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{lnx - ln1}{x-1} = ln'(x) = 1$
- $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{lnx}{x-1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{x-1} \times \frac{lnx}{x} = 0$

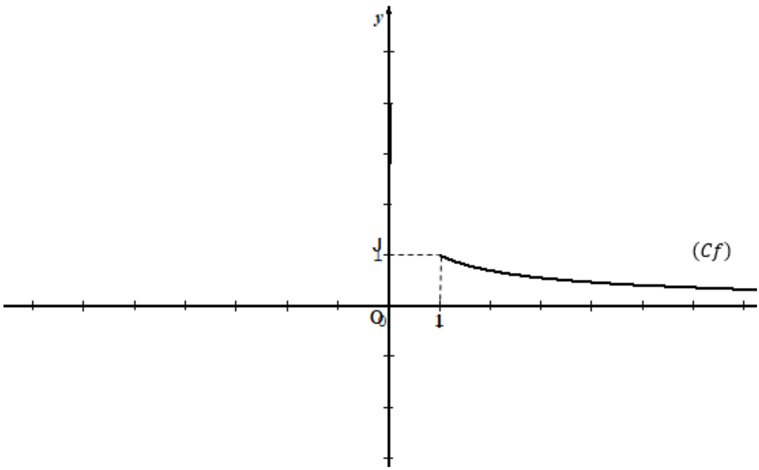
2. Dresse le tableau de variation de f.

$\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) = \frac{-g(x)}{x(x-1)^2}$

Donc $\forall x \in]0; +\infty[, f'(x) \leq 0$

x	1	$+\infty$
$f'(x)$		$-$
$f(x)$		1 ↘ 0

3. Trace la courbe représentative (C_f) de f dans le repère (O,I,J) .



Partie III : Etude de l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$

1. Démontrons que l'équation $f(x)=\frac{1}{2}$ admet une unique solution notée α et que $3,5< \alpha <3,6$.

f est continue et strictement décroissante sur $]1;+\infty[$ et $f(]1;+\infty[)=]0;1[$

Or $\frac{1}{2} \in]0;1[$ donc l'équation $f(x)=\frac{1}{2}$ admet une unique solution α dans $]1;+\infty[$.

De plus $f(3,6) < \frac{1}{2} < f(3,6) \Longrightarrow f(3,6) < f(\alpha) < f(3,6)$ donc $3,5< \alpha <3,6$.

2. Soit la fonction h définie sur$]1\,;+\infty[$par : $h(x) = \ln x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$
   a)Démontrons que α est solution de l'équation : h(x) = x.

On a : $h(x)=x \Leftrightarrow lnx+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}=x \Leftrightarrow lnx=\frac{1}{2}(x-1) \Leftrightarrow \frac{lnx}{x-1}=\frac{1}{2}$

$h(x)=x \Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{2}$ donc α est solution de l'équation : h(x) = x.

b) Etudie le sens de variation de h.

$\forall x \in]1;+\infty[, h'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{2}$

$\forall x \in]1;+\infty[, h'(x)>0$ donc h est strictement croissante sur $]1;+\infty[$.

c)On pose I= [3 ; 4].

Démontrons que pour tout x élément de I, on a : h(x)∈I et $|h'(x)| \leq \frac{5}{6}$;

- $h([3;4])=[h(3);h(4)]=\left[ln3+2; ln4+\frac{5}{2}\right]$ or $\left[ln3+2; ln4+\frac{5}{2}\right] \subset [3;4]$ donc $h([3;4]) \subset [3;4]$
  On en déduit que : $\forall x \in I, h(x) \in I$
- On a : $|h'(x)|=\left|\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right|$
  $\forall x \in [3;4], 3 \leq x \leq 4$ donc $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{3}$ d'où $\frac{3}{4} \leq h'(x) \leq \frac{5}{6}$
  Donc : $\forall x \in I, |h'(x)| \leq \frac{5}{6}$

3. On définit pour tout nombre entier naturel n , la suite (u_n) par : $\begin{cases} u_{0=3} \\ u_{n+1=h(u_n)} \end{cases}$
   Justifions successivement les trois propriétés suivantes :
   a)Pour tout nombre entier naturel n , $|u_{n+1}-\alpha| \leq \frac{5}{6}|u_n-\alpha|$.

On sait que : $\forall x \in I, |h'(x)| \leq \frac{5}{6}$, $\alpha \in I$ et pour tout entier naturel n , $u_n \in I$. En appliquant l'inégalité des accroissements finis, on a :

$|h(u_n)-h(\alpha)| \leq \frac{5}{6}|u_n-\alpha|$ or $h(u_n)=u_{n+1}\ et\ h(\alpha)=\alpha$

Donc $|u_{n+1}-\alpha| \leq \frac{5}{6}|u_n-\alpha|$

b)Pour tout entier naturel n , $|u_n-\alpha| \leq (\frac{5}{6})^n$.

Pour tout entier naturel n, $|u_{n+1}-\alpha| \leq \frac{5}{6}|u_n-\alpha|$

Donc $|u_1 - \alpha| \leq \frac{5}{6}|u_0 - \alpha|$; $|u_2 - \alpha| \leq \frac{5}{6}|u_1 - \alpha|$; …… ; $|u_n - \alpha| \leq \frac{5}{6}|u_{n-1} - \alpha|$

En multipliant membre à membre ces inégalités on obtient :

$|u_n - \alpha| \leq (\frac{5}{6})^n|u_0 - \alpha|$ or $-0{,}6 < u_0 - \alpha < -0{,}5 \Longrightarrow |u_0 - \alpha| < 1$

Donc Pour tout entier naturel n , $|u_n - \alpha| \leq (\frac{5}{6})^n$.

c)La suite (u_n) converge vers .

Pour tout entier naturel n , $|u_n - \alpha| \leq (\frac{5}{6})^n$.

Or $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n = 0$ donc $\lim_{n \to +\infty} u_n = \alpha$

4. Déterminons un nombre entier naturel p , tel qu'à partir des majorations précédentes , on puisse déduire que u_p est une valeur approchée de α à 10^{-3} .

On a : $|u_p - \alpha| \leq (\frac{5}{6})^p \leq 10^{-3} \Leftrightarrow pln\left(\frac{5}{6}\right) \leq ln(10^{-3})$

$$\Leftrightarrow p \geq \frac{ln(10^{-3})}{ln\left(\frac{5}{6}\right)}$$

$$\Leftrightarrow p \geq \frac{ln(10^{-3})}{ln\left(\frac{5}{6}\right)}$$

Indique une valeur décimale approchée à 10^{-3} près de .

✓ **Situations complexes**

Exercice 35

Lors d'un festival de musique organisé à l'intention des meilleurs élèves d'une classe de terminale, les organisateurs utilisent une sono qui donne 110 décibels au premier rang des invités à 10 m. Estimant le niveau sonore trop élevé, les riverains situés à 500 m du lieu du spectacle ne souhaitent pas recevoir un niveau sonore supérieur à 70 décibels.

Monsieur Konan, organisateur principal du spectacle souhaite vérifier si le niveau sonore perçu par les riverains est conforme à leur vœu. Il se tourne toi.

A l'aide d'une production argumentée basée sur tes connaissances mathématiques, réponds à la préoccupation de Monsieur Konan.

NB : le niveau sonore exprimé en décibels et l'intensité sonore exprimée en Watt/m² sont liés par la relation :

S (en décibels) = 10log $(\frac{I}{I_0})$ où I désigne l'intensité sonore et $I_0 = 10^{-12}$Watt/m²

L'intensité sonore est inversement proportionnelle au carré de la distance.

Corrigé

Introduction :

Pour résoudre ce problème, je vais utiliser la proportionnalité et logarithme décimal ;

Je vais :

- Calculer le coefficient de proportionnalité
- Calculer l'intensité sonore I
- Déterminer la valeur de S
- Comparer S et 70

Développement :

- **Calcul du coefficient de proportionnalité :**

On a la formule : $I = \frac{1}{d^2} \times k$ où k est le coefficient de proportionnalité et d est la distance.
Ainsi pour d = 100 m et I = 110 décibels, on obtient $k = I \times d^2$ d'où $k = 110 \times 100 = 11000$.

- **Calcul de l'intensité sonore I :**

Pour d = 500 m, on a: $I = \frac{1}{500^2} \times 11000 = 0,044$ W/m² alors $S = 10 \log\left(\frac{0,044}{10^{-12}}\right)$

- **Détermination de la valeur de S :**

On a : alors $S = 10 \log\left(\frac{0,044}{10^{-12}}\right)$ donc $S = 10 \log(44 \times 10^9) = 106$ décibels

- **Comparaison de S et 70 :**
  On a : $106 > 70$

Conclusion

Comme $106 > 70$ alors le niveau sonore perçu par les riverains n'est pas conforme à leur vœu ; donc M. Konan doit revoir son installation.

Exercice 36

Dans le cadre de la lutte contre le réchauffement climatique, un pays décide de réduire de 8% chaque année sa consommation de charbon estimé en 2019 à 10.000 tonnes.

Lors d'une conférence de presse, le Ministre des Eaux et Forets estime que cette lutte sera considérée comme gagnée si le pays réduit avant l'année 2030, sa consommation de charbon à moins de 2000 tonnes.

Ayant assisté à cette conférence de presse, ton papa sceptique, te demande si oui ou non, le pays gagnera la lutte contre le réchauffement climatique.

Donne ton avis en le motivant grâce à tes connaissances mathématiques.

Corrigé

Introduction :

Pour résoudre ce problème, je vais utiliser : les suites géométriques et le logarithme népérien ;

Je vais :

- **Déterminer la consommation de charbon en 2019 +n ;**
- **Comparer cette consommation à 2000 ;**

Développement :

- **Détermination de la consommation de charbon en 2019+n :**

On pose u_0 = 10000 tonnes la consommation de charbon en 2019.

Notons u_n la consommation de charbon en 2019+n :

On a : $u_1 = u_0 - 0{,}08u_0$ d'où $u_1 = 0{,}92\, u_0$

$u_2 = (0{,}92)^2\, u_0$

Ainsi de suite, on obtient : $u_n = 10000(0{,}92)^n$

- **Comparons cette consommation à 2000 :**

On a : $10000(0{,}92)^n < 2000 \iff n > \frac{\ln(0{,}2)}{\ln(0{,}92)}$

$\iff n > 19{,}320$

Donc n = 20 ; ce qui correspondant en 2039.

Conclusion

La consommation de charbon sera à moins de 2000 tonnes en 2039. Par suite, le pays ne gagnera pas la lutte contre le réchauffement climatique en 2030.

Exercice 37

M. Kouassi a acheté une voiture neuve à 8.000.000 de francs CFA le premier Janvier 2020. Le concessionnaire affirme que, compte tenu des innovations technologiques, cette voiture perd 8%de sa valeur par an.

M. Kouassi a décidé de donner sa voiture à sa fille Henriette

Lorsqu'elle vaudra moins que le quart de son prix initial. Henriette, étant impatiente, se demande en quelle année la voiture lui reviendra. N'ayant pas la solution, elle te pose son problème.

A l'aide d'une production argumentée basée sur tes connaissances mathématiques, réponds à la préoccupation de ta camarade Henriette.

Corrigé

Introduction :

Pour résoudre ce problème, je vais utiliser : les suites géométriques et le logarithme népérien.

Pour ce faire, je vais :

- Déterminer le prix de la voiture en 2020+n ;
- Comparer ce prix au quart de son prix initial ;.

Développement :

- **Détermination du prix de la voilure en 2020+n :**

On pose u_0 = 8000000 francs CFA le prix de la voiture en 2020 ;

Notons u_n le prix de la voiture en 2020 + n

On a : $u_n = 8000000(0{,}92)^n$

- **Comparaison du prix au quart de son prix initial :**
  d'où $u_n < \frac{1}{4}(8000000) \Leftrightarrow 8000000(0{,}92)^n < 2000000 \Leftrightarrow 4(0{,}92)^n < 1$

$$\Leftrightarrow (0{,}92)^n < 0{,}25$$

$$\Leftrightarrow n\ln(0{,}92) < \ln(0{,}25)$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{\ln(0{,}25)}{\ln(0{,}92)}$$

$$\Leftrightarrow n > 16{,}6223$$

Donc on prend n = 17

Conclusion

La voiture lui reviendra en 2020+17 =20374DS6&dé x²éx6/

6 NOMBRES COMPLEXES

I. LA SITUATION D'APPRENTISSAGE

- Apres la lecture de la situation d'apprentissage (par le professeur, par un élève et une lecture silencieuse des élèves), l'enseignant pourra s'assurer que les élèves ont bien compris le texte.

- Il pourra ensuite faire dégager les constituants de la situation à travers une ou des questions du type :

Constituants de la situation	Exemples de questions possibles	Réponses possibles des élèves
Contexte	Quand se déroule la situation ?	Après avoir participé à un concours de Mathématiques
Circonstances	-Qu'est ce que l'élève veut savoir? -Que pensent certains élèves ?	-il veut déterminer un nombre dont le carré est égal à -5. -Ils estiment qu'un tel nombre n'existe pas.
Tâches	-Que font les élèves ?	-Ils exposent cette préoccupation au professeur de mathématiques.

Le professeur utilisera la tâche énoncée par ses élèves pour faire la synthèse de la situation et présentera le plan de la leçon. Il devra dans la mesure du possible se référer à la situation durant tout le déroulement de la leçon.

II. DECOUVERTE DES HABILETES

<u>ACTIVITE 1 :</u> l'ensemble des nombres complexes, Forme algébrique d'un nombre complexe

- L'objectif de cette activité est de connaître l'ensemble des nombres complexes et de déterminer la forme algébrique d'un nombre complexe.
- Réponses aux questions de l'activité.

1- Je justifie que le problème peut se traduire par l'équation $x\times(10-x)=40$

Soit x et y deux nombres tels que leur somme soit égale à 10 et leur produit à 40, on a :
$x+y=10$ et $x\times y=40$ donc $y=10-x$ d'où $x\times(10-x)=40$

2- **Je résous dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x\times(10-x)=40$.**

$x\times(10-x)=40 \Leftrightarrow -x^2-10x-40=0$, $\Delta=100-160=-60$ donc $\Delta<0$ d'où $S_{\mathbb{R}}=\varnothing$.

3- Je montre que les quantités $5+\sqrt{-15}$ et $5-\sqrt{-15}$ de Cartan vérifient l'équation $x\times(10-x)=40$

Pour $x=5+\sqrt{-15}$ on a $\left(5+\sqrt{-15}\right)\left(10-\left(5+\sqrt{-15}\right)\right)=\left(5+\sqrt{-15}\right)\left(5-\sqrt{-15}\right)=25-(-15)=40$

Pour $x=5-\sqrt{-15}$ on a $\left(5-\sqrt{-15}\right)\left(10-\left(5-\sqrt{-15}\right)\right)=\left(5-\sqrt{-15}\right)\left(5+\sqrt{-15}\right)=25-(-15)=40$

Donc les quantités $5+\sqrt{-15}$ et $5-\sqrt{-15}$ de Cartan vérifient l'équation $x\times(10-x)=40$

4- **a) Je démontre que i est solution de l'équation $x^2+1=0$.**
Pour $x=$ i on a $i^2+1=-1+1=0$ donc i est solution de l'équation$x^2+1=0$.

a) Je détermine la valeur de i^4.
$i^4=(i^2)^2=(-1)^2=1$ car $i^2=-1$. Donc $i^4=1$.

5- Je détermine un nombre qui:

a) Elevé au carré est égal à – 4 : ce nombre est 2i.

b) Elevé au carré est égal à – 2 : ce nombre est $i\sqrt{2}$.

c) Elevé au carré est égal à – 15 : ce nombre est $i\sqrt{15}$.

6- **Les solutions proposées par Cardan** :

$5+\sqrt{-15}=5+\sqrt{i^2 15}=5+i\sqrt{15}$ et $5-\sqrt{-15}=5-\sqrt{i^2 15}=5-i\sqrt{15}$.

<u>Exercice 1</u>

1-

Nombres	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$
3	X	X	X	X	X	X
-4		X	X	X	X	X
2.25			X	X	X	X
-6,1258			X	X	X	X
$\frac{2}{3}$				X	X	X
-6,666…				X	X	X
3i						X
$\sqrt{3}$					X	X
i$\sqrt{3}$						X
1+3i						X
$\frac{2}{3}$i						X

Exercice 2

Pour z = 2i, Re(z) = 0 et Im(z) = 2.
Pour z = -10, Re(z) = -10 et Im(z) = 0.
Pour z = 1 + 3i, Re(z) = 1 et Im(z) = 3.
Pour z = 0 , Re(z) = 0 et Im(z) = 0.
Pour z = - 5i, Re(z) = 0 et Im(z) = - 5.

Activité 2 Egalité de deux nombres complexes

- L'objectif de cette activité est de connaître la propriété relative à l'égalité de deux nombres complexes.
- Réponses aux questions de l'activité.

Justifions que : $\boldsymbol{z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}}$

Si $a = a'$ et $b=b'$ alors $z = a + ib = a' + ib' = z'$.
Réciproquement, si z = z', alors $a + ib = a' + ib'$. Donc $a - a' = i(b - b')$.
Supposons par l'absurde que $b \neq b'$.

Alors on a : $\dfrac{a-a'}{b-b'} = i$

Or a, a', b, b' sont des réels, donc $\frac{a-a'}{b-b'} \in \mathbb{R}$. Donc $i \in \mathbb{R}$. cela est absurde. Donc $b = b'$.
Par conséquent $a - a' = 0$, soit $a = a'$.

- **Corrigé de l'exercice de fixation**

Exercice 3

Je détermine le nombre réel x tel que $1 + xi = 1 + 2i$

x étant un nombre réel alors on a :

$$1 + xi = 1 + 2i \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 1 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$$

Activité 3 : Opposé d'un nombre complexe

- L'objectif de cette activité est de connaître la propriété relative à l'opposé d'un nombre complexe.
- Réponses aux questions de l'activité

Soit a' et b' deux nombres réels tel que : $z' = a' + ib'$
$z + z' = a + a' + i(b + b')$. Donc $z + z' = 0 \Leftrightarrow a + a' = 0$ et $b + b' = 0$ donc $a' = -a$ et $b' = -b$
Ainsi z' existe et $z' = -a - ib = -z$.

- **Corrigé de l'exercice de fixation**

Exercice 4

L'opposé de :

- - 3i est 3i
- 2+5i est -2 – 5i
- 5 est – 5

Activité 4 : Somme de deux nombres complexes, multiplication de deux nombres complexes.

- L'objectif de cette activité est de connaître les propriétés relatives à la somme, au produit de deux nombres complexes.
- Réponses aux questions de l'activité

1- Donnons $\boldsymbol{Re(z), Im(z), Re(z'), Im(z')}$

$$Re(z) = a$$
$$Im(z) = b$$
$$Re(z') = a'$$
$$Im(z') = b'$$

2- **Calculons $z + z'$ et faisons une conjecture**

$z + z' = a + ib + a' + ib' = a + a' + i(b + b')$

3- **Calculons $z \times z'$ et faisons une conjecture**

$z \times z' = (a + ib)(a' + ib') = a \times a' + a \times ib' + ib \times a' + ib \times ib' = (aa' - b \times b') + i(a \times b' + b \times a')$

$z \times z' = (aa' - b \times b') + i(a \times b' + b \times a')$

- **Corrigé de l'exercice de fixation**

Exercice 5

a) $z_1 + z_2 = (3 - 2i) + (-4 + 5i) = -1 + 3i$
b) $z_1 \times z_2 = (3 - 2i)(-4 + 5i) = -2 + 23i$
c) $3z_1 = 9 - 3i$
d) $z_2^2 = (-4 + 5i)^2 = -9 - 40i$

Activité 5 : Inverse d'un nombre complexe

- L'objectif de cette activité est de connaître la propriété relative à l'inverse d'un nombre complexe.
- Réponses aux questions de l'activité

1 – a) **Je détermine la forme algébrique de (3 + 2i)(3 – 2i)**

$(3 + 2i)(3 - 2i) = 3^2 - (2i)^2 = 9 - (-4) = 13$

Donc $(3 + 2i)(3 - 2i) = 13$

b) **Je détermine la forme algébrique de** $A = \dfrac{1}{3+2i}$

$A = \dfrac{1}{3+2i} = \dfrac{3-2i}{(3+2i)(3-2i)} = \dfrac{3-2i}{13}$ donc A= $\dfrac{3}{13} - \dfrac{2i}{13}$

2-a) Je détermine la forme algébrique de $(a + ib)(a - ib)$

$(a + ib)(a - ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2$

b) Je détermine la forme algébrique de $A = \dfrac{1}{a+ib}$

$$A = \frac{1}{a+ib} = \frac{(a-ib)}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a-ib}{a^2-(ib)^2}$$

$$A = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$$

- **Corrigé de l'exercice de fixation**

Exercice 6

a) **J'écris** $z_1 = \dfrac{2}{3i}$ **sous la forme algébrique**.

$$z_1 = \frac{2}{3i} = \frac{2\times(-3i)}{(3i)\times(-3i)} = \frac{-6i}{9} \Rightarrow z_1 = \frac{-2i}{3}$$

b) **Je résous dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(3 - 2i)z - 2i = i$**

Activité 6 : Puissance entière d'un nombre complexe

- L'objectif de cette activité est de connaître la propriété relative à la puissance entière d'un nombre complexe.
- Réponses aux questions de l'activité

$z^2 = z \times z = (1+2i)(1+2i) = 1 - 4 + 4i = -3 + 4i$

$z^5 = z^4 \times z = (z^2)^2 \times z = (-3+4i)^2 \times (1+2i) = 41 - 38i$

$$\frac{1}{z^2} = \frac{1}{-3+4i} = \frac{-3-4i}{9+16} = \frac{-3}{25} - \frac{4}{25}i$$

- **Corrigé de l'exercice de fixation**

Exercice 7

$$\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 2i\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ donc} \left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 = \left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

D'où $\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5 = \left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$(1+i)^2 = 2i$ et $(1+i)^4 = \left((1+i)^2\right)^2 = (2i)^2 = -4$

Activité 7 : Conjugué d'un nombre complexe

- L'objectif de cette activité est de connaître la définition du conjugué et les propriétés relatives au conjugué d'un nombre complexe.
- Réponses aux questions de l'activité

1- Je détermine la forme algébrique de $z+\bar{z}$, $z-\bar{z}$ et $z\times\bar{z}$

$z+\bar{z} = (a+ib)+(a-ib) = 2a$

$z-\bar{z} = (a+ib)-(a-ib) = 2bi$

$z\times\bar{z} = (a+ib)\times(a-ib) = a^2+b^2$

2- a) Si $z=\bar{z}$ **alors z est un nombre réel.**

b) Si $z=-\bar{z}$ **alors z est imaginaire pure.**

Corrigé de l'exercice de fixation

<u>Exercice</u> 8

$\overline{1-3i} = 1+3i$; $\bar{6} = 6$; $\overline{4i} = -4i$; $\overline{3+5i} = 3-5i$

Activité 8 : Produit nul

- L'objectif de cette activité est de connaître la propriété relative au produit nul de deux nombres complexes.
- Réponses aux questions de l'activité

✓ Je suppose que $z' = 0$ et je montre que $z\times 0 = 0$

$z\times z' = z\times(z'+0)$

$= z\times z' + z\times 0$ donc $z\times 0 = 0$

✓ Réciproquement je suppose que $z\times z' = 0$

- Si $z = 0$ alors nécessairement la propriété est vérifiée quelque soit la valeur de z'.
- Si $z \neq 0$ alors $\frac{1}{z}$ existe et on a $z' = \frac{1}{z}(z\times z') = \frac{1}{z}\times 0 = 0$ donc $z' = 0$

Corrigé de l'exercice de fixation

<u>Exercice</u> 9

(z + 3 – 5i)(3z -5 + i) = 0 ⇔ z + 3 – 5i = 0 ou 3z -5 + i = 0

⇔ z = -3 + 5i ou $z = \frac{5}{3} - \frac{1}{3}i$ donc $S_{\mathbb{C}} = \left\{\frac{5}{3} - \frac{1}{3}i \ ; \ -3+5i\right\}$

Activité 9 :Module d'un nombre complexe

- L'objectif de cette activité est de connaître la définition du module et les propriétés relatives au module d'un nombre complexe.
- Réponses aux questions de l'activité

a) Je calcule $z_1 \times \overline{z_1}$ **et** $z_2 \times \overline{z_2}$

$z_1 \times \overline{z_1} = (2+5i)(2-5i) = 4+25 = 29$

$z_2 \times \overline{z_2} = (-1+2i)(-1-2i) = 1+4 = 5$

b) J'en déduis la valeur de $\sqrt{z_1 \times \overline{z_1}}$ **et** $\sqrt{z_2 \times \overline{z_2}}$

$z_1 \times \overline{z_1} = 29 \Rightarrow \sqrt{z_1 \times \overline{z_1}} = \sqrt{29}$

$z_2 \times \overline{z_2} = 5 \Rightarrow \sqrt{z_2 \times \overline{z_2}} = \sqrt{5}$

c) $z \times \overline{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2$

Corrigé de l'exercice de fixation

Exercice de fixation 10

$|-2+3i| = \sqrt{(-2)^2 + (3)^2} = \sqrt{4+9}$ donc $|-2+3i| = \sqrt{13}$

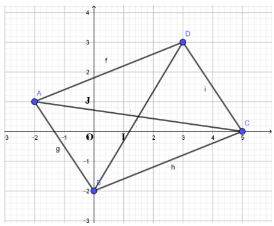
$|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{1+1}$ donc $|1+i| = \sqrt{2}$

$|1-i\sqrt{3}| = \sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3}$ donc $|1-i\sqrt{3}| = 2$

$|-2,5| = 2,5$; $|4,2015| = 4,2015$; $|-2i| = 2$; $|2021i| = 2021$

Activité 10 :Affixe, Point – image, Vecteur-image

- L'objectif de cette activité est de connaître l'affixe, le point-image et le vecteur-image d'un nombre complexe.
- Réponses aux questions de l'activité



On obtient la figure ci-contre.

1- Soit H le milieu de [AC] et K le milieu de [BD].

A le point associé au nombre complexe z_1 = - 2 + i donc A(-2 ;1)

B le point associé au nombre complexe z_2 = -2i donc B(0 ;-2).

C le point associé au nombre complexe z_3 = 5 donc C(5 ;0).

D le point associé au nombre complexe z_4 = 3 + 3i donc D(3 ;3).

H est milieu de [AC] donc $x_H = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{3}{2}$ et $y_H = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{1}{2}$ d'où $H\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$ on en déduit que le nombre complexe associé au point Hest $z_H = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$.

K est milieu de [BD] donc $x_K = \frac{x_B + x_D}{2} = \frac{3}{2}$ et $y_K = \frac{y_B + y_D}{2} = \frac{1}{2}$ d'où $K\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$ on en déduit que le nombre complexe associé au point K est $z_K = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$

2- $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$

3- Nature du quadrilatère ABCD.
Les points H et K ont les mêmes coordonnées. Donc ABCD est un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu donc ABCD est un parallélogramme.

- On peut aussi constater que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, donc ABCD est un parallélogramme.

Corrigé de l'exercice de fixation

Exercice 11

1- Le point - image de 2 – 3i est $M_1(2\,;-3)$
Le point - image de – 2i est $M_2(0\,;-2)$
Le point - image de 4 est $M_2(4\,;\,0)$

2- L'affixe du point A(1 ;-4) est $z_A = 1 - 4i$
L'affixe du point B(-3 ; 2) est $z_B = -3 + 2i$
L'affixe du point C(0 ;-2) est $z_C = -2i$
L'affixe du point D(-5 ; 0) est $z_D = -5$

3- Le vecteur - image de 2 – 3i est $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$

Le vecteur - image de -2i est $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$

Le vecteur - image de 4 est $\vec{w}\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$

4- L'affixe du vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ est z = -2 + i

L'affixe du vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}$ est z = -3

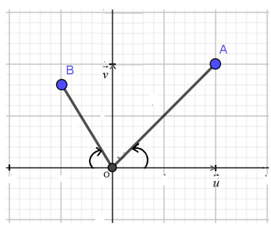
L'affixe du vecteur $\vec{w}\begin{pmatrix}0\\-4\end{pmatrix}$ est z = - 4i

Activité 11 : Argument d'un nombre complexe

- L'objectif de cette activité est de connaître la définition d'un argument d'un nombre complexe non nul.
- Réponses aux questions de l'activité

Soit $\theta = \left(\vec{u};\overrightarrow{OA}\right)$. L'angle θ est déterminé par :

$$\begin{cases}\cos\theta = \dfrac{x_A}{OA}\\ \sin\theta = \dfrac{y_A}{OA}\end{cases} \quad OA = OA = \sqrt{2} \text{ et } x_A = 1\ ,\ y_A = 1$$



Donc $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x_A}{OA} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{y_A}{OA} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \quad \theta = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \ mes\left(\vec{u};\overrightarrow{OA}\right) = \dfrac{\pi}{4}$

Soit $\theta' = \left(\vec{u};\overrightarrow{OB}\right)$. L'angle θ' est déterminé par :

$\begin{cases} \cos\theta' = \dfrac{x_B}{OB} \\ \sin\theta' = \dfrac{y_B}{OB} \end{cases}$ $OB = \sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$ =1 et $x_B = -\dfrac{1}{2}$, $y_B = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Donc $\begin{cases} \cos\theta' = \dfrac{x_B}{OB} = -\dfrac{1}{2} \\ \sin\theta' = \dfrac{y_B}{OB} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \quad \theta = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \ mes\left(\vec{u};\overrightarrow{OB}\right) = \dfrac{2\pi}{3}$.

Corrigé de l'exercice de fixation

Exercice 12

$z_1 = 2i$ donc $|z_1| = 2$ etArg(z_1) = $\dfrac{\pi}{2}$.

z_2 = -4donc $|z_2| = 4$ et $\text{Arg}(z_2) = \pi$.

$z_3 = 2 - 2\sqrt{3}i$ donc $|z_3| = 4$et $\text{Arg}(z_3) = -\dfrac{\pi}{3}$.

Activité 12 :Forme trigonométrique d'un nombre complexe

- L'objectif de cette activité est d'identifier la forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul.
- Réponses aux questions de l'activité

- $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- Soit θ = Arg(z) on a : $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin\theta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases} \Rightarrow \quad a = |z|\cos\theta$ et $b = |z|\sin\theta$
- On en déduit que $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$

Corrigé de l'exercice de fixation

Exercice 13

1- a) et b) Module, argument et forme trigonométrique des nombres complexes

Pour $z = i$, $|z| = 1$ et $\arg(z) = \dfrac{\pi}{2}$ donc z=$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$

Pour $z = 1 + i$, $|z| = \sqrt{2}$ et $\arg(z) = \dfrac{\pi}{4}$ donc $z = \sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$

Pour $z = \sqrt{3} + i$, $|z| = 2$ et $\arg(z) = \dfrac{\pi}{6}$ donc $z = 2\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$.

2
a -k
b– j

Activité 13 :Arguments d'un produit et d'un quotient de nombres complexes

- L'objectif de cette activité est de connaître les propriétés des arguments de nombres complexes non nuls.
- Réponses aux questions de l'activité

Je démontre que $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') + 2k\pi$

Soit z et z' deux nombres complexes de formes trigonométriques z = r(cosθ + isinθ) et z' = r'(cosθ' + isinθ').

$$zz' = rr'\left(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + \mathrm{i}\left(\cos\theta\sin\theta' + \cos\theta'\sin\theta\right)\right)$$
$$= rr'\left(\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')\right)$$

Donc arg(zz') = arg(z) + arg(z') + 2kπ

- **Je démontre que** $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg(z) + 2k\pi$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta) \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{1}{r}\left(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\right) \text{donc} \arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) + 2k\pi$$

- **Je démontre que** Pour $n \in \mathbb{N}$, $arg(z^n) = narg(z) + 2k\pi$
  - Pour $n > 0$, on applique le raisonnement par récurrence à la première propriété et on a : $\arg(z^n) = n\arg(z) + 2k\pi$
  - Pour $n < 0$, on a : $z^n = \dfrac{1}{z^{-n}} = \left(\dfrac{1}{z}\right)^{-n}$ donc $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right)^{-n} = -n\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) + 2k\pi = n\arg(z) + 2k\pi$

Ainsi pour tout entier relatif n, $\arg(z^n) = n\arg(z) + 2k\pi$.

- **Je démontre que** $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') + 2k\pi$

$$\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'} \text{ or } \arg\left(z \times \frac{1}{z'}\right) = \arg z + \arg\left(\frac{1}{z'}\right) = \arg z - \arg z' \quad \text{donc} \quad \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') + 2k\pi$$

Corrigé de l'exercice de fixation

Exercice 14

1. **<u>Déterminons un argument de chacun des nombres complexes :</u>**

$$\arg\left(\frac{1}{1+i}\right) = -\arg(1+i) = -\frac{\pi}{4}$$

$$\arg\left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right) = \arg\left(\sqrt{3}+i\right) - \arg(1-i) = \frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{5\pi}{12}$$

2- Déterminons un argument de z^2 et z^{-3}

$arg(z^2) = 2arg(z) = 2 \times \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$

$arg(z^{-3}) = -3arg(z) = -3 \times \frac{\pi}{8} = \frac{-3\pi}{4}$ ou

$arg(z^{-3}) = arg\left(\frac{1}{z^3}\right) = -arg(z^3) = -3arg(z) = -3 \times \frac{\pi}{8} = \frac{-3\pi}{4}$

Activité 14 : Forme exponentielle d'un nombre complexe

- L'objectif de cette activité est d'identifier la forme exponentielle d'un nombre complexe non nul.
- Réponses aux questions de l'activité
- $-3i = 3(\cos(\pi) + i\sin(\pi))$; $\sqrt{3}+i = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$; $-5 = 5(\cos(\pi) + i\sin(\pi))$

Si on pose $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ alors on a; $-3i = 3\, e^{i\pi}$; $\sqrt{3}+i = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$; $-5 = 5e^{i\pi}$

Corrigé de l'exercice de fixation

Exercice 15

1- **a) Faux**
b) Vrai

2-
- $-7i = 7e^{i\pi}$;
- $1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$
- $-4 - 4i = 4\sqrt{2}e^{-i\frac{3}{4}\pi}$

Activité 15 : Formule de Moivre

- L'objectif de cette activité est de connaître la formule de Moivre.
- Réponses aux questions de l'activité

1- **Je détermine le module et un argument du nombre complexe z.**
$z = \cos\alpha + i\sin\alpha$. Donc $|z| = 1$ et $\arg(z) = \alpha$

2- **Je détermine le module et un argument de z^n.**
On sait que $|z^n| = |z|^n$ or $|z| = 1$ donc $|z^n| = 1$
De même $\arg(z^n) = n\arg(z)$ donc $\arg(z^n) = n\alpha$
On a ainsi $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)$
D'une manière générale si $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ alors pour tout entier relatif n, on a :
$z^n = r^n(\cos(n\alpha)+i\sin(n\alpha))$

Corrigé de l'exercice de fixation

Exercice 16

$\left|\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right| = 1$ et $\arg\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{\pi}{4}$ donc $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} = e^{-i\frac{\pi}{4}}$

Donc $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{2022} = \left(e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^{2022} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

Activité 16 : Les formules d'Euler

- L'objectif de cette activité est de connaître les formules D'Euler.
- Réponses aux questions de l'activité

On sait que $e^{i\alpha} = cos\alpha + isin\alpha$ et $e^{-i\alpha} = cos\alpha - isin\alpha$ donc
$2cos\alpha = e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} \Rightarrow cos\alpha = \frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}$ et $2isin\alpha = e^{i\alpha} - e^{-i\alpha} \Rightarrow sin\alpha = \frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}$

Corrigé de l'exercice de fixation

Exercice 17

1- Vrai ; 2 – Faux ; 3 – Vrai ; 4 – Faux ; 5 – Vrai.

Activité 17 : Racine $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe.

- L'objectif de cette activité est de déterminer les racines carrées et les racines $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe
- Réponses aux questions de l'activité

1- Je résous l'équation $z^2 = 1 - i\sqrt{3}$

- **Utilisation de la forme trigonométrique**

$$1 - i\sqrt{3} = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$|z| = r$ et $\text{Arg}(z) = \theta$ on a $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ donc $z^2 = r^2(\cos(2\theta) + i\sin(2\theta))$

$$z^2 = 1 - i\sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} r^2 = 2 \\ 2\theta = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{2} \\ \theta = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi \text{ avec } k \in \{0;1\} \end{cases}$$

Donc les solutions de l'équation sont : $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$ et $z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$

2- Je détermine les nombres complexes z tel que $z^3 = 1$

Soit θ et r deux nombres réels tel que $|z| = r$ ($r > 0$) et $\text{Arg}(z) = \theta + 2k\pi$.

$z^3 = 1 \Leftrightarrow r^3 e^{i3\theta} = 1$ donc $r^3 = 1$ et $3\theta = 2k\pi$ d'où

$$\begin{cases} r = 1 \\ \theta = \dfrac{2k\pi}{3} \quad \text{avec } k \in \{0;1;2\} \end{cases}$$

Pour $k = 0$ on a $\theta = 0$ donc $z_0 = 1$

Pour $k = 1$ on a $\theta = 1$ donc $z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = j$

Pour $k = 2$ on a $\theta = 2$ donc $z_2 = e^{-i\frac{2\pi}{3}} = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = j^2$

Les racines cubiques de 1 (l'unité) sont : 1 ; $j = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $j^2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

On vérifie que $1 + j + j^2 = 0$.

3- Je détermine les nombres complexes z tel que $z^4 = 2\sqrt{2}(1+i)$

a) Calcule le module et un argument de $2\sqrt{2}(1+i)$

$$\left|2\sqrt{2}(1+i)\right| = 4 \text{ et } Arg\left(2\sqrt{2}(1+i)\right) = \frac{\pi}{4}.$$

b) En posant $z = re^{i\theta}$ calcule z^4

Soit θ et r deux nombres réels tel que $|z| = r$ ($r>0$) et $\text{Arg}(z) = \theta + 2k\pi$. Alors $z^4 = r^4 e^{4i\theta}$

c) Résous l'équation z⁴ = $2\sqrt{2}(1+i)$

$$z^4 = 2\sqrt{2}(1+i) \Leftrightarrow \begin{cases} r^4 = 4 \\ 4\theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ avec k} \in \{0;1;2;3\} \end{cases}$$

Pour $k = 0$, on a : $z_0 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{16}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{16}\right)\right)$

Pour $k = 1$, on a : $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{9\pi}{16}\right) + i\sin\left(\frac{9\pi}{16}\right)\right)$

Pour $k = 2$, on a : $z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{15\pi}{16}\right) + i\sin\left(-\frac{15\pi}{16}\right)\right)$

Pour $k = 3$, on a : $z_3 = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{16}\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{16}\right)\right)$

Ainsi les solutions de l'équation $z^4 = 2\sqrt{2}(1+i)$ sont

$\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{16}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{16}\right)\right)$; $\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{9\pi}{16}\right) + i\sin\left(\frac{9\pi}{16}\right)\right)$;

$\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{15\pi}{16}\right) + i\sin\left(-\frac{15\pi}{16}\right)\right)$ et $\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{16}\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{16}\right)\right)$;

Corrigé de l'exercice de fixation

Exercice 18

a) Je détermine les racines 5ème de $16\sqrt{2}(1-i)$

Soit le nombre complexe $z = re^{i\theta}$, r et θ des nombres réels, $r > 0$.

$$\left|16\sqrt{2}(1-i)\right| = 16\sqrt{2}\left(\sqrt{2}\right) = 32 \text{ et } Arg\left(16\sqrt{2}(1-i)\right) = -\frac{\pi}{4}$$

Déterminer **les racines 5ème de** $16\sqrt{2}(1-i)$ revient à résoudre l'équation $z^5 = 16\sqrt{2}(1-i)$.

Soit $z = \rho e^{i\theta}$ où $|z| = \rho$ et $\text{Arg}(z) = \theta$ (ρ et θ des nombres réels tel que $\rho > 0$)

$$z^n = 16\sqrt{2}(1-i) \Leftrightarrow \begin{cases} 5\theta = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \rho^5 = 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta = -\frac{\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5} \\ \rho = 2 \end{cases}$$

Pour $k = 0$ on a : $\theta = -\frac{\pi}{20}$ donc $z_0 = 2e^{-i\frac{\pi}{20}}$

Pour $k = 1$ on a : $\theta = \frac{7\pi}{20}$ donc $z_1 = 2e^{i\frac{7\pi}{20}}$

Pour $k = 2$ on a : $\theta = \frac{3\pi}{4}$ donc $z_2 = 2e^{i\frac{3\pi}{4}}$

Pour $k = 3$ on a : $\theta = -\frac{17\pi}{20}$ donc $z_3 = 2e^{-i\frac{17\pi}{20}}$

Pour $k = 4$ on a : $\theta = -\frac{9\pi}{20}$ donc $z_4 = 2e^{-i\frac{9\pi}{20}}$

Donc les racines 5ème de $16\sqrt{2}(1-i)$ sont $2e^{-i\frac{\pi}{20}}$; $2e^{i\frac{7\pi}{20}}$; $2e^{i\frac{3\pi}{4}}$; $2e^{-i\frac{17\pi}{20}}$; $2e^{-i\frac{9\pi}{20}}$.

b) Détermine les racines 3ème de $2i\sqrt{3}-2$

On considère un nombre complexe tel que $z = re^{i\theta}$ avec r et θ des réels, $r > 0$.

$\left|2i\sqrt{3}-2\right| = 2\left|i\sqrt{3}-1\right| = 4$ **et** $Arg\left(2i\sqrt{3}-2\right) = \frac{2\pi}{3}$

Donc $z^3 = 2i\sqrt{3}-2 \Leftrightarrow \begin{cases} r^3 = 4 \\ 3\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[3]{4} \\ \theta = \frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$

Pour $k = 0$ on a : $\theta = \frac{2\pi}{9}$ donc $z_0 = \sqrt[3]{4}e^{i\frac{2\pi}{9}}$

Pour $k = 1$ on a : $\theta = \frac{8\pi}{9}$ donc $z_1 = \sqrt[3]{4}e^{i\frac{8\pi}{9}}$

Pour $k = 2$ on a : $\theta = -\frac{4\pi}{9}$ donc $z_2 = \sqrt[3]{4}e^{-i\frac{4\pi}{9}}$

Donc les racines 3ème de $2i\sqrt{3}-2$ sont $\sqrt[3]{4}e^{i\frac{2\pi}{9}}$; $\sqrt[3]{4}e^{i\frac{8\pi}{9}}$; $\sqrt[3]{4}e^{-i\frac{4\pi}{9}}$.

<u>Activité</u> 18 : Equation du second degré dans ℂ

- L'objectif de cette activité est de résoudre une équation du second degré dans ℂ
- Réponses aux questions de l'activité

Soit l'équation $az^2 + bz + c = 0$

On a $az^2 + bz + c = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b-4ac}{4a^2}\right]$

Posons $\Delta = b^2 - 4ac$

- Si $\Delta = 0$, alors (E) a une solution double : $-\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta \neq 0$, alors Δ admet deux racines carrées δ et $-\delta$.

Donc $az^2 + bz + c = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b-4ac}{4a^2}\right] = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\delta^2}{4a^2}\right] = a\left[\left(z + \frac{b+\delta}{2a}\right)\left(z + \frac{b-\delta}{2a}\right)\right]$

Ainsi (E) a deux solutions $\frac{-b+\delta}{2a}$ et $\frac{-b-\delta}{2a}$.

Corrigé de l'exercice de fixation

Exercice 19

a) (E_1) : $z^2 - 2z + 2 = 0$

$\Delta = (-2)^2 - 4\times 2 = -4 = (2i)^2$

$z_1 = \frac{2+2i}{2} = 1+i$ et $z_2 = \frac{2-2i}{2} = 1-i$ donc $S_{\mathbb{C}} = \{1+i ; 1-i\}$

b) (E_2) : $z^2 - (3+5i)z - 4 + 7i = 0$

$\Delta = (3+5i)^2 - 4(-4+7i) = 2i$

Je détermine les racines carrées de $2i$.

Soit δ un nombre complexe tel que $\delta^2 = 2i$

Posons $\delta = x + iy$ avec x et y des nombres réels.

$\delta^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$. Donc $\delta^2 = 2i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 2 \\ 2xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$ et y = 1 ou $x = -1$ et $y = -1$ Ainsi

On a $\delta = 1 + i$ et $\delta = -1 - i$ et on vérifie que $(1+i)^2 = 2i$.

Les solutions de (E_2) sont donc $z_1 = \dfrac{3+5i+(1+i)}{2} = 2+3i$ et $z_2 = \dfrac{3+5i-(1+i)}{2} = 1+2i$

D'où $S_{\mathbb{C}} = \{2+3i ; 1+2i\}$

<u>Activité</u> 19 : Vecteur du plan

- L'objectif de cette activité est de calculer la distance AB, déterminer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et connaître la mesure d'un angle orienté.
- Réponses aux questions de l'activité

1- a) **Je calcule $z_B - z_A$ et $|z_B - z_A|$**

$z_B - z_A = (2 - 3i) - (1 + 2i) = 1 - 5i$ donc $|z_B - z_A| = \sqrt{1+5^2} = \sqrt{26}$

b)Je calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2-1 \\ -3-2 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ donc l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_{\overrightarrow{AB}} = 1-5i$

c)D'après les questions précédentes $z_B - z_A = 1 - 5i$ et $z_{\overrightarrow{AB}} = 1-5i$ **donc** $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$

d) $AB = \sqrt{1+5^2} = \sqrt{26}$ et $|z_B - z_A| = \sqrt{26}$ on constate que $|z_B - z_A| = AB$.

2- Je justifie que $mes\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{AB}\right) = Arg\left(z_B - z_A\right) + 2k\pi$

On sait qu'il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$. Donc $z_M = z_B - z_A$ car $z_O = 0$.

Ainsi $mes\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{AB}\right) = mes\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM}\right)$ or $mes\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM}\right) = Arg\left(z_M\right) + 2k\pi$.

Par ailleurs on sait que $z_M = z_B - z_A$ donc $mes\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM}\right) = Arg\left(z_B - z_A\right) + 2k\pi$ d'où

$mes\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{AB}\right) = Arg\left(z_B - z_A\right) + 2k\pi$

Je justifie que $mes\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right) = Arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

On sait que $mes\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right) = mes\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{CD}\right) - mes\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{AB}\right)$

Or $mes\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{AB}\right) = Arg\left(z_B - z_A\right) + 2k\pi$ et $mes\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{CD}\right) = Arg\left(z_D - z_C\right) + 2k\pi$.

Donc $mes\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right) = Arg\left(z_D - z_C\right) - Arg\left(z_B - z_A\right) + 2k\pi \Rightarrow mes\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right) = Arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) + 2k\pi$

Corrigé de l'exercice de fixation

Exercice 20

a) **Je calcule AB, AC et BC.**

$z_B - z_A = 1 + i - 2 + i = -1 + 2i$ donc $AB = |z_B - z_A| = \sqrt{5}$

$z_C - z_A = 1+2\sqrt{3}+i\left(1+\sqrt{3}\right)$ - 2 + i = $-1+2\sqrt{3}+i\left(2+\sqrt{3}\right)$ donc

$\left|z_C - z_A\right| = \left|-1+2\sqrt{3}+i\left(2+\sqrt{3}\right)\right| = \sqrt{\left(-1+2\sqrt{3}\right)^2+\left(2+\sqrt{3}\right)^2} = 2\sqrt{5}$ d'où $AC = 2\sqrt{5}$

$z_C - z_B = 1+2\sqrt{3}+i\left(1+\sqrt{3}\right)$ - 1 – i = $2\sqrt{3}+i\sqrt{3}$ donc $\left|z_C - z_B\right| = \sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{15}$

d'où BC = $\sqrt{15}$

b) Je determine $Arg\left(\dfrac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right)$

$$\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = \frac{2-i-1-i}{1+2\sqrt{3}+i\left(1+\sqrt{3}\right)-1-i} = \frac{1-2i}{2\sqrt{3}+i\sqrt{3}} = \frac{-i}{\sqrt{3}} \text{ donc } Arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

c) J'en-déduis la nature du triangle ABC.

$Arg\left(\dfrac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$ donc le triangle ABC est rectangle en B.

<u>Activité</u> : 20Configuration de base dans le plan

- L'objectif de cette activité est de connaître la caractérisation complexe d'une droite, d'une demi-droite, d'un cercle et de la médiatrice d'un segment
- Réponses aux questions de l'activité

1- Justifions que M appartient à la droite $(AB) \Leftrightarrow Arg\left(\frac{Z_M - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$M \in (AB) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow mes\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{AM}\right) = mes\left(\overrightarrow{OI}, k\overrightarrow{AB}\right)$

$\Leftrightarrow mes\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{AM}\right) = k mes\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{AB}\right)$

$\Leftrightarrow arg(Z_M - Z_A) = arg(Z_B - Z_A) + k\pi; k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow arg(Z_M - Z_A) - arg(Z_B - Z_A) = k\pi; k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \ Arg\left(\frac{Z_M - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

2- Justifions que M appartient à la demi-droite $[AB) \Leftrightarrow Arg\left(\frac{Z_M - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$M \in [AB) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow mes\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{AM}\right) = mes\left(\overrightarrow{OI}, k\overrightarrow{AB}\right)$

$\Leftrightarrow mes\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{AM}\right) = k mes\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{AB}\right)$

$\Leftrightarrow arg(Z_M - Z_A) = arg(Z_B - Z_A) + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow arg(Z_M - Z_A) - arg(Z_B - Z_A) = k\pi; k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow Arg\left(\frac{Z_M - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

3- Justifions que M appartient au cercle de centre A et de rayon $r \Leftrightarrow |Z_M - Z_A| = r (r \in \mathbb{R}_+^*)$

$M \in \mathcal{C}(A; r) \Leftrightarrow AM = r$

$\Leftrightarrow |Z_M - Z_A| = r \ (r \in \mathbb{R}_+^*)$

4- Justifions que Mappartient à la médiatrice du segment $[AB] \Leftrightarrow |Z_M - Z_A| = |Z_M - Z_B|$

Mappartient à la médiatrice du segment $[AB] \Leftrightarrow AM = AB$

$\Leftrightarrow |Z_M - Z_A| = |Z_M - Z_B|$

Corrigé des exercices de fixation

Exercice 21

1. F
2. V
3. V
4. F
5. V

Exercice 22

1. **Justifions que le point K appartient à la droite (AB)**

$K \in (AB) \Leftrightarrow Arg\left(\frac{Z_K - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$Arg\left(\frac{-4+3i-2-i}{-1+2i-2-i}\right) = Arg\left(\frac{-6+2i}{-3+i}\right) = Arg(2) = 0 = 0 \times \pi$

2. **Déterminons l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie : $|z| = 3$**

$|z| = 3 \Leftrightarrow |Z_M - Z_O| = 3$

$\Leftrightarrow$ M appartient au cercle de centre O et de rayon 3

3. **Déterminons l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie** :

a) $|z - 2 - i| = 2$

$|z - 2 - i| = 2 \Leftrightarrow |z - (2 + i)| = 2 \Leftrightarrow |z_M - z_A| = 2$

$\Leftrightarrow$ M appartient au cercle de centre A et de rayon 2

b) $|z + 1 - 2i| = |2 + i - z|$

$|z + 1 - 2i| = |2 + i - z| \Leftrightarrow |z + 1 - 2i| = |-(z - 2 - i)| \Leftrightarrow |z + 1 - 2i| = |z - 2 - i|$

$\Leftrightarrow |z - (1 + 2i) = |z - (2 + i)| \Leftrightarrow |Z_M - Z_B| = |Z_M - Z_A|$

$\Leftrightarrow$ Mappartient à la médiatrice du segment $[AB]$

DES QUESTIONS D'EVALUATION

Question 1 : **Comment résoudre une équation du second degré dans $\mathbb{C}$**

Exercice

Résolvons dans $\mathbb{C}$: $z^2 + (3i - 4)z + 1 - 7i = 0$

Son discriminant est : $\Delta = (3i - 4)^2 - 4 \times 1(1 - 7i) = -9 - 24i + 16 - 4 + 28i = 3 + 4i$

Déterminons les racines carrées de $\Delta = 3 + 4i$

En posant $z = x + iy$ on a: $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ et $|z^2| = |(x + iy)^2| = |x + iy|^2 = x^2 + y^2$

$$\Delta = 3 + 4i;\ \ |\Delta| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$z^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = 4 \end{cases}$; En ajoutant membre à membre les deux premières équations ; on obtient : $2x^2 = 8$ alors $x^2 = 4 \Rightarrow$

$x = 2$ *ou* $x = -2$

Pour$x = 2$; $y = 1$ et Pour $x = -2$; $y = -1$

Alors les deux racines carrées de Δ *sont*: $\sigma = 2 + i$ *et* $-\sigma = -2 - i$

$Z_1 = \frac{-b-\sigma}{2a} = \frac{4-3i-2-i}{2} = 1 - 2i$ et $Z_1 = \frac{-b+\sigma}{2a} = \frac{4-3i+2+i}{2} = 3 - i$

$$S_{\mathbb{C}} = \{1 - 2i; 3 - i\}$$

Méthode

Exercice non corrigé

(E) : $z^4 + z^3 + 5z^2 + 2z + 6 = 0$

a) Je justifie que $i\sqrt{2}$ est solution de (E).

$\left(i\sqrt{2}\right)^4+\left(i\sqrt{3}\right)^3+5\left(i\sqrt{3}\right)^2+2\left(i\sqrt{3}\right)+6=0$ donc $i\sqrt{2}$ est solution de (E).

b) Détermine les réels *a*, *b* et *c* tels que : $z^4 + z^3 + 5z^2 + 2z + 6 = (z^2 + 2)(az^2 + bz + c)$

Lorsqu'on effectue la division euclidienne par $z^2 + 2$ on obtient :

$z^4 + z^3 + 5z^2 + 2z + 6 = (z^2 + 2)(z^2 + z + 3)$

c) Je résous l'équation (E) dans ℂ.

Je résous d'abord l'équation : $z^2 + z + 3 = 0$

$\Delta = 1 - 12 = -11 = \left(i\sqrt{11}\right)^2$ donc $z_1=\dfrac{-1+i\sqrt{11}}{2}$, $z_2=\dfrac{-1-i\sqrt{11}}{2}$

L'ensemble des solutions de l'équation (E) est donc : $S_{\mathbb{C}}=\left\{-i\sqrt{2};i\sqrt{2};\dfrac{-1+i\sqrt{11}}{2};\dfrac{-1-i\sqrt{11}}{2}\right\}$

Question 3 : **Comment linéariser une expression trigonométrique ?**

Exercice non résolu

1- $\cos^3 x=\left(\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3=\dfrac{e^{i3x}+3e^{ix}+3e^{-ix}+e^{-i3x}}{2^3}=\dfrac{2\cos 3x+6\cos x}{8}$

2- $\sin^2 x\cos^2 x=\left(\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2\left(\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2=\dfrac{1-\cos 4x}{8}$

3- $\cos^4 x=\left(\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4=\dfrac{e^{i4x}+e^{-i4x}+4\left(e^{i2x}+e^{-i2x}\right)+6}{16}=\dfrac{\cos 4x+4\cos 2x+3}{8}$

4- $\sin^5 x=\left(\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^5=\dfrac{2i\sin 5x-10i\sin 3x+20i\sin x}{32i}=\dfrac{\sin 5x-5\sin 3x+20\sin x}{16}$

Question 4 : **Comment Etudier une configuration géométrique avec des complexes**

Exercice non résolu

1- Je justifie que O, A et B sont alignés.

$$mes\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)=Arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right)+2k\pi$$

$\dfrac{z_B}{z_A}=\dfrac{-1-2i}{3+6i}=-\dfrac{1}{3}\Rightarrow Arg\left(\dfrac{z_B}{z_A}\right)=\pi$ donc les points O, A et B sont alignés.

2- Je démontre que les points A, B et C appartiennent à un même cercle de centre E(1 ;2)

$EA=\left|z_A-z_E\right|=\left|2+4i\right|=\sqrt{20}$

$EB=\left|z_B-z_E\right|=\left|-2-4i\right|=\sqrt{20}$

$EC=\left|z_C-z_E\right|=\left|-4+2i\right|=\sqrt{20}$

On a donc EA = EB = EC donc A, B et C appartiennent au cercle de centre E et de rayon $2\sqrt{5}$.

3- Je détermine l'affixe du point D tel que B soit le symétrique de D par rapport à A.

B est le symétrique de D par rapport à A donc A est le milieu du segment [BD]. Donc

$$z_A=\frac{z_B+z_D}{2}\Rightarrow z_D=2z_A-z_B\Rightarrow z_D=2(3+6i)-(-1-2i)=7+14i$$

4- Détermine l'ensemble des points M tels que $Arg\left(\frac{z-1+2i}{z-2}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi,\quad (k\in\mathbb{Z})$.

$\frac{z-1+2i}{z-2}=\frac{1-2i-z}{2-z}$ soit H et G les points du plan d'affixes respectives 1- 2i et 2.

Alors on a ; $\frac{z-1+2i}{z-2}=\frac{1-2i-z}{2-z}=\frac{z_H-z}{z_G-z}=\frac{z_{\overrightarrow{MH}}}{z_{\overrightarrow{MG}}}$ d'où $Arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{MH}}}{z_{\overrightarrow{MG}}}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow mes\left(\overrightarrow{MG};\overrightarrow{MH}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi$

donc M appartient au cercle de diamètre [GH]. L'ensemble cherché est le cercle de diamètre [GH].

MES SEANCES D'EXERCICES

Exercices de d'application

Ensemble des nombres complexes-Forme algébrique d'un nombre complexe

Exercice 1

1-b) ; 2- c)

Exercice 2

a)

Exercice 3

Re(z₁) = 0 et Im(z₁) = 1 ; Re(z₂) = 7 et Re(z₂) = -9 ; $\mathrm{Re}(z_3)=\frac{-5}{3}$ et $\mathrm{Im}(z_3)=\frac{2}{3}$

Exercice 4

1- 2 + (3 – x)i est un réel si x = 3

2- (2x – 1) + 4i est imaginaire pure si 2x – 1 = 0 c'est-à-dire $x=\frac{1}{2}$

Exercice 5

1- B ; 2- A ; 3 – C ; 4 – C ; 5 – B ; 6 - A ; 7 – C .

Egalité de deux nombres complexes

Exercice 6

$$2+(x-1)i=2+i \Leftrightarrow x-1=1 \Leftrightarrow x=2$$

Pour $x=2$; on a $Z=2+(2-1)i=2+i$

Opposé d'un nombre complexe

Exercice 7

Les opposés des nombres

L'opposé de Z_1 est $-17+9i$

L'opposé de Z_2 est $\sqrt{2}i$

L'opposé de Z_1 est $5+6i$

Somme de deux nombres complexes

Exercice 8

1) $Z_1+Z_2=2+i+3+2i=5+3i$
2) $Z_1+Z_2=-4+3i+5-8i=1-5i$
3) $Z_1+Z_2=-1-i-7-17i=-8-18i$

Produit de deux nombres complexes

Exercice 9

1) $Z_1Z_2=(2+i)(3+2i)=6+4i+3i-2=4+7i$
2) $Z_1Z_2=(-4+3i)(5-8i)=-20+32i+15i+24=4+47i$

3) $Z_1Z_2 = (-1-i)(-7-17i) = 7+17i+7i-17 = -10+24i$

Inverse d'un nombre complexe

Exercice 10

1) $\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

2) $\frac{1}{-4+3i} = \frac{-4-3i}{(-4+3i)(-4-3i)} = \frac{-4}{25} - \frac{3}{25}i$

3) $\frac{1}{-8+8i} = \frac{-8-8i}{(1+i)(1-i)} = -\frac{1}{16} - \frac{1}{16}i$

Puissance d'un nombre complexe

Exercice 11

Ecrivons sous forme algébrique les nombres suivants

$(2+3i)^2 = 4+12i-9 = -5+12i$

$(2+3i)^{-2} = \frac{1}{(2+3i)^2} = \frac{1}{-5+12i} = -\frac{5}{169} - \frac{12}{169}i$

$(1+i)^4 = ((1+i)^2)^2 = (2i)^2 = -4$

$(1+i)^{-4} = \frac{1}{(1+i)^4} = -\frac{1}{4}$

Exercice 12

$i^{403} = i^{4\times100+3} = -i$

$i^{2030} = i^{4\times507+2} = -1$

$i^{2022} = i^{4\times505+2} = -1$

$i^{2001} = i^{4\times500+1} = i$

Produit nul

Exercice 13

1)$Z \times Z' \neq 0 \Leftrightarrow Z \neq 0$ et $Z' \neq 0$

2)$ZZ' = 0 \Leftrightarrow Z = 0$ ou $Z' = 0$

Or $Z' \neq 0$ donc $Z = 0$

Exercice 14

Résolvons dans $\mathbb{C}$

$(3z-2-i)(z+2i) = 0 \Leftrightarrow 3z-2-i = 0$ ou $z+2i = 0$

$\Leftrightarrow 3z = 2+i$ ou $z = 2i$

$\Leftrightarrow z = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}i$ ou $z = 2i$

$S_{\mathbb{C}} = \left\{\frac{2}{3} + \frac{1}{3}i\,;2i\right\}$

Conjugué d'un nombre complexe

Exercice 15

On a

- $\bar{0} = 0$
- $\overline{1+i} = 1-i$
- $\overline{1+i} = 1-i$
- $\bar{7} = 7$
- $\overline{-19} = -19$
- $\overline{3-4i} = 3+4i$
- $\overline{-38+6i} = -38-6i$

Exercice 16

$z \in \mathbb{C}$ donc $z = a + ib$ avec $(a; b) \in \mathbb{R}^2$

$z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$

Comme $a^2 + b^2 > 0$ et $\text{Im}(z\bar{z}) = 0$

Alors $z\bar{z} \in \mathbb{R}_+$

Exercice 17

Calculons dans chacun des cas

1) $z + \bar{z} = 2 \times 3 = 6$

$z - \bar{z} = 2i \times 2 = 4i$

$z\bar{z} = 3^2 + 2^2 = 9 + 4 = 13$

2) $z + \bar{z} = 2 \times 7 = 14$

$z - \bar{z} = 2i \times 1 = 2i$

$z\bar{z} = 7^2 + 1^2 = 49 + 1 = 50$

Exercice 18

$\overline{z + z'} = \overline{2 + 3\imath - 1 + 5\imath} = \overline{1 + 8\imath} = 1 - 8i$

$\overline{zz'} = \overline{(2 + 3\imath)(-1 + 5\imath)} = \overline{-2 + 10\imath - 3\imath - 15} = \overline{-17 + 7\imath} = -17 - 7i$

$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}} = \frac{2 - 3i}{-1 - 5i} = \frac{(2 - 3i)(-1 + 5i)}{26} = \frac{-2 + 10i + 3i + 15}{26} = \frac{13}{26} + \frac{13}{26}i = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

Module d'un nombre complexe

Exercice 19

1- c) ; 2- b)

Exercice 20

Déterminons le module de chacun des nombre complexe

$|3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

$|6 - 8i| = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$

$|\sqrt{2} + \sqrt{7}i| = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{7}\right)^2} = \sqrt{2 + 7} = \sqrt{9}$

Exercice 21

L'équivalence est incomplète car si $z' = \bar{z}$ alors $|z| = |z'|$ si $z' = -\bar{z}$ alors $|z| = |z'|$

Exercice 22

$|1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$|1 - i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

Donc $1 + i$ et $1 - i$ ont le même module

Exercice 23

Calculons

$|\bar{z}| = |z| = 2$

$|-\bar{z}| = |\bar{z}| = |z| = 2$

$|zz'| = |z| \times |z'| = 2 \times 3 = 6$

$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{2}$

$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} = \frac{2}{3}$

Affixe, point-image et vecteur image

Exercice 24

1) L'affixe du point A est $-7+5i$
2) L'affixe du point B est $3i$
3) L'affixe du vecteur $\vec{u}$ est $-3+9i$

Exercice 25

1)Le point image de $1+i$ a pour coordonnées $(1;1)$
2)Le point image de $-3i$ a pour coordonnées $(0;-3)$
3)Le vecteur image du nombre complexe 7 a pour coordonnées $(7;0)$
4)Le vecteur image du nombre complexe $1+\mathrm{i}$ a pour coordonnées (1 ;1)

Exercice 26

L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $-2+3i-1-i$ soit $-3+2i$
L'affixe du vecteur $\overrightarrow{BC}$ est $4+3i+2-3i$ soit 6
L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AC}$ est $4+3i-1-i$ soit $3+2i$

Exercice 27

Soit $a+ib$ l'affixe de B
On a : $a+ib+4-3i=1+i$
Soit $a+4+i(b-3)=1+i$
D'où $a+4=1$ et $b-3=1$
$a=-3$ et $b=4$
Donc $B(-3;4)$

Exercice 28

1.VRAI
2.VRAI
3.FAUX

Exercice 29

1)L'affixe du point I, milieu de [PQ], est le nombre complexe $\frac{1-i+4+5i}{2}$ soit $\frac{5}{2}+2i$
2) $\vec{w}+\vec{y}$ a pour affixe $1-2i+3+4i$ soit $4-2i$
3)$PQ=|4+5i-1+i|=|3+6i|=\sqrt{3^2+6^2}=\sqrt{9+36}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$

Exercice 30

1. Le vecteur $3\vec{w}$ a pour affixe $3(2+3i)$ soit $6+9i$
2. Le vecteur $2\vec{w}-3\vec{y}$ a pour affixe $2(2+3i)-3(4-5i)$ soit $4+6i-12i+15i$
   soit $-8+21i$

Argument d'un nombre complexe

Exercice 31

$\mathrm{ARG}(1)=0$
$\mathrm{ARG}(i)=\frac{\pi}{2}$
$\mathrm{ARG}(-i)=-\frac{\pi}{2}$
$\mathrm{ARG}(-1)=\pi$
$\mathrm{ARG}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\frac{\pi}{3}$

Exercice 32

a)VRAI
b)FAUX

Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Exercice 33

- $|1+i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$

  On a $\cos\theta = \frac{1}{2}$ et $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\theta = \frac{\pi}{3}$
- $|\sqrt{3}-3i| = \sqrt{(\sqrt{3})^2+3^2} = \sqrt{3+9} = 2\sqrt{3}$

  On a $\cos\theta = \frac{1}{2}$ et $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\theta = -\frac{\pi}{3}$
- $|-\sqrt{2}-i\sqrt{6}| = \sqrt{2+6} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

  On a $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ et $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\theta = -\frac{2\pi}{3}$

Exercice 34

Déterminons la forme trigonométrique des nombres complexes

1.$|1-i| = \sqrt{2}$; soit θ =ARG(Z)

$\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\theta = -\frac{\pi}{4}$

donc $1-i = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

2.$|\sqrt{3}-3i| = 2\sqrt{3}$; soit θ = ARG(Z)

On a $\cos\theta = \frac{1}{2}$ et $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\theta = -\frac{\pi}{3}$

donc $\sqrt{3}-3i = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

3. $|-\sqrt{2}+i\sqrt{6}| = 2\sqrt{2}$; soit θ = ARG(Z)

On a $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ et $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\theta = \frac{2\pi}{3}$

$-\sqrt{2}+i\sqrt{6} = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

Exercice 35

Déterminons un argument de chacun des nombres complexes suivants :

$\arg(zz') = \frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}+2k\pi = -\frac{\pi}{12}+2k\pi\ ; k\in\mathbb{Z}$

$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)+2k\pi = -\frac{\pi}{4}+2k\pi\ ; k\in\mathbb{Z}$

$\arg\left(\frac{z'}{z}\right) = \arg(z')-\arg(z)+2k\pi = -\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}+2k\pi = -\frac{7\pi}{12}+2k\pi\ ; k\in\mathbb{Z}$

$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}+2k\pi = \frac{7\pi}{12}+2k\pi\ ; k\in\mathbb{Z}$

$\arg(z^2) = 2\arg(z)+2k\pi = 2\times\frac{\pi}{4}+2k\pi = \frac{\pi}{2}+2k\pi\ ; k\in\mathbb{Z}$

$\arg\left(\frac{z^2}{z'}\right) = 2\times\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}+2k\pi = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}+2k\pi\ ; k\in\mathbb{Z}$

Exercice 36

Ecrivons chacun des nombres sous forme trigonométrique

- $|(2+2i)(1-i)| = 4$ et $\arg((2+2i)(1-i)) = \frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}+2k\pi = 0+2k\pi$

  donc $(2+2i)(1-i) = 4(\cos 0 + i\sin 0)$
- $\left|\frac{\sqrt{3}+i}{2i}\right| = 1$

  $\text{Arg}\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2i}\right) = \frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}+2k\pi = -\frac{\pi}{3}+2k\pi$

  donc $\frac{\sqrt{3}+i}{2i} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$
- $\left|\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2(1-i)}\right| = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 1$

$\arg\left(\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2(1-i)}\right) = -\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}+2k\pi = \frac{\pi}{12}+2k\pi$

donc $\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2(1-i)} = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

- $|(1-i)^4| = |1-i|^4 = \left(\sqrt{2}\right)^4 = 4$

  $\arg((1-i)^4) = 4\times\left(-\frac{\pi}{4}\right)+2k\pi = \pi+2k\pi$

  donc $(1-i)^4 = 4(\cos(\pi)+i\sin(\pi))$

Exercice 37

- $\sqrt{\mathbf{2}}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}$
- $\mathbf{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{\mathbf{2}}+i\sqrt{\mathbf{2}}$
- $3\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$

Forme exponentielle d'un nombre complexe

Exercice 38

Les nombres complexes écrits sous forme exponentielle

1.$2e^{i\theta}$

3.$7e^{-i\theta}$

Exercice 39

Ecrivons sous forme exponentielle

a) $2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$

b) $|1+i| = \sqrt{2}$ et $\operatorname{Arg}(1+i) = \frac{\pi}{4}$ donc $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

c) $\left|3+i\sqrt{3}\right| = 2\sqrt{3}$ et $\operatorname{Arg}\left(3+i\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{6}$ donc $3+i\sqrt{3} = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$

Exercice 40

Ecrivons sous forme trigonométrique

1) $\dfrac{\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}}{\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}} = \dfrac{e^{i\frac{\pi}{12}}}{e^{i\frac{\pi}{3}}} = e^{i\left(\frac{\pi}{12}-\frac{2\pi}{3}\right)} = e^{-i\frac{7\pi}{12}} = \cos\frac{7\pi}{12}-i\sin\frac{7\pi}{12}$

2) $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1+i} = \dfrac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

3) $\dfrac{\sin\frac{\pi}{12}-i\cos\frac{\pi}{12}}{\sin\frac{\pi}{12}+i\cos\frac{\pi}{12}} = \dfrac{\cos\frac{5\pi}{12}-i\sin\frac{5\pi}{12}}{\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}} = e^{i\left(-\frac{5\pi}{12}-\frac{5\pi}{12}\right)} = e^{-i\frac{5\pi}{6}} = \cos\frac{5\pi}{6}-i\sin\frac{5\pi}{6}$

4) $-2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

Formule de Moivre

Exercice 41

Ecrivons sous forme trigonométrique

1) $\left(1+i\sqrt{3}\right)^2 = \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2 = 4e^{i\frac{2\pi}{3}} = 4\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

2) $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{1+i}\right)^3 = \left(\frac{2e^{i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}\right)^3 = \left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}\right)^3 = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

3) $\left(\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{1-i}\right)^3 = \left(\frac{2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}\right)^3 = \left(2e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^3 = 8e^{i\frac{\pi}{4}} = 8\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

Exercice 42

a) $(\cos x + i\sin x)^2 = \cos 3x + i\sin 3x$

$$= \cos^3 x + 3i\cos^2 x\sin x - 3\cos x\sin^2 x - i\sin^3 x$$
$$= \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x + i(3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x)$$

Par identification on a :

$$\cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x$$

b) On a $\cos 2x = 1 - \sin^2 x$ donc

$$\cos 2x + \cos 3x = 1 - \sin^2 x + \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x = 1 + \cos^3 x - \sin^2 x\,(2 + 3\cos x)$$

Formules d'Euler

Exercice 43

Ecrivons sous forme algébrique

1) $\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}+e^{-i\frac{\pi}{3}}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

2) $\frac{e^{i\frac{\pi}{6}} - e^{-i\frac{\pi}{6}}}{2i} = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

3) $e^{i\frac{3\pi}{4}} + e^{-i\frac{3\pi}{4}} = 2\cos\frac{3\pi}{4} = -2\times\frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$

Exercice 44

Ecrivons sous forme trigonométrique

1) $e^{i\theta} + 1 = e^{i\frac{\theta}{2}}e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}\times e^{-i\frac{\theta}{2}} = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\times e^{i\frac{\theta}{2}}$

Comme $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$ alors

$$e^{i\theta} + 1 = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

2) $e^{i\theta} - 1 = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}\right) = 2i\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\times e^{i\frac{\theta}{2}} = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}$

Or $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$ donc

$$e^{i\theta} - 1 = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

3) $e^{-i\theta} + 1 = e^{-i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\times e^{-i\frac{\theta}{2}} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\left(-\frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\theta}{2}\right)\right)$

Linéarisation

Exercice 45

Linéarisons

1) $\cos^3 x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(e^{i3x} + 3e^{i2x}e^{-i} + 3e^{ix}e^{-i2x} + e^{-i3x}\right)$

$$= \frac{1}{8}\left[e^{i3x} + e^{-i3x} + 3\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)\right] = \frac{1}{8}(2\cos 3x + 3\cos x)$$
$$= \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{8}\cos x$$

2) $\sin^2 x\cos^2 x = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2 = -\frac{1}{8}\left(e^{i2x}-e^{-i2x}\right)^2$

$$= -\frac{1}{8}(2\cos 4x - 2) = -\frac{1}{4}\cos 4x + \frac{1}{4}$$

3) $\cos^4 x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}\left[e^{i4x}+e^{-i4x}+4\left(e^{i2x}+e^{-i2x}\right)+6\right]$

$$= \frac{1}{16}(2\cos 4x + 8\cos 2x + 6)$$

4)$\sin^5 x = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^5 = \frac{1}{32i}\left[e^{i5x}-e^{-i5x}-5\left(e^{i3x}+e^{-i3x}\right)+10\left(e^{i2x}-e^{-i2x}\right)\right]$

$$= \frac{1}{32i}(2i\sin 5x - 10i\sin 3x + 20i\sin 2x)$$

$$= \frac{1}{16}\sin 5x - \frac{5}{16}\sin 3x + \frac{5}{8}\sin 2x$$

Résolution d'équations dans ℂ

Exercice 46

Déterminons les racines carrées de chacun des nombres suivants

1)$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^2-y^2=0 \\ \quad 2xy=1 \end{cases}$

$x^2 = \frac{1}{2}$ soit $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Si $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et si $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Les racines carrées de i sont $\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$

2)$\begin{cases} x^2+y^2=\sqrt{2} \\ x^2-y^2=1 \\ \quad 2xy=1 \end{cases}$

$x^2 = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ soit $x = \frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}$ ou $x = -\frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}$

Si $x = \frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}$; $y = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{1+\sqrt{2}}}$ et si $x = -\frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}$; $y = -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{1+\sqrt{2}}}$

Les racines carrées de $1+i$ sont $\frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{1+\sqrt{2}}}i$ et $-\frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{1+\sqrt{2}}}i$

3)$\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x^2-y^2=\sqrt{3} \\ \quad 2xy=1 \end{cases}$

$x^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{2}$ Soit $x = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$ ou $x = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$

Si $x = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$; $y = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$ et si $x = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$; $y = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$

Les racines carrées de $\sqrt{3}+i$ sont $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}i$ et $-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}i$

Exercice 47

Déterminons les racines cubiques de chacun des nombres complexes suivants

$1 = e^{i0}$ donc $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{3}}$; $k \in (0; 1; 2)$

les racines cubiques de 1 sont : 1; $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ donc $z_k = e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right)}; k \in (0; 1; 2)$

les racines cubiques de i sont : $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i; -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i; -i$

$1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ donc $z_k = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right)}; k \in (0; 1; 2)$

les racines cubiques de $1 + i$ sont : $2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{\pi}{12}}; 2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{3\pi}{4}}; 2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{-7\pi}{12}}$

Exercice 48

Déterminons les racines cubiques de chacun des nombres complexes suivants

1) $1 = e^{i0}$ donc $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{3}}$; $k \in \{0; 1; 2\}$

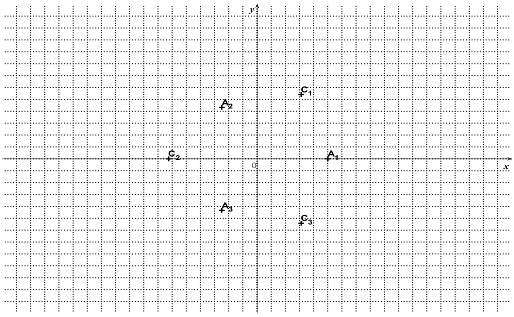
Les racines cubiques de 1 sont $1; -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

2)$1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ donc $z_k = 2^{\frac{1}{6}}e^{i\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right)}$; $k \in \{0; 1; 2\}$

Les racines cubiques de $1 - i$ sont $2^{\frac{1}{6}}e^{-i\frac{\pi}{12}}$;$2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{7\pi}{12}}$;$2^{\frac{1}{6}}e^{-i\frac{9\pi}{12}}$

3)$-2 = 2e^{i\pi}$ donc $z_k = 2^{\frac{1}{3}}e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}\right)}$; $k \in \{0; 1; 2\}$

Les racines carrées de -2 sont $2^{\frac{1}{3}}e^{i\frac{\pi}{3}}$;$2^{\frac{1}{3}}e^{i\pi}$ et $2^{\frac{1}{3}}e^{-i\frac{\pi}{3}}$



Exercice 49

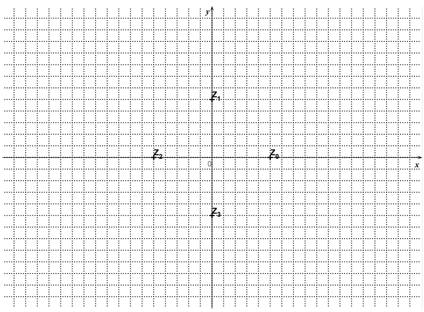
$1 = e^{i0}$ donc les racines quatrième de 1 sont les nombres complexes de la forme

$z_k = e^{i\frac{2k\pi}{4}}$; $k \in \{0; 1; 2; 3\}$

Soit $z_k = e^{i\left(\frac{k\pi}{2}\right)}$; $k \in \{0; 1; 2; 3\}$

Les racines quatrièmes de 1 sont : $1; e^{i\frac{\pi}{2}}$;$e^{i\pi}$;$e^{-i\frac{\pi}{2}}$

C'est-à-dire $1; i; -1; -i$



Exercice 50

Les racines n-ième d'un nombre complexe non nul sont les nombres complexes de la forme $Z_k = \sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$; $k \in \{0; 1; 2; \; ; \dots \dots \dots ; n-1\}$

On a $Z_0 = \sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\alpha}{n}+2\times\frac{0\pi}{n}\right)}$; $Z_1 = \sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2\pi}{n}\right)}$;............... ;$Z_{n-1} = \sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)}$

$$Z_0 + Z_1 + \cdots + Z_{n-1} = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\alpha}{n}}\left(1 + e^{i\frac{2\pi}{n}} + \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^2 + \cdots + \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^{n-1}\right)$$

$$= \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\alpha}{n}} \times \frac{1-\left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^n}{1-e^{i\frac{2\pi}{n}}} = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\alpha}{n}} \times \frac{1-1}{1-e^{i\frac{2\pi}{n}}} = 0$$

Exercice 51

Vérifions

1. a) on a : $1 + j + \bar{j} = 0$ donc $\bar{j} = -1 - j$
   b) $j^2 = \bar{j}$ donc $j^3 = j\bar{j}$
   Or $j^3 = 1$ donc $j\bar{j} = 1$
   c) $j^3 = 1$ donc $(j^3)^2 = 1^2$ d'où $j^6 = 1$

2)$j^{2021} = j^{3\times573+1} = j$ car $j^3 = 1$

Exercice 52

Résolvons dans $\mathbb{C}$

1) $\Delta = -3 = \left(i\sqrt{3}\right)^2$ ainsi $Z = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ ou $Z = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$

$$S_{\mathbb{C}} = \left\{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}; \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right\}$$

2)$\Delta = 3 + 4i = (2+i)^2$ ainsi $Z = \frac{4-3i+2+i}{2}$ ou $Z = \frac{4-3i-2-i}{2}$

$Z = 3 - i$ ou $Z = 1 - 2i$

$$S_{\mathbb{C}} = \{3 - i; 1 - 2i\}$$

3)$\Delta = 3 - 4i = (2-i)^2$ ainsi $Z = \frac{i\sqrt{3}+2-i}{2i}$ ou $Z = \frac{i\sqrt{3}-2+i}{2i}$

$Z = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} - i$ ou $Z = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + i$

$$S_{\mathbb{C}} = \left\{\frac{-1+\sqrt{3}}{2} - i; \frac{1+\sqrt{3}}{2} + i\right\}$$

Nombre complexe et configuration du plan

Exercice 53

1)$|Z - i| = 2 \Leftrightarrow |Z_M - Z_A| = 2$ où $Z_A = i$

L'ensemble des points M est le cercle de centre A et de rayon 2

2)$|Z - 1 + 2i| = |Z + 2 - i| \Leftrightarrow |Z - (1-2i)| = |Z - (-2+i)|$

$$\Leftrightarrow |Z_M - Z_B| = |Z_M - Z_C| \Leftrightarrow BM = CM$$

Où $Z_B = 1 - 2i$ et $Z_C = -2 + i$

L'ensemble des points M est la médiatrice du segment $[BC]$.

Exercice 54

On a :

$$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = \frac{\sqrt{3}+i}{2i} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

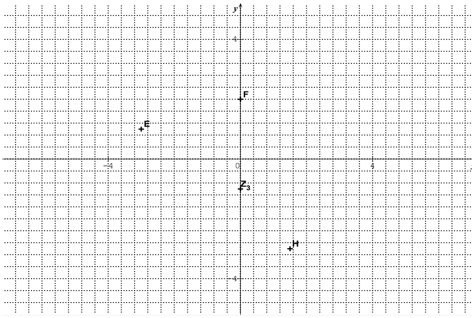
On a $\left|\frac{Z_C-Z_A}{Z_B-Z_A}\right| = \left|\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = 1 \Leftrightarrow \frac{AC}{AB} = 1 \Leftrightarrow AB = AC$ et $\mathrm{Arg}(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}) = -\frac{\pi}{3}$

Donc ABC est un triangle équilatéral de sens indirect.

Exercices de renforcement / approfondissement

Exercice 55

1)



2)$Z_{\overrightarrow{EF}} = 2i + 3 - i = 3 + i$

$Z_{\overrightarrow{FH}} = \frac{3}{2} - 3i - 2i = \frac{3}{2} - 5i$

$Z_{\overrightarrow{HE}} = -3 + i - \frac{3}{2} + 3i = -\frac{9}{2} + 4i$

$Z_{2\overrightarrow{FE}} = 2(-3 + i - 2i) = -6 - 2i$

3)I a pour affixe $\frac{-3+i+2i}{2}$ soit $\frac{-3+3i}{2}$

Exercice 56

Ecrivons sous forme trigonométrique

1)$ab = 6\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12}\right)\right) = 6\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$$ab^2 = 18\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$$

$$a^2b = 12\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$$

$$\frac{b}{a^2} = \frac{3}{4}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)$$

2)Déduisons -en la forme algébrique

$ab = 6\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 3 + 3i\sqrt{3}$

$\frac{a}{b} = \frac{a^2b}{ab^2} = \frac{12}{18}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{3}i$

Exercice 57

1)$|U| = \sqrt{2}$ et $\arg(1-i) = \frac{\pi}{4}$

$|V| = 2$ et $\arg(\sqrt{3}-i) = -\frac{\pi}{6}$

2.a) $U.V = (1-i)(\sqrt{3}-i) = \sqrt{3} - i + i\sqrt{3} + 1 = 1 + \sqrt{3} + i(-1+\sqrt{3})$

D'autre part $UV = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

2.b) on a : $UV = UV$ donc $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ et $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

Exercice 58

a) $(\cos x + i\sin x)^4 = \cos 4x + i\,sin4\,x$

$$= \cos^4 x - 6\cos^2 x\sin^2 x + \sin^4 x + i(4\cos^3 x\sin x - 4\cos x\sin^3 x)$$

Ainsi $\cos 4x = \cos^4 x - 6\cos^2 x\sin^2 x + \sin^4 x$

b) $\cos 5x + \cos 6x$

$$= \cos^5 x - 10\cos^3 x\sin^2 x - 5\cos x\sin^4 x + \cos^6 x - 15\cos^4 x\sin^2 x - 15\cos^2 x\sin^4 x - \sin^6 x$$

c) $\sin x - \sin 2x + \sin 3x - \sin 4x$

$$= \sin x - 2\sin x\cos x + 3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x - 4\cos^3 x\sin x + 4\cos x\sin^3 x$$

Exercice 59

Linéarisons

1) $\cos^4 x = \frac{1}{16}(2\cos 4x + 8\cos 2x + 6)$

$\cos^2 x\sin^3 x = -\dfrac{1}{32}(2\sin 5x - 2\sin 3x - 4\sin x)$

$\cos^5 x - \sin^4 x = \dfrac{1}{2^4}\cos 5x + \dfrac{5}{2^4}\cos 3x + \dfrac{5}{2^3}\cos x - \dfrac{1}{2^3}\cos x - \dfrac{1}{2}\cos 2x + \dfrac{3}{2^3}$

2)Déterminons les racines carrées de chacun des nombres complexes suivants

$Z = 2i$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = 2 \end{cases}$$

$x^2 = 1$ d'où $x = 1$ ou $x = -1$

Si $x = 1$, $y = 1$; si $x = -1$, $y = -1$

Les racines carrées de $2i$ sont $1 + i$ et $-1 - i$

$$Z = 3 + 4i$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 - y^2 = 3 \\ xy = 2 \end{cases}$$

$x^2 = 4$. D'où $x = 2$ ou $x = -2$

Si $x = 2$, $y = 1$; si $x = -2$, $y = -1$

Les racines carrées de $3 + 4i$ sont $2 + i$ et $-2 - i$

$$Z = 8 + 6i$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x^2 - y^2 = 8 \\ xy = 3 \end{cases}$$

$x^2 = 9$ d'où $x = 3$ ou $x = -3$

Si $x = 3$, $y = 1$; si $x = -3$, $y = -1$

Les racines carrées de $8 + 6i$ sont $3 + i$ et $-3 - i$

$$Z = 5 - 12i$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x^2 - y^2 = 5 \\ xy = -6 \end{cases}$$

$x^2 = 9$ d'où $x = 3$ ou $x = -3$
Si $x = 3$, $y = -2$; si $x = -3$, $y = 2$
Les racines carrées de $5 - 12i$ sont $3 - 2i$ et $-3 + 2i$

$$Z = -7 + 24i$$
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 - y^2 = -7 \\ xy = 12 \end{cases}$$

$x^2 = 9$ d'où $x = 3$ ou $x = -3$
Si $x = 3$, $y = 4$; si $x = -3$, $y = -4$
Les racines carrées de $-7 + 24i$ sont $3 + 4i$ et $-3 - 4i$

Exercice 60

1) Résolvons dans $\mathbb{C}$

$$\Delta = \left(2^{\theta+1}\cos\theta\right)^2 - 4 \times 2^{2\theta} = \left(i2^{\theta+1}\sin\theta\right)^2$$

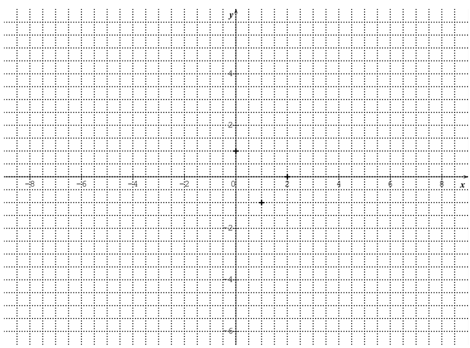
$Z = 2^{\theta}(\cos\theta + i\sin\theta)$ ou $Z = 2^{\theta}[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]$

$$S_{\mathbb{C}} = \left\{2^{\theta}(\cos\theta + i\sin\theta)\,;\, 2^{\theta}[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]\right\}$$

2)OAB est équilatéral $\Leftrightarrow \frac{2^{\theta}e^{i\theta}}{2^{\theta}e^{-i\theta}} = e^{\pm i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow e^{i2\theta} = e^{\pm i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow 2\theta = \frac{\pi}{3}$ ou $2\theta = -\frac{\pi}{3}$
$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$ ou $\theta = -\frac{\pi}{6}$

Exercice 61

1) Résolvons dans $\mathbb{C}$
Soit a cette solution réelle on a :
$a^3 - a^2 - a - 2 + i(2 - a) = 0$
$2 - a = 0$ et $a^3 - a^2 - a - 2 = 0$ donc $a = 2$
Ainsi $P(Z) = (Z - 2)(Z^2 + Z + (1 - i))$
$\Delta = -3 + 4i = (1 + 2i)^2$
$Z = 1 + i$ ou $Z = -i$
$S_{\mathbb{C}} = \{\, 2\,; -1 - i\,;\ i \,\}$
2.a)



2.b)$\frac{Z_A - Z_C}{Z_B - Z_C} = \frac{2-i}{-1-2i} = \frac{-1+2i}{1+i} = $ i, d'où le résultat

Exercice 62

1) on a : $(Z^2+1)(Z^2-4) = Z^4 - 3Z^2 - 4$

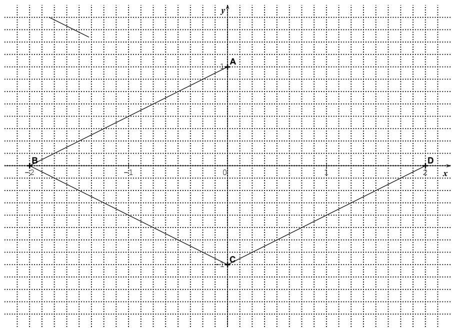
2) Résolvons dans $\mathbb{C}$

$(E) \Leftrightarrow Z^2 + 1 = 0$ ou $Z^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow Z^2 = -1$ ou $Z^2 = 4$

$\Leftrightarrow Z = i$ ou $Z = -i$ ou $Z = 2$ ou $Z = -2$

$S_{\mathbb{C}} = \{i; -i; 2; -2\}$

3) figure



4)$Z_{\overrightarrow{BA}} = 2 + i$ et $Z_{\overrightarrow{CD}} = 2 + i$ donc $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$

D'où ABCD est un parallélogramme de plus $\frac{Z_A - Z_C}{Z_D - Z_B} = \frac{2i}{4} = \frac{1}{2}i$ et $\frac{1}{2}i \ \in i\mathbb{R}^*$

Donc $(AC) \perp (BD)$ par suite ABCD est un losange.

Exercice 63

Soit ib cette solution imaginaire pure

on a :$-b^2 + 2b + i(-b^3 + 5b^2 - 10b + 8) = 0$ d'où $b = 2$

Ainsi $P(Z) = (Z - 2i)(Z^2 + (1 - 3i)Z - 4)$

$\Delta = 8 - 6i = (-3 + i)^2$

$Z = \frac{-1+3i-3+i}{2}$ ou $Z = \frac{-1+3i+3-i}{2}$

$Z = -2 + 2i$ ou $Z = 1 + i$

$S_{\mathbb{C}} = \{2i; -2 + 2i; 1 + i\}$

Exercice 64

1) Déterminons les racines cubiques de 1

On a : $Z^3 = 1$

$S_{\mathbb{C}} = \left\{1; -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

Les racines cubiques de 1 sont donc 1 ; $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ *et* $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

2)$(2 - 1)^3 = 8 - 12i - 6 + i = 2 - 11i$

3)Déduisons Les racines cubiques de $2 - 11i$

On a $Z^3 = 2 - 11i \Leftrightarrow Z^3 = (2 - 1)^3 \Leftrightarrow \left(\frac{Z}{2-i}\right)^3 = 1$ d'après 1)

$Z = (2 - i) \times 1$ ou $Z = (2 - i)\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ou $Z = (2 - i)\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$$S_{\mathbb{C}} = \left\{2 - i; \frac{-2+\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{1}{2} + \sqrt{3}\right)i; \frac{-2-\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{1}{2} - \sqrt{3}\right)i\right\}$$

Les racines cubiques de $2 - 11i$ sont $2 - i$; $\frac{-2+\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{1}{2} + \sqrt{3}\right)i$ et $\frac{-2-\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{1}{2} - \sqrt{3}\right)i$

Exercice 65

1)$a = \frac{9}{2} \times 2\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 9\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

2.a)On a $a = 9\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{3}}$

Les racines cinquièmes de a sont les nombres complexes de la forme

$Z_k = \sqrt[5]{9\sqrt{3}}e^{i\left(-\frac{\pi}{15}+\frac{2k\pi}{5}\right)}$; $k \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$

b) représentation graphique des racines cinquièmes de a

Exercice 66

1)$Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \arg(Z) = k\pi$; $k \in Z$

$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{2(Z-2)}{Z-i}\right) = k\pi \quad \Leftrightarrow \arg\left(\frac{(Z-2)}{Z-i}\right) = k\pi$

$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{Z-z_B}{Z-z_A}\right) = k\pi$ ou $Z_A = i$ et $Z_B = 2$

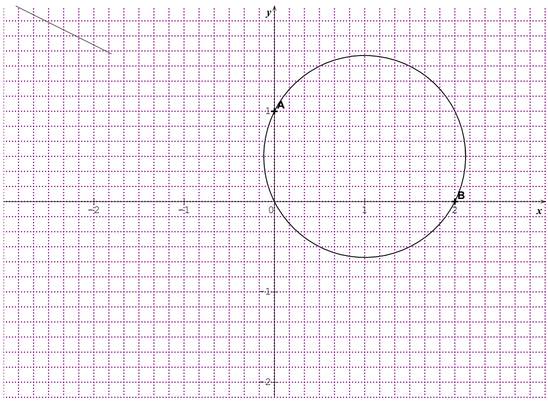
$\Leftrightarrow \text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{MA}\,;\overrightarrow{MB}}\right) = k\pi$

Ainsi l'ensemble des points M est la droite (AB) privée des points A et B

2)$Z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \arg(Z) = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\Leftrightarrow \text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$; $k \in Z$

L'ensemble des points M est le cercle de diamètre AB privé des points A



Exercice 67

$$f(Z) = \frac{iZ}{Z+i}$$

1)$f(b) = 1 + 2i \Leftrightarrow \frac{ib}{b+i} = 1 + 2i \Leftrightarrow b(1+i) = 2 - i \Leftrightarrow b = \frac{2-i}{1+i} = \frac{1-3i}{2}$

2)$f(Z) - i = \frac{iZ}{Z+i} - i = \frac{1}{Z+i}$

Or $|f(Z) - i| = \frac{1}{|Z+i|} = \frac{1}{r}$ et $\arg(f(Z) - i) = \arg\left(\frac{1}{Z+i}\right) = -\arg(Z+i) = -a$

Ainsi $f(Z) - i = \frac{1}{r}(\cos(-a) + i\sin(-a))$

3.a) $Z_A = -i$

$$|f(Z) - i| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |f(Z) - Z_A| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \left|\frac{1}{Z+i}\right| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |Z + i| = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow |Z - Z_A| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

L'ensemble (C) des points M est le cercle de centre A et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\arg(f(Z) - i) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \Leftrightarrow \arg\left(\frac{1}{Z+i}\right) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \Leftrightarrow -\arg(Z+i) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

$$\Leftrightarrow \arg(Z - Z_A) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \Leftrightarrow \mathrm{Mes}(\widehat{\vec{u};\overrightarrow{AM}}) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi\ ; k \in \mathbb{Z}$$

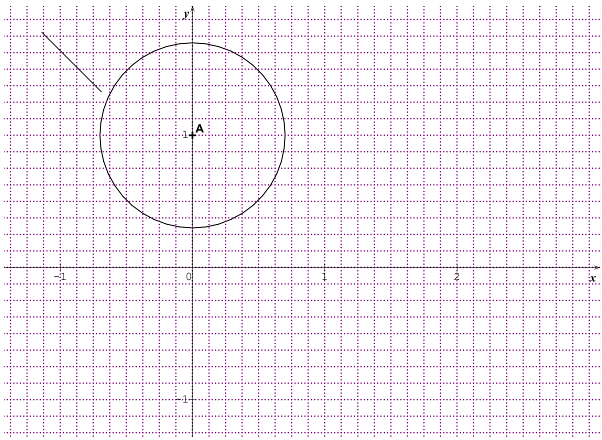
L'ensemble (Γ) des points M est la demi-droite de repère $(A;\vec{e_1})$ privée de A avec $\mathrm{mes}(\widehat{\vec{u};\vec{e_1}}) = -\frac{\pi}{4}$

c) on a : $|f(b) - i| = |1 + 2i - i| = |1 + i| = \sqrt{2}$ donc $B \in (C)$

d'autre part $\arg(f(b) - i) = \arg(1 + i) = \frac{\pi}{4}$ donc $B \in (\Gamma)$

par suite B *appartient* à (C) et à (Γ)

Construction de (C) et à (Γ)



Exercice 68

Démontrons que Z est un réel

$|1 + iZ| = |1 - iZ| \Leftrightarrow |1 + iZ|^2 = |1 - iZ|^2 \Leftrightarrow (1 - iZ)(1 - i\bar{Z}) = (1 - iZ)(1 + i\bar{Z})$

$\Leftrightarrow 1 - i\bar{Z} + iZ + Z\bar{Z} = 1 + i\bar{Z} - iZ + Z\bar{Z} \Leftrightarrow 2i\bar{Z} - 2iZ = 0 \Leftrightarrow 2i(\bar{Z} - Z) = 0$

$\Leftrightarrow \bar{Z} - Z = 0 \Leftrightarrow \bar{Z} = Z$

Donc $Z \in \mathbb{R}$

Exercice 69

Ecrivons sous forme algébrique

1) $2e^{\left(-i\frac{\pi}{4}\right)} \times e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)} = 2e^{i\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right)} = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i$

2) $\dfrac{2\,e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}}{e^{-i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}} = \frac{2}{3}e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4}\right)} = \frac{2}{3}e^{i\pi} = -\frac{2}{3}$

3) $\dfrac{2\,e^{-i\frac{\pi}{3}}}{3\,e^{-i\left(\frac{5\pi}{6}\right)}} = \frac{2}{3}e^{i\left(-\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{6}\right)} = \frac{2}{3}e^{i\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}i$

Exercice 70

Ecrivons sous forme trigonométrique chacun des nombres suivants

1) $\frac{\tan\theta-i}{\tan\theta+i}=\frac{\sin\theta-i\cos\theta}{\sin\theta-i\cos\theta}=\frac{\cos\theta+i\sin\theta}{-\cos\theta+i\sin\theta}=\frac{\cos\theta+i\sin\theta}{\cos(\pi-\theta)+i\sin(\pi-\theta)}=\frac{e^{i\theta}}{e^{i(\pi-\theta)}}=e^{i(2\theta-\pi)}$

$$=\cos(2\theta-\pi)+i\sin(2\theta-\pi)$$

2) $\frac{1}{1+i\tan\theta}=\frac{\cos\theta}{\cos\theta+i\sin\theta}=\cos\theta\, e^{-i\theta}=\cos\theta\,(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))$ car $\cos\theta>0$

3) $e^{i\theta}+e^{2i\theta}=e^{i\theta}(1+e^{i\theta})=e^{i\theta}\left(e^{i\frac{\theta}{2}}e^{-i\frac{\theta}{2}}+e^{i\frac{\theta}{2}}e^{i\frac{\theta}{2}}\right)=e^{i\theta}\left[e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}}+e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)\right]$

$=2\cos\theta\, e^{i\frac{3\theta}{2}}$ comme $\cos\theta>0$, alors

$$e^{i\theta}+e^{2i\theta}=2\cos\theta\left(\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)+i\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right)$$

4) $\frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}=\frac{\cos\theta+i\sin\theta}{\cos\theta-i\sin\theta}=\frac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}}=e^{2i\theta}=\cos(2\theta)+i\sin(2\theta)$

Exercice 71

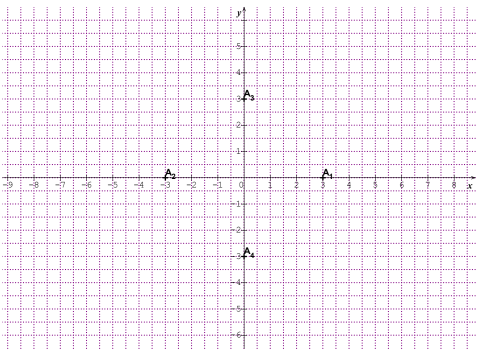
Déterminons les racines quatrième de 81

On a : $Z^4=81\Leftrightarrow Z^4=3^4\Leftrightarrow\left(\frac{Z}{3}\right)^4=1$ or les racines quatrième de 1 sont $1;-1;i$ et $-i$

Donc $Z=3\times1$ ou $Z=3\times(-1)$ ou $Z=3\times i$ ou $Z=3\times(-i)$

Les racines quatrièmes de 81 sont $3;-3;3i$ et $-3i$

Construction des points images



Exercice 72

1) Déterminons les racines n-ième de $-i$

On a $-i=e^{-i\frac{\pi}{2}}$ ainsi $Z^n=e^{-i\frac{\pi}{2}}$

$$Z_k=e^{i\left(-\frac{\pi}{2n}+\frac{2k\pi}{n}\right)};k\in\{0;1;2;\dots\dots;n-1\}$$

Déterminons les racines n-ième de $1+i$

On a : $1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ainsi $Z^n=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

$$Z_k=2^{\frac{1}{2n}}e^{i\left(\frac{\pi}{4n}+\frac{2k\pi}{n}\right)};k\in\{0;1;2;\dots\dots;n-1\}$$

2.a) calculons

$$(9+i)^2=81-1+18i=80+18i$$

2.b) Résolvons dans $\mathbb{C}$

$(E)\Leftrightarrow Z^2+(7-1)Z-8-8i=0$ avec $Z=z^3$

$$\Delta=(7-i)^2+4(8+8i)=49-1-14i+32+32i=80+18i=(9+i)^2$$

Ainsi $Z=\frac{-7+i+9+i}{2}=1+i$ ou $Z=\frac{-7+i-9-i}{2}=-8$

De plus on a :
$(E_1) : z^3 = 1 + i$ et $(E_2) : z^3 = -8$
Résolvons (E_1)
$(E_1): z^3 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ donc $Z_k = 2^{\frac{1}{6}}e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right)}; k \in \{0; 1; 2\}$
D'où $Z = 2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{\pi}{12}}$ ou $Z = 2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ ou $Z = 2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{17\pi}{12}}$
Résolvons (E_2)
$(E_1): z^3 = 2^3e^{i\pi}$ donc $Z_k = 2e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}\right)}; k \in \{0; 1; 2\}$
D'où $Z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $Z = 2e^{i\pi}$ ou $Z = 2e^{i\frac{5\pi}{3}} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

$$S_{\mathbb{C}} = \left\{2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{\pi}{12}};\ 2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{3\pi}{4}};\ 2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{17\pi}{12}}; 2e^{i\frac{\pi}{3}}; 2e^{i\pi}; 2e^{-i\frac{\pi}{3}}\right\}$$

Exercice 73

Déterminons les entiers naturels tels que $\left(1 + i\sqrt{3}\right)^n$ soit un nombre réel positif.
On a $\left(1 + i\sqrt{3}\right)^n = 2^n e^{i\frac{n\pi}{3}}$
Donc $\left(1 + i\sqrt{3}\right)^n \in \mathbb{R}_+ \Leftrightarrow \frac{n\pi}{3} = 2k\pi \Leftrightarrow n = 6k ; k \in \mathbb{Z}_+$

$$n = 6k ; k \in \mathbb{Z}_+$$

Exercice 74

$$\frac{1+Z}{1-Z} = -\overline{\left(\frac{1+Z}{1-Z}\right)} \Leftrightarrow (1+Z)(1-\bar{Z}) = (1-Z)(-1-\bar{Z})$$
$$\Leftrightarrow 1 - \bar{Z} + Z - Z\bar{Z} = -1 + \bar{Z} + Z + Z\bar{Z} \Leftrightarrow 2Z\bar{Z} = 2$$
$$\Leftrightarrow Z\bar{Z} = 1$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{Z\bar{Z}} = 1$$
$$\Leftrightarrow |Z| = 1$$

Exercice 75

1.a) $Z = Re(Z) + i\, Im(Z)$

On a : $|Z| = \sqrt{\left(Re(Z)\right)^2 + \left(Im(Z)\right)^2}$ et $|Z| \geq 0$

Si $Re(Z) \leq 0$, alors $Re(Z) \leq |Z|$

Si $Re(Z) \geq 0$, alors on a

$$|Z|^2 - \left(Re(Z)\right)^2 = \left(Re(Z)\right)^2 + \left(Im(Z)\right)^2 - \left(Re(Z)\right)^2 = \left(Im(Z)\right)^2$$

Or $\left(Im(Z)\right)^2 \geq 0$ Donc $Re(Z) \leq |Z|$

Par suite pour tout nombre complexe Z on a : $Re(Z) \leq |Z|$

b) $Re(Z) = |Z|$ si $Re(Z) \geq 0$ et $\sqrt{\left(Re(Z)\right)^2 + \left(Im(Z)\right)^2} = Re(Z)$

d'où $Re(Z) \geq 0$ et $Im(Z) = 0$

2.a) on a :$|Z_1 + Z_2|^2 = (Z_1 + Z_2)(\overline{Z_1} + \overline{Z_2})$
$$= |Z_1|^2 + |Z_2|^2 + 2\, Re(Z_1 \times \overline{Z_2})(1)$$

Or d'après 1.a) on a : $Re(Z_1 \times \overline{Z_2}) \leq |Z_1 \times \overline{Z_2}|(2)$

D'où $Re(Z_1 \times \overline{Z_2}) \leq |Z_1||\overline{Z_2}|$

De(1) et (2) on obtient : $|Z_1|^2 + |Z_2|^2 + 2Re(Z_1 \times \overline{Z_2}) \leq |Z_1|^2 + |Z_2|^2 + 2|Z_1||\overline{Z_2}|$
$$|Z_1 + Z_2|^2 \leq |Z_1|^2 + |Z_2|^2 + 2|Z_1||\overline{Z_2}|$$
$$|Z_1 + Z_2|^2 \leq |Z_1|^2 + |Z_2|^2 + 2|Z_1||Z_2|$$
$$|Z_1 + Z_2|^2 \leq (|Z_1| + |Z_2|)^2$$

Par suite $|Z_1+Z_2| \leq |Z_1|+|Z_2|$

b) Si $Z_2=\lambda Z_1$ avec $\lambda>0$

on a d'une part

$$|Z_1+Z_2| = |Z_1+\lambda Z_1| = |1+\lambda||Z_1| = (1+\lambda)|Z_1|$$

et d'autre part

$$|Z_1|+|Z_2| = |Z_1|+|\lambda Z_1| = |Z_1|+|Z_1||\lambda| = |1+\lambda||Z_1| = (1+\lambda)|Z_1|$$

Donc Si $Z_2=\lambda Z_1$ avec $\lambda>0$ alors $|Z_1+Z_2| = |Z_1|+|Z_2|$

3.a) Pour $n=2$ on a $|Z_1+Z_2| \leq |Z_1|+|Z_2|$

Supposons qu'il existe un entier naturel $n\geq 2$ tels que

$|Z_1+Z_2+\ldots.+Z_n| \leq |Z_1|+|Z_2|+\cdots..+|Z_n|$

et montrons que

$|Z_1+Z_2+\ldots.+Z_{n+1}| \leq |Z_1|+|Z_2|+\cdots..+|Z_{n+1}|$

on a : $|Z_1+Z_2+\ldots.+Z_n| \leq |Z_1|+|Z_2|+\cdots..+|Z_n|$

d'où $|Z_1+Z_2+\ldots.+Z_n|+|Z_{n+1}| \leq |Z_1|+|Z_2|+\cdots..+|Z_n|+|Z_{n+1}|(1)$

or $|Z_1+Z_2+\ldots.+Z_{n+1}| \leq |Z_1+Z_2+\ldots.+Z_n|+|Z_{n+1}|(2)$

donc de (1) et (2) on déduis que

$|Z_1+Z_2+\ldots.+Z_{n+1}| \leq |Z_1|+|Z_2|+\cdots..+|Z_{n+1}|$

En conclusion

Pour tout entier naturel $n\geq 2$, on a

$|Z_1+Z_2+\ldots.+Z_n| \leq |Z_1|+|Z_2|+\cdots..+|Z_n|$

b) on suppose que $Z_1;\ Z_2;\ \ldots.et\ Z_n$ sont tous non nuls

S'il existe des réels $\lambda_1;\ \lambda_2;\ \lambda_3,\ldots.,\ \lambda_n$ tous strictement positifs tels que pour tout $k=1,\ldots.,n$ on a $Z_k=\lambda_k Z_1$

d'une part $|Z_1+Z_2+\ldots.+Z_n| = |\lambda_1 Z_1+\lambda_2 Z_1+\ldots.+\lambda_n Z_1|$
$= |(\lambda_1+\lambda_2+\ldots.+\lambda_n)Z_1|$
$= (\lambda_1+\lambda_2+\ldots.+\lambda_n)|Z_1|$

D'autre part $|Z_1|+|Z_2|+\cdots..+|Z_n| = |\lambda_1 Z_1|+|\lambda_2 Z_1|+\cdots..+|\lambda_n Z_1|$
$= \lambda_1|Z_1|+\lambda_2|Z_1|+\cdots..+\lambda_n|Z_1|$
$= (\lambda_1+\lambda_2+\ldots.+\lambda_n)|Z_1|$

Par suite $|Z_1+Z_2+\ldots.+Z_n| = |Z_1|+|Z_2|+\cdots..+|Z_n|$

EXERCICE 76

1) L'impédance complexe Z est égale à

$$Z = Z_R+Z_L+Z_C = R+jLw+\frac{1}{jCw} = R+\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)Lw+\frac{-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}{Cw}$$

$$= R-\frac{Lw}{2}-\frac{1}{2Cw}+i\left(\frac{Lw\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2Cw}\right) = \frac{2CRw-LCw^2-1}{2Cw}+i\,\frac{LCw^2\sqrt{3}-\sqrt{3}}{2Cw}$$

La partie réelle de l'impédance complexe Z est donc $R-\frac{Lw}{2}-\frac{1}{2Cw}=\frac{2CRw-LCw^2-1}{2Cw}$

2) la résistance X correspond à la partie imaginaire de Z

On a donc $X=\frac{Lw\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2Cw}=\frac{LCw^2\sqrt{3}-\sqrt{3}}{2Cw}$

3) L'impédance de l'association correspondant au module de Z

On a $|Z|=\left|R-\frac{Lw}{2}-\frac{1}{2Cw}+i\left(\frac{Lw\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2Cw}\right)\right|$

$$= \sqrt{\left(R - \frac{Lw}{2} - \frac{1}{2Cw}\right)^2 + \left(\frac{Lw\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2Cw}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{2CRw - LCw^2 - 1}{2Cw}\right)^2 + \left(\frac{LCw^2\sqrt{3} - \sqrt{3}}{2Cw}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2Cw}\sqrt{(2CRw - LCw^2 - 1)^2 + \left(LCw^2\sqrt{3} - \sqrt{3}\right)^2}$$

4) Le déphase entre l'impédance et le courant est

$$\varphi = \arg(Z)$$

$$\varphi = \arg\left(\frac{2CRw - LCw^2 - 1}{2Cw} + i\,\frac{LCw^2\sqrt{3} - \sqrt{3}}{2Cw}\right)$$

On a $\cos\varphi = \frac{2CRw - LCw^2 - 1}{\sqrt{(2CRw - LCw^2 - 1)^2 + \left(LCw^2\sqrt{3} - \sqrt{3}\right)^2}}$ et

$$\sin\varphi = \frac{LCw^2\sqrt{3} - \sqrt{3}}{\sqrt{(2CRw - LCw^2 - 1)^2 + \left(LCw^2\sqrt{3} - \sqrt{3}\right)^2}}$$

EXERCICE 77

1) Détermination de l'impédance complexe

$$Z = \frac{Z_R \times Z_L}{Z_R + Z_L}$$

$$Z = \frac{RjLw}{R + jLw} = \frac{\left(-\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) RLw}{R + \left(-\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) Lw} = \frac{\left(-\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) RLw}{\left(R - \frac{1}{2}Lw\right) + i\left(\frac{Lw\sqrt{3}}{2}\right)}$$

D'où l'impédance de l'association est

$$|Z| = \left|\frac{\left(-\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) RLw}{\left(R - \frac{1}{2}Lw\right) + i\left(\frac{Lw\sqrt{3}}{2}\right)}\right| = \frac{\left|\left(-\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) RLw\right|}{\left|\left(R - \frac{1}{2}Lw\right) + i\left(\frac{Lw\sqrt{3}}{2}\right)\right|} = \frac{\left|-\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right| |RLw|}{\left|\left(R - \frac{1}{2}Lw\right) + i\left(\frac{Lw\sqrt{3}}{2}\right)\right|}$$

$$= \frac{RLw}{\sqrt{\left(R - \frac{1}{2}Lw\right)^2 + \left(\frac{Lw\sqrt{3}}{2}\right)^2}} = \frac{RLw}{\sqrt{R^2 - RLw + (Lw)^2}}$$

2) Détermination de déphase φ

On a $\varphi = \arg(Z)$

et $Z = \frac{\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)RLw}{\left(R - \frac{1}{2}Lw\right) + i\left(\frac{Lw\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{-RLw + iLRw\sqrt{3}}{(2R - Lw) + iLw\sqrt{3}} = \frac{\left(-RLw + iLRw\sqrt{3}\right)\left((2R - Lw) - iLw\sqrt{3}\right)}{(2R - Lw)^2 + \left(Lw\sqrt{3}\right)^2}$

d'où $\varphi = \arg\left(\frac{\left(-RLw + iLRw\sqrt{3}\right)\left((2R - Lw) - iLw\sqrt{3}\right)}{(2R - Lw)^2 + \left(Lw\sqrt{3}\right)^2}\right)$

3 a) l'amplification d'un filtre est égale au module de la fonction de transfert

Or $T = \frac{1}{1 + jRCw}$ d'où $T = \frac{1}{1 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)RCw} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}RCw\right) + i\left(\frac{RCw\sqrt{3}}{2}\right)}$

Donc $|T| = \frac{1}{\left|\left(1 - \frac{1}{2}RCw\right) + i\left(\frac{RCw\sqrt{3}}{2}\right)\right|} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{1}{2}RCw\right)^2 + \left(\frac{RCw\sqrt{3}}{2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - RCw + (RCw)^2}}$

b) $\varphi = arg(T) = \arg\left(\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}RCw\right) + i\left(\frac{RCw\sqrt{3}}{2}\right)}\right) = -\arg\left(\left(1 - \frac{1}{2}RCw\right) + i\left(\frac{RCw\sqrt{3}}{2}\right)\right)$

Exercice 78

1- **Le nombre complexe z étant solution de l'équation (E), je justifie que –z et $\overline{z}$ sont aussi solution de (E).**

(E) : $z^4 = -4$

Pour –z on a : $(-z)^4 = z^4 = -4$ donc $(-z)^4 = -4$, on en déduit que –z est solution de (E).

Pour $\overline{z}$ on a : $\left(\overline{z}\right)^4 = \overline{(z)^4} = \overline{-4} = -4$ donc $\left(\overline{z}\right)^4 = -4$, on en déduit que $\overline{z}$ est solution de (E).

2- **a) J'écris le nombre complexe z_0 sous forme exponentielle.**

$z_0 = 1 + i$, $|z_0| = \sqrt{2}$ et $\operatorname{Arg}(z_0) = \frac{\pi}{4}$ donc $z_0 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

b) Je vérifie que z_0 est solution de (E).

$(z_0)^4 = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^4 = 4e^{i\pi} = -4 \Rightarrow (z_0)^4 = -4$ donc z_0 est solution de (E).

3- **Je déduis des deux questions précédentes trois autres solutions de l'équation (E).**

z_0 est solution de (E) donc $-z_0 = -1 - i$ et $\overline{z_0} = 1 - i$ sont aussi solutions de (E).

4- **Je justifie que $z_E = -1 + \sqrt{3}$.**

On sait que $z' - z_C = e^{-i\frac{\pi}{3}}(z - z_C)$

$z_E - z_C = e^{-i\frac{\pi}{3}}(z_B - z_C) \Rightarrow z_E = z_C + e^{-i\frac{\pi}{3}}(-1 + i + 1 + i) = -1 - i + \sqrt{3} + i$ donc $z_E = -1 + \sqrt{3}$

5- **Je détermine l'affixe de F**

z_F est l'image du nombre complexe z_D. Donc $z_F - z_C = e^{-i\frac{\pi}{3}}(z_D - z_C) \Rightarrow z_F = z_C + e^{-i\frac{\pi}{3}}(z_D - z_C)$

$z_F = -1 - i + \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1 - i + 1 + i) \Rightarrow z_F = -1 - i + 1 - i\sqrt{3} \Rightarrow z_F = -i\left(1 + \sqrt{3}\right)$ 1-

6-Je démontre que $\frac{z_A - z_E}{z_A - z_F}$ est un nombre réel.

$\frac{z_A - z_E}{z_A - z_F} = \frac{1 + i - \left(-1 + \sqrt{3}\right)}{1 + i + i\left(1 + \sqrt{3}\right)} = \frac{2 - \sqrt{3} + i}{1 + i\left(2 + \sqrt{3}\right)} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}}$ donc $\frac{z_A - z_E}{z_A - z_F} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}}$ d'où $\frac{z_A - z_E}{z_A - z_F}$ est un réel.

7- **Justifie que les points A, E et F sont alignés.**

D'après la question précédente, $\frac{z_A - z_E}{z_A - z_F} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} \in \mathbb{R}+$ donc $Arg\left(\frac{z_A - z_E}{z_A - z_F}\right) = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ on en déduit que les points A, E et F sont alignés.

Situations complexes

Exercice 79

$arg\left(\frac{z-2i}{z-1+i}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow arg\left(\frac{z-2i}{z-(1-i)}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow mes\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi\ , k \in \mathbb{Z}$ où $z_A = 2i$ et $z_B = 1 - i$

$mes\left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ donc $Mes\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right) = \frac{\pi}{2}$ ou $Mes\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right) = -\frac{\pi}{2}$

Par suite, l'ensemble des points M est le cercle de diamètre $[AB]$ privé des points A et B

Exercice 80

Les sommets d'un hexagone sont les points images des nombres complexes solution de L'équation (E) : $Z^6 = 1$. En effet $Z^6 = 1 \Leftrightarrow Z^6 = e^{i0}$

Les solutions sont les nombres complexes de la forme $Z_k = e^{i\left(\frac{2k\pi}{6}\right)}$; $k \in \{0; 1; 2; 3 ; 4 ;\ 5\}$ soit

$Z_k = e^{i\frac{k\pi}{3}}$; $k \in \{0; 1; 2; 3 ; 4 ;\ 5\}$

Donc $Z_0 = 1$; $Z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$; $Z_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$; $Z_3 = e^{i\pi}$; $Z_4 = e^{-2i\frac{\pi}{3}}$ et $Z_5 = e^{-i\frac{\pi}{3}}$

Si M_0 ; M_1 ; M_2 ; M_3 ; M_4 et M_5 sont les points images respectives des nombres complexes Z_0 ; Z_1 ; Z_2 ; Z_3 ; Z_4 et Z_5, alors M_0 ; M_1 ; M_2 ; M_3 ; M_4 et M_5 appartiennent au cercle de centre O et de rayon 1, donc $mes\left(\widehat{\overrightarrow{OM_k} ;\ \overrightarrow{OM_{k+1}}}\right) = \frac{\pi}{3}$ par suite OM_kM_{k+1} est un triangle équilatéral.

Connaissant A ici M_0, le triangleOM_kM_{k+1} étant équilatéral on utilise le rayon pour placer successivement sur le cercle à partir du point A les autres points M_1 ; M_2 ; M_3 ; M_4 et M_5.

Ainsi nous avons construit l'hexagone $M_0\ M_1M_2\ M_3M_4M_5$..

7 FONCTIONS EXPONENTIELLES ET FONCTIONS PUISSANCES

I. LA SITUATION D'APPRENTISSAGE

- Apres la lecture de la situation d'apprentissage (par le professeur, par un élève et une lecture silencieuse des élèves), l'enseignant pourra s'assurer que les élèves ont bien compris le texte.

- Il pourra ensuite faire dégager les constituants de la situation à travers une ou des questions du type :

Constituants de la situation	Exemples de questions possibles	Réponses possibles des élèves
Contexte	-Où se déroule la situation ? -Qu'a fait l'étudiant stagiaire ? -Par quelle fonction est modélisée l'évolution de la masse de médicament dans le sang ?	-A l'infirmerie de mon établissement. -Il a donné un médicament à un patient qui l'a pris aussitôt -Par la fonction $M(t)= 50.e^{-0,75t}$
Circonstances	-Que veut faire l'étudiant stagiaire ? Que fait-il pour cela ? -Comment procède-t-il ?	-Il désire visualiser l'évolution de la masse M en fonction du temps. -Il sollicite mon professeur de SVT qui à son tour nous associe.
Tâches	-Que font les élèves pour aider l'étudiant stagiaire à trouver la réponse à sa préoccupation ?	-Ils font des recherches sur les fonctions comportant la fonction exponentielle népérienne.

Le professeur utilisera la tâche énoncée par ses élèves pour faire la synthèse de la situation et présentera le plan de la leçon. Il devra dans la mesure du possible se référer à la situation durant tout le déroulement de la leçon.

II. DECOUVERTE DES HABILETES

<u>ACTIVITE 1 :</u> Définition et propriétés fondamentales

- L'objectif de cette activité est de connaitre la définition et les propriétés de la fonction exponentielle népérienne.
- Réponses aux questions de l'activité.
  1. La fonction exp est définie sur IR (car la fonction ln réalise une bijection de $]0;+\infty[$ dans IR)
  2. La fonction exp a un signe strictement positif, car la fonction exp réalise une bijection de IR dans $]0;+\infty[$.
  3. $\exp(lnx) = x$ pour tout x strictement positif.
  4. $\ln(\exp(x)) = x$ pour tout nombre réel x.
  5. $\exp(0) = 1$ et $\exp(1) = e$.
  6. $\ln(e^r) = \ln(\ln(r)^{-1}) = r$ et $\exp(r) = \exp(\ln((\ln(r)^{-1}) = e^r$
  7. $\forall y \in]0;+\infty[, \forall x \in$ IR, $e^x = y \Leftrightarrow x = lny$
- Corrigé des exercices de fixation

  <u>Exercice 1</u>

  1. V ; 2. F ; 3. V ; 4. F ; 5. F ; 6. V ; 7. F ; 8. V ; 9. V

<u>ACTIVITE 2 :</u> Propriétés algébriques

- L'objectif de cette activité est de connaitre et utiliser les propriétés algébriques de la fonction exponentielle népérienne
- Réponses aux questions de l'activité.

1. $a + b = \ln(e^{a+b})$ et $a + b = lne^a + lne^b = \ln(e^a \times e^b)$.
   Donc : $\ln(e^{a+b}) = \ln(e^a \times e^b)$; par suite : $e^{a+b} = e^a \times e^b$.
2. $e^a \times e^{-a} = e^{a-a} = e^0 = 1$ donc $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$ ou $e^a = \frac{1}{e^{-a}}$
3. $e^{a-b} = e^{a+(-b)} = e^a \times e^{-b}$. Comme $e^{-b} = \frac{1}{e^b}$, donc $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$.
4. On a :$\ln(e^{ra}) = ra$ et $\ln((e^a)^r) = r\ln(e^a) = ra$. Donc : $\ln(e^{ra}) = \ln((e^a)^r)$; par suite : $(e^a)^r = e^{ra}$.

- Corrigé des exercices de fixation

  <u>Exercice 2</u>

  a) e^4 ; b) e^{-27}; c) $e^0 = 1$; d) e^{-1}

  <u>Exercice 3</u>

  a) e^6 ; b) e^{-2}

<u>ACTIVITE 3 :</u> Sens de variation de la fonction exponentielle

- L'objectif de cette activité est de connaitre le sens de variation de la fonction exponentielle népérienne et les propriétés d'égalités et d'inégalités.
- Réponses aux questions de l'activité.

1. a) Comme la fonction exp est la bijection réciproque de la fonction ln et que la fonction ln est croissante donc la fonction exp est croissante sur IR.
   b) On a : $e^a = e^b \Leftrightarrow lne^a = lne^b \Leftrightarrow a = b$ (car la fonction ln est bijective)
2. a) $e^a < e^b \Rightarrow lne^a < lne^b \Rightarrow a < b$ (car la fonction ln est croissante ; la fonction exp est aussi croissante)
   b) $e^a < 1 \Rightarrow e^a < e^0 \Rightarrow a < 0$

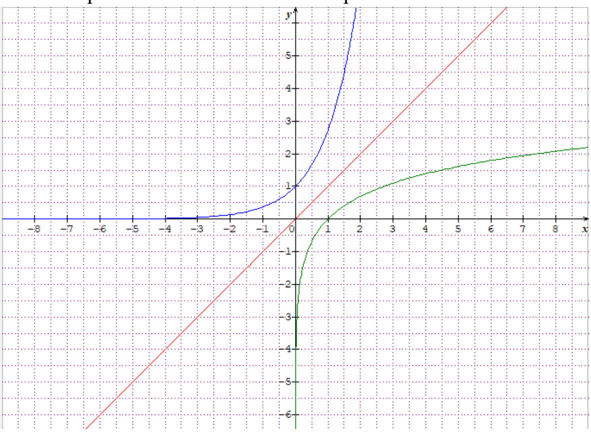
- Corrigé de l'exercice de fixation
  Exercice 4

a) F ; b) V ; c) F ; d) V.

ACTIVITE 4: Limites, dérivée et représentation graphique de la fonction exp

- L'objectif de cette activité est de connaitre les limites de références de la fonction exponentielle, la dérivée de la fonction exponentielle et de construire la représentation graphique de la fonction exp.
- Réponses aux questions de l'activité.

1. Courbe représentative de la fonction exp :



2. La fonction exp est définie comme bijection réciproque de la fonction ln ; or la fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$ d'où la fonction exp est dérivable sur $\ln(]0;+\infty[\,) = \text{IR}$.
   Posons : $y = \exp(x)$, donc : $x = \ln(y)$. On a : $\frac{dx}{dy} = \frac{d(\ln(y))}{dy} = \frac{1}{y}$, d'où $\frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{y}$ c'est-à-dire : $\frac{dy}{dx} = y = \exp(x)$. Soit : $\frac{d(\exp(x))}{dx} = \exp(x)$.
   On conclut que : $(\exp)'(x) = \exp(x)$.

3. a) Tableau de variation de la fonction ln puis celui de la fonction exp.

x	$0 \qquad\qquad +\infty$
$(lnx)'$	$+$
lnx	$-\infty \nearrow +\infty$

x	$-\infty \qquad\qquad +\infty$
$(\exp(x))'$	$+$
$\exp(x)$	$0 \nearrow +\infty$

b) $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ **(Revoir la numérotation en 3.b)**

4. a) (C_f) admet une branche parabolique de direction celle de (OJ) en $+\infty$. Donc :

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ **(Rectifier la numérotation)**

b) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^0}{x} = (e^x)'(0) = e^0 = 1$; donc : $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 5

a) $-\infty$; b) 0 ; c) $+\infty$; d) 1 ; e) $+\infty$; f) $+\infty$.

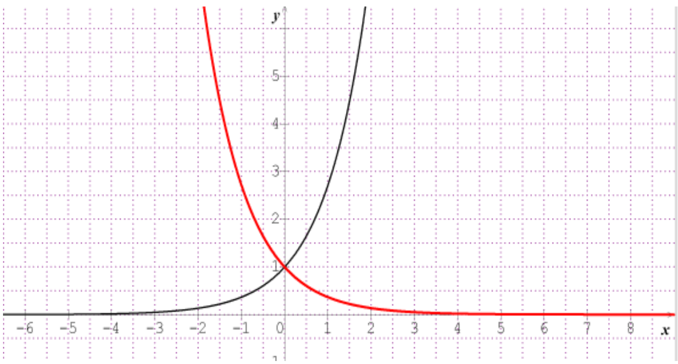
Exercice 6

Construction de $f : x \longmapsto e^{-x}$.

Soit (C') la courbe représentative de la fonction f et (C) la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto e^x$.

(C') est l'image de (C) par la symétrie orthogonale d'axe (OJ).

(C') est en rouge.



ACTIVITE 5: Ensemble de définition et dérivée des fonctions du type : e^u

- L'objectif de cette activité est de connaitre l'ensemble de définition et la dérivée des fonctions du type e^u .
- Réponses aux questions de l'activité.

1. $x \in D_f \Leftrightarrow x \in D_u$, autrement dit : $D_f = D_u$.

2. La fonction u *est* dérivable sur K donc la fonction e^u est dérivable sur K comme composée de fonctions dérivables sur K.
3. $e^{u(x)} = e^x o\ u(x) \Rightarrow \left(e^{u(x)}\right)' = \left(u(x)\right)' \times (e^x)'o\left(u(x)\right) = u'(x)e^{u(x)}$

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 7

Bonne réponse : b)

Exercice 8

a) $f'(x) = 2e^{2x+1}$; b) $g'(x) = 4xe^{x^2}$; c) $k'(x) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}$; d) $\frac{(3x^2-2x+3)e^{3x-1}}{(x^2+1)^2}$

ACTIVITE 6: Equations faisant intervenir la fonction exp.

- L'objectif de cette activité est de savoir résoudre des équations faisant intervenir la fonction exp.
- Réponses aux questions de l'activité.

1. X = $e^x, X > 0$ donc E_V = IR et $e^{2x} - 2e^x = 15 \Leftrightarrow X^2 - 2X = 15$.

   On obtient $X^2 - 2X - 15 = 0$. $\Delta = 64$. X =$-$ 3 ou X = 5. Soit $e^x = -3$ ou $e^x = 5$.
   On a : $x = ln5$. Donc S = { $ln5$}.
2. On peut effectuer un changement de variable et appliquer la propriété :
   $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$.

Exercice 9

a) E_V = IR. $e^{3x} - 5e^x = 0 \Leftrightarrow e^x(e^{2x} - 5) = 0$. Donc S = $\{\frac{ln5}{2}\}$.
b) E_V = IR . $e^{3x+4} = 2$. Donc S = $\{\frac{-4+ln2}{3}\}$.
c) E_V = IR .$e^{sinx} = \sqrt{e} \Leftrightarrow e^{sinx} = e^{\frac{1}{2}}$. Soit S = $\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
d) E_V = IR . $e^{-x} = 2e^x \Leftrightarrow e^{2x} = \frac{1}{2}$. Donc S = $\{\frac{-ln2}{2}\}$.
e) E_V = IR . $e^{2x} - 3e^x + 3 = 0 \Leftrightarrow X^2 - 3X + 3 = 0$, avec $X = e^x, X > 0$. Donc S =$\emptyset$.
f) E_V = IR . $e^{3x}(e^{x+3} - 1) = 0$. Donc S = $\{-3\}$.

ACTIVITE 7: Inéquations faisant intervenir la fonction exp.

- L'objectif de cette activité est de savoir résoudre des inéquations faisant intervenir la fonction exp.
- Réponses aux questions de l'activité.
  E_V = IR . X = $e^x, X > 0$ donc $2e^{2x} - 3e^x - 2 < 0 \Leftrightarrow 2X^2 - 3X - 2 < 0$.
  $2e^{2x} - 3e^x - 2 < 0 \Leftrightarrow 2(e^x - 2)\left(e^x + \frac{1}{2}\right) < 0$.
  D'après le tableau de signes : S = $]-\infty; ln2[$.
- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 10 (Renuméroter) pas 11 plutôt 10

a) $E_V = \text{IR}$. X = $e^x, X > 0$ alors : $E_V = \text{IR}$ et $3e^{2x} - 16e^x + 5 \geq 0 \Leftrightarrow$ $3(e^x - 5)\left(e^x - \frac{1}{3}\right) \geq 0$.

D'après le tableau de signe : S = $]-\infty; -ln3] \cup [ln5; +\infty[$.

b) $E_V = \text{IR}$. $e^{2x+3} < ln3$. Donc S = $]-\infty; \frac{-3+\ln(ln3)}{2}[$.

c) $\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1} < -1$. $E_V = \text{IR*}$ et $\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1} + 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{2e^{2x}}{e^{2x}-1} < 0$. Donc : S = $]-\infty; 0[$.

d) $E_V = \text{IR}$ et $2e^{2x+1} - 3e^x + 1 < 2e \Leftrightarrow (2e)e^{2x} - 3e^x + (1-2e) < 0$.
X = $e^x, X > 0$ alors : $(2e)X^2 - 3X + (1-2e) < 0$. $\Delta = 16e^2 - 8e + 9 > 0$. On a : $X = \frac{3-\sqrt{16e^2-8e+9}}{4e} < 0$ ou $X = \frac{3+\sqrt{16e^2-8e+9}}{4e}$.
Donc S $=]-\infty; \ln(\frac{3+\sqrt{16e^2-8e+9}}{4e})[$.

ACTIVITE 8: Primitive de $u'e^u$

- L'objectif de cette activité est de connaitre et de déterminer une primitive d'une fonction de la forme $u'e^u$.
- Réponses aux questions de l'activité.

a) Cas 1) $f'(x) = -5e^{-5x+9}$. Soit G une primitive de g : $g(x) = \frac{1}{25}f'(x)$ *donc* :
$G(x) = \frac{1}{25}f(x) = \frac{1}{25}e^{-5x+9}$.
Cas 2) $f'(x) = -sinxe^{cosx}$. Soit G une primitive de g : $g(x) = -f'(x)$ *donc* :
$G(x) = -f(x) = -e^{cosx}$.
Cas 3) $f'(x) = 6(x-1)e^{3x^2-6x-11}$. Soit G une primitive de g : $g(x) = \frac{1}{6}f'(x)$ *donc* :
$G(x) = \frac{1}{6}f(x) = \frac{1}{6}e^{3x^2-6x-11}$.
Cas 4) $f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$. Soit G une primitive de g : $g(x) = f'(x)$ *donc* :
$G(x) = f(x) = u'(x)e^{u(x)}$.

b) Conjecture : Sur un intervalle K, toute fonction de la forme $u'e^u$ admet pour primitive une fonction de la forme $e^u + c, c \in \mathbb{R}$.

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 11 (Renuméroter) pas 12 plutôt 11

a) Soit F une primitive de f sur IR. On a : F$(x) = e^{4x-2}$.
b) Soit G une primitive de g sur IR. On a : G$(x) = e^{x^2} + 1$.
c) Soit H une primitive de h sur IR. On a : H$(x) = \frac{1}{2}e^{x^2+4x+1} - 3$.

Exercice 12 (Renuméroter) pas 13 plutôt 12

Soit $f(x) = \frac{1}{2cos^2x}e^{tanx}, x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$. On a : $F(x) = \frac{1}{2}e^{tanx}$.

<u>ACTIVITE 9:</u> Définitions et propriétés algébriques de la fonction exponentielle de base $\boldsymbol{a}$ ($\boldsymbol{a > 0}$ et $\boldsymbol{a \neq 1}$)

- L'objectif de cette activité est de connaitre la définition de la fonction exponentielle de base a ainsi que ses propriétés algébriques et d'utiliser ces propriétés pour effectuer des calculs.
- Réponses aux questions de l'activité.
  1. exp_a est définie sur IR.
  2. a) $a^{x+y} = e^{(x+y)lna} = e^{xlna+ylna} = e^{xlna} \times e^{ylna} = e^{\ln a^x} \times e^{\ln a^y} = a^x \times a^y$

     b) 1 = $a^0 = a^{x-x} = a^x \times a^{-x}$ donc $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

     c) $a^{x-y} = e^{(x-y)lna} = e^{xlna-ylna} = e^{xlna} \times e^{-ylna} = e^{\ln a^x} \times e^{\ln a^{-y}}$

     Par suite $a^{x-y} = a^x \times a^{-y} = a^x \times \frac{1}{a^y} = \frac{a^x}{a^y}$

d) $(\frac{a}{b})^x = e^{xln(\frac{a}{b})} = e^{xlna-xlnb} = e^{xlna} \times e^{-xlnb} = e^{\ln a^x} \times e^{\ln b^{-x}}$

Soit $(\frac{a}{b})^x = a^x \times b^{-x} = a^x \times \frac{1}{b^x} = \frac{a^x}{b^x}$

e) Il faut rectifier la formule dans le document.

$(ab)^x = e^{xln(ab)} = e^{xlna+xlnb} = e^{xlna} \times e^{xlnb} = e^{\ln a^x} \times e^{\ln b^x}$

Soit $(ab)^x = a^x \times b^x$

f) $(a^x)^y = e^{yln(a^x)} = e^{xylna} = a^{xy}$.

- Corrigé des exercices de fixation

<u>Exercice 13 (Renuméroter) pas 14 plutôt 13</u>

a) $f(x) = e^{xln2}$; b) $g(x) = e^{xln(\frac{1}{2})} = e^{-xln2}$; c) $h(x) = (\frac{3}{5})^x = e^{xln(\frac{3}{5})}$.

<u>Exercice 14 (Renuméroter) pas 15 plutôt 14</u>

$\sqrt{3}ln6 = ln6^{\sqrt{3}}$; $ln7^{\pi} = \pi ln7$; $\sqrt{2}ln5 = ln5^{\sqrt{2}}$.

<u>Exercice 15 (Renuméroter) pas 16 plutôt 15</u>

a) $2^{2-x} = 4 \times 2^{-x}$; b) $(\frac{2}{5})^x$; c) $7^{2-3x} = 49 \times 7^{-3x}$.

<u>ACTIVITE 10:</u> Etude de la fonction $\boldsymbol{exp_a}$ et propriétés de comparaison

- L'objectif de cette activité est d'étudier la fonction exponentielle de base a (limites, variations et représentation graphique)
- Réponses aux questions de l'activité.

1. Soit $f(x) = a^x = e^{xlna}$. $D_f = \mathbb{R}$. On a : $f(x) > 0$ quelque soit x. De plus la fonction exponentielle étant bijective, donc la fonction exp_a est une bijection de IR sur $]0; +\infty[$.
2. Limites en fonction de la valeur de a. Puisque $a > 0$ et $a \neq 1$, donc :
   Pour $a > 1$, $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$.
   Pour $0 < a < 1$, $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$.

3.a) La fonction exp_a est dérivable sur IR comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
$\left(exp_a(x)\right)' = (e^{xlna})' = lnae^{xlna}$. Donc $\left(exp_a(x)\right)' = lna \times a^x$.

b) Pour $0 < a < 1, lna < 0$: donc pour $x \in \mathbb{R}$, $\left(exp_a(x)\right)' < 0$; d'où la fonction exp_a est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

c) Pour $a > 1, lna > 0$: donc pour $x \in \mathbb{R}$, $\left(exp_a(x)\right)' > 0$; d'où la fonction exp_a est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

4. Tableau de variation :

Pour $0 < a < 1$

x	$-\infty$ $\quad$ $-\infty$
$\left(exp_a(x)\right)'$	$-$
exp_a	$+\infty$ ↘ 0

Pour $a > 1$

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$\left(exp_a(x)\right)'$	$+$
exp_a	0 ↗ $+\infty$

5. Branches paraboliques :

- Si $0 < a < 1$: $\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{a^x}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{xlna}}{x}$. En posant X = $xlna$, on a : $\lim_{X\to+\infty} \frac{e^X}{\frac{1}{lna}X} = -\infty$. Donc la courbe de exp_a a une branche parabolique de direction celle de (OJ) en $-\infty$.
- Si $a > 1$: $\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{xlna}}{x}$. En posant X = $xlna$, on a : $\lim_{X\to+\infty} \frac{e^X}{\frac{1}{lna}X} = +\infty$. Donc la courbe de exp_a a une branche parabolique de direction celle de (OJ) en $+\infty$.

6. a) $a^x = a^y \Leftrightarrow e^{xlna} = e^{ylna} \Leftrightarrow xlna = ylna \Leftrightarrow x = y$.

b) Si $0 < a < 1$, on a : $a^x < a^y \Leftrightarrow e^{xlna} < e^{ylna} \Leftrightarrow xlna < ylna$
$\Leftrightarrow (x-y)lna < 0$
$\Leftrightarrow x - y > 0$ car $lna < 0$
$\Leftrightarrow x > y$.

b) Si $a > 1$ on a : $a^x > a^y \Leftrightarrow e^{xlna} > e^{ylna} \Leftrightarrow xlna > ylna \Leftrightarrow (x-y)lna > 0$
$\Leftrightarrow (x-y)lna > 0 \quad \Leftrightarrow x - y > 0$ car $lna > 0$
$\Leftrightarrow x > y$.

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 16 (Renuméroter) pas 17 plutôt 16

Soit $f(x) = 5^x = e^{xln5}$.

On a : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.

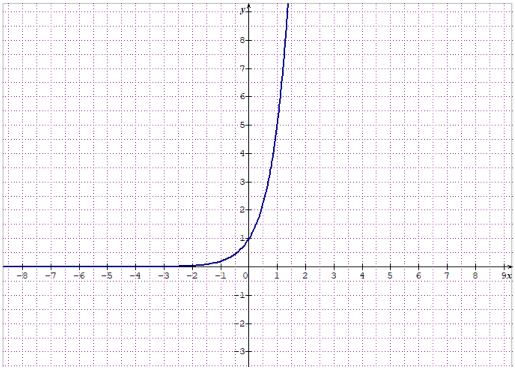
La courbe de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $-\infty$.

La courbe de f admet une branche parabolique de direction celle de (OJ) en $+\infty$.

Sens de variation :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \ln 5\, e^{x\ln 5} > 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

On a :



<u>Exercice 17 (Renuméroter) pas 18 plutôt 17</u>

E_V = IR. $2 \times 9^x - 5 \times 3^x + 2 = 0 \Leftrightarrow 2 \times 3^{2x} - 5 \times 3^x + 2 = 0$. Posons X = 3^x, X > 0.
On a : $X = \frac{1}{4}$ ou $X = 2$. Soit S = $\{\frac{ln2}{ln3}; \frac{-ln4}{ln3}\}$.

<u>Exercice 18 (Renuméroter) pas 19 plutôt 18</u>

E_V = IR. $2 \times 9^x - 5 \times 3^x + 2 > 0 \Leftrightarrow 2 \times 3^{2x} - 5 \times 3^x + 2 > 0$. Posons X = 3^x, X > 0.
On a $2X^2 - 5X + 2 = 0$ pour $X = \frac{1}{4}$ ou $X = 2$. Soit $x = \frac{ln2}{ln3}$ ou $x = \frac{-ln4}{ln3}$.

D'après le tableau de signes, on obtient : S = $]-\infty; \frac{-ln4}{ln3}[\cup]\frac{ln2}{ln3}; +\infty[$.

<u>Exercice 19 (Renuméroter) pas 20 plutôt 19</u>

E_V = IR. $2^x < 2^{-x} \Leftrightarrow 2^{2x} < 1 \Leftrightarrow e^{2x\ln x} < e^0 \Leftrightarrow 2x\ln 2 < 0$. Donc S = $]-\infty; 0[$.

<u>Exercice 20 (Renuméroter) pas 21 plutôt 20</u>

E_V = IR. $0{,}5^x > 6 \Leftrightarrow xln0{,}5 > ln6$ or $\ln 0{,}5 < 0$. Donc S = $]-\infty; \frac{ln6}{ln0{,}5}[$.

<u>Exercice 21</u>

<u>(Renuméroter) pas exercice 22 plutôt exercice 23 à supprimer ici et à déplacer en exercice de fixation de l'activité 12</u>

<u>ACTIVITE 11:</u> Propriétés algébriques et étude de la fonction puissance

- L'objectif de cette activité est d'étudier la fonction puissance (limites, variation et représentation graphique) et d'utiliser les propriétés algébriques de la fonction puissance.
- Réponses aux questions de l'activité.
  (Modifier l'ordre des questions 1 et 2)

1. Ensemble de définition : On a : $f(x) = x^\alpha = e^{\alpha lnx}$ alors $D_f =]0;+\infty[$.
2. $f(x) = x^\alpha = e^{lnx^\alpha} = e^{\alpha lnx}$
3. f est dérivable sur$]0;+\infty[$ comme composée de fonctions dérivable sur$]0;+\infty[$.
   $\forall x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = (\alpha lnx)'e^{\alpha lnx}$; soit $f'(x) = \frac{\alpha}{x}x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$.
4. Signe de $f'(x)$
   Pour $x > 0, si\ \alpha < 0$, alors $f'(x) < 0$. Pour $x > 0, si\ \alpha > 0$, alors $f'(x) > 0$.

5.a) Si $\alpha > 0$, $f(x) = x^\alpha = e^{\alpha lnx}$. On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} f(x) = +\infty$.

b) Si $\alpha < 0$, $f(x) = x^\alpha = e^{\alpha lnx}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} f(x) = +\infty$.

6.a) Comme pour $\alpha < 0$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ donc la courbe de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ qui est l'axe (OI).

b) Pour $0 < \alpha < 1$, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x^{\alpha-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{(\alpha-1)lnx} = 0$

car $\alpha - 1 < 0$. Donc la courbe de f admet une branche parabolique de direction celle de (OI) en $+\infty$.

c) Pour $\alpha > 1$, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x^{\alpha-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{(\alpha-1)lnx} = +\infty$ car $\alpha - 1 > 0$. Donc la courbe de f admet une branche parabolique de direction celle de (OJ) en $+\infty$.

7. Tableau de variation de f.

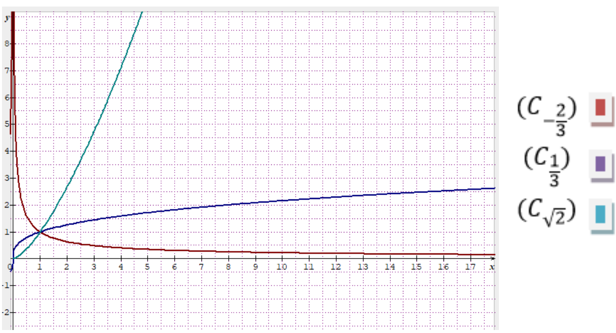
Pour $\alpha < 0$:

x	0 $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$+\infty \searrow 0$

Pour $\alpha > 0$:

x	0 $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$0 \nearrow +\infty$

8. Courbe de la fonction f pour α prenant les valeurs respectives : $-\frac{2}{3}$; $\frac{1}{3}$ et $\sqrt{2}$.



ACTIVITE 12: **Etude des fonctions du type : $x \longmapsto (u(x))^{\alpha}$**

- L'objectif de cette activité est d'étudier les fonctions puissances du type $x \longmapsto (u(x))^{\alpha}$ (limites, variations et représentation graphique).
- Réponses aux questions de l'activité
- Cette activité est traitée sous forme d'exemple.
- Corrigé des exercices de fixation

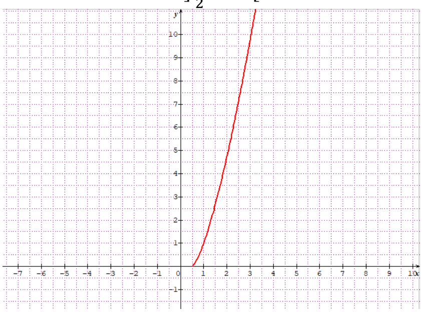
Exercice 22 (Renuméroter) pas 23 plutôt 22

1- F ; 2- V ; 3- V.

Exercice 23 (Renuméroter) pas 24 plutôt 23. C'est l'exercice qui a été déplacé

- Soit $f(x) = (2x-1)^{\sqrt{2}}$. **Revoir l'intervalle d'étude : pas $]0;+\infty[$ mais dérivable sur $]\frac{1}{2};+\infty[$.**
- On a : $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{1}{2} \\ >}} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.
- La courbe de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $-\infty$.
- La courbe de f admet une branche parabolique de direction celle de (OJ) en $+\infty$.
- Dérivée: f est dérivable sur $]\frac{1}{2};+\infty[$ et $\forall x \in \ ]\frac{1}{2};+\infty[,\ f'(x) = 2\sqrt{2}(2x-1)^{\sqrt{2}-1}$.

  et $f'(x) \geq 0$ sur $]\frac{1}{2};+\infty[$.
- f est strictement croissante sur $]\frac{1}{2};+\infty[$.
- On a :



Exercice 24 (Renuméroter) pas 25 plutôt 24

a) g'(x) $= \sqrt{7}(-2e^{-2x})(1+e^{-2x})^{\sqrt{7}}$; b) g'(x) $= ln2(2x - e^{-x})(x^2 + e^{-x})^{ln2-1}$

c) g'(x) $= ln2(3e^{x} - e^{-x})(3e^{x} + e^{-x})^{ln2-1}$.

ACTIVITE 13: **Primitives de $u'u^{\alpha}$**

- L'objectif de cette activité est de déterminer des primitives des fonctions du type $u'u^{\alpha}$.
- Réponses aux questions de l'activité

1. La fonction : $x \longmapsto \frac{(u(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ a pour dérivée la fonction : $x \longmapsto (u(x))'(u(x))^{\alpha}$.
2. Une primitive sur I de la fonction :$x \longmapsto (u(x))'(u(x))^{\alpha}$ est la fonction : $x \longmapsto \frac{(u(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.

- Corrigé de l'exercice de fixation

<u>Exercice 25 (Renuméroter) pas 26 plutôt 25</u>

a) $f(x) = (e^x)^{1+ln2} = (e^x)'(e^x)^{ln2}$, donc une primitive sur ℝ de f est la fonction : $x \longmapsto \frac{(e^x)^{1+\,ln2}}{1+\,ln2}$.

b) $g(x) = (1 - 3e^{-3x})(x + e^{-3x})^{-1+ln3}$, donc une primitive sur ℝ de f est la fonction : $x \longmapsto \frac{(x+e^{-3x})^{ln3}}{ln3}$.

<u>ACTIVITE 14:</u> Croissance comparée des fonctions : $x \longmapsto lnx$, $x \longmapsto e^x$ et $x \longmapsto x^{\alpha}$

- L'objectif de cette activité est de connaitre les propriétés relatives à la croissance comparée des fonctions logarithme népérien, exponentielles et puissances et d'étudier les limites sur la croissance comparée.
- Réponses aux questions de l'activité

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{lnx}{x^{\alpha}} = \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{lnX}{X} \times \frac{1}{\alpha} = 0$ (Poser X = x^{α})

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^{\alpha}} = \lim\limits_{X\to+\infty} (\frac{e^X}{X})^{\alpha} \times \frac{1}{\alpha^{\alpha}} = +\infty$ (Poser X = $\frac{x}{\alpha}$)

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} x^{\alpha}lnx = \lim\limits_{\substack{X\to0\\>}} \frac{1}{\alpha}XlnX = 0$ (Poser X = x^{α})

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\alpha}e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x^{\alpha}}} = 0$

- Corrigé de l'exercice de fixation

<u>Exercice 26 (Renuméroter) pas 27 plutôt 26</u>

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{3x+1}-e^x}{x^3-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^3}[\frac{e^{2x+1}-1}{(1-\frac{1}{x^3})}] = +\infty.$

III. DES QUESTIONS D'EVALUATION

- **<u>Question 1 :</u> Comment déterminer l'ensemble de définition des fonctions du type $e^{u(x)}$?**
  <u>Solution de l'exercice non corrigé</u>

g(x) = $e^{\frac{1}{2-\sqrt{x}}}$. $D_g =]0;4[\cup]4;+\infty[$

- **<u>Question 2 :</u> Comment résoudre une équation comportant des exponentielles ?**
  <u>Solution de l'exercice non corrigé</u>
  S = $\{-\sqrt{1+ln3};\sqrt{1+ln3}\}$
- **<u>Question 3 :</u> Comment résoudre une inéquation comportant des exponentielles ?**
  <u>Solution de l'exercice non corrigé</u>
  S = $]-\infty;-\frac{\sqrt{2}}{2}[\cup]\frac{\sqrt{2}}{2};+\infty[$.
- **<u>Question 4 :</u> Comment résoudre une équation du type $ae^{2x}+be^{x}+c=0$?**
  <u>Solution de l'exercice non corrigé</u>

  S = $\{ln5\}$

IV. MES SEANCES D'EXERCICES

➤ **Exercices de fixation**

- **Propriétés algébriques de la fonction exponentielle népérienne**

<u>Exercice 1</u>

1.V ; 2.F ; 3.V ; 4.F ; 5.F ; 6.V ; 7.F ; 8.V ; 9.V

<u>Exercice 2</u>

A = 3 ; B = $\frac{1}{5}$; C = $3e^2$; D = $\frac{1}{2}e$; E = $\frac{1}{6}e^{\frac{1}{2}}$ ou $E=\frac{1}{6}\sqrt{e}$; F = $\frac{5}{2}$; G = $5^3=125$; H = $\frac{2}{3e}$; I = $\frac{x+1}{x-2}$.

<u>Exercice 3</u>

R = e^5 ; S = e^{-29} ; T = e^x ; U = e^x ; V = e^{-6x}.

<u>Exercice 4</u>

a) $\ln\left(e^{-\frac{2}{3}}\right)=-\frac{2}{3}$; b) $e^{ln3-1}=\frac{3}{e}$; c) $e^{5ln3}-3e^{ln7}=222$;
d) $e^{\ln(x^2-1)}+e^{\ln(-2x+3)}=x^2-2x+2$.

- **Résolution d'équations et inéquations comportant exponentielle**

<u>Exercice 5</u>

a) $S_{\mathrm{IR}}=\{\frac{3}{2}\}$; b) $S_{\mathrm{IR}}=\{ln2\}$; c) $S_{\mathrm{IR}}=\emptyset$ ou { } ; d) $S_{\mathrm{IR}}=\{0\}$; e) $S_{\mathrm{IR}}=\{\frac{-1+ln3}{4}\}$;
f) $S_{\mathrm{IR}}=\{0\}$.

<u>Exercice 6</u>

a) $S_{\mathrm{IR}}=\{0;ln2\}$; b) $S_{\mathrm{IR}}=\{0\}$; c) $S_{\mathrm{IR}}=\{\ln 2;\ln 3\}$; d) $S_{\mathrm{IR}}=\{ln4\}$.

Exercice 7

a) $S_{\text{IR}} =]\frac{1+ln3}{3}; +\infty[$; b) $S_{\text{IR}} =]6; +\infty[$; c) $S_{\text{IR}} =]7; +\infty[$; d) $S_{\text{IR}} =]-\infty; -\frac{1}{3}[$.

Exercice 8

a) $S_{\text{IR}} =]-\infty; 0] \cup [ln2; +\infty[$; b) $S_{\text{IR}} = \emptyset$; c) $[ln3; +\infty[$; d) $S_{\text{IR}} =]-\infty; ln2]$.

- **Résolution de systèmes d'équations comportant exponentielle dans IR X IR**

Exercice 9

a) $S_{\text{IR X IR}} = \{(ln4; 0)\}$; b) $S_{\text{IR X IR}} = \{(0; 0); (ln2; -ln2)\}$;
c) $S_{\text{IR X IR}} = \{(-5; 3); (3; -5)\}$.

- **Calcul de limites d'une fonction comportant exponentielle**

Exercice 10

- $\lim_{x \to +\infty} (x^2 + e^x) = +\infty$
- $\lim_{x \to +\infty} (x - 4e^x) = \lim_{x \to +\infty} x\left(1 - \frac{4e^x}{x}\right) = -\infty$
- $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x}-2}{e^{3x}+1} = 0$
- $\lim_{x \to +\infty} (x^2 - x + 1)e^{-x} = 0$
- $\lim_{x \to -\infty} \frac{5-e^{-x}}{1+e^{2x}} = -\infty$
- $\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x}-1}{x} = 2$
- $\lim_{x \to 0} \frac{xe^x}{e^x-1} = 1$.

- **Calcul de dérivées d'une fonction comportant exponentielle**

Exercice 11

a) $f(x) = (2x+1)e^{-x}$. f est dérivable sur IR et : $f'(x) = e^{-x}(-2x+1)$.

b) $g(x) = \frac{e^{2x}-2}{1-e^{2x}}$. g est dérivable sur IR\ {0} et $g'(x) = \frac{-2e^{2x}}{(1-e^{2x})^2}$.

c) $h(x) = \frac{x}{1+xe^x}$. h est dérivable sur IR et $h'(x) = \frac{1-x^2e^x}{(1+xe^x)^2}$.

- **Calcul de primitives d'une fonction comportant exponentielle**

Exercice 12

a) $f(x) = 2xe^{3x^2+1}$ sur IR ; $f(x) = \frac{1}{3}\text{U}'(x)e^{\text{U}(x)}$. Soit F une primitive de f sur IR.

On a : $F(x) = \frac{1}{3}e^{3x^2+1}$.

b) $g(x) = \frac{1-e^{-2x}}{2x+e^{-2x}}$ sur $]0; +\infty[$; $g(x) = \frac{1}{3}\frac{\text{U}'(x)}{\text{U}(x)}$. Soit G une primitive de g sur $]0; +\infty[$.

On a : $G(x) = \frac{1}{2}\ln|2x + e^{-2x}| - 1$. De plus comme Sur $]0; +\infty[$, $2x + e^{-2x} > 0$ alors $G(x) = \frac{1}{2}\ln(2x + e^{-2x}) - 1$.

Exercice 13

a) $a = 1$ et $b = -4$.
b) $\forall x \in$ IR, $f(x) = e^x - \frac{4e^x}{e^x+3}$. Soit F la primitive de f sur IR qui s'annule en 0.
F est sous la forme : F(x) = $e^x - 4\ln(e^x + 3) + c$, $c \in \mathbb{R}$ et $F(0) = 0$.
On obtient : F(x) = $e^x - 4\ln(e^x + 3) + 4ln4 - 1$.

➢ Exercices de renforcement/Approfondissement

Exercice 14

1. On vérifie que : P(1) =0 et P(-3) = 0.
2. a) On a: P(x) = $(x-1)(x+3)Q(x)$. Donc P(x) = $(x-1)(x+3)(x+7)(x-2)$.

b) Les solutions de l'équation P(x) = 0 sont : $S = \{1; 2; -7; -3\}$.

3. Les solutions de l'équation : $e^{4x} + 7e^{3x} - 7e^{2x} - 43e^x + 42 = 0$ sont : $S = \{0; ln2\}$.

Exercice 15

a) Démontrons que f est continue en 0.
On a : D_f = IR. $0 \in D_f$. Calculons la limite de f en 0.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-e^x} = \lim_{x\to 0} x \times \frac{x}{1-e^x} = \lim_{x\to 0} x \times \frac{-1}{\frac{e^x-1}{x}} = 0 \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0} x = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0} \frac{-1}{\frac{e^x-1}{x}} = \frac{-1}{1} = -1 \end{cases}$$

Comme $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$ donc f est continue en 0.

b) Dérivabilité de f en 0.

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{1-e^x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{1-e^x} = \lim_{x\to 0} \frac{-1}{\frac{e^x-1}{x}} = -1 \text{ car } \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0} -1 = -1 \\ \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1 \end{cases}$$

Donc f est dérivable en 0.

Interprétation graphique : La courbe de f admet au point d'abscisse 0 une tangente de coefficient directeur -1.

Exercice 16

1. $3^x = 1 \Leftrightarrow E_V =$ IR et $xln3 = ln1$, donc : S = $\{0\}$.
2. $2^{x+1} = 8 \Leftrightarrow E_V =$ IR et $xln2 = 2ln2$, donc : S = $\{2\}$
3. $2^x = 3^{x+1} \Leftrightarrow E_V =$ IR et $xln2 = (x+1)ln3$, donc : S = $\{\frac{ln3}{ln2-ln3}\}$
4. $3^{2x} = 2^{3x} \Leftrightarrow E_V =$ IR et $2xln3 = (ln2)3x$, donc : S = $\{0\}$.

5. $3 + \frac{2}{3^{-x}} = 9^x \Leftrightarrow E_V =$ IR et $(3^x)^2 - 2 \times 3^x - 3 = 0$. On pose X = 3^x avec $X > 0$.
   Donc la solution est : $\{1\}$
6. $(x+3)^x = 1 \Leftrightarrow E_V =]-3; +\infty[$ et $xln(x+3) = ln1$. Donc : S = $\{0; -2\}$.
7. $4^{3+x} \geq 3^{5x} \Leftrightarrow E_V =$ IR et $(x+3)ln4 \geq 5xln3$. Donc : S = $]-\infty; \frac{3ln4}{ln4-5ln3}]$.
8. $2^x < 2^{-x} \Leftrightarrow E_V =$ IR et $xln2 < -xln2$. Donc : S = $]-\infty; 0[$.
9. $2 \times 10^{2x+3} \times 10^x - 5 = 0 \Leftrightarrow E_V =$ IR et $10^{3x+3} = \frac{5}{2}$. Donc : S = $\{\frac{ln\frac{5}{2}-3ln10}{3ln10}\}$.
10. $2^{2x+3} - 3 \times 2^{x+1} + 1 = 0 \Leftrightarrow E_V =$ IR et $8 \times (2^x)^2 - 6 \times 2^x + 1 = 0$.
    En posant : X = 2^x avec X > 0. On obtient : $8X^2 - 6X + 1 = 0$. On a : X = $\frac{1}{2}$ ou X = $\frac{1}{4}$
    . Cela équivaut à : $x = -1$ ou $x = -2$. Soit S = $\{-1; -2\}$.

<u>Exercice 17</u>

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \pi^x = +\infty$ car $\pi > 1$.
b) $\lim\limits_{x\to+\infty} 10^{-2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} (10^{-2})^x = 0$ car $10^{-2} < 1$.
c) $\lim\limits_{x\to-\infty} 5^{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x^2 ln5} = +\infty$.
d) $\lim\limits_{x\to-\infty} 3^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x}ln3} = 1$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$.
e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{xe^x}{5^x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{xe^x}{e^{xln5}} = \lim\limits_{x\to+\infty} x\, e^{x(1-ln5)}$. En posant : $\alpha = 1 - ln5 < 0$ et X = $x\alpha$, on a : $x = \frac{1}{\alpha}X$. Si $x \to +\infty$, alors $X \to -\infty$. On a : $\lim\limits_{X\to-\infty} \frac{1}{\alpha} X\, e^X = 0$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{xe^x}{5^x} = 0$.

<u>Exercice 18</u>

1. $f(x) = 5^x + 2x = e^{xln5} + 2x$. Les primitives F de de f sur IR sont de la forme :

   $\mathrm{F}(x) = \frac{1}{ln5} 5^x + x^2 + c$; $c \in$ IR. Une primitive F de f sur IR est : $\mathrm{F}(x) = \frac{1}{ln5} 5^x + x^2 - 1$.

2. $f(x) = \sqrt{5}^x = e^{xln\sqrt{5}}$. Les primitives F de de f sur IR sont de la forme :
$\mathrm{F}(x) = \frac{1}{ln\sqrt{5}} \sqrt{5}^x + c$; $c \in$ IR. Une primitive F de f sur IR est : $\mathrm{F}(x) = \frac{1}{ln\sqrt{5}} \sqrt{5}^x$.

3. $f(x) = \frac{1}{3^x} = 3^{-x} = e^{-xln3}$. Les primitives F de de f sur IR sont de la forme :

$\mathrm{F}(x) = \frac{-1}{ln3} \times \frac{1}{3^x} + c$; $c \in$ IR. Une primitive F de f sur IR est : $\mathrm{F}(x) = \frac{-1}{ln3} \times \frac{1}{3^x}$.

4. $f(x) = -\frac{3^x}{2^{x+1}} = -\frac{1}{2} e^{x(ln3-ln2)}$. Les primitives F de de f sur IR sont de la forme :

$\mathrm{F}(x) = \frac{-1}{ln3-ln2} \times \frac{3^x}{2^{x+1}} + c$; $c \in$ IR. Une primitive F de f sur IR est :
$\mathrm{F}(x) = \frac{-1}{ln3-ln2} \times \frac{3^x}{2^{x+1}} + e$.

Exercice 19

$f(x) = \frac{x}{3^x}$

- Ensemble de définition de f : $D_f = \mathrm{IR}$
- Ensemble de dérivabilité de f : IR
- Dérivée et variations de f : On a : $f(x) = xe^{-xln3}$.

  f est dérivable sur IR et $f'(x) = e^{-xln3}(1 - xln3)$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{ln3}$.

  f est strictement croissante sur $]-\infty; \frac{1}{ln3}[$ et f est strictement décroissante sur $]\frac{1}{ln3}; +\infty[$.
- Calcul de limite aux bornes de D_f.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{3^x} = \lim\limits_{x\to-\infty} x\,e^{-xln3} = -\infty.$

(On pose X $= -xln3$. $Lorsque\ x \to -\infty, X \to +\infty$ et on a : $\lim\limits_{X\to+\infty} -\frac{1}{ln3}Xe^X = -\infty$)

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{3^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x\,e^{-xln3} = 0.$

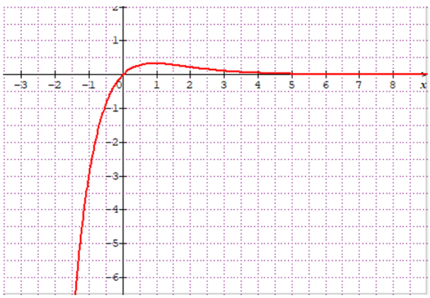
(On pose X $= -xln3$. $Lorsque\ x \to +\infty, X \to -\infty\ et\ on$ a: $\lim\limits_{X\to-\infty} -\frac{1}{ln3}Xe^X = 0$)

Interprétation graphique : La droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale en $+\infty$ à la courbe de f.

- Tableau de variation de f :

x	$-\infty$		$\frac{1}{ln3}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(\frac{1}{ln3})$	↘	0

- Représentation graphique de f: (C_f)



Exercice 20

1) $f(x) = x\sqrt{x}$ donc $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$.

2) $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ donc $f'(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

3) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = x^{\frac{-1}{3}}$donc $f'(x) = \frac{-1}{3x\sqrt[3]{x}}$.

4) $f(x) = \sqrt[3]{1+sinx}$ donc $f'(x) = \frac{cosx}{3\sqrt[3]{(1+sinx)^2}}$.

5) $f(x) = \sqrt[4]{1+x^2}$ donc $f'(x) = \frac{x}{2\sqrt[4]{(1+x^2)^3}}$.

Exercice 21

1) $f(x) = \sqrt[3]{x^2} \Leftrightarrow f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ donc $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$.

2) $f(x) = x^e\sqrt{x} \Leftrightarrow f(x) = x^{\frac{2e+1}{2}}$ donc $f'(x) = \frac{(e+\frac{1}{2})x^e}{\sqrt{x}}$.

3) $f(x) = \frac{x^{0,5}}{\sqrt[4]{x^3}} \Leftrightarrow f(x) = x^{-\frac{1}{4}}$ donc $f'(x) = \frac{-1}{4x\sqrt[4]{x}}$.

4) $f(x) = \frac{x^{-ln3}}{x^{1-e}} \Leftrightarrow f(x) = x^{e-1-ln3}$ donc $f'(x) = (e-1-ln3)x^{e-2-ln3}$.

Exercice 22

Les primitives de f sont les fonctions F telles que :

1. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^5} \Leftrightarrow f(x) = x^{-\frac{9}{2}}$, donc : $F(x) = -\frac{2}{7} \times \frac{1}{x^3\sqrt{x}} + c, c \in$ IR.
2. $f(x) = (1-x)^{-\frac{1}{3}} = -U'U^{-\frac{1}{3}}, donc : F(x) = -\frac{3}{2}(1-x)\sqrt{1-x} + c, c \in$ IR.
3. $f(x) = x(x^2-1)^{\frac{5}{2}} = \frac{1}{2}U'U^{\frac{5}{2}}, donc: F(x) = \frac{1}{7}(x^2-1)^3\sqrt{x^2-1} + c, c \in$ IR.
4. $f(x) = \frac{x^2}{(x^3-1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{3}\frac{U'}{U^{\frac{3}{2}}}, donc: F(x) = -\frac{2}{3} \times \frac{1}{\sqrt{x^3-1}} + c, c \in$ IR.
5. $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}} \Leftrightarrow f(x) = x^{-\frac{3}{2}}$, donc : $F(x) = -\frac{2}{\sqrt{x}} + c, c \in$ IR.

Exercice 23

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3}{e^x} = 0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^3} = +\infty$.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^x - x^2) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{e^x}{x^2} - 1\right) = +\infty$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} (lnx - x^2) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{lnx}{x^2} - 1\right) = -\infty$.
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2^x}{x} = 0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{xln2}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} ln2 \times \frac{e^{xln2}}{xln2} = +\infty$. (En posant X = $xln2$)
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{lnx} = 0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{2x} \times 2 \times \frac{x}{lnx} = +\infty$.
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+1)^2e^x = +\infty$
7. $\lim\limits_{x\to+\infty} x(lnx)^3 = +\infty$
8. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3e^x = +\infty$
9. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^3+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^3} \times \frac{x^3}{x^3+1} = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^3} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^3+1} = 1$.

Exercice 24

1. Ensemble de définition et limites aux bornes :

$D_f = \mathrm{IR}^*$ ou $D_f =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^{2x}}{e^x-1} = 0$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x - 1 = -1$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{e^x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1-\frac{1}{e^x}} = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \frac{1}{e^x} = 1$.

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to0\\<}} \frac{e^{2x}}{e^x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to0\\<}} \frac{e^{2x}}{x} \times \frac{1}{\frac{e^x-1}{x}} = -\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}} \frac{e^{2x}}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to0} \frac{1}{\frac{e^x-1}{x}} = 1$.

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} \frac{e^{2x}}{e^x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} \frac{e^{2x}}{x} \times \frac{1}{\frac{e^x-1}{x}} = +\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} \frac{e^{2x}}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to0} \frac{1}{\frac{e^x-1}{x}} = 1$.

2. On a : $f(x) - (1+e^x) = \frac{1}{e^x-1}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (1+e^x)] = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x-1} = 0$.

Donc (Γ) : $y = 1 + e^x$ est une asymptote à la courbe de f en $+\infty$.

Position de ($\mathcal{C}$) et de (Γ) :

$f(x) - (1+e^x) > 0 \Longrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$.

Donc, ($\mathcal{C}$) est au-dessus de (Γ) sur $]0; +\infty[$, et ($\mathcal{C}$) est en dessous de (Γ) sur $]-\infty; 0[$.

3. Variations de f et représentation graphique :

$\forall x \in D_f$, $f'(x) = \frac{e^{2x}(e^x-2)}{(e^x-1)^2}$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 2$. Soit $x = ln2$.

f est strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; ln2[$.

f est strictement croissante sur $]ln2; +\infty[$.

Tableau de variation de f:

x	$-\infty$		0		$ln2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	4	↗	$+\infty$

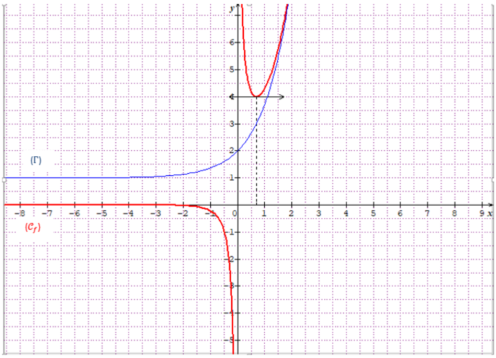
Représentation graphique :

(Γ): $y = 1 + e^x$. Soit $g(x) = 1 + e^x$ .On a : $\begin{cases} g(0) = 2 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty \ et \ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 1 \end{cases}$, donc :

(Γ) admet une branche parabolique de direction celle de (OJ) en $+\infty$.

(Γ) admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ en $-\infty$.

$g'(x) = e^x > 0$ et g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.



Exercice 25

Partie A

1- Calculons les limites : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 1$.

2. Dérivée $g'(x)$: $\forall x \in \mathrm{IR}$, $g'(x) = -x(2+x)e^{x}$.
3. Sens de variation et tableau de variation de g:

   g est strictement décroissante sur $]-\infty;-2[$ et sur $]0;+\infty[$.

   g est strictement croissante sur $]-2;0[$.

   Tableau de variation de g :

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	1	$\searrow$	$1\text{-}4e^{-2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

4. g est continue et strictement décroissante sur $]0{,}7;0{,}71[$, donc g réalise une bijection de $]0{,}7;0{,}71[$ sur $g(]0{,}7;0{,}71[)$. On a : $g(0{,}7) = 0{,}01$ et $g(0{,}71) = -0{,}025$.
   Comme $g(0{,}7) \times g(0{,}71) < 0$, donc l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α telle que : $0{,}7 < \alpha < 0{,}71$.
5. Signe de $g(x)$:

$g(-2) \approx 0{,}45 > 0$.

$g(-2)$ est le minimum de g sur $]-\infty;0[$, donc $\forall x \in]-\infty;0[, g(x) \geq g(-2) \Rightarrow g(x) > 0$.

g est continue et décroissante sur $]0;+\infty[$ et $\alpha \in]0;+\infty[$.

Soit $x \in]0;\alpha[\Longrightarrow x < \alpha$ d'où $g(x) > g(\alpha)$ or $g(\alpha) = 0$ donc $g(x) > 0$.

Soit $x \in]\alpha;+\infty[\Longrightarrow x > \alpha$ d'où $g(x) < g(\alpha)$ or $g(\alpha) = 0$ donc $g(x) < 0$.

En conclusion : $\begin{cases} \forall\, x \ \in]-\infty;\alpha[, g(x) > 0. \\ \forall\, x \ \in]\alpha;+\infty[, g(x) > 0 \end{cases}$

Partie B :

1. Variation de h : $h(x) = 1 + xe^x$ et $D_h = $ IR.

- Dérivée $h'(x)$ de $h(x)$: h est dérivable sur IR et $h'(x) = (1 + x)e^x$.
- Signe de $h'(x)$ et sens de variation de h : $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ car $e^x > 0$.

Donc $\forall\, x \in]-\infty; -1[, h'(x) < 0$ donc h est strictement décroissante sur $]-\infty; -1[$.
$\forall\, x \in]-1; +\infty[, h'(x) > 0$ donc h est strictement croissante sur $]-\infty; -1[$.

- Signe de $h(x)$: D'après le tableau de variation de h, $h(-1)$ est le minimum de h sur IR. Or $h(-1) = 1 - e^{-1} \approx 0{,}63 > 0$. Donc $\forall\, x \in$ IR, $h(x) > 0$. Donc $x \in$ IR, $1 + xe^x \neq 0$; d'où $D_f = $ IR.

2 . On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Interprétation graphique: Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, donc la courbe de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

3. a) Démontrons que : $\forall\, x \in$ IR, $f'(x) = \frac{g(x)}{(1+xe^x)^2}$.

f est dérivable sur IR et $\forall\, x \in$ IR, $f'(x) = \frac{1(1+xe^x)-(e^x+xe^x)x}{(1+xe^x)^2} = \frac{1-x^2e^x}{(1+xe^x)^2} = \frac{g(x)}{(1+xe^x)^2}$.

b) $\forall\, x \in$ IR, $f'(x) = \frac{g(x)}{(1+xe^x)^2}$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$ car $\forall\, x \in$ IR, $(1 + xe^x)^2 > 0$.

Donc : $\begin{cases} \forall\, x \in]-\infty; \alpha[, f'(x) > 0 \\ \forall\, x \in]\alpha; +\infty[, f'(x) < 0 \end{cases}$

f est strictement croissante sur $]-\infty; \alpha[$ et f est strictement décroissante sur $]\alpha; +\infty[$.

Tableau de variation :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

4. Démontrons que la droite (Δ) : $y = x$ est asymptote à $(\mathcal{C}_f)$ en $+\infty$.

On a : $f(x) - (x) = \frac{-x^2e^x}{1+xe^x}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - (x)] = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-x^2e^x}{1+xe^x} = 0$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} -x^2e^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} 1 + xe^x = 1 \end{cases}$

Donc, la droite (Δ) est asymptote oblique à $(\mathcal{C}_f)$ en $+\infty$.

5. Calcul et encadrement de $f(\alpha)$:

- $f(\alpha) = \frac{\alpha}{1+\alpha e^\alpha}$ or $g(\alpha) = 0 \Longrightarrow \alpha e^\alpha = \frac{1}{\alpha}$. Donc, $f(\alpha) = \frac{\alpha^2}{1+\alpha}$.
- Encadrons $f(\alpha)$: on obtient : $0{,}29 < f(\alpha) < 0{,}30$.

6. Représentation graphique de $(\mathcal{C}_f)$:

Partie C :

1.a) Justifions que k est une bijection

$\forall\, x \in [\alpha; +\infty[, k(x) = f(x)$. k est donc continue et strictement décroissante sur$[\alpha; +\infty[$; donc k réalise une bijection de $[\alpha; +\infty[$ sur $k([\alpha; +\infty[) = \left]0\,; \frac{\alpha^2}{1+\alpha}\right]$.

b) Tableau de variation de k^{-1} : Les fonctions k et k^{-1} ont le même sens de variation.

x	$0 \qquad \frac{\alpha^2}{1+\alpha}$
$(k^{-1})'(x)$	$-$
$k^{-1}(x)$	$+\infty \searrow \alpha$

2.a) Prouvons que k^{-1} n'est pas dérivable en $\frac{\alpha^2}{1+\alpha}$.

On a : $k(x) = \frac{\alpha^2}{1+\alpha} \Rightarrow x = \alpha$. Or, $k'(\alpha) = f'(\alpha) = \frac{g(\alpha)}{(1+\alpha e^{\alpha})^2} = 0$ car $g(\alpha) = 0$.

On conclut que : k^{-1} n'est pas dérivable en $\frac{\alpha^2}{1+\alpha}$.

b) Calcul de $k(1)$ et prouvons que k^{-1} est dérivable en $\frac{1}{1+e}$.

On a : $k(1) = f(1) = \frac{1}{1+e}$ et $k'(1) = f'(1) = \frac{1-e}{(1+e)^2}$; or $\frac{1-e}{(1+e)^2} \neq 0$, donc la fonction

k^{-1} est dérivable en $\frac{1}{1+e}$ et $(k^{-1})'\left(\frac{1}{1+e}\right) = \frac{1}{\frac{1-e}{(1+e)^2}} = \frac{(1+e)^2}{1-e}$.

c) Tracé de $(\mathcal{C}_{k^{-1}})$

La méthode consiste à tracer la première bissectrice (la droite d'équation $(\mathcal{D}) : y = x$) et à construire suivant l'intervalle donné, l'image de la courbe $(\mathcal{C}_k)$ en utilisant la symétrie axiale d'axe $(\mathcal{D})$.

Exercice 26

1. Sens de variation de h :

On a : $h'(x) = 1 + \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$ et $h'(x) > 0, donc\ h$ est strictement croissante sur IR.

2. Calcul des limites :

   On a : $\lim_{x\to-\infty} h(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} h(x) = +\infty$.

3. h est continue et strictement croissante sur IR en particulier sur $]-0{,}71; -0{,}7[$. De plus : $h(-0{,}71) = -0{,}0088$ et $h(-0{,}7) = 0{,}0047$. Comme $h(-0{,}71) \times h(-0{,}7) < 0$, donc l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α appartenant à $]-0{,}71; -0{,}7[$.

4. Justifions le signe de $h(x)$ sur IR.

   h est continue et croissante sur IR avec $h(\alpha) = 0$.

   Si $x \in]-\infty; \alpha[\Rightarrow x < \alpha$, d'où $h(x) < h(\alpha)$; or $h(\alpha) = 0$, donc $h(x) < 0$.

   Si $x \in]\alpha; +\infty[\Rightarrow x > \alpha$, d'où $h(x) > h(\alpha)$; or $h(\alpha) = 0$, donc $h(x) > 0$.

   En conclusion : $\begin{cases} \forall\ x\ \in]-\infty; \alpha[, h(x) < 0 \\ \forall\ x\ \in]\alpha; +\infty[, h(x) > 0. \end{cases}$

Partie B :

1.a) Démontrons que : $f(\alpha) = -2 - \alpha - \frac{4}{\alpha}$.

On a : $f(\alpha) = (2\alpha + 4)e^{-\frac{\alpha}{2}} - \alpha$; or $h(\alpha) = 0 \Rightarrow e^{-\frac{\alpha}{2}} = -\frac{1}{\alpha}$.

Par suite : $f(\alpha) = (2\alpha + 4)\left(-\frac{1}{\alpha}\right) - \alpha = -2 - \alpha - \frac{4}{\alpha}$.

- Encadrement de $f(\alpha)$. On a : $4{,}3 < f(\alpha) < 4{,}4$.

2.a) Calcul de $f'(x)$ et démontrons que $f'(x) = -h(x)e^{-\frac{x}{2}}$

f est dérivable sur IR et $f'(x) = -xe^{-\frac{x}{2}} - 1$. On a : $f'(x) = -e^{-\frac{x}{2}}\left(x + e^{\frac{x}{2}}\right) = -h(x)e^{-\frac{x}{2}}$.

b) Variations de f

f est strictement croissante sur $]-\infty; \alpha[$ et strictement décroissante sur $]\alpha; +\infty[$.

3.a) Calcul de limites en $-\infty$ et interprétation graphique :

On a : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.

Interprétation Graphique : La courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction celle de (OJ) en $-\infty$.

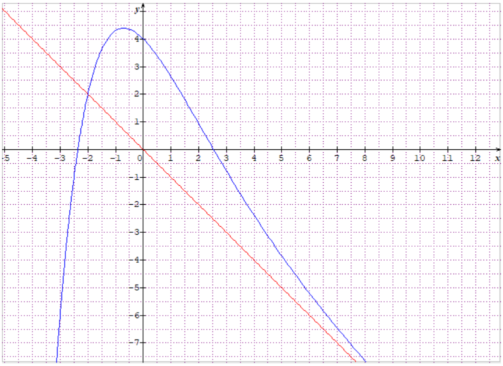
b) Limite de f en $+\infty$: On a : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

c) On a : $f(x) - (-x) = (2x + 4)e^{-\frac{x}{2}}$ et $\lim_{x\to-\infty} [f(x) - (-x)] = 0$. (On peut développer $(2x + 4)e^{-\frac{x}{2}}$ et effectuer un changement de variable en posant X = $-\frac{x}{2}$.) Donc (Δ) est asymptote oblique à $(\mathcal{C}_f)$ en $+\infty$.

4.a) Tableau de variation :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	$-\infty$

b) Construction



<u>Exercice 27</u>

Partie A

1.a) On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -2$, donc la courbe (C) admet une asymptote horizontale d'équation : $y = -2$.

b) Il suffit de développer $f(x)$, puis mettre xe^{2x} en facteur.

c) En utilisant la dernière forme de $f(x)$, on obtient : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.

Donc la courbe (C) admet une branche parabolique de direction celle de (OJ) en $+\infty$.

2. a) Démontrons que $f'(x) = 2xe^{x}(e^{x} - 2)$. **(Il faut rectifier dans le manuel car erreur)**

f dérivable sur IR et $f'(x) = 2xe^{2x} - 4xe^{x} = 2xe^{x}(e^{x} - 2)$.

b) Tableau de variation de f:

x	$-\infty$ $+\infty$		0		$ln2$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ -2	↗	$f(0)$	↘	$f(ln2)$	↗

$f(0) = 1{,}5$ et $f(ln2) = 1{,}2$

3. a) Démontrons que la courbe (C) coupe l'axe (OI) en un point d'abscisse α.

- f est continue et strictement croissante sur $]-\infty; 0[$, donc f réalise une bijection de $]-\infty; 0[$ sur $]-2; 1{,}5[$. Comme $0 \in]-2; 1{,}5[$, donc la courbe (C) coupe l'axe (OI) en un unique point d'abscisse α ($\alpha \in]-\infty; 0[$).

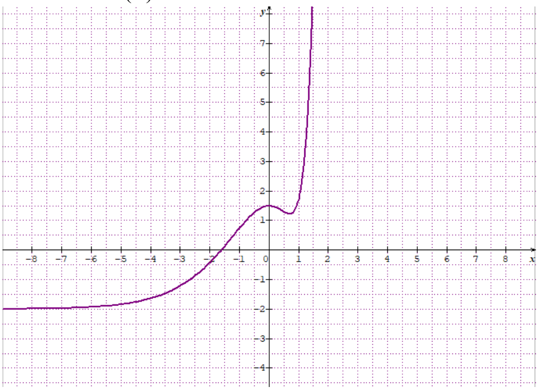
- Sur $]0;+\infty[$, f admet un minimum en $ln2$ qui est $f(ln2) \approx 1{,}2 > 0$. Donc la courbe (C) est au dessus de l'axe (OI). Il n'y a pas de point d'intersection de (C) avec (OI).
- On conclut que (C) coupe l'axe (OI) en un unique point d'abscisse α tel que $\alpha \in]-\infty;0[$.

b) Démontrons que : $\alpha \in]-1{,}7;-1{,}6[$.

On a : $]-1{,}7;-1{,}6[\subset]-\infty;0[$, donc f est strictement croissante sur $]-1{,}7;-1{,}6[$.

De plus : $f(-1{,}7) = -0{,}10$ et $f(-1{,}6) = 0{,}014$. Comme $f(-1{,}7) \times f(-1{,}6) < 0$, donc $\alpha \in]-1{,}7;-1{,}6[$.

4.a) Tracé de la courbe (C) :



b) Nombre de solution de l'équation (E_k) :$f(x) = k$.

- Si $k \leq -2$, alors l'équation (E_k) n'admet pas de solution ;
- Si $k \in]-2;1{,}2[\cup]1{,}5;+\infty[$, alors l'équation (E_k) admet une solution unique m ($m \in$ IR) ;
- Si $k \in]1{,}2;1{,}5[$ alors l'équation (E_k) admet deux solutions réelles.

5. a) H est dérivable sur IR et $H'(x) = f(x) + 2$. Donc H est une primitive sur IR de la fonction : $x \longmapsto f(x) + 2$.

b) Déterminons F, la primitive de f sur IR qui s'annule en -1.

On a : $H'(x) = f(x) + 2 \Rightarrow f(x) = H'(x) - 2$, donc $F(x) = H(x) - 2x + c$, $c \in$ IR et $F(-1) = 0$.

Donc : $F(x) = \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right) e^{2x} + 4(2-x)e^x + 2x - \frac{17}{2}$.

Partie B :

1. a) Ensemble de définition de g : $D_g = [0;+\infty[$.

   b) Justifions que : $\forall x > 0, g(x) = f(lnx)$.

On a : $\forall x > 0$, $e^{2\ln x} = x^2$ et $e^{\ln x} = x$, d'où: $f(lnx) = \left(lnx - \frac{1}{2}\right) e^{2lnx} - 4(lnx - 1)e^{lnx} - 2$

$$= lnx(x^2 - 4x) - \frac{1}{2}(x^2 - 8x + 4)$$

Donc : $\forall x > 0, g(x) = f(lnx)$.

2.a) Étude de la continuité de g en 0.

On a : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(lnx) = \lim\limits_{X \to -\infty} f(X) = -2$ (d'après le résultat de la question 1 de la partie A).

Comme $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} g(x) = -2 \neq g(0)$ alors la fonction g n'est pas continue en 0.

b) Étude de la dérivabilité de g à droite en 0.

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{g(x)}{x} = -\infty$. Donc, la fonction g n'est pas dérivable en 0.

Interprétation graphique : La courbe (C_g) admet au point d'abscisse 0 une demi-tangente verticale.

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = +\infty$.

Donc la courbe de g admet une branche parabolique de direction celle de (OJ) en $+\infty$.

3. Variations de g et tableau de variation de g

$\forall\, x > 0,\ g'(x) = (f(lnx))' = (lnx)' \times f'(lnx)$; donc $\forall\, x > 0,\ g'(x) = 2(x-2)\ln x$.

g est strictement croissante sur $]0;1[$ et sur $]2;+\infty[$.

g est strictement décroissante sur $]1;2[$.

Tableau de variation :

x	0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$g(1)$	$\searrow$	$g(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

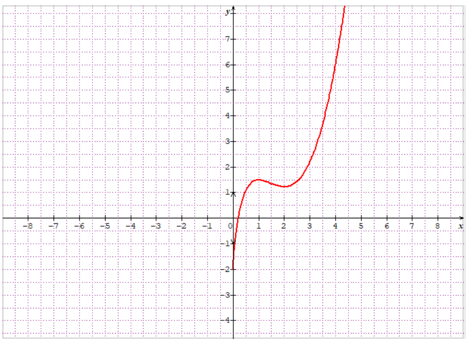
$g(1) = 1{,}5$ et $g(2) = 4 - 4ln2 \approx 1{,}2$.

4.a) Encadrement du point d'intersection de (C_g) avec l'axe des abscisses

(C_g) coupe l'axe (OI) implique que $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(lnx) = 0, donc\ lnx = \alpha$. Soit $x = e^{\alpha}$.

Or $\alpha \in]-1{,}7;-1{,}6[$. D'où : $e^{\alpha} \in]e^{-1{,}7};e^{-1{,}6}[$.

b) Construction de (C_g) et de la tangente en 0.



Exercice 28

Partie A

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 2^x(2-2^x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (e^{(x+1)ln2} - e^{xln4}) = 0$.

Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$, donc la courbe (C) admet une asymptote horizontale en $-\infty$ d'équation $y = 0$.

2.a) On a : $f(x) = 2^{x+1} - 4^x = 2^x(2-2^x) = e^{xln2}(2 - e^{xln2})$.

b) On a : $f'(x) = 2\, ln2\, e^{xln2}(1 - e^{xln2})$.

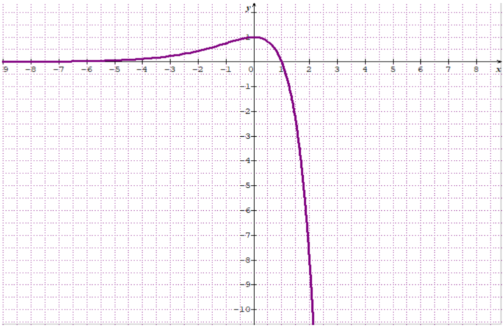
$\forall x \in \mathbb{R}, 2\, ln2\, e^{xln2} > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - e^{xln2}$.

c) Tableau de variation de f:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(0)$	$\searrow$	$-\infty$

3. Représentation graphique :

$f(0) = 1; f(-1) = \frac{3}{4}; f(1) = 0; f(2) = 8.$



Partie B

Numéroter 1. Résolution graphique :

$(E_1): f(x) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x \approx -1$ ou $x = \frac{1}{2}$. Donc S = $\{-1; \frac{1}{2}\}$.

$(E_2): f(x) = -2 \Leftrightarrow x \approx \frac{3}{2}$. Donc S = $\{\frac{3}{2}\}$.

2. Déterminons les solutions exactes de (E_1) et (E_2)

(E_1): $f(x) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 2^x \times 2 - 2^{2x} - \frac{3}{4} = 0$. Posons X = 2^x, donc $(E_1): -X^2 + 2X - \frac{3}{4} = 0$

Donc : S = $\{-1; \frac{ln3}{ln2} - 1\}$.

$(E_2): f(x) = -2 \Leftrightarrow 2^x \times 2 - 2^{2x} + 2 = 0$. Posons X = 2^x, donc $(E_2): -X^2 + 2X + 2 = 0$.

Donc : S = $\{\frac{\ln(1+\sqrt{3})}{ln2}\}$.

Exercice 29

1. F ; 2. V ; 3. F ; 4. F

Exercice 30

a) $S = \{(ln3; 0)\}$; b) $S = \emptyset$; c) $S = \{(\ln(\frac{25}{17}); \ln(\frac{2}{17}))\}$;

d) S = = $\{(1 + ln7 + 2\ln(\frac{-1+\sqrt{1+44(e^{3+ln7})}}{2(e^{3+ln7})}); -\ln(\frac{-1+\sqrt{1+44(e^{3+ln7})}}{2(e^{3+ln7})})\}$;

e) $S = \{\left(\ln\left(\frac{6-\sqrt{26}}{2}\right); \ln\left(\frac{6+\sqrt{26}}{2}\right)\right); (\ln\left(\frac{6+\sqrt{26}}{2}\right); \ln\left(\frac{6-\sqrt{26}}{2}\right))\}$.

Exercice 31

1.a) On a : P(1) = 0. Donc 1 est une racine de P.

b) S $= \{1\ ;2\ ;-\frac{1}{2}\}$

2. Déduis les solutions dans IR de l'équation :
   a) S = $\{0\ ;ln2\}$
   b) S = $[0\ ;ln2]$.

Exercice 32

1. B ; 2. C ; 3. A ; 4. B

Exercice 33

$f(x) = e^{-lnx}$. $D_f =]0;+\infty[$. Notons (C) la courbe représentative de f.

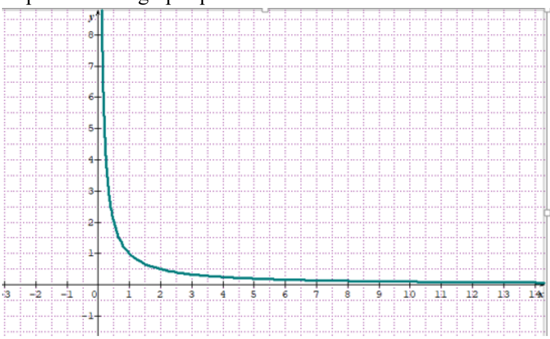
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = \lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$, donc (C) admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$, donc (C) admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.
- Dérivée et sens de variation :

f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $f'(x) = -\frac{1}{x}e^{-lnx}$. Or $e^{-lnx} > 0$ et $-\frac{1}{x} < 0$ sur $]0;+\infty[$, donc $f'(x) < 0$. Par suite, f est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

Tableau de variation de f:

x	0 $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$+\infty$ $\searrow$ 0

Représentation graphique :



Exercice 34

1. $\forall\, x \in$ IR, $f(x) = 3\left(1-\frac{1}{e^x+1}\right) = 3\left(\frac{e^x+1-1}{e^x+1}\right) = \frac{3e^x}{e^x+1}$
2. Les primitives F de f sur IR sont : $F(x) = 3\ln(e^x+1)+c, c \in$ IR. Or, F(0) = 0 donc la primitive cherchée est : F(x) = $3\ln(e^x+1) - 3ln2$.

Exercice 35

a) $5^x - 5^{-x} = 6$. Posons : X $=5^x$, X > 0 alors $5^{-x} = \frac{1}{X}$. On obtient : $X^2 - 6X - 1 = 0$.

S = $\{\frac{\ln(3+\sqrt{10})}{ln5}\}$.

b) $4^x + 6^x = 9^x \Leftrightarrow e^{xln4} + e^{xln(4\times\frac{3}{2})} = e^{xln(4\times\left(\frac{3}{2}\right)^2)}$. Soit $1 + e^{xln(\frac{3}{2})} = e^{xln(\frac{3}{2})^2}$

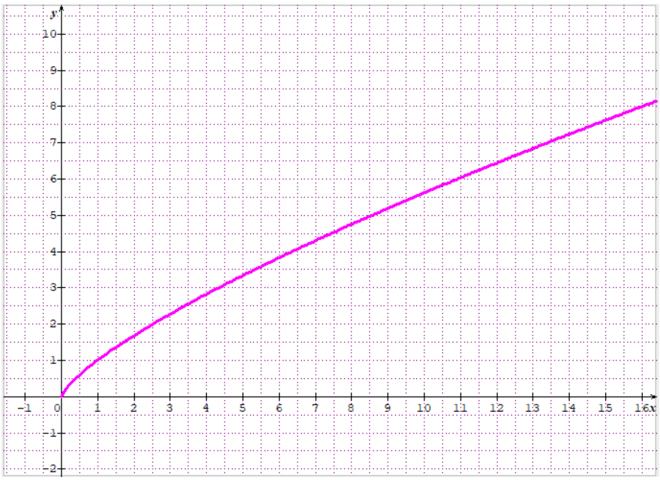
Posons : X = $e^{xln(\frac{3}{2})}$, X > 0. On obtient : $X^2 - X - 1 = 0$. $\Delta = 5$.

S = $\{\frac{\ln(\frac{1+\sqrt{5}}{2})}{\ln(\frac{3}{2})}\}$

Exercice 36

Étude et représentation graphique de fonctions :

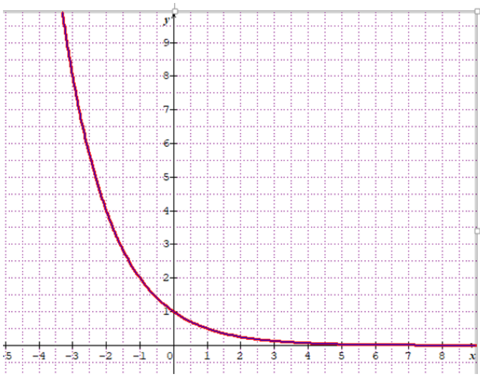
1. $f(x) = x^{0{,}75}$. On a : $f(x) = x^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{x^3}$.
   $D_f = [0, +\infty[$. $f(0) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. De plus $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$. Donc la courbe représentative de f admet une branche parabolique de direction celle de (OI) en $+\infty$.
   f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $f'(x) = \frac{3}{4}x^{-0{,}25}$. f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
   Tracé de la courbe représentative de f :



2. $f(x) = (0{,}5)^x$. On a : $f(x) = e^{xln0{,}5}$

D_f = IR . $f(0) = 1$; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. De plus $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.
Donc la courbe représentative de f admet une branche parabolique de direction celle de (OJ) en $-\infty$ et une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $+\infty$.
f est dérivable sur IR et $f'(x) = ln0{,}5e^{xln0{,}5} = ln0{,}5(0{,}5^x)$; or $ln0{,}5 < 0$. f est donc décroissante sur IR.

Tracé de la courbe représentative de f :



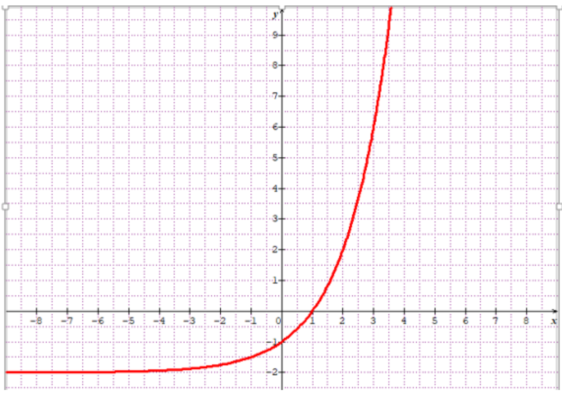
3. $f(x) = 2^x - 2$. On a : $f(x) = e^{x\ln 2} - 2$

$D_f = \text{IR}$. $f(0) = -1$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.

Donc la courbe représentative de f admet une branche parabolique de direction celle de (OJ) en $+\infty$ et une asymptote horizontale d'équation $y = -2$ en $-\infty$.

f est dérivable sur IR et $f'(x) = 2e^{x\ln 2} = 2(2^x) = 2^{x+1}$. Or $f'(x) > 0$, donc f est croissante sur IR.

Tracé de la courbe représentative de f



Exercice 37

$$f(x) = \frac{e^x - 3}{e^x - 1}$$

1. Ensemble de définition : $D_f = \text{IR}^*$ ou $D_f =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$.
2. a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 3$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

Interprétation graphique:

Comme $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 3$, donc (C) admet une asymptote horizontale d'équation $y = 3$ en $-\infty$.

Comme $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$, donc (C) admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ en $+\infty$

b. $\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = +\infty$ et $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -\infty$.

Donc (C) admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

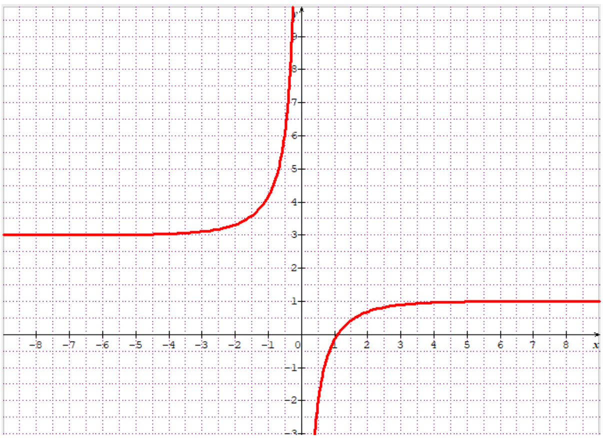
3. a) f est dérivable sur IR * et $f'(x) = \frac{2e^x}{(e^x - 1)^2}$.

   f est strictement croissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.

   b) Tableau de variation de f:

x	$-\infty$ $+\infty$	0	
$f'(x)$	$+$	‖	$+$
$f(x)$	1 ↗ $+\infty$ 3	‖	$-\infty$ ↗

4. Tracé de la courbe de f



Exercice 38

Partie A

$P(x) = 2e^{2x} - 5e^x + 2$

1. Les solutions de l'équation $P(x) = 0$ sont: $\{\frac{1}{2}; 2\}$.
2. On a : $P(X) = 2X^2 - 5X + 2 = 2\left(X - \frac{1}{2}\right)(X - 2)$; donc $P(x) = 2\left(e^x - \frac{1}{2}\right)(e^x - 2)$.

   En dressant le tableau de signes de $P(x) = 2\left(e^x - \frac{1}{2}\right)(e^x - 2)$, on obtient le résultat demandé.

Partie B

$f(x) = 2x + 1 + \dfrac{1}{e^x - 1}$

1. Ensemble de définition : $D_f = IR^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$
2. a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

   b) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} f(x) = +\infty$.

   Donc la courbe de f admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.
3. a) f est dérivable sur IR * et $f'(x) = 2 - \frac{e^x}{(e^x-1)^2} = \frac{2(e^x-1)^2-e^x}{(e^x-1)^2} = \frac{2e^{2x}-5e^x+2}{(e^x-1)^2} = \frac{P(x)}{(e^x-1)^2}$

b) Signe de $f'(x)$

$f'(x) = \frac{P(x)}{(e^x-1)^2}$, or $(e^x - 1)^2 > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $P(x)$.

D'après question 2 de la partie A: $\begin{cases} \forall\, x\,]-\infty; -ln2[\cup]ln2; +\infty[, f'(x) > 0 \\ \forall\, x\,]-ln2; ln2[, f'(x) < 0 \end{cases}$.

c) Tableau de variation de f

x	$-\infty$		$-ln2$		0		$ln2$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(-ln2)$	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$f(ln2)$	↗	$+\infty$

$f(-ln2) = -2 - 2ln2$; $f(ln2) = 1 + 2ln2$.

4.a) On a : $f(x) - (2x + 1) = \frac{1}{e^x-1}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (2x + 1)] = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x-1} = 0$. Donc la droite (D) d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote oblique à (C) en $+\infty$.

b) Position relative de (C) et (D) sur $]0; +\infty[$.

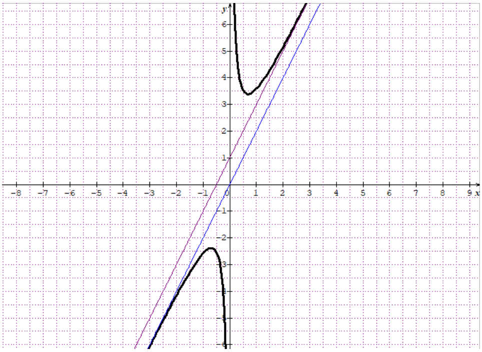
On a : $f(x) - (2x + 1) = \frac{1}{e^x-1}$. Or, sur $]0; +\infty[$, $e^x - 1 > 0$. Donc (C) est au-dessus de (D) sur $]0; +\infty[$.

5.a) On a : $f(x) - (2x) = 1 + \frac{1}{e^x-1}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - (2x)] = \lim\limits_{x\to-\infty} 1 + \frac{1}{e^x-1} = 0$. Donc la droite (D') d'équation $y = 2x$ est asymptote oblique à (C) en $-\infty$.

b) Position relative de (C) et (D') sur $]-\infty; 0[$.

On a : $f(x) - (2x) = 1 + \frac{1}{e^x-1} = \frac{e^x}{e^x-1}$. Or , sur $]-\infty; 0[$, $e^x - 1 < 0$ et $e^x > 0$. Donc (C) est en dessous de (D') sur $]-\infty; 0[$.

6. Construction de (C), (D) et (D')



7. a) $f(x) = ax + \frac{be^x}{e^x-1} = \frac{(ax+b)e^x-ax}{e^x-1}$; or $f(x) = 2x + 1 + \frac{1}{e^x-1} = \frac{(2x+1)e^x-2x}{e^x-1}$. Par identification, on obtient : $a = 2$ et $b = 1$.

b) Primitives F de f sur $]-\infty; 0[$

On a $\forall x \in]-\infty; 0[, f(x) = 2x + \frac{e^x}{e^x-1}$, donc $F(x) = x^2 + \ln|e^x - 1| + c,\ c \in$ IR.

Or $e^x - 1 < 0$ sur $]-\infty; 0[$. Donc $F(x) = x^2 + \ln(1 - e^x) + c,\ c \in$ IR.

c) $F(-1) = 1 \Leftrightarrow c = 1 - \ln(e-1)$ donc : $F(x) = x^2 + \ln(1 - e^x) + 1 - \ln(e-1)$.

Exercice 39 :

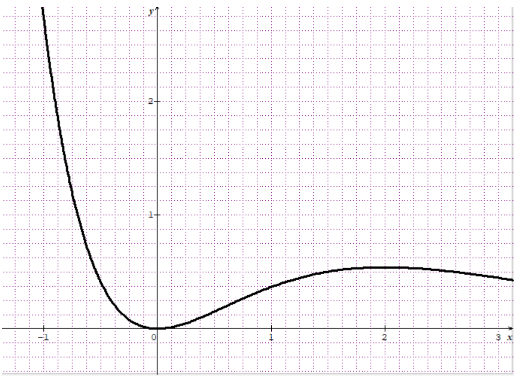
$f(x) = x^2e^{-x}$.

1. Dérivée : f est définie et dérivable sur IR et $f'(x) = x(2-x)e^{-x}$.
2. On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Tableau de variation de f :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow$	0

3. Tracé de la courbe de f :



4. Soit g la fonction définie sur IR par $g(x) = -\frac{2}{e}e^{\frac{x}{2}}$. Soit α un nombre réel de l'intervalle $I = [-1; 0]$.

Démontrons que $f(\alpha) = f(2) \Leftrightarrow g(\alpha) = \alpha$.

$f(\alpha) = f(2)$ équivaut à : $\alpha^2 e^{-\alpha} = 2^2 e^{-2} \Leftrightarrow \alpha^2 = 4e^{-2}e^{\alpha}$. Soit $\alpha^2 = \frac{4}{e^2}e^{\alpha}$.

D'où $(\alpha^2)^{\frac{1}{2}} = (\frac{4}{e^2}e^{\alpha})^{\frac{1}{2}}$.

$|\alpha| = \frac{2}{e}e^{\frac{\alpha}{2}}$ or $\alpha < 0$ donc $\alpha = -\frac{2}{e}e^{\frac{\alpha}{2}} = g(\alpha)$. Par conséquent : $f(\alpha) = f(2) \Leftrightarrow g(\alpha) = \alpha$.

5.a) Démontrons que $g(I)$ est inclus dans I.

g est continue et dérivable sur IR en particulier sur I. Donc : $g'(x) = -\frac{1}{e}e^{\frac{x}{2}}$. g est donc strictement décroissante sur I.

$I = [-1; 0]$ alors $g(I) = g([-1; 0]) = [-\frac{2}{e}; -\frac{2}{e}e^{-\frac{1}{2}}]$. Soit $g(I) = [-0{,}73; -0{,}69]$.

Comme $-1 < -0{,}73 < -0{,}69 < 0$ alors $g(I)$ est inclus dans I.

b) Démontrons que $|g'(x)| \leq \frac{1}{e}$.

$\forall x \in I, -1 \leq x \leq 0$ donc $-\frac{1}{2} \leq \frac{x}{2} \leq 0 \Leftrightarrow e^{\frac{-1}{2}} < e^{\frac{x}{2}} < 1$. Soit $-\frac{1}{e}e^{\frac{-1}{2}} > -\frac{1}{e}e^{\frac{x}{2}} > -\frac{1}{e}$.

Comme $\forall x \in I, -\frac{1}{e} \leq g'(x) \leq \frac{1}{e}$; donc $\forall x \in I, |g'(x)| \leq \frac{1}{e}$.

c) Déduisons que : $\forall x \in I,\ |g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{e}|x - \alpha|$

On sait que $\forall x \in I, |g'(x)| \leq \frac{1}{e}$ et g étant continue et monotone sur I, d'après le théorème des accroissements finis, on a : $|g(x) - g(\alpha)| \leq \frac{1}{e}|x - \alpha|$.

Or $g(\alpha) = \alpha$, donc : $|g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{e}|x - \alpha|$.

6. a) Démontrons que $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{e^n}|u_0 - \alpha|$.

On a : $u_{n+1} = g(u_n)$ et $u_n \in$ I. En posant : $x = u_n$ on a : $g(x) = g(u_n)$, donc :

$|g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{e}\ |x - \alpha| \Leftrightarrow\ |g(u_n) - \alpha| \leq \frac{1}{e}\ |u_n - \alpha|$

Soit $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{e}\ |u_n - \alpha|$

Par itération on a : $|u_1 - \alpha| \leq \frac{1}{e}\ |u_0 - \alpha|$

$|u_2 - \alpha| \leq \frac{1}{e}\ |u_1 - \alpha|$

….. …..

$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{e}\ |u_{n-1} - \alpha|$

En faisant le produit membre à membre des n inégalités ci-dessus et après simplification on obtient : $|u_n - \alpha| \leq (\frac{1}{e})^n\ |u_0 - \alpha|$, donc $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{e^n}|u_0 - \alpha|$.

b) Déduisons que : $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2e^n}$.

On sait que $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{e^n}|u_0 - \alpha|$; or $-1 \leq \alpha \leq 0$ et $u_0 = -\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq u_0 - \alpha \leq \frac{1}{2}$

Soit $|u_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2}$. Donc $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{e^n} \times \frac{1}{2}, donc\!: |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2e^n}$.

c) $|u_n - \alpha| \leq 10^{-6} \Rightarrow \frac{1}{2e^n} \leq 10^{-6}$; soit $n \geq \ln\left(\frac{10^6}{2}\right) \Rightarrow n \geq 13{,}12$.

$Soit\ n = 14$. Le plus petit entier naturel cherché est : 14.

- **Situations complexes**

Exercice 40

Pour répondre à la préoccupation du styliste, je vais utiliser les fonctions exponentielles.

- Je détermine d'abord le chiffre d'affaires annuel en 2010
- Je détermine ensuite le nombre de magasins correspondant au chiffre d'affaires à atteindre
- Enfin, à partir de la représentation graphique de la fonction f, je détermine l'année.

- Chiffre d'affaires annuel en 2010

Soit C_1 le chiffre d'affaires annuel en 2010. On a pour 5 magasins,

$C_1 = 164\,000 \times 300 \times 5$ F = 246 000 000 FCFA.

- Je détermine ensuite le nombre de magasins correspondant au chiffre d'affaires à atteindre

Soit y le nombre de magasin correspondant au chiffre d'affaires de 3 936 000 000 FCFA. On a : $y = \frac{3\,936\,000\,000 \times 5}{256\,000\,000} = 80$ magasins.

- Représentation graphique de f et détermination de l'année

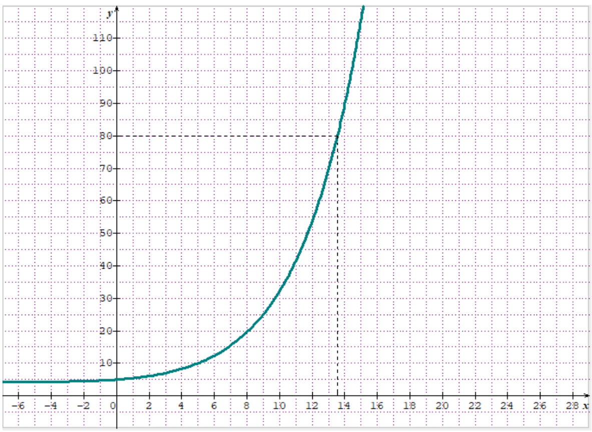
f est continue et dérivable sur $[0; 20]$. Soit $f'(x) = (1 + 0{,}2x)e^{0{,}2x-1}$.

Sur $[0; 20]$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $[0; 20]$.

Tableau de quelques valeurs :

x	0	4	8	10	14	15	20
$f(x)$	5	8,27	18,57	32,18	89,69	115,83	406,3

Représentation graphique de $f(x) = 5 + xe^{0{,}2x-1}$



Echelle : sur (OI) : 1 cm pour 2 ans. Sur (OJ) : 1cm pour 10 magasins.
Graphiquement, pour $f(x) = 80$, alors $x = 13{,}55$.
Je peux donc affirmer que le chiffre d'affaires sera supérieur à 3 936 000 000 FCFA après 14 ans. Donc l'année correspond à 2024.

<u>Exercice 41</u>

Pour déterminer l'heure du crime, je vais utiliser les fonctions exponentielles. Je vais :

- Résoudre des équations comportant des exponentielles pour déterminer les constantes A et k.
- Résoudre une équation comportant exponentielle pour déterminer la durée écoulée après le décès (t en heures).
- Conclure en déterminant l'heure exacte du crime.

- Détermination de A et k
- Soit $t = 0$, le moment où le médecin légiste prend la température du corps ; on a : $f(0) = 32 \Leftrightarrow Ae^0 + 20 = 32$. Soit A = 12.
- Soit $t = \frac{1}{2}$, le moment où le médecin légiste prend à nouveau la température du corps ; on a : $f\left(\frac{1}{2}\right) = 31 \Leftrightarrow 12e^{-\frac{1}{2}k} + 20 = 31$. Soit $k = -2\ln(\frac{11}{12})$.

  Finalement on obtient la fonction : $f(t) = 12e^{2\ln(\frac{11}{12})t} + 20$
- Durée écoulée après le décès (t en heures).

Soit Δt la durée ou le temps avant l'arrivée du médecin légiste c'est-à-dire avant le décès.

On a : $f(\Delta t) = 37 \Leftrightarrow 12e^{2\ln(\frac{11}{12})\Delta t} + 20 = 37$. Soit $\Delta t = \frac{\ln(\frac{17}{12})}{2ln(\frac{11}{12})}$. Donc : $\Delta t = -2h$.

Il y a donc 2 h écoulées avant la prise de température du corps.
On peut conclure que le crime a été commis ce mercredi 01 Avril à 8 H.

8 NOMBRES COMPLEXES ET GÉOMÉTRIE DU PLAN

I. LA SITUATION D'APPRENTISSAGE

- Apres la lecture de la situation d'apprentissage (par le professeur, par un élève et une lecture silencieuse des élèves), l'enseignant pourra s'assurer que les élèves ont bien compris le texte.
- Il pourra ensuite faire dégager les constituants de la situation à travers une ou des questions du type :

Constituants de la situation	Exemples de questions possibles	Réponses possibles des élèves
Contexte	Où et à quel moment se déroule la situation ?	Dans un lycée après observation d'une œuvre d'art réalisée par un ancien élève de terminale.
Circonstances	-Qu'affirme l'auteur de cette œuvre?	Il affirme avoir utilisé une similitude directe pour construire le tableau.
Tâches	-Que décident de faire les élèves de terminale D de l'année en cours ?	-Ils décident d'étudier les similitudes directes et de construire des figures.

Le professeur utilisera la tâche énoncée par ses élèves pour faire la synthèse de la situation et présentera le plan de la leçon. Il devra dans la mesure du possible se référer à la situation durant tout le déroulement de la leçon.

II. DECOUVERTE DES HABILETES

ACTIVITÉ 1 : Nombres complexes, distances et angles

- L'objectif de cette activité est de savoir calculer des distances et des mesures d'angles orientés en utilisant les nombres complexes.
- Réponses aux questions de l'activité.

1) a) $z_{\overrightarrow{AB}} = 1+i$

   b) $AB = \sqrt{2}$

   c) $mes\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{AB}\right) = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \quad [k \in \mathbb{Z}]$

2) a) $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right) = \left(\overrightarrow{AB};\vec{u}\right) + \left(\vec{u}\,;\overrightarrow{CD}\right) = \left(\vec{u}\,;\overrightarrow{CD}\right) - \left(\vec{u}\,;\overrightarrow{AB}\right)$.

b)

$$mes\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right)=mes\left(\vec{u};\overrightarrow{CD}\right)-mes\left(\vec{u};\overrightarrow{AB}\right)+2k\pi\ \ [k\in\mathbb{Z}]$$
$$=\arg\left(z_D-z_C\right)-\arg\left(z_B-z_A\right)+2k\pi\ \ [k\in\mathbb{Z}]$$
$$=\arg\left(\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right)+2k\pi\ \ [k\in\mathbb{Z}]$$

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 1

1) $z_{\overrightarrow{AB}}=z_B-z_A=1+i$

2) $AB=|z_B-z_A|=\sqrt{2}$

3) $Mes\left(\vec{u};\overrightarrow{AB}\right)=\frac{\pi}{4}$.

Exercice 2

a) **Dans l'énoncé, prendre** $z_A=2-i\sqrt{3}$ **et** $z_B=-1-i\sqrt{3}$

$$mes\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right)=\arg\left(\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right)+2k\pi=\arg\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+2k\pi=\frac{\pi}{3}+2k\pi\qquad(k\in\mathbb{Z}).$$

b) $mes\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right)=\arg\left(\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right)+2k\pi=\arg\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+2k\pi=\frac{\pi}{3}+2k\pi,\quad(k\in\mathbb{Z}).$

Exercice 3

$$Mes\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=-\frac{\pi}{2}$$

ACTIVITÉ 2 : Caractérisation complexe de points alignés.

- L'objectif de cette activité est de pouvoir justifier l'alignement de trois points en utilisant les nombres complexes.
- Réponses aux questions de l'activité.

1- A, B et C sont alignés $\Leftrightarrow mes\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=k\pi\ \ [k\in\mathbb{Z}]$

$$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=k\pi\ \ [k\in\mathbb{Z}]$$

2- Prendre $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ dans l'énoncé.

$A\neq C$ alors $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\in\mathbb{R}^*$

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 4

1- $\dfrac{b-a}{c-a}=\dfrac{1}{2}$

2- $\dfrac{b-a}{c-a}\in\mathbb{R}^*$ alors les points A, B et C sont alignés.

ACTIVITÉ 3: Caractérisation complexe des triangles particuliers.

- L'objectif de cette activité est d'utiliser les nombres complexes pour caractériser des triangles particuliers.
- Réponses aux questions de l'activité.

1- ABC est un triangle isocèle en A et $mes\text{A}=\alpha\ \left(\alpha\neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right)$

a) ABC est un triangle isocèle en A alors AB = AC, ce qui donne $\left|\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=1$.

b) $mes\text{A}=\alpha\ \left(0<\alpha<\pi\right)$, on a alors $\arg\left(\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=\alpha+2k\pi$ ou $\arg\left(\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=-\alpha+2k\pi$

avec $\left[k\in\mathbb{Z}\right]$

c) La forme exponentielle de $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ est donc $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=e^{i\alpha}$ ou $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=e^{-i\alpha}$.

2- ABC est un triangle équilatéral.

a) $\left|\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=\dfrac{AC}{AB}=1$

b) $\arg\left(\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=mes\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right)=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $\arg\left(\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=mes\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right)=-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$

avec $\left[k\in\mathbb{Z}\right]$.

c) Les résultats précédents permettent d'avoir : $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$

3- ABC est un triangle rectangle en A

a) $\left(AB\right)\perp\left(AC\right)\Leftrightarrow mes\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\ \ \left[k\in\mathbb{Z}\right]$

$$\Leftrightarrow \arg\left(\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\ \ \left[k\in\mathbb{Z}\right]$$

b) On en déduit que $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}^*$.

4- ABC est un triangle rectangle et isocèle en A.

ABC est un triangle rectangle alors d'après la consigne 3, $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}^*$ et donc $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = ib$ avec $b \in \mathbb{R}^*$.

Le triangle ABC est isocèle en A alors d'après la consigne 1, $\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = 1$ et

$$\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = 1 \Leftrightarrow |ib| = 1 \Leftrightarrow |b| = 1 \Leftrightarrow b = 1 \;\; ou \;\; b = -1$$

Ainsi, ABC est un triangle rectangle et isocèle en A équivaut à $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = i$ ou $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = -i$.

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 5

1) $mes\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) + 2k\pi = \arg(-3i) + 2k\pi = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \; [k \in \mathbb{Z}]$

2) On en déduit que le triangle ABC est rectangle en A.

Exercice 6

1) $\frac{b-a}{c-a} = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$.

2) $\frac{b-a}{c-a} = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$, alors le triangle ABC est équilatéral.

ACTIVITÉ 4 : Caractérisation complexe de l'angle droit.

- L'objectif de cette activité est d'utiliser les nombres complexes pour justifier l'orthogonalité de deux droites.
- Réponses aux questions de l'activité.

1) $(AB) \perp (CD) \Leftrightarrow mes\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi \;\; [k \in \mathbb{Z}]$

$$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi \;\; [k \in \mathbb{Z}].$$

2) Prendre $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ dans l'énoncé.

On en déduit que : $\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}^*$.

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 7

1) $\dfrac{c-a}{b-a} = \dfrac{1}{3}i$

2) $\dfrac{c-a}{b-a} \in i\mathbb{R}^*$ alors $(AB) \perp (AC)$

ACTIVITE 5 : Caractérisation complexe de points cocycliques.

- L'objectif de cette activité est d'utiliser les nombres complexes pour justifier que quatre points sont cocycliques.
- Réponses aux questions de l'activité.

1) On justifie

$$mes\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right) = mes\left(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DB}\right) + k\pi \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = \arg\left(\frac{z_B - z_D}{z_A - z_D}\right) + k\pi \quad [k \in \mathbb{Z}]$$

$$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) - \arg\left(\frac{z_B - z_D}{z_A - z_D}\right) = k\pi$$

2) $\arg\left(\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) - \arg\left(\dfrac{z_B - z_D}{z_A - z_D}\right) = k\pi$ alors $\arg\left(\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C} : \dfrac{z_B - z_D}{z_A - z_D}\right) = k\pi \quad [k \in \mathbb{Z}]$.

3) Posons $r = \left|\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C} : \dfrac{z_B - z_D}{z_A - z_D}\right|$, alors $\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C} : \dfrac{z_B - z_D}{z_A - z_D} = re^{ik\pi} = r\cos(k\pi)$. On en déduis que

$\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C} : \dfrac{z_B - z_D}{z_A - z_D} \in \mathbb{R}^*$

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 8

$\dfrac{c-a}{c-b} = i$ et $\dfrac{d-a}{d-b} = -i$

$\dfrac{c-a}{c-b} : \dfrac{d-a}{d-b} = -1 \in \mathbb{R}^*$ donc les points A, B, C et D sont cocycliques.

Exercice 9

$\frac{c-a}{c-b}:\frac{d-a}{d-b}=6$, on a : $\frac{c-a}{c-b}:\frac{d-a}{d-b}\in\mathbb{R}^*$ ce qui donne ;

$\arg\left(\frac{c-a}{c-b}\right)-\arg\left(\frac{d-a}{d-b}\right)=k\pi\ [k\in\mathbb{Z}]$ c'est-à-dire $\arg\left(\frac{c-a}{c-b}\right)=\arg\left(\frac{d-a}{d-b}\right)+k\pi$ et

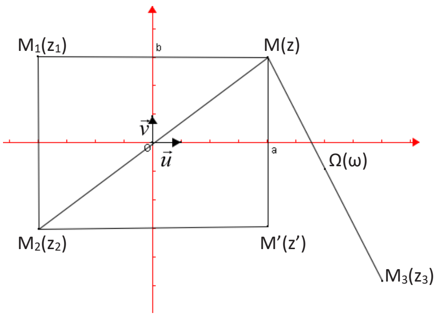
$$\arg\left(\frac{c-a}{c-b}\right)=\arg\left(\frac{d-a}{d-b}\right)+k\pi \Leftrightarrow mes\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{AC}\right)=mes\left(\overrightarrow{BD};\overrightarrow{AD}\right)+k\pi\ [k\in\mathbb{Z}]$$

$$\Leftrightarrow mes\left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA}\right)=mes\left(\overrightarrow{DB};\overrightarrow{DA}\right)+k\pi\ [k\in\mathbb{Z}]$$

Donc les points A, B, C et D sont cocycliques.

ACTIVITÉ 6 : Écriture complexe des symétries.

- L'objectif de cette activité est de caractériser les symétries à partir de leurs écritures complexes.
- Réponses aux questions de l'activité.



- **Symétries par rapport aux axes du repère**

 1) a) Voir figure
 b) Voir figure
 c) $M'=S_{(O;\vec{u})}(M)$, on a : $M'(a;-b)$ et donc : $z'=\overline{z}$

 2) a) Voir figure
 b) $M_1=S_{(O;\vec{v})}(M)$, on a : $M_1(-a;b)$ et donc : $z_1=-\overline{z}$

- **Symétrie par rapport à un point**

 1) a) Voir figure
 b) $M_2=S_O(M)$, on a : $M_2(-a;-b)$ et donc : $z_2=-z$

2) a) Voir figure
   b) Voir figure
   c) $M_3 = S_\Omega(M)$, on a : $\overrightarrow{\Omega M_3} = -\overrightarrow{\Omega M}$ et donc : $z_3 = -z + 2\omega$

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 10

1.F ; 2.F ; 3.V ; 4.F ; 5.V

Exercice 11 c)

Exercice 12

L'écriture complexe de la symétrie centrale de centre Ω d'affixe 1 + i est : $z' = -z + 2 + 2i$.

Exercice 13

$z' = -z + 2\left(\frac{3}{2} - i\right)$; f est donc la symétrie centrale de centre Ω d'affixe $\frac{3}{2} - i$.

ACTIVITÉ 7: Ecriture complexe d'une translation.

- L'objectif de cette activité est de déterminer l'écriture complexe d'une translation.
- Réponses aux questions de l'activité.

1. $z_{\overrightarrow{MM'}} = z' - z$
2. $z' = z + b$
3. $z' = z + b \Rightarrow z' - z = b \Rightarrow z_{\overrightarrow{MM'}} = z_{\vec{u}} \Rightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u} \Rightarrow M' = t_{\vec{u}}(M)$

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 14 $z' = z - 1 - 2i$

Exercice 15 g est la translation de vecteur $\vec{w}$ d'affixe $-\frac{1}{2} + i$.

ACTIVITE 8: Ecriture complexe d'une rotation.

- L'objectif de cette activité est de déterminer l'écriture complexe d'une rotation.
- Réponses aux questions de l'activité.

1. $\Omega M = |z - w|$ et $\Omega M' = |z' - w|$.
2. Soit r la rotation de centre Ω et d'angle θ. $M' = r(M) \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ mes\left(\overrightarrow{\Omega M} ; \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \theta + 2k\pi, \; [k \in \mathbb{Z}] \end{cases}$

$$mes\left(\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'}\right)=\theta+2k\pi \quad \text{alors} \quad \arg\left(\frac{z'-\omega}{z-\omega}\right)=\theta+2k\pi \ [k\in\mathbb{Z}].$$

3. $\left|\frac{z'-\omega}{z-\omega}\right|=\frac{|z'-\omega|}{|z-\omega|}=\frac{\Omega M'}{\Omega M}=1$ et $\arg\left(\frac{z'-\omega}{z-\omega}\right)=\theta+2k\pi \ [k\in\mathbb{Z}]$ alors $\frac{z'-\omega}{z-\omega}=e^{i\theta}$.
4. $\frac{z'-\omega}{z-\omega}=e^{i\theta} \Rightarrow z'=e^{i\theta}z+\left(1-e^{i\theta}\right)\omega$.
5. L'écriture complexe de la rotation de centre O et d'angle θ est $z'=e^{i\theta}z$.

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 16 $z'=e^{i\frac{\pi}{3}}z=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$

Exercice 17 $z'=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)z+3i=e^{-i\frac{\pi}{3}}z+3i$

f est la rotation de centre Ω d'affixe $3+\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3i}{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{6}$.

ACTIVITÉ 9: Ecriture complexe d'une homothétie.

- L'objectif de cette activité est de déterminer l'écriture complexe d'une homothétie.
- Réponses aux questions de l'activité.

1. $z_{\overrightarrow{\Omega M'}}=z'-w$ et $z_{k\overrightarrow{\Omega M}}=k(z-\omega)$
2. h est l'homothétie de centre Ω et de rapport k.
   $M'=h(M)\Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'}=k\overrightarrow{\Omega M}\Leftrightarrow z'-\omega=k(z-\omega)$.
3. $z'=kz+(1-k)\omega$.

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 18 $z'=-\frac{2}{3}z$

Exercice 19 f est l'homothétie de centre Ω d'affixe $\frac{-3+i}{6}$ et de rapport k = 7.

ACTIVITÉ 10: Similitude directe.

- L'objectif de cette activité est de définir une nouvelle application du plan dans le plan.
- Réponses aux questions de l'activité.

1. $h\circ r(\Omega)=h[r(\Omega)]=h(\Omega)=\Omega$ et $r\circ h(\Omega)=r[h(\Omega)]=r(\Omega)=\Omega$
2. a) $h\circ r(M)=h(M_1)$. Donc $h\circ r(M)=M'\Rightarrow h(M_1)=M'\Rightarrow\overrightarrow{\Omega M'}=k\overrightarrow{\Omega M_1}\Rightarrow \Omega M'=k\Omega M_1$

Or $M_1 = r(M) \Rightarrow \Omega M_1 = \Omega M$; On en déduis que $\Omega M' = k\Omega M$.

b) $M_1 = r(M) \Rightarrow mes\left(\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M_1}\right) = \theta$. D'autre part

$\left(\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'}\right) = \left(\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M_1}\right) + \left(\overrightarrow{\Omega M_1};\overrightarrow{\Omega M'}\right)$ et $M' = h(M_1) \Rightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M_1}$ et k>0, alors $\overrightarrow{\Omega M_1}$ et $\overrightarrow{\Omega M'}$ sont colinéaires de même sens, et donc $mes\left(\overrightarrow{\Omega M_1};\overrightarrow{\Omega M'}\right) = 0$

Alors $mes\left(\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'}\right) = mes\left(\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M_1}\right) = \theta + 2k\pi \ [k \in \mathbb{Z}]$.

3. a) $\left.\begin{array}{l} r(M) = M_1 \\ r(N) = N_1 \end{array}\right\}$ $M_1N_1 = MN$ (propriété caractéristique de la rotation)

$\left.\begin{array}{l} h(M_1) = M' \\ H(N_1) = N' \end{array}\right\}$ $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{M_1N_1}$ (propriété caractéristique d'un homothétie) et comme $k > 0$,

$M'N' = kM_1N_1$

$\left.\begin{array}{l} M'N' = kM_1N_1 \\ M_1N_1 = MN \end{array}\right\}$ alors $M'N' = kMN$

b) $\left(\overrightarrow{MN};\overrightarrow{M'N'}\right) = \left(\overrightarrow{MN};\overrightarrow{M_1N_1}\right) + \left(\overrightarrow{M_1N_1};\overrightarrow{M'N'}\right)$ or $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{M_1N_1}$ et $k > 0$ alors les vecteurs $\overrightarrow{M'N'}$ et $\overrightarrow{M_1N_1}$ sont colinéaires de même sens ; ce qui donne $\left(\overrightarrow{M_1N_1};\overrightarrow{M'N'}\right) = 0$.

D'autre part d'après la propriété caractéristique de la rotation $\left(\overrightarrow{MN};\overrightarrow{M_1N_1}\right) = \theta$.

On a donc : $\left(\overrightarrow{MN};\overrightarrow{M'N'}\right) = \theta$.

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 20 1. Vrai ; 2. Vrai

Exercice 21 $AC = \frac{1}{2}AB = \frac{5}{2}$ et $Mes\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) = -\frac{\pi}{6}$

Exercice 22 1.F ; 2.F ; 3.V ; 4.V

ACTIVITÉ 11: Ecriture complexe d'une similitude directe.

- L'objectif de cette activité est de déterminer l'écriture complexe d'une similitude directe.

- Réponses aux questions de l'activité.

1. a) $z' = e^{i\theta}z + \left(1 - e^{i\theta}\right)\omega$

   b) $z' = kz + (1-k)\omega$

2. a) Soit les points $M(z)$, $M_1(z_1)$ et $M'(z')$ les points tels que $r(M) = M_1$ et $h(M_1) = M'$.

   $r(M) = M_1 \Leftrightarrow z_1 = e^{i\theta}z + \left(1 - e^{i\theta}\right)\omega$

   $h(M_1) = M' \Leftrightarrow z' = kz_1 + (1-k)\omega$; ce qui donne :

   $z' = k\left[e^{i\theta}z + \left(1 - e^{i\theta}\right)\omega\right] + (1-k)\omega = ke^{i\theta}(z - \omega) + \omega$

   $= ke^{i\theta}(z - \omega) + \omega$

   b) $z' = ke^{i\theta}z + \left(1 - ke^{i\theta}\right)\omega$. Alors l'écriture complexe de $h \circ r$ est sous la forme $z' = az + b$ avec :

   $a = k\,e^{i\theta}$ et $b = \left(1 - ke^{i\theta}\right)\omega$

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 23 $z' = (1+i)z + 1 - i$

Exercice 24 $z' = \left(1 + i\sqrt{3}\right)z + \sqrt{3}(2 - i)$ est l'écriture complexe de la similitude directe S de centre Ω d'affixe $1 + 2i$, de rapport $k = 2$ et d'angle $\theta = \dfrac{\pi}{3}$.

ACTIVITÉ 12: Images de figures simples par une similitude directe.

- L'objectif de cette activité est de déterminer l'image d'une figure simple par une similitude directe.
- Réponses aux questions de l'activité.

I) On sait depuis la classe de seconde C que :

- L' image d'une droite par une rotation et par une homothétie est une droite.
- L'image d'un cercle (C) de rayon r :
  - ➢ Par une rotation est un cercle de rayon r.
  - ➢ par une homothétie de rapport k est un cercle de rayon $|k|r$.
- L'image d'un segment [AB] :
  - ➢ Par une rotation est un segment [A'B'] tel que A'B' = AB.
  - ➢ Par une homothétie de rapport k est un segment [A'B'] tel que A'B' = $|k|$ AB.

Ainsi si S est une similitude directe de rapport k telle que $S = h \circ r$, alors :

- L'image d'une droite par la similitude directe S est une droite.
- L'image d'un cercle de rayon r par la similitude directe S est un cercle de rayon kr.
- L'image d'un segment [AB] par la similitude directe S est un segment [A'B'] tel que A'B' = k AB.

II) Une équation de la droite (D') est y = 2.

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 25 Une équation de (D') est : $x + y = 0$

Exercice 26 L'image du cercle (C) par la similitude S est le cercle (C') de centre O' d'affixe 3 et de rayon 5. Une équation de (D') est : $(x-3)^2 + y^2 = 25$.

III. DES QUESTIONS D'EVALUATION

- **Question 1 : Comment déterminer la nature et les éléments caractéristiques d'une transformation du plan définie par son écriture complexe.** $\left(z' = az + b,\ a \in \mathbb{C}^* \ et \ b \in \mathbb{C}\right)$?

Solution de l'exercice non corrigé

1) La transformation du plan associée à cette écriture complexe est l'homothétie de rapport –3 et de centre le point Ω d'affixe $-\frac{1}{4}$
2) La transformation du plan associée à cette écriture complexe est la similitude directe de centre le point Ω d'affixe – 1, de rapport 2 et d'angle orienté $-\frac{\pi}{6}$.
3) La transformation du plan associée à cette écriture complexe est la symétrie centrale de centre le point Ω d'affixe $1 - \frac{i}{2}$.
4) La transformation du plan associée à cette écriture complexe est la rotation de centre O et d'angle orienté $\frac{2\pi}{3}$.
5) La transformation du plan associée à cette écriture complexe est la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $-3-2i$.
6) La transformation du plan associée à cette écriture complexe est la rotation de centre O et d'angle orienté $-\frac{\pi}{4}$.

- **<u>Question 2 :</u> Comment déterminer l'écriture complexe d'une similitude directe définie par son centre Ω(ω), son angle orienté θ et son rapport k ?**
  <u>Solution de l'exercice non corrigé</u>

  1) L'écriture complexe de S est : $z' = \left(\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$.
  2) L'écriture complexe de S est : $z' = \frac{1}{2}$ iz+3+i.

- **<u>Question 3 :</u> Comment déterminer l'écriture complexe d'une similitude directe définie par son centre Ω, un point et son image ?**

  <u>Solution de l'exercice non corrigé</u>

  1) L'écriture complexe de T est : $z' = \frac{1}{2}iz + 3 + i$.
  2) L'écriture complexe de T est : $z' = (1-i)z + 1 + 2i$.

- **<u>Question 4 : :</u> Comment déterminer l'écriture complexe d'une similitude directe définie par deux points et leurs images ?**
  <u>Solution de l'exercice non corrigé</u>
  L'écriture complexe de S est : $z' = -iz$.

- **<u>Question 5 :</u> Comment déterminer le rapport et l'angle orienté d'une similitude directe définie par son centre , un point et son image ?**
  <u>Solution de l'exercice non corrigé</u>

  S est la similitude directe de centre O, de rapport $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $\theta = -\frac{5\pi}{12}$.

IV. MES SEANCES D'EXERCICES

➢ Exercices de fixation

- **Nombres complexes, distances et angles**

Exercice 1

a) $AB = 2$ et $mes\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{AB}\right) = -\dfrac{\pi}{3}$

b) $AB = 2\sqrt{2}$ et $mes\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{AB}\right) = -\dfrac{3\pi}{4}$

c) $AB = 2\sqrt{3}$ et $mes\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{AB}\right) = \dfrac{2\pi}{3}$

Exercice 2

$AB = \sqrt{10}$; $AC = \sqrt{10}$; $BC = 2\sqrt{2}$.

ABC est un triangle isocèle en A.

Exercice 3

1) $\dfrac{a-c}{b-c} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$

2) $Mes\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{\pi}{6}$

Exercice 4

1) $Mes\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{\pi}{2}$

2) $Mes\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$

- **Caractérisation complexe de points alignés**

Exercice 5

$\dfrac{z_A - z_B}{z_A - z_C} \in \mathbb{R}^*$

Exercice 6

$z_{\overrightarrow{AB}} = -4 + 4i$; $z_{\overrightarrow{AC}} = -5 + 5i$.

$\dfrac{z_{\overrightarrow{AB}}}{z_{\overrightarrow{AC}}} = \dfrac{4}{5} \in \mathbb{R}^*$ alors les points A, B et C sont alignés.

Exercice 7

$\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = -1 \in \mathbb{R}^*$ alors les points A, B et C sont alignés.

- **Caractérisations complexes des triangles particuliers.**

Exercice 8 Réponse c

Exercice 9

- Le triangle ABC est rectangle et isocèle en A si et seulement si $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = i$ ou $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = -i$
- Le triangle ABC est équilatéral si et seulement si $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} \in \left\{ e^{i\frac{\pi}{3}} ; e^{-i\frac{\pi}{3}} \right\}$.

Exercice 10

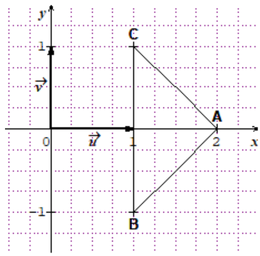
Le triangle ABC est rectangle en A.

Exercice 11

$\frac{c-a}{b-a} = i$

Exercice 12

1. Voir figure



$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = -i$ alors le triangle ABC est rectangle et isocèle en A.

- **Caractérisation complexe de l'angle droit.**

Exercice 13

$\frac{z_A - z_B}{z_D - z_C} \in i\mathbb{R}^*$

Exercice 14

1. $\frac{c-b}{a-b} = \frac{1}{2}i$
2. Les droites (AB) et (BC) sont perpendiculaires.

- **Caractérisation complexe des points cocycliques.**

Exercice 15

Les bonnes réponses sont : $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} : \frac{z_D - z_B}{z_D - z_C} \in \mathbb{R}^*$ et $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} : \frac{z_B - z_D}{z_D - z_C} \in \mathbb{R}^*$

Exercice 16

$OA = OB = OC = 2$ alors les points A, B et C appartiennent au cercle de centre O et de rayon 2.

Exercice 17

1. a) $\frac{b-a}{c-a} = -i$ et $\frac{b-d}{c-d} = i$

b) $\left(\frac{b-a}{c-a}\right):\left(\frac{b-d}{c-d}\right)=-1$

2. $\left(\frac{b-a}{c-a}\right):\left(\frac{b-d}{c-d}\right)\in\mathbb{R}^*$ alors les points A, B, C et D sont cocycliques.

- **Ecriture complexe des symétries.**

Exercice 18

$z'-\omega=-(z-\omega)$

Exercice 19

a) $z'=-z+2+2i$; b) $z'=-z$; c) $z'=-z+2+6i$

Exercice 20

Prendre dans l'énoncé b) , $z' = e^{-i\pi}z - 2 + 6i$

a) Symétrie centrale de centre Ω d'affixe $\frac{1}{2}-i$
b) Symétrie centrale de centre Ω d'affixe $-1+3i$
c) Symétrie centrale de centre O.

Exercice 21 **Dans cet exercice, écrire plutôt $z'=e^{i\pi}z$ dans l'énoncé**.

1. S est la symétrie centrale de centre O.
2. L'affixe de l'image du point $\Omega(1-i)$ est le point $\Omega'(-1+i)$.

Exercice 22

1. S est la symétrie orthogonale d'axe $(O;\vec{u})$.
2. L'affixe de l'image du point $A(1+i)$ est le point A' d'affixe $1-i$.
3. L'affixe de l'antécédent du point $B(-2-i)$ est le point B_0 d'affixe $-2+i$.

- **Ecriture complexe d'une translation.**

Exercice 23

1. L'écriture complexe de T est $z'=z-1+2i$.
2. Par T, l'image du point A est le point $A'(-4+3i)$ et l'image du point B est le point $B'(1-i)$

Exercice 24

L'écriture complexe de la translation T qui transforme A en B est $z'=z-1+2i$.

Exercice 25

a) Translation de vecteur $\vec{u}(1-3i)$.
b) Translation de vecteur $\vec{u}(3+i)$.
c) Translation de vecteur $\vec{u}(i)$.
d) Translation de vecteur $\vec{u}(-1-2i)$.

Exercice 26

1) T est la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $-3+2i$.
2) Si on désigne par (C) le cercle de centre O passant par le point $A(1+i)$, par O' et A' les images respectives des points O et A, on a $O'(-3+2i)$ et $A(-2+3i)$.

Alors l'image de (C) par T est le cercle (C') de centre O' passant par le point A'.

Exercice 27

(D'): $2x-y+2=0$

- **Ecriture complexe d'une rotation.**

Exercice 28

$z'-\omega=e^{i\theta}(z-\omega)$

Exercice 29

$$z'=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$$

Exercice 30

1. $z'=-iz-2+2i$
2. $z_C=3+3i$

Exercice 31

$$z'=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)z-3+2i$$

Exercice 32

1. f est la rotation de centre $\Omega(2)$ et d'angle orienté $-\frac{\pi}{6}$.
2. L'affixe de O' est $2-\sqrt{3}+i$.

- **Ecriture complexe d'une homothétie.**

Exercice 33

1. Homothétie de centre O et de rapport 3.
2. Homothétie de centre $\Omega(4-2i)$ et de rapport $\frac{1}{2}$.
3. Homothétie de centre $\Omega(-4+3i)$ et de rapport 2.

Exercice 34

1. a) $\omega=-1-i$

   b) $\frac{z'-\omega}{z-\omega}=2$
2. H est l' homothétie de centre Ω d'affixe $\omega=2$ et de rapport 2.

Exercice 35

$z' = -2z + 3 - 3i$

Exercice 36

1. $z' = \frac{1}{2}z + \frac{3}{2} - \frac{5}{2}i$
2. Ω a pour affixe $3 - 5i$

- **Similitude directe : définitions et propriétés.**

Exercice 37

1.F ; 2.V ; 3.V ; 4.V ; 5V

Exercice 38

1. Vraie car son écriture complexe est $z' = -z$
2. Vraie.
3. Vraie.

Exercice 39

Soit S une similitude directe d'écriture complexe $z' = az + b$ admettant deux points invariants A et B. $A = S(A) \Leftrightarrow z_A = az_A + b$; $B = S(B) \Leftrightarrow z_B = az_B + b$

La résolution du système $\begin{cases} az_A + b = z_A \\ az_B + b = z_B \end{cases}$ nous donne $a = 1$ et $b = 0$

Ce qui donne $z' = z$. Alors S est l'application identique.

Exercice 40

1.vrai ; 2.faux ; 3.vrai ; 4.vrai

- **Ecriture complexe d'une similitude directe.**

Exercice 41

$z' - \omega = ke^{i\theta}(z - \omega)$

Exercice 42

$\omega = 2$; $k = \sqrt{2}$; $\theta = \frac{\pi}{4}$

Exercice 43

a) f est la similitude directe de centre $\Omega\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{5}i\right)$, de rapport $k = \sqrt{2}$ et d'angle $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

b) f est la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $2 - i$.

c) f est la similitude directe de centre O, de rapport $k = 3$ et d'angle $\theta = -\frac{\pi}{2}$.

d) f est la rotation de centre $\Omega\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$ et d'angle $\theta = \frac{\pi}{3}$.

e) f est une similitude directe de centre $\Omega\left(\frac{-4}{5} + \frac{2}{5}i\right)$, de rapport $k = 2$ et d'angle $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 44

1) $z' = -iz - 1 - i$
2) $z' = -3iz - 2 - 2i$
3) $z' = \left(-\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right)z - \sqrt{2} + \left(1 + \sqrt{2}\right)i$

- **Image de figures simples par une similitude directe.**

Exercice 45

1.faux ; 2.faux ; 3.vrai 4.vrai ; 5.vrai

Exercice 46

(D') : $\left(-1+\sqrt{3}\right)x - \left(1+\sqrt{3}\right)y + 1 + \sqrt{3} = 0$

Exercice 47

(C') est le cercle de centre O et de rayon 6. Donc : (C') :$x^2 + y^2 = 36$.

- **Déterminations d'une similitude directe.**

Exercice 48

Prendre comme énoncé :

Justifie qu'il existe une unique similitude directe S de centre A transformant B en C. Détermine l'écriture complexe de S.

Les points A, B et C étant distincts deux à deux, il existe une unique similitude directe S de centre A transformant B en C.

S a pour écriture complexe : $z' = iz + 2$

Exercice 49

$z_A = i$ et $z_B = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Les points A et B sont distincts alors il existe une similitude directe S de rapport 2 et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ qui transforme A en B.

Exercice 50

Dans la question 1 **: Justifie qu'il existe une unique similitude directe S qui applique A sur D et B sur C.**

1. $A \neq B$ et $C \neq D$ alors il existe une unique similitude directe S qui applique A sur D et B sur C.
2. Le rapport de S est $k = \frac{DC}{AB} = \sqrt{2}$ et l'angle de S est

   $\theta = mes\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{DC}\right) = \arg\left(\frac{z_C - z_D}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{4}$
3. a) L'écriture complexe de S est : $z' = (1+i)z + 1 + i$.

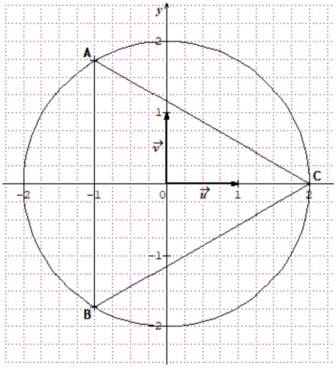
   b) Le centre de S est le point Ω d'affixe $-1+i$.

Exercice 51

- Le rapport de S est : $k=\frac{AC}{AB}=\frac{AB\sqrt{2}}{AB}=\sqrt{2}$
- L'angle de S est : $\theta=mes\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{4}$

➢ Exercices de renforcement/Approfondissement

Exercice 52



1. Voir figure
2. a) $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{i\frac{\pi}{3}}$

   b) ABC est un triangle équilatéral.
3. a) Soit Ω le centre de (Γ).
   - Le triangle ABC étant équilatéral,

     on a $\overrightarrow{\Omega A}+\overrightarrow{\Omega B}+\overrightarrow{\Omega C}=\vec{O}$ ce qui donne

     $z_\Omega=\frac{1}{3}(z_A+z_B+z_C)=0$. Alors le centre de

(Γ) est le point O.

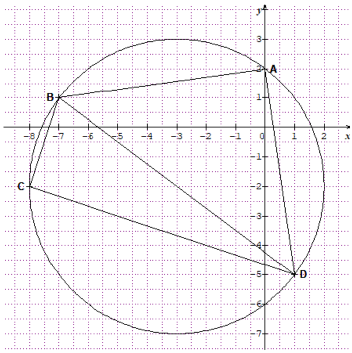
   - Le rayon de (Γ) est $r=OA=2$.

   c) Voir figure

Exercice 53 Résoudre dans $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$

1. $S_{\mathbb{C}\times\mathbb{C}}=\left\{\left(-\sqrt{3}+i;-1+i\sqrt{3}\right)\right\}$
2. $m=2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$ et $n=2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$.
3. a) $\left|\frac{n}{m}\right|=1$ et $Arg\left(\frac{n}{m}\right)=-\frac{\pi}{6}$

   b) $Mes\left(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{ON}\right)=-\frac{\pi}{6}$ et MON est un triangle isocèle en O.



Exercice 54 **PRENDRE 1 cm pour unité graphique**

1. Voir figure
2. a) $\frac{d-a}{b-a}=i$

   b) Le triangle ABD est rectangle isocèle en A.

3. $\dfrac{d-a}{b-a}:\dfrac{d-c}{b-c}=\dfrac{i}{-3i}=-\dfrac{1}{3}\in\mathbb{R}^*$, alors les points

A, B, C et D sont alignés.

4. Désignons par (Γ) le cercle circonscrit aux triangles ABD et BDC.

Le triangle ABD étant rectangle en A, le centre Ω de (Γ) est le milieu du segment [BD].

$z_\Omega=\dfrac{z_B+z_D}{2}=-3-2i$. Le rayon du cercle (Γ) est $r=\Omega A=5$.

Exercice 55

1. $Mes\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=Arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right)=Arg(2i)=\dfrac{\pi}{2}$.
2. $z_{A'}=z_A+1+i=3$; $z_{B'}=z_B+1+i=4+3i$; $z_{C'}=z_C+1+i=-3+2i$
3. $Mes\left(\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{A'C'}\right)=Arg\left(\dfrac{c'-a'}{b'-a'}\right)=Arg(2i)=\dfrac{\pi}{2}$
4. La translation f conserve les mesures des angles orientés.

Exercice 56

1. a) $OA=OB=2$ alors les points A et B sont sur un cercle de centre O et de rayon 2.
   b) Voir figure
2. r_1 est la rotation de centre A et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ alors l'écriture complexe de r_1 est

   $z'=-iz+\left(1-i\sqrt{3}\right)+i\left(1+\sqrt{3}\right)$.

r_2 est la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ alors l'écriture complexe de r_2 est

$z'=iz+\left(1+\sqrt{3}\right)+i\left(-1+\sqrt{3}\right)$.

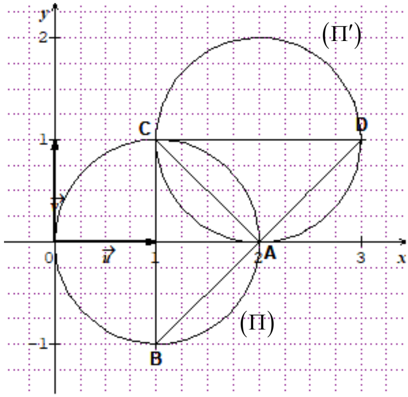
Ainsi : $C=r_1(O)\Leftrightarrow z_C=-iz_O+\left(1-i\sqrt{3}\right)+i\left(1+\sqrt{3}\right)=\left(1-i\sqrt{3}\right)+i\left(1+\sqrt{3}\right)$

$D=r_2(B)\Leftrightarrow z_D=iz_B+\left(1+\sqrt{3}\right)+i\left(-1+\sqrt{3}\right)=\left(1+2\sqrt{3}\right)+i\sqrt{3}$

Exercice 57

1. a) Voir figure
   b) $\dfrac{a-c}{a-b}=-i$ alors le triangle ABC est rectangle isocèle en A.
2. a) soit θ l'angle de r.

   Comme $C=r(B)$ alors $\theta=mes\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\arg(-i)+2k\pi=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$



b) L'écriture complexe de r est $z' = -iz + 2 + 2i$.

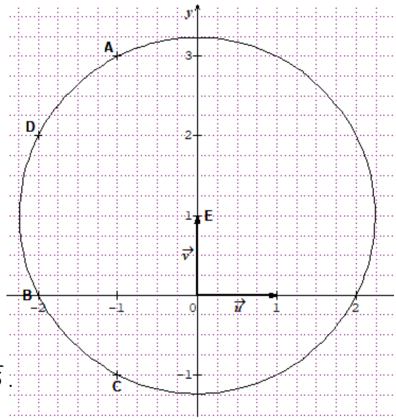
c) $D = r(C) \Leftrightarrow z_D = -iz_C + 2 + 2i = 3 + i$

3. (Π) est le cercle de diamètre [BC] alors

$(\Pi') = r(\Pi)$ est le cercle de diamètre $[r(B)r(C)] = [CD]$.

Exercice 58

1. a) Voir figure



b) L'écriture complexe de r est $z' = iz + 1 + i$.

c) $B = r(A) \Leftrightarrow z_B = iz_A + 1 + i \Leftrightarrow z_A = -1 + 3i$

2. $\dfrac{c-b}{d-b} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$ et $\dfrac{c-a}{d-a} = 2 + 2i$

$\dfrac{c-b}{d-b} : \dfrac{c-a}{d-a} = -\dfrac{1}{4} \in \mathbb{R}^*$ alors les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle (C).

D'autre part, $B = r(A)$ alors $EA = EB$ et $EB = \sqrt{5}$.

On a aussi $iz_D + 1 + i = -1 - i = z_C$ alors $C = r(D)$ et donc $EC = ED$ et $EC = \sqrt{5}$.

On a : $EA = EB = EC = ED = \sqrt{5}$ Donc (C) est le cercle de centre E et de rayon $\sqrt{5}$.

Exercice 59

1. a) $\dfrac{c-a}{b-a}=i$ alors le triangle ABC est rectangle isocèle en A.

   b) L'aire du triangle ABC est $\mathcal{A}_{ABC}=\dfrac{AB\times AC}{2}=\dfrac{\sqrt{10}\times\sqrt{10}}{2}=5\ cm^2$.

2. a) A', B' et C' sont les images respectives des points A, B et C par l'homothétie h et $(AB)\perp(AC)$, alors $(A'B')\perp(A'C')$ car h conserve l'orthogonalité.

   b) $\mathcal{A}_{A'B'C'}=2^2\times\mathcal{A}_{ABC}=20cm^2$.

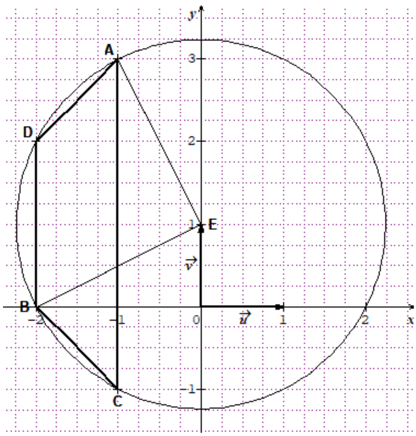
Exercice 60

1. f est la similitude directe de rapport $\sqrt{2}$, d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ et de centre Ω d'affixe 2.
2. $M(z)\in(\Gamma)\Leftrightarrow|(1+i)z-2i|=\sqrt{2}\Leftrightarrow|z-1-i|=\sqrt{2}\Leftrightarrow AM=\sqrt{2}$

   Alors (Γ) est le cercle de centre $A(1+i)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

3. (C) est le cercle de centre Ω et de rayon 1. Alors l'image (C') de (C) par f est le cercle de centre $f(\Omega)$ et de rayon $\sqrt{2}\times1=\sqrt{2}$. $f(\Omega)$ ayant pour affixe $-1+i$.

Exercice 61



1. a) l'écriture complexe de r est $z'=iz+1+i$.

   b) $B=r(A)\Leftrightarrow z_B=iz_A+1+i=-2$

   c) $C=r(D)\Leftrightarrow z_C=id+1+i\Leftrightarrow d=-2+2i$

2. a) Voir figure

   b) $B=r(A)$ alors $\Omega A=\Omega B$ et $\Omega B=\sqrt{5}$

   $C=r(D)$ alors $\Omega D=\Omega C$ et $\Omega C=\sqrt{5}$

   On a : $\Omega A=\Omega B=\Omega D=\Omega C=\sqrt{5}$

   alors les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle de centre Ω et de rayon $\sqrt{5}$.

3. a) $z_{\overrightarrow{AB}}=-4i$ et $z_{\overrightarrow{BD}}=2i$. On a : $\overrightarrow{AC}=-2\overrightarrow{BD}$ donc les droites (AC) et (BD) sont parallèles.

   b) $AD=|z_D-z_A|=\sqrt{2}$ et $BC=|z_C-z_B|=\sqrt{2}$

   c) $(AC)//(BD)$ et $AD=BC$ alors le quadrilatère ADBC est un trapèze isocèle.

Exercice 62

1. $\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3}{4}i=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$\left|\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3}{4}i\right|=\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\right|\times\left|\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\arg\left(\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3}{4}i\right)=\arg\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\arg\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\frac{\pi}{3}+2k\pi$

Alors $\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3}{4}i=\frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$.

2. a) $r_{n+1}=|z_{n+1}|=\left|\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3}{4}i\right|\times|z_n|=\frac{\sqrt{3}}{2}r_n$ et $r_0=|z_0|=1$; alors (r_n) est une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et de premier terme $r_0=1$.

b) $r_n=r_0\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$.

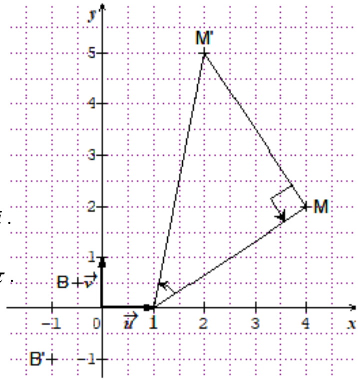
c) $OA_n=|z_n|=r_n=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}OA_n=0$.

Exercice 63

1. a) S est la similitude directe de rapport $\sqrt{2}$, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de centre Ω d'affixe 1.

b) Pour tout point $M\neq\Omega$, $z'=(1+i)z-i\Leftrightarrow\frac{z'-z}{z-1}=i$.

$mes\left(\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{MM'}\right)=\arg\left(\frac{z'-z}{z-1}\right)=\arg(i)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$.



2. a) Voir figure

b) L'image de la droite (D) d'équation $y=x$ par S est l'axe $(O;\vec{v})$.

3. a) Résolvons l'équation $z\times z'=1$

$z\times z'=1\Leftrightarrow z\times\left[(1+i)z-i\right]=1\Leftrightarrow(1+i)z^2-iz-1=0$ et la résolution de cette équation donne les solutions : $z_1=1$ et $z_2=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$.

Ainsi en posant B le point d'affixe $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$, on a $B\neq\Omega$ et $z_B\times z_{B'}=1$.

b) $z_B \times z_{B'} = 1 \Leftrightarrow z_{B'} = \dfrac{1}{z_B} = -1-i$. Voir figure.

4. $\dfrac{z_B - z_\Omega}{z_{B'} - z_\Omega} : \dfrac{z_B - z_{\Omega'}}{z_{B'} - z_{\Omega'}} = -1 \in \mathbb{R}^*$ alors les points Ω, Ω', B et B' sont cocycliques.

Exercice 64

1. $\vec{u} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \sqrt{2}\,\vec{u}$ et $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$; alors dans le repère orthonormé direct $(A;\vec{u};\vec{v})$

$B(\sqrt{2};0)$, $D(0;1)$ et $C(\sqrt{2};1)$. Ce qui donne $z_B = \sqrt{2}$, $z_C = \sqrt{2}+i$ et $z_D = i$.

$S(D) = C \Leftrightarrow \sqrt{2}+i = ai+b$ et $S(C) = B \Leftrightarrow \sqrt{2} = a(\sqrt{2}+i)+b$

Et le système $\begin{cases} ai+b = \sqrt{2}+i \\ a(\sqrt{2}+i)+b = \sqrt{2} \end{cases}$ permet d'avoir $a = -i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $b = \dfrac{\sqrt{2}}{2}+i$.

On a donc : $z' = -i\dfrac{\sqrt{2}}{2}z + \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i$.

2. **Dans cette question, poser :** $z' = -i\dfrac{\sqrt{2}}{2}z + \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i$

Le rapport de T est $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et l'angle de T est $-\dfrac{\pi}{2}$.

3. Le milieu I du segment [AB] a pour affixe $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Soit B' l'image de B par T, on a : $z_{B'} = -i\dfrac{\sqrt{2}}{2}z_B + \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = z_I$ alors $B' = \mathrm{I}$.

4. On constate que $S = T$.

T est une similitude directe d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

D'après la question 1) $T(D) = C$ et $T(B) = I$ donc $mes\left(\overrightarrow{DB};\overrightarrow{CI}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$ donc $(DB) \perp (CI)$.

Exercice 65

1. a) On a : $\left(1-i\sqrt{3}\right)z - \sqrt{3} - i = \left(1-i\sqrt{3}\right)\left[z - \dfrac{\sqrt{3}+i}{1-i\sqrt{3}}\right] = \left(1-i\sqrt{3}\right)(z-i)$. Alors

$$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow \left|\left(1-i\sqrt{3}\right)z-\sqrt{3}-i\right| = 6 \Leftrightarrow \left|1-i\sqrt{3}\right|\left|z-i\right| = 6 \Leftrightarrow 2\left|z-i\right| = 6 \Leftrightarrow \left|z-i\right| = 3$$

b) (Γ) est donc le cercle de centre A et de rayon 3.

2. a) L'écriture complexe de la similitude directe S est de la forme $z' = az+b$

$$O = S(A) \Leftrightarrow z_O = az_A + b \Leftrightarrow 0 = ai+b \quad \text{et} \quad C = S(B) \Leftrightarrow z_C = az_B + b \Leftrightarrow -4i = a\sqrt{3}+b\,.$$

Et la résolution du système $\begin{cases} ai+b=0 \\ a\sqrt{3}+b=-4i \end{cases}$ permet d'avoir $a = 1-i\sqrt{3}$ et $b = -\sqrt{3}-i$.

On a donc : $z' = \left(1-i\sqrt{3}\right)z-\sqrt{3}-i$.

b) Le rapport de S est $\lambda = \left|1-i\sqrt{3}\right| = 2$; l'angle de S est $\theta = \arg\left(1-i\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{3}+2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

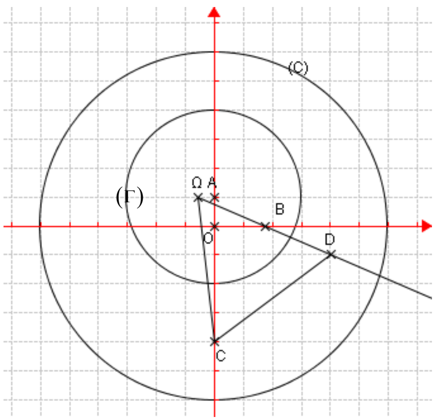
L'affixe du centre Ω est $z_\Omega = \frac{b}{1-a}\,\frac{-\sqrt{3}-i}{i\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}+i$.

3. a) (Γ) est le cercle de centre A et de rayon 3, alors $(C) = S(\Gamma)$ est le cercle de centre $S(A) = A'$ et de rayon $2\times 3 = 6$. On a $z_{A'} = \left(1-i\sqrt{3}\right)\times i-\sqrt{3}-i = 0$ alors A = O.

(C) est donc le cercle de centre O est de rayon 6.

b) Voir figure.

4. a) Voir figure



b) $S(B)=C$ alors $\begin{cases}\Omega C = 2\Omega B \\ mes\left(\overrightarrow{\Omega B};\overrightarrow{\Omega C}\right) = -\dfrac{\pi}{3}\end{cases}$.

$\overrightarrow{\Omega D} = 2\overrightarrow{\Omega B}$ alors $\Omega D = 2\Omega B$ et les vecteurs $\overrightarrow{\Omega B}$ et $\overrightarrow{\Omega D}$ sont colinéaires de même sens, alors $\begin{cases}\Omega C = \Omega D \\ mes\left(\overrightarrow{\Omega D};\overrightarrow{\Omega C}\right) = -\dfrac{\pi}{3}\end{cases}$. Ainsi, ΩCD est un triangle isocèle ayant un angle de 60°, alors le triangle ΩCD est équilatéral.

5. a) r est la rotation de centre Ω tel que $r(C)=D$, alors l'angle de r est $mes\left(\overrightarrow{\Omega C};\overrightarrow{\Omega D}\right)=\dfrac{\pi}{3}$.

   L'écriture complexe de r est donc $z' = \left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)z+b$ avec

   $b = \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}+i\right)\left(\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}+i$. Ce qui donne : $z' = \left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)z+\dfrac{\sqrt{3}}{3}+i$.

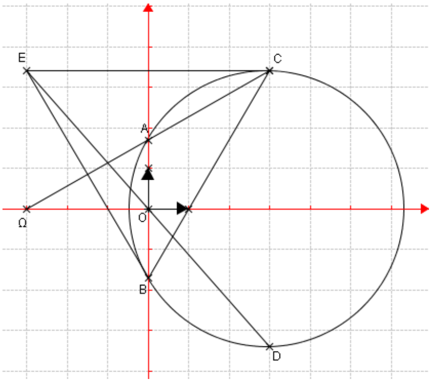
   b) $r(C)=D$ alors $z_D = \left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)(-4i)+\dfrac{\sqrt{3}}{3}+i = \dfrac{7\sqrt{3}}{3}-i$.

Exercice 66

1. $P\left(i\sqrt{3}\right)=0$ et $P\left(-i\sqrt{3}\right)=0$ alors il existe un polynôme du second degré $Q(z)$ tel que .
   $P(z)=\left(z-i\sqrt{3}\right)\left(z+i\sqrt{3}\right)Q(z)=\left(z^2+3\right)Q(z)$
   Et on obtient : $Q(z)=z^2-6z+21$
2. $P(z)=0 \Leftrightarrow z=i\sqrt{3}$ ou $z=-i\sqrt{3}$ ou $z^2-6z+21=0$.
   Et $z^2-6z+21=0 \Leftrightarrow z=3-2i\sqrt{3}$ ou $z=3+2i\sqrt{3}$. Donc
   $S_{\mathbb{C}}=\left\{-i\sqrt{3}\ ;\ i\sqrt{3}\ ;\ 3-2i\sqrt{3}\ ;\ 3+2i\sqrt{3}\right\}$.
3. a) Voir figure
   b) $B=S_{(O;\vec{u})}(A)$ alors $z_B=-z_A=-i\sqrt{3}$
   $C=h_{(\Omega;2)}(A) \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega C}=2\overrightarrow{\Omega A}$ alors $z_C=2\left(z_A-z_\Omega\right)+z_\Omega=3+2i\sqrt{3}$
   $D=t_{2\overrightarrow{AB}}(C) \Leftrightarrow \overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{AB}$ alors $z_D=2\left(z_B-z_A\right)+z_C=3-2i\sqrt{3}$.
   c) $\dfrac{z_D-z_A}{z_C-z_A}=-i\sqrt{3}\in i\mathbb{R}^*$ alors le triangle ACD est rectangle en A.
   d) On a $\dfrac{z_D-z_B}{z_C-z_B}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}i$, ce qui donne $\dfrac{z_D-z_A}{z_C-z_A}:\dfrac{z_D-z_B}{z_C-z_B}=3\in\mathbb{R}^*$ alors les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle.

4. a) $E = S_O(D)$ alors $z_E = -z_D = -3+2i$ et on a : $\dfrac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

b) $\dfrac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ alors le triangle BEC est équilatéral.



Exercice 67

1. a) T est une similitude directe alors son écriture complexe est sous la forme $z' = az + b$.

$T = S(A_{n-1}; r; \alpha)$ alors $a = re^{i\alpha} = u$ et $z_{n-1} = \dfrac{b}{1-u} \Rightarrow b = (1-u)z_{n-1}$.

$A_n = T(A_{n-2}) \Leftrightarrow z_n = az_{n-2} + b = u\,z_{n-2} + (1-u)z_{n-1}$. On donc : $z_n = u\,z_{n-2} + (1-u)z_{n-1}$.

b) Démonstration par récurrence

- Pour $n = 2$, on a : $z_2 = u\,z_0 + (1-u)z_1 = z_1 - uz_1$ ce qui donne $z_2 - z_1 = -u\,z_1 = -u\,i$

  Et $(-u)^1 i = -u\,i$. On a bien : $z_2 - z_1 = (-u)^1 i$

- Soit $k \geq 2$, supposons que $z_k - z_{k-1} = (-u)^{k-1} i$ et démontrons que $z_{k+1} - z_k = (-u)^k i$.

  $z_{k+1} - z_k = u\,z_{k-1} + (1-u)z_k - z_k = u\,z_{k-1} - u\,z_k = -u(z_k - z_{k-1})$, or $z_k - z_{k-1} = (-u)^{k-1} i$ alors

  $z_{k+1} - z_k = -u \times (-u)^{k-1} i = (-u)^k i$.

- Conclusion $\forall n \geq 2, \quad z_n - z_{n-1} = (-u)^{n-1} i$.

c) On sait que : $\forall n \geq 2, \quad z_n - z_{n-1} = (-u)^{n-1} i$. Ainsi :

$$\begin{array}{lll} Pour & n=2 & z_2-z_1=(-u)^1 i \\ Pour & n=3 & z_3-z_2=(-u)^2 i \\ Pour & n=4 & z_4-z_3=(-u)^3 i \\ ---- & ---- & -------- \\ ---- & ---- & -------- \\ Pour & n-1 & z_{n-1}-z_{n-2}=(-u)^{n-2} i \\ Pour & n & z_n-z_{n-1}=(-u)^{n-1} i \\ ---- & ---- & -------- \end{array}$$

En additionnant membre à membre ces égalités, on obtient :

$$\begin{aligned} z_n-z_1 &= (-u)^1 i+(-u)^2 i+(-u)^3 i+\ldots+(-u)^{n-1} i \\ &= i\left[(-u)^1+(-u)^2+(-u)^3+\ldots+(-u)^{n-1}\right] \\ &= i\left[(-u)\times\frac{1-(-u)^{n-1}}{1-(-u)}\right] \\ &= i\left[(-u)\times\frac{1-(-u)^{n-1}}{1+u}\right] \end{aligned}$$

D'où $z_n=i-iu\dfrac{1-(-u)^{n-1}}{1+u}$.

2. a) On sait que $z_0=0$; $z_1=i$; $z_2-z_1=-u\,z_1=-u\,i$ alors $z_2=i(1-u)$.

$z_1\neq z_0$ et $z_2\neq z_1$ alors $A_1\neq A_0$ et $A_2\neq A_1$ dons il existe une unique similitude directe S telle que : $A_1=S(A_0)$ et $A_2=S(A_1)$.

b) Déterminons les éléments caractéristiques de S

Le rapport de S est : $\lambda=\dfrac{A_1A_2}{A_0A_1}=\dfrac{|z_2-z_1|}{|z_1-z_0|}=\dfrac{|-ui|}{|i|}=r$

L'angle de S est : $\theta=\arg\left(\dfrac{z_2-z_1}{z_1-z_0}\right)=\arg\left(\dfrac{-ui}{i}\right)=\arg(-u)=\alpha+\pi$

L'écriture complexe de S est donc de la forme $z'=re^{i(\alpha+\pi)}z+b=-re^{i\alpha}z+b=-uz+b$

$A_1=S(A_0)$ alors $z_1=-uz_0+b$, ce qui donne $b=i$. On a donc $z'=-uz+i$.

Soit Ω le centre de S, alors $z_\Omega=\dfrac{i}{1+u}$.

En résumé, S est la similitude directe de rapport r, d'angle $\alpha+\pi$ et de centre Ω d'affixe $\dfrac{i}{1+u}$.

c) <u>Démontrons par récurrence que</u> $\forall n \in \mathbb{N}, \quad A_{n+1} = S(A_n)$.

- On sait que $A_1 = S(A_0)$
- Soit $k \in \mathbb{Z}$, supposons que $A_{k+1} = S(A_k)$ et démontrons que $A_{k+2} = S(A_{k+1})$.

  On sait d'après la question 1.a) que $\forall n \geq 2, \quad z_n = u\, z_{n-2} + (1-u) z_{n-1}$,

  Alors

  $z_{k+2} = u\, z_k + (1-u) z_{k+1} = u\, z_k + z_{k+1} - u z_{k+1} = -u z_{k+1} + u\, z_k + z_{k+1}$.

  Or $A_{k+1} = S(A_k)$ alors $z_{k+1} = -u\, z_k + i$, ce qui donne $u\, z_k + z_{k+1} = i$.

  On a donc $z_{k+2} = -u\, z_{k+1} + i$. Ainsi $A_{k+2} = S(A_{k+1})$
- On conclut que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad A_{n+1} = S(A_n)$.

3. a) <u>Démontrons par récurrence que</u> $\forall n \in \mathbb{N}, \quad A_{n+p} = S_n(A_p)$.

- S_0 étant l'application identique on a : $A_p = S_0(A_p)$
- Soit $k \in \mathbb{Z}$, supposons que $A_{k+p} = S_k(A_p)$ et démontrons que $A_{k+1+p} = S_{k+1}(A_p)$.

  $A_{k+p} = S_k(A_p) \Rightarrow S(A_{k+p}) = S \circ S_k(A_p) = S_{k+1}(A_p)$, or d'après la question 2.c)

  $S(A_{k+p}) = A_{k+p+1} = A_{k+1+p}$; ce qui donne $A_{k+1+p} = S_{k+1}(A_p)$.
- On conclut que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad A_{n+p} = S_n(A_p)$.

b) <u>Démontrons que H est une homothétie</u>

Pour $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$, $u = r\, e^{i\frac{\pi}{4}}$

On a : $S_1 = S \circ S_0 = S \circ Id_P = S$; $S_2 = S \circ S_1 = S \circ S$

Donc $S_4 = S \circ S_3 = S \circ (S \circ S_2) = (S \circ S) \circ S_2 = S \circ S \circ S \circ S$.

S_4 est la composée 4 fois de la similitude directe S de centre $\Omega\left(\dfrac{i}{1+u}\right)$ rapport r, d'angle

$\theta = \alpha + \pi = \dfrac{\pi}{4} + \pi = \dfrac{5\pi}{4} = \dfrac{-3\pi}{4} + 2k\pi$. Alors S_4 est la similitude directe de centre Ω, d'angle

$4\theta = -3\pi = \pi - 4\pi$ de rapport r^4. $S_4 = S(\Omega\,; r^4\,; \pi) = H(\Omega\,; -r^4)$

4) a) Démontrons que les vecteurs $\overrightarrow{\Omega A_{n+1}}$ et $\overrightarrow{A_n A_{n+1}}$ sont orthogonaux

On a : $z_{n+1} = re^{i\alpha} z_n + (1 - re^{i\alpha}) z_\Omega$; alors :

$$\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1} - z_\Omega} = \frac{re^{i\alpha} z_n + (1 - re^{i\alpha}) z_\Omega - z_n}{re^{i\alpha} z_n + (1 - re^{i\alpha}) z_\Omega - z_\Omega} = \frac{re^{i\alpha} z_n - z_n + (1 - re^{i\alpha}) z_\Omega}{re^{i\alpha} z_n - re^{i\alpha} z_\Omega}$$

$$= \frac{(re^{i\alpha} - 1) z_n - (re^{i\alpha} - 1) z_\Omega}{re^{i\alpha} z_n - re^{i\alpha} z_\Omega} = \frac{(re^{i\alpha} - 1)(z_n - z_\Omega)}{re^{i\alpha}(z_n - z_\Omega)}$$

$$= \frac{re^{i\alpha} - 1}{re^{i\alpha}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} - 1}{\frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{-1+i}{1+i} = i$$

- -

$$\frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}-z_\Omega}=i$$

Alors les vecteurs $\overrightarrow{\Omega A_{n+1}}$ et $\overrightarrow{A_n A_{n+1}}$ sont orthogonaux.

b) Voir construction

c) Calcul de ΩA_n

$$\forall n \in \quad , \quad \Omega A_{n+1}=|z_{n+1}-z_n|=\left|re^{i\alpha}z_n+\left(1-re^{i\alpha}\right)z_\Omega-z_n\right|$$
$$=\left|re^{i\alpha}\left(z_n-z_\Omega\right)\right|=r|z_n-z_\Omega|$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\Omega A_n$$

(ΩA_n) est une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et donc $\forall n \in \quad , \quad \Omega A_n=\Omega A_0\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$.

d) Déduisons $\lim\limits_{n\to+\infty}\Omega A_n$

$\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right|<1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\Omega A_n=0$.

5) Pour tout entier i, on a :

$$A_iA_{i+1}=|z_{i+1}-z_i|=\left|\left(re^{i\alpha}z_i+\left(1-re^{i\alpha}\right)z_\Omega\right)-\left(re^{i\alpha}z_{i-1}+\left(1-re^{i\alpha}\right)z_\Omega\right)\right|$$
$$=\left|re^{i\alpha}\left(z_i-z_{i-1}\right)\right|$$
$$=r|z_i-z_{i-1}|$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}A_{i-1}A_i$$

(A_iA_{i+1})est donc une suite géométrique de premier terme A_1A_0 est de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$. D'où

$$A_iA_{i+1}=A_1A_0\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^i=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^i$$

L_n est donc la somme des termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

On a donc : $L_n=\dfrac{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty}L_n=\dfrac{1}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{2}{2-\sqrt{2}}$.

➢ Situations complexes

Exercice 68

Pour répondre à cette préoccupation, je vais utiliser les similitudes directes.

Je vais :

- Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude directe S qui permet de déterminer le deuxième carré image de premier carré.
- Déterminer l'écriture complexe de S.
- Utiliser la similitude directe S pour construire les autres carrés.

Notons OABC le premier carré. Selon le tableau présenté, le second carré sera OA'B'C' où les points A', B' et C' sont respectivement les images des points A, B et C par S. On a donc S(O) = O. O est donc le centre de S.

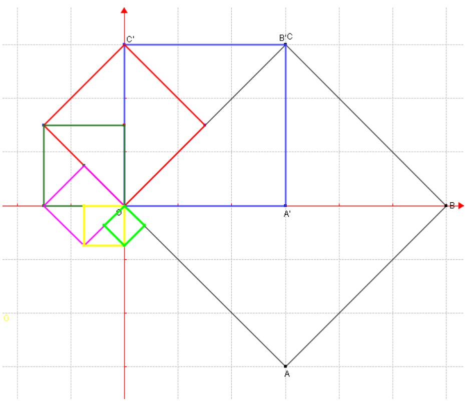
S(A) = A' et S(B) = B' alors le rapport de S est $k = \frac{OA'}{OB'}$ et son angle est $\theta = mes\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OA'}\right)$.

Le triangle OAB est rectangle isocèle en A et A' est le milieu de [OB], alors $OA' = \frac{1}{2}OB$ et $OB = OA\sqrt{2}$,

ce qui donne $OA' = \frac{\sqrt{2}}{2}OA$ et donc $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$. D'autre part $\theta = mes\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OA'}\right) = \frac{\pi}{4}$.

S est donc la similitude directe de centre O, de rapport $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $\theta = \frac{\pi}{4}$.

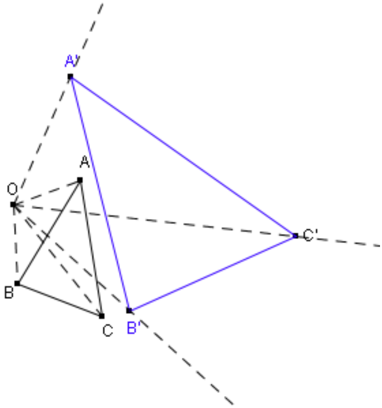
L'écriture complexe de S est donc $z' = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)z$



Exercice 69

Préoccupations du père

- Le nouveau champ est triangulaire car il est le transformé de l'ancien champ par une similitude directe.
- L'aire du nouveau champ est égale à l'aire de l'ancien multiplié par le carré du rapport de la similitude directe soit : $2^2 \times 2,5 = 10\,ha$.
- Le plan du nouveau champ s'obtient grâce à la construction de l'image du triangle ABC par la similitude directe S.



9 SUITES NUMÉRIQUES

I. LA SITUATION D'APPRENTISSAGE

- Apres la lecture de la situation d'apprentissage (par le professeur, par un élève et une lecture silencieuse des élèves), l'enseignant pourra s'assurer que les élèves ont bien compris le texte.
- Il pourra ensuite faire dégager les constituants de la situation à travers une ou des questions du type :

Constituants de la situation	Exemples de questions possibles	Réponses possibles des élèves
Contexte	Ou et à quel moment se déroule la situation ?	Pendant la préparation des festivités de fin d'année de la promotion terminale.
Circonstances	-Que veut faire le président de la promotion terminale ? -Que lui propose le banquier ? -Que veut connaitre le président de la promotion ?	-il veut faire un placement d'argent. -le banquier lui propose deux options de placement d'argent ». -Il veut connaitre l'option la plus avantageuse pour obtenir 400000 en plaçant 300000.
Tâches	-Qu'affirme le major de la promotion ? -Que décident de faire les élèves de la promotion pour aider leur président ?	-Il affirme que le problème peut être résolu à l'aide des suites particulières. -ils décident de faire des recherches sur les suites arithmétiques et géométriques.

Le professeur utilisera la tâche énoncée par ses élèves pour faire la synthèse de la situation et présentera le plan de la leçon. Il devra dans la mesure du possible se référer à la situation durant tout le déroulement de la leçon.

II. DECOUVERTE DES HABILETES

ACTIVITE 1 : Suites majorées

- L'objectif de cette activité est de démontrer qu'une suite est majorée.
- Réponses aux questions de l'activité

  Pour tout entier naturel non nul, $n \geq 1$ donc $\frac{1}{n} \leq 1$.

  D'où, pour tout nombre entier naturel non nul n, $u_n \leq 1$.
- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 1

Pour tout entier naturel n, $n \leq n+1$ donc $\frac{n}{n+1} \leq 1$.

D'où $\frac{3n}{n+1} \leq 3$. Par conséquent la suite (u_n) est majorée par 3.

ACTIVITE 2 : Suites minorées

- L'objectif de cette activité est de démontrer qu'une suite est minorée.
- Réponses aux questions de l'activité

  Pour tout entier naturel non nul, $n \geq 1$ donc $\frac{3}{n} \geq 0$. Ainsi $\frac{3}{n} + 2 \geq 2$.

  D'où, pour tout nombre entier naturel non nul, $v_n \geq 2$.
- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 2

Pour tout entier naturel non nul n, $\frac{2}{n} \geq 0$ donc : $\frac{2}{n} - 1 \geq -1$.

D'où $v_n \geq -1$. Par conséquent la suite (v_n) est majorée par -1.

ACTIVITE 3 : Suites bornées

- L'objectif de cette activité est de démontrer qu'une suite est bornée.
- Réponses aux questions de l'activité

  Pour tout entier naturel non nul, $n \geq 1$ donc $\frac{1}{n} \geq 0$.

  De plus , pour tout entier naturel non nul $\frac{1}{n} \leq 1$.

  D'où, pour tout nombre entier naturel non nul : $0 \leq u_n \leq 1$.
- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 3

Pour tout entier naturel n, $-1 \leq w_n \leq 1$.

Par conséquent, la suite (w_n) est bornée.

ACTIVITE 4 : Raisonnement par récurrence

- L'objectif de cette activité est de savoir mener un raisonnement par récurrence.
- Réponses aux questions de l'activité
  1. $u_0 = 2$. Or $2 < 3$, donc $u_0 \leq 3$.

     $u_k \leq 3$

     $\frac{1}{3}u_k \leq 1$

     $\frac{1}{3}u_k + 2 \leq 3$, donc $u_{k+1} \leq 3$.
  2. Ainsi, pour tout entier naturel $n, u_n \leq 3$.
- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 4

Soit $P(n)$: « $u_n = 3^n - 2$ »

- Vérifions que $P(0)$ est vraie.

  On a $3^0 - 2 = -1 = u_0$.
- Supposons que $P(k)$ est vraie pour un entier naturel $k \geq 0$ et démontrons que $P(k+1)$ est vraie.

$P(k)$ vraie signifie que $u_k = 3^k - 2$.

On a $u_{k+1} = 3u_k + 4$

$u_{k+1} = 3(3^k - 2) + 4$

$u_{k+1} = 3^{k+1} - 2.$

Donc $P(k+1)$ est vraie.

- Ainsi, pour tout entier naturel n, $u_n = 3^n - 2$.

Exercice 5

Soit $P(n)$: « $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ »

- On vérifie que P(1) est vraie.
- Supposons que pour un entier naturel $k \geq 1$, $P(k)$ est vraie et démontrons que $P(k+1)$ est vraie.

On a : $1 + 2 + \cdots + k + k + 1 = \frac{k(k+1)}{2} + k + 1$

$1 + 2 + \cdots + k + k + 1 = \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$, donc $P(k+1)$ est vraie.

- Ainsi pour tout entier naturel $n \geq 1, 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

ACTIVITE 5 : Sens de variation d'une suite numérique

- L'objectif de cette activité est de démontrer qu'une suite est monotone.
- Réponses aux questions de l'activité

Partie I

1. On a : $\forall n \in \mathbb{N}, n < n + 1$.
   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante, donc : $n < n + 1 \Rightarrow u_n < u_{n+1}$.
2. a) On suppose que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < u_{n+1}$.
   Soit $m \in \mathbb{N}$.
   Démontrons par récurrence que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, u_m < u_{m+k}$.
   Soit la proposition $P(k)$: ≪ $u_m < u_{m+k}$ ≫.
   - Vérifions que $P(1)$ est vraie.
     Sachant que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < u_{n+1}$, on a : $u_m < u_{m+1}$. Donc $P(1)$ est vraie.
   - Supposons que pour un entier naturel q $(q \geq 1)$, $P(q)$ est vraie c'est-à-dire : $u_m < u_{m+q}$.

   Démontrons que $P(q+1)$ est vraie c'est-à-dire : $u_m < u_{m+q+1}$.

   $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < u_{n+1}$. D'où : $u_{m+q} < u_{m+q+1}$.

   On obtient : $u_m < u_{m+q} < u_{m+q+1}$.

   D'où $P(q+1)$ est vraie.

   Ainsi : $\forall k \in \mathbb{N}^*, u_m < u_{m+k}$.

   b) Le résultat précédent revient à dire : $\forall m \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ m < n \Rightarrow u_m < u_n$.

   Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

Partie II

1. $u_{n+1} - u_n = r$:
   - Si $r > 0$, alors la suite (u_n) est strictement croissante.
   - Si $r < 0$, alors la suite (u_n) est strictement décroissante.
   - Si $r = 0$, alors la suite (u_n) est strictement constante.

2. a) $v_{n+1} - v_n = v_0q^{n+1} - v_0q^n = q^nv_0(q-1)$.

   b) lorsque $v_0 > 0$:

   - si $q > 1$ alors la suite (v_n) est croissante ;

   - si $0 < q < 1$ alors la suite (v_n) est décroissante ;

   - si $q = 1$ alors la suite (v_n) est constante.

   - si $q < 0$, alors la suite (v_n) n'est ni croissante, ni décroissante.

   lorsque $v_0 < 0$:

   - si $q > 1$ alors la suite (v_n) est décroissante ;

   - si $0 < q < 1$ alors la suite (v_n) est croissante ;

   - si $q = 1$ alors la suite (v_n) est constante.

   - si $q < 0$, alors la suite (v_n) n'est ni croissante, ni décroissante.

- Corrigé des exercices de fixation

  Exercice 6

  1-F 2-V 3-F

  Exercice 7

  $\forall n \in \mathbb{N}\,,\; u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!}$

  $u_{n+1} - u_n > 0$, donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

  Exercice 8

  1. La suite (v_n) est croissante.
  2. La suite (v_n) est décroissante.
  3. La suite (v_n) est décroissante.

ACTIVITE 6 : Limite infinie d'une suite numérique

- L'objectif de cette activité est de déterminer la limite infinie d'une suite numérique.
- Réponses aux questions de l'activité

1.

n	1	2	3	4	5	6
u_n	3	5	9	15	23	33

2. Démontrons par récurrence on a : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, u_n > 2n$.

Soit la proposition $P(n)$: « $u_n > 2n$ ».

- Vérifions que $P(1)$ est vraie.

  $u_1 = 3$ et $2 \times 1 = 2$. On a $3 > 2$ c'est-à-dire : $u_1 > 2 \times 1$.

- Supposons que $P(k)$ est vraie pour un entier naturel $k(\, k \geq 1)$, c'est-à-dire $u_k > 2k$.

  Démontrons que $P(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire $u_{k+1} > 2(k+1)$.

  On a $u_{k+1} = 2k + u_k$

  $u_{k+1} - 2(k+1) = u_k - 2$

  Or: $u_k - 2 > 2k - 2$

  $u_k - 2 > 2(k-1) \geq 0$, car $k \geq 1$.

  Alors: $u_k - 2 > 0$.

  Par suite : $u_{k+1} - 2(k+1) > 0$. D'où : $u_{k+1} > 2(k+1)$.

  Donc $P(k+1)$ est vraie.

  Ainsi : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, u_n > 2n$.

D'autre part, on a : u_0=3 et $2 \times 0 = 0$, alors $u_0 > 2 \times 0$.

On conclut que pour tout entier naturel n, $u_n > 2n$.

3. OUI, il suffit de prendre n assez grand.

- Corrigé des exercices de fixation

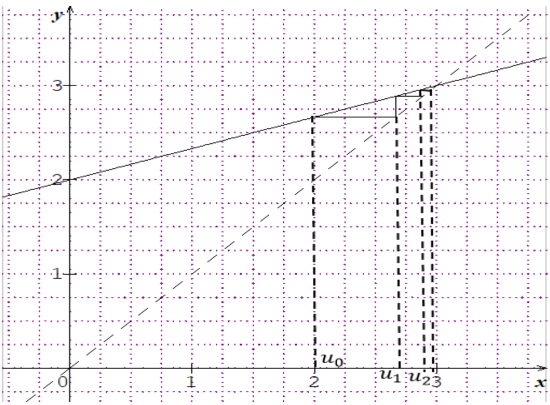
Exercice 9

1. F 2. V

<u>ACTIVITE 7 :</u> Limite finie d'une suite numérique

- L'objectif de cette activité est de déterminer la limite finie d'une suite numérique.
- Réponses aux questions de l'activité

  a)



b) la suite (U_n) converge vers 3.

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 10

1. F   2. V

ACTIVITE 8 : **Limite d'une suite définie par une formule explicite**

- L'objectif de cette activité est de déterminer la limite d'une suite définie par une formule explicite.
- Réponses aux questions de l'activité

  1. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -2$
  2. a) u_n = -2 + $\frac{5}{n^2+1}$

     b) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -2$

- Corrigé des exercices de fixation

  Exercice 11

  1- V   2- F

  Exercice 12

  En posant : N = $\frac{1}{n}$, on obtient $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{N \to 0} \frac{sinN}{N} = 1.$

ACTIVITE 9 : **Limite d'une suite géométrique**

- L'objectif de cette activité est de déterminer la limite d'une suite géométrique.
- Réponses aux questions de l'activité

  1. $v_n = v_0 \times q^n$
  2. Si $q > 1$ et $v_0 > 0$, alors lim $v_n = +\infty$.

     Si $q > 1$ et $v_0 < 0$, alors lim $v_n = -\infty$.

     Si -1< $q < 1$, alors lim $v_n = 0$.

     Si $q = 1$, alors lim $v_n = 1$.

     Si $q < -1$, alors la suite (v_n) n'a pas de limite.

- Corrigé des exercices de fixation

  Exercice 13

  $\lim\limits_{n \to +\infty} (\frac{\sqrt{3}}{2})^n = 0$; $\lim\limits_{n \to +\infty} (-4(\frac{\sqrt{12}}{2})^n) = -\infty$.

  Exercice 14

  $\lim\limits_{n \to +\infty} (\frac{5^n - 2^n}{2^n + 5^n}) = 1$

ACTIVITE 10 : **Limite d'une suite du type $u_n = n^\propto$**

- L'objectif de cette activité est de déterminer la limite d'une suite du type $u_n = n^\propto$.
- Réponses aux questions de l'activité

  Si $\propto < 0$, alors lim $u_n = 0$.

  Si $\propto = 0$, alors lim $u_n = 1$.

  Si $\propto > 0$, alors lim $u_n = +\infty$.

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 15

1- A 2- C

Exercice 16

$\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$

Exercice 17

$\lim_{n\to+\infty} w_n = +\infty$

ACTIVITE 11 : Croissance comparée des suites n^α, a^n et $\ln n$

- L'objectif de cette activité est de connaitre les propriétés des croissances comparées.
- Réponses aux questions de l'activité

  P1 : Remarquer que $\frac{\ln n}{n^\alpha} = \frac{\ln n}{n} \times \frac{1}{n^{\alpha-1}}$ et en considérant les conditions initiales, conclure.

  P2 : Remarquer que $\frac{n^\alpha}{a^n} = e^{\alpha n\left(\frac{\ln n}{n} - \frac{\ln a}{\alpha}\right)}$ et en considérant les conditions initiales, conclure.

  P3 : Remarquer que $\frac{n^\alpha}{a^n} = e^{\alpha n\left(\frac{\ln n}{n} - \frac{\ln a}{\alpha}\right)}$ et en considérant les conditions initiales, conclure.
- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 18

a) $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n^3}{2^{n-1}} - \frac{n^3}{n\times 2^n}\right) = 0$ b) $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{-3\times 2^n}{n}\right) = -\infty$

Exercice 19

a) $\lim u_n = +\infty$ b) $\lim u_n = 0$ c) $\lim u_n = 0$ d) $\lim u_n = 0$

ACTIVITE 12 : Propriétés de comparaison

- L'objectif de cette activité est de connaitre les propriétés de comparaison.
- Réponses aux questions de l'activité

  a)………..alors $\lim u_n = +\infty$.

  b)……….. alors $\lim v_n = -\infty$.

  c)………… alors $\lim u_n = l$.

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 20

1. $\lim_{n\to+\infty} (n^2 + (-1)^n) = +\infty$ 2. $\lim_{n\to+\infty} (n + \sin(n)) = +\infty$

Exercice 21

1. $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0$ 2. $\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = 0$

ACTIVITE 13 : Limite d'une suite monotone

- L'objectif de cette activité est de déterminer la limite d'une suite monotone.
- Réponses aux questions de l'activité
  a)………..alors $\lim u_n = l$ (l est un nombre réel)
  b)………… alors $\lim u_n = l$ (l est un nombre réel)

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 22

1-V 2-F 3-V 4-V

Exercice 23

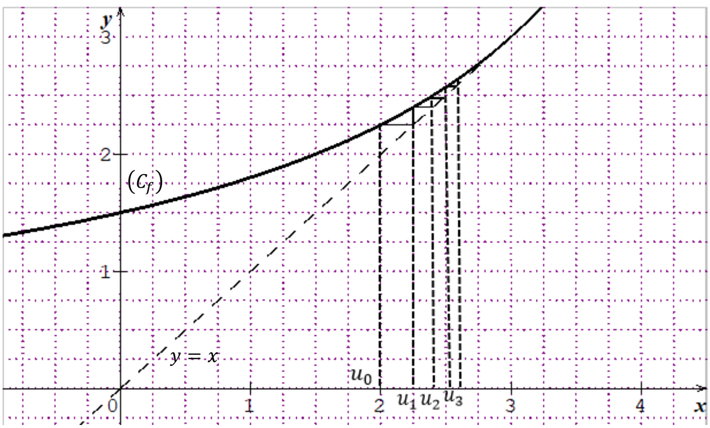
1- On vérifie que $u_0 \leq 3$.
On suppose que pour un entier naturel $k \geq 0$, $u_k \leq 3$ et on montre que $u_{k+1} \leq 3$.
On tire la conclusion.

2- $u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n-3)^2}{6-u_n}$.
$u_{n+1} - u_n \geq 0$, donc la suite (u_n) est croissante.

3- La suite (u_n) est croissante et majorée par 3, donc elle est convergente.

ACTIVITE 14 : Suite définie par une formule de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$

- L'objectif de cette activité est de déterminer la limite d'une suite définie par une formule de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$.
- Réponses aux questions de l'activité
  1. $f(x) = \frac{9}{6-x}$.
  2. a) Représentation graphique de la fonction f dans le plan muni du repère (O, I, J).
     b) Construction des quatre premiers termes.



c) La suite (u_n) est croissante et majorée par 3, donc elle converge vers une limite $l \leq 3$.

3-a) On a $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $f(x) = \frac{9}{6-x}$.

La suite (u_n) converge vers l telle que $l \leq 3$. Sachant que $u_0 = 2$, alors (u_n) est à valeurs dans $[2; 3]$.

La fonction f est continue sur $[2; 3]$.

On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ et $\lim\limits_{x \to l} f(x) = f(l)$, car f est continue en l, élément de $[2; 3]$.

D'où : $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = f(l)$.

D'autre part : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = l$, car $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$.

Par unicité de la limite d'une suite convergente, on a : $l = f(l)$. Donc : $l = \frac{9}{6-l}$.

b) En résolvons l'équation on obtient $l = 3$.

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 24

Soit l la limite de la suite (u_n). l est solution de l'équation $2\sqrt{l} + 1 = l$.

En résolvant l'équation on obtient $l = 3 - 2\sqrt{2}$ ou $l = 3 + 2\sqrt{2}$.

Comme $u_0 = 1$ et que (u_n) est une suite à termes positifs croissante, alors $l = 3 + 2\sqrt{2}$.

III. DES QUESTIONS D'EVALUATION

- **Question 1 : Comment démontrer qu'une suite est minorée, majorée ou bornée ?**

Solution de l'exercice non corrigé

Pour tout entier naturel non nul n, on a : $-1 \leq \frac{-1}{n^2} \leq \frac{\cos n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} \leq 1$.

On a : $-1 \leq v_n \leq 1$ donc la suite (v_n) est bornée.

- **Question 2 : Comment étudier le sens de variation d'une suite numérique ?**

Solution de l'exercice non corrigé

La suite (u_n) est à termes positifs.

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{n+2}$.

Sachant que $n < n + 2$, on a $\frac{n}{n+2} < 1$. Donc la suite (u_n) est strictement décroissante.

- <u>Question 3 :</u> **Comment démontrer qu'une suite numérique est convergente ? Et comment calculer sa limite ?**

<u>**Solution de l'exercice non corrigé**</u>

1. Raisonner par récurrence
2. a) $u_1 = 1$

   b) Utiliser les différentes étapes de la démonstration par récurrence.

3. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle est convergente.

Soit l la limite de la suite (u_n) . l est une solution de l'équation $x = \frac{2x+1}{x+3}$.

En résolvant cette équation on obtient $x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ ou $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

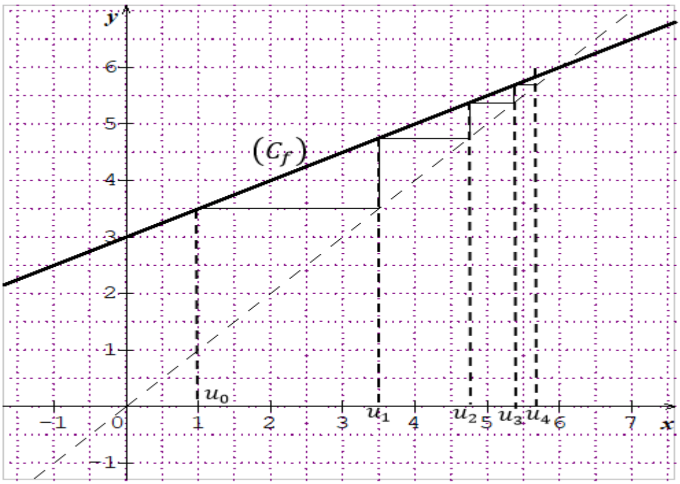
Comme $u_n \geq 0$, on a donc: $l = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

IV. MES SEANCES D'EXERCICES

➢ **Exercices de fixation**

- **Représenter les termes d'une suite sur l'axe (OI)**

<u>Exercice 1</u>



<u>Exercice 2</u>

Utiliser la même le même procédé.

- **Démontrer par récurrence**

<u>Exercice 3</u>

Soit $P(n)$: « $u_n = 5 \times (\frac{4}{3})^n$ » .

u_0=5 et $5 \times (\frac{4}{3})^0 = 5$ donc P(0) est vraie.

Supposons que pour un entier naturel $k \geq 0$, $P(k)$ est vraie c'est-à-dire $u_k = 5 \times (\frac{4}{3})^k$ et démontrons que $P(k+1)$ est vraie.

$u_{k+1} = \frac{4}{3}u_k$ or $u_k = 5 \times (\frac{4}{3})^k$ donc $u_{k+1} = \frac{4}{3} \times 5 \times (\frac{4}{3})^k$.

d'où $u_{k+1} = 5 \times (\frac{4}{3})^{k+1}$. Ainsi $P(k+1)$ est vraie.

Par conséquent : $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n = 5 \times (\frac{4}{3})^n$.

Exercice 4

- Vérifier que $2 \leq u_0 < 4$.
- Supposer que pour un entier $k \geq 0$, $2 \leq u_k < 4$.
- Démontrer que $2 \leq u_{k+1} < 4$.
- Conclure.

Exercice 5

Utiliser les étapes de la démonstration par récurrence

Exercice 6

Utiliser les étapes de la démonstration par récurrence

- **Connaitre la définition d'une suite minorée, majorée ou bornée**

Exercice 7

On a $u_n + \frac{1}{4} = \frac{13(n-1)}{4(5n-1)}$.

$u_0 = 3$, donc $u_0 \geq -\frac{1}{4}$ (1)

$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, n-1 \geq 0$ et $5n-1 > 0$. Donc: $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, u_n + \frac{1}{4} \geq 0$. (2)

De (1) et (2), on tire que la suite (u_n) est minorée par $\frac{-1}{4}$.

Exercice 8

- On vérifie que $u_0 \leq 2$.
- On suppose que pour un entier naturel $k \geq 0$, $u_k \leq 2$ et on démontre que $u_{k+1} \leq 2$.

  On a , $u_k \leq 2$ donc $\frac{1}{u_k} \geq \frac{1}{2}$

  $$\frac{-1}{u_k} \leq \frac{-1}{2}$$

  $$1 - \frac{1}{u_k} \leq \frac{1}{2} \leq 2 \text{ , donc } u_{k+1} \leq 2.$$

  Ainsi, la suite (u_n) est majorée par 2.

Exercice 9

$\forall\, n \in \mathbb{N}, \frac{3n}{n+1} \geq 0$. Aussi $\frac{3n}{n+1} = 3 - \frac{3}{n+1} < 3$.

Alors : $0 \leq u_n < 3$. D'où la suite (u_n) est bornée.

Exercice 10

Remarquer que $2^n \leq 3^n$ donc $\forall\, n \in \mathbb{N}, 2^n - 3^n \leq 0$.

On conclut que la suite (u_n) est majorée par 0.

- **Etudier le sens de variation d'une suite numérique**

Exercice 11

a) $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \frac{-3}{(2n+3)(2n+1)} < 0$, donc la suite (u_n) est strictement décroissante.

b) Etudier le sens de variation sur $[0; +\infty[$ de la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+1}$.
La suite (u_n) a le même sens de variation que la fonction f.

c) Etudier le sens de variation $[0; +\infty[$ de la fonction g définie par $g(x) = \frac{x^2+2x+3}{x+1}$.
La suite (u_n) a le même sens de variation que la fonction g.

d) La suite (u_n) est positive.
On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n < 1$. Donc, la suite (u_n) est strictement décroissante.

Exercice 12

a) Etudier le sens de variation sur $[2; +\infty[$ de la fonction f définie par $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$, puis conclure.

b) Etudier le sens de variation sur $[0; +\infty[$ de la fonction g définie par $g(x) = \frac{e^x}{x+3}$, puis conclure.

c) $u_{n+1} - u_n = \frac{3^n(2n-1)}{n(n+1)} > 0$, donc la suite (u_n) est strictement croissante.

Exercice 13

a) $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n(n+1)} > 0$ et $v_{n+1} - v_n = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} > 0$.
Donc les suites (u_n) et (v_n) sont croissantes.

b) Soit $w_n = u_n \times v_n = \frac{1}{n^3}$.
En étudiant le sens de variation sur $]0; +\infty[$ de la fonction h définie par $h(x) = \frac{1}{x^3}$, on conclut que la suite (w_n) est strictement décroissante.

- **Connaitre la définition d'une suite convergente**

Exercice 14

1-V 2-V 3-F 4-V

Exercice 15

a) $\lim u_n = 1$, donc la suite (u_n) est convergente.
b) $\lim u_n = 1$, donc la suite (u_n) est convergente.
c) La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0, donc la suite (u_n) est convergente.
d) $\lim u_n = e^2$, donc la suite (u_n) est convergente.

Exercice 16

$\lim u_n = +\infty$; $\lim v_n = -\infty$; $\lim w_n = 0$.

- **Connaitre les propriétés de comparaison**

Exercice 17

$\lim u_n = -\infty$; $\lim v_n = +\infty$.

Exercice 18

1- $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, |2-(-1)^n| \leq 3$

$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \frac{|2-(-1)^n|}{n\sqrt{n}+1} \leq \frac{3}{n\sqrt{n}+1} < \frac{3}{n\sqrt{n}}$

Ainsi $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, |u_n| \leq \frac{3}{n\sqrt{n}}$.

2- $\lim u_n = 0$.

- **Reconnaitre une suite arithmétique ou une suite géométrique**

Exercice 19

$\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = 1$ donc la suite u est une suite arithmétique.

Exercice 20

$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2}{3}$ donc la suite u est une suite géométrique.

Exercice 21

Les données ramènent au système d'équations : $\begin{cases} u_1 + 7r = 4 \\ u_1 + 5r = -2 \end{cases}$

En résolvant le système on obtient $u_1 = -17$ *et* $r = 3$.

Exercice 22

Les données ramènent au système d'équations : $\begin{cases} u_0 + 4r = 8 \\ u_0 + 7r = -1 \end{cases}$

En résolvant le système, on obtient $u_0 = 20$ *et* $r = -3$.

On a $u_n = 20 - 3n$ donc $u_{15} = -25$.

Donc $S_{15} = -40$.

Exercice 23

$S_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$, donc $(n+1) \times \frac{-23}{2} = -138$.

$n + 1 = 12$, donc $n = 11$.

Exercice 24

On sait que $u_n = 4 \times (\frac{1}{2})^n$. En résolvant l'équation $4 \times (\frac{1}{2})^n = \frac{1}{4}$, on obtient $n = 4$.

Exercice 25

$S_{10} = \frac{1}{3} \times (2^{11} - 1) = \frac{2047}{3}$.

Exercice 26

- Il s'agit de la somme des 11 premiers termes de la suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme 1. Donc $S = \frac{3}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{11}\right]$.
- Il s'agit de la somme des 15 premiers termes de la suite géométrique de raison 2 et de premier terme 1. Donc $R = 2^{15} - 1$.

Exercice 27

Soit u_p, u_q et u_t les termes consécutifs d'une suite arithmétique telle que :

$u_p + u_q + u_t = 51$ et $u_p \times u_q \times u_t = 4301$. De ces données on obtient :

$u_p + r = 17$ avec r la raison de la suite et $17^2 - r^2 = 253$.
D'où : $r = 6$ ou $r = -6$.
Pour $r = 6$, $u_p = 11$, $u_q = 17$ et $u_t = 23$.

- **Exercices de renforcement/approfondissement**

Exercice 28

a) On a : $u_2 = qu_1$, $u_3 = q^2u_1$, $u_4 = q^3u_1$ et $u_5 = q^4u_1$, donc
$u_1 \times u_5 = q^4 \times {u_1}^2 = (q^2 \times u_1)^2 = u_3^2$.

b) En utilisant les données, on montre que :
$u_1 = \frac{5}{q^2}$, $u_2 = \frac{5}{q}$, $u_3 = 5$, $u_4 = 5q$ et $u_5 = 5q^2$
$u_2 + u_3 + u_4 = \frac{35}{2}$. Comme $u_3 = 5$, on a $\frac{5}{q} + 5q = \frac{25}{2}$.
En résolvant cette équation, on obtient $q = \frac{1}{2}$ ou $q = 2$.
Ainsi : si on prend $q = \frac{1}{2}$, alors $u_1 = 20$, $u_2 = 10$, $u_3 = 5$, $u_4 = \frac{5}{2}$ et $u_5 = \frac{5}{4}$;
si on prend $q = 2$, alors $u_1 = \frac{5}{4}$, $u_2 = \frac{5}{2}$, $u_3 = 5$, $u_4 = 10$, $u_5 = 20$.

Exercice 29

1. La suite u est une suite arithmétique.
2. $u_1 = -1$ et $u_2 = -5$
3. $u_{n+1} - u_n = -4 < 0$ donc la suite u est strictement décroissante.
4. $u_n = 3 - 4n$
5. a) $S_n = (n+1)(3-2n)$.
   b) $S' = (n-1)(-1-2n)$.

Exercice 30

1. La suite u est une suite est une suite géométrique.
2. $u_2 = \frac{3}{2}$ et $u_3 = \frac{3}{4}$.
3. On a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2} < 1$ donc la suite u est décroissante.
4. $u_n = 3 \times (\frac{1}{2})^{n-1}$.
5. $S_n = 6(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n)$.
6. $a)$ On a : $v_{n+1} - v_n = -ln2$, donc la suite v est une suite arithmétique de raison $-ln2$ et de premier terme $v_1 = ln3$.

b) $v_n = lnu_n$ donc $u_n = e^{v_n}$

$$P = e^{v_1} \times e^{v_2} \times \ldots \times e^{v_n}$$
$$P = e^{v_1 + v_2 + \cdots + v_n}$$
$$P = e^{n\left[ln3 + \frac{(1-n)ln2}{2}\right]}$$

Exercice 31

1. Représentation graphique
2. a) On vérifie que $U_0 < \frac{5}{2}$.

   On suppose que pour un entier naturel $k \geq 0$, $U_k \leq \frac{5}{2}$ et on démontre que $U_{k+1} \leq \frac{5}{2}$.

   On tire la conclusion.

   b) On a $U_{n+1} - U_n > 0$ donc la suite (U_n) est croissante.

   La suite (U_n) est croissante et majorée par $\frac{5}{2}$, donc elle est convergente.
3. a) On montre que $V_{n+1} = \frac{3}{5}V_n$ donc la suite (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{3}{5}$ et de premier terme $\frac{-5}{2}$.

   b) $V_n = \frac{-5}{2} \times (\frac{3}{5})^n$ et $U_n = \frac{-5}{2} \times \left(\frac{3}{5}\right)^n + \frac{5}{2}$.

   c) $\lim U_n = \frac{5}{2}$.

Exercice 32

1. $U_1 = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $U_2 = \frac{1}{6} + \sqrt{2}$
2. Montrer que $V_{n+1} = \frac{1}{2}V_n$, donc la suite V est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $V_0 = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.
3. $V_n = \frac{2\sqrt{2}}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $U_n = \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{n\sqrt{2}}{2}$

   On a : $\lim U_n = +\infty$, donc la suite U est divergente.
4. $S_{0,n} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\frac{4\sqrt{2}}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) + \frac{n(n+1)}{2}\right]$

   $\lim\limits_{n \to +\infty} S_{0,n} = +\infty$.

Exercice 33

a) $S_1 = 1$; $S_2 = 5$; $S_3 = 14$; $S_4 = 30$.

b) $S_{n+1} = S_n + (n+1)^2$.

c) $S_1 = 1 = \frac{1(1+1)(2\times1+1)}{6}$.

Supposons que pour un entier naturel $k \geq 1$, $S_k = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$.

Montrons que $S_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$.

On sait que $S_{k+1} = S_k + (k+1)^2$

$$S_{k+1} = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

$$S_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

Ainsi $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 34

$U_0 = 1 = 2^0$, $U_1 = 2 = 2^1$.

Supposons que pour un entier naturel $k \geq 1, U_k = 2^k \; et \; U_{k+1} = 2^{k+1}$.

Démontrons que : $U_{k+2} = 2^{k+2}$.

$U_{k+2} = 5U_{k+1} - 6U_k$

$U_{k+2} = 5 \times 2^{k+1} - 6 \times 2^k$

$U_{k+2} = 2^k(10 - 6)$

$U_{k+2} = 2^k \times 4 = 2^{k+2}$

Ainsi : $\forall \, n \in \mathbb{N}, U_n = 2^n$.

Exercice 35

Soit r la raison de cette suite arithmétique.

$y = x + r$ et $z = x + 2r$.

En exploitant les données, on obtient $x + r = 3$ et $r^2 = 16$.

On a $r = 4$ ou $r = -4$.

Si $r = 4$, alors $x = -1$; $y = 3$ et $z = 7$.

Si $r = -4$, alors $x = 7$, $y = 3$ et $z = -1$.

Exercice 36

1. Utiliser les étapes de la démonstration par récurrence.
2. $v_{n+1} = \frac{-1}{2} v_n$ donc (v_n) est une suite géométrique.
3. $v_n = \frac{2}{5} \times (\frac{-1}{2})^n$ donc $\lim v_n = 0$.
4. $u_n = \frac{1+2v_n}{1-v_n}$ donc $\lim u_n = 1$.

Exercice 37

1. $V_{n+1} = \frac{1}{2} V_n$ donc (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $V_0 = 1$.
2. $V_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, donc $\lim V_n = 0$.
3. On a : $U_n = 9e^{V_n}$, donc $\lim U_n = 9$.

Exercice 38

1. –Déterminer V_{n+1}
   -Effectuer V_{n+1} - V_n
   - Montrer que V_{n+1} - $V_n = \frac{1}{2}$

2. $V_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}n = \frac{1}{2}(n+1)$.

On a $U_n = \frac{1}{V_n} - 2$ d'où $U_n = \frac{2}{n+1} - 2$.

3. $limU_n = -2$ et $limV_n = +\infty$.

Exercice 39

1. Construction des 5 premiers termes.

2. a) $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n - 3$ et $U_n = \frac{1}{2}U_{n-1} - 3$, donc $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2}(U_n - U_{n-1})$.

b) La suite ($U_{n+1} - U_n$) est par définition une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ de premier terme -5.

Donc $U_{n+1} - U_n = -5 \times (\frac{1}{2})^n$.

c) $U_{n+1} - U_n < 0$ donc la suite (U_n) est strictement décroissante.

3. a) On pourra démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n + 6 = \frac{1}{2}(U_{n-1} + 6)$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n + 6 = \frac{1}{2}(U_{n-1} + 6) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 (U_{n-2} + 6)$.

$$U_n + 6 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 (U_{n-3} + 6) = \ldots = \left(\frac{1}{2}\right)^n (U_{n-n} + 6) = \left(\frac{1}{2}\right)^n (U_0 + 6).$$

c) D'après 3. b), on a : $limU_n = -6$.

Exercice 40

1. $V_0 = -\ln 2$
2. $V_{n+1} = \ln(\frac{3}{2}U_{n+1})$

$V_{n+1} = \ln(\frac{3}{2}U_n)^2$

$V_{n+1} = 2\times \ln(\frac{3}{2}U_n) = 2V_n$ donc la suite (V_n) est une suite géométrique de raison 2.

3. $V_n = -\ln 2 \times 2^n$.
4. $\lim V_n = -\infty$.
5. $u_n = \frac{2}{3}e^{V_n}$, donc $\lim U_n = 0$
6. a) $S_n = V_0 \times \frac{1-2^n}{1-2} = \ln 2 \times (1 - 2^n)$.

b) $T_n = \frac{2}{3}e^{V_0} \times \frac{2}{3}e^{V_1} \times \ldots \times \frac{2}{3}e^{V_{n-1}}$

$T_n = (\frac{2}{3})^n \times e^{V_0+V_1+\cdots+V_{n-1}} = (\frac{2}{3})^n \times e^{S_n}$

c) $T_n = (\frac{2}{3})^n \times e^{(1-2^n)ln2}$.

Exercice 41

1-a) Utiliser un raisonnement par récurrence.

b) $U_{n+1} - U_n = U_n(e^{-U_n} - 1) < 0$, donc la suite (U_n) est décroissante.

c) La suite (U_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle est convergente. Sa limite est 0.

2- Démontrer par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = e^{-S_n}$.

Comme la suite (U_n) converge vers 0 , alors (U_{n+1}) converge également vers 0, donc la suite (S_n) converge vers +∞.

Exercice 42

Démontrons par récurrence que pour tout entier $n \geq 1,\ 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

- $1^3 = 1$, $\frac{1^2(1+1)^2}{4} = 1$. D'où : $1^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$.
- Supposons que pour un entier k $(k \geq 1)$: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$.

  Démontrons que : $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 &= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 \\ &= \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4} \\ &= \frac{(k+1)^2[k^2 + 4(k+1)]}{4} \\ &= \frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4} \\ &= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}. \end{aligned}$$

Donc : $\forall n \geq 1,\ 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Exercice 43

Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1,\ 1 \times 2 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

On a : $1 \times (1+1) = 2$ et $\frac{1(1+1)(1+2)}{3} = 2$. D'où : $1 \times (1+1) = \frac{1(1+1)(1+2)}{3}$.

Supposons que pour un entier naturel k $(k \geq 1)$, on a : $1 \times 2 + \cdots + k(k+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$.

Démontrons que : $1 \times 2 + \cdots + k(k+1) + (k+1)(k+2) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$.

On a : $1 \times 2 + \cdots + k(k+1) + (k+1)(k+2) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2)$

$$1 \times 2 + \cdots + k(k+1) + (k+1)(k+2) = \frac{k(k+1)(k+2) + 3(k+1)(k+2)}{3}$$

$$1 \times 2 + \cdots + k(k+1) + (k+1)(k+2) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3} .$$

Donc, pour tout entier naturel $n \geq 1,\ 1 \times 2 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

Exercice 44

Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $3^{2n} - 1$ est un multiple de 8.

- $3^{2\times 0} - 1 = 0$. Donc, $3^{2\times 0} - 1$ est un multiple de 8.

Supposons que pour un entier naturel k $(k \geq 0)$, $3^{2k} - 1$ est un multiple de 8.

Démontrons que $3^{2(k+1)} - 1$ est un multiple de 8.

On a : $3^{2(k+1)} - 1 = 9 \times 3^{2k} - 1 = 9 \times 3^{2k} - 9 + 8 = 9 \times (3^{2k} - 1) + 8$.

Or : $3^{2k} - 1$ et 8 sont des multiples de 8. Donc, $9 \times (3^{2k} - 1) + 8$ est un multiple de 8.

Par suite, $3^{2(k+1)} - 1$ est un multiple de 8.

Donc, pour tout entier naturel n, $3^{2n} - 1$ est un multiple de 8.

Exercice 45

1. $v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$. Donc, (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$.
2. a) $\lim v_n = 0$
   b) $u_n = v_n + 3$, donc $\lim u_n = 3$.

Exercice 46

1. $u_{n+1} - u_n = \frac{3}{2}$, donc la suite (u_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{3}{2}$ et de premier terme $u_0 = -5$.
   Donc : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n = -5 + \frac{3}{2}n$.
2. Représentation graphique
3. $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{20} = 21 \times \frac{u_0 + u_{20}}{2} = 210$.

Exercice 47

$u_{n-1} + u_{n+1} = 2u_n$, pour $n \geq 1$. Donc : $u_{n+1} - u_n = u_n - u_{n-1}$, pour $n \geq 1$.

Ainsi, la suite (u_n) est une suite arithmétique.

Exercice 48

1. $u_1 = 4$ et $v_1 = \frac{13}{2}$.
2. $a)$ $d_{n+1} = \frac{5}{12}d_n$, donc la suite (d_n) est une suite géométrique de raison $\frac{5}{12}$ et de premier terme $d_0 = 6$.
   b) $d_n = 6 \times (\frac{5}{12})^n$
   $c)$ $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 6 > 0\ et\ \left(\frac{5}{12}\right)^n > 0$, donc : $\forall\, n \in \mathbb{N}, d_n > 0$.
   $d)$ $\lim d_n = 0$.
3. a) Effectuer $u_{n+1} - u_n$ et conclure , puis effectuer $v_{n+1} - v_n$ et conclure.
   b) $\frac{d_n}{3} > 0$, donc la suite (u_n) est strictement croissante.
   $\frac{-d_n}{4} < 0$, donc la suite (v_n) est strictement décroissante.

c) La suite (u_n) est strictement croissante , donc : $u_0 < u_1 < \cdots < u_{n-1} < u_n$ (1)
Aussi, on a: $u_n < v_n$ (2)
La suite (v_n) est strictement décroissante , donc : $v_n < v_{n-1} < \cdots < v_1 < v_0$ (3)

De (1), (2) et (3) on a : $u_0 < u_1 < \cdots < u_{n-1} < u_n < v_n < v_{n-1} < \cdots < v_1 < v_0$.

D'où : $u_0 < u_n < v_n < v_0$.

d) La suite (u_n) est strictement croissante et majorée par v_0 , donc la suite (u_n) est convergente.

La suite (v_n) est strictement décroissante et minorée par u_0 , donc la suite (v_n) est convergente.

4. a) Pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{24}{7}\left(1 - \left(\frac{5}{12}\right)^n\right) + 2$
b) $\lim u_n = \frac{38}{7}$ et $\lim v_n = \lim (u_n + d_n) = \frac{38}{7}$.

Exercice 49

1. a) $\forall\, x \in]0;\, +\infty[, f'(x) = \frac{3}{x^2} > 0$. Donc la fonction f est strictement croissante sur $]0;\, +\infty[$.

Tableau de variation de f

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$ $+$	
$f(x)$	$\|\|$ $-\infty$ $\nearrow$	4

b) Tracé de (C) et de (D)
c) Construction de u_0, u_1, u_2 et u_3.

2. a) f est continue et strictement croissante sur $[2; 3]$, donc $f([2; 3]) = [f(2); f(3)] = \left[\frac{5}{2}; 3\right]$

Or $\left[\frac{5}{2}; 3\right] \subset [2; 3]$ donc : $f([2; 3]) \subset [2; 3]$.

b) Utiliser un raisonnement par récurrence pour démontrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 2 \leq u_n < 3$.

c) On a : $u_{n+1} - u_n = \frac{(3-u_n)(u_n-1)}{u_n} > 0$, donc la suite (u_n) est croissante.

d) La suite (u_n) est croissante et majorée par 3 donc elle est convergente.

3. a) Déterminer l'expression de v_{n+1}.

Montrer que $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{3}$, puis conclure.

b) $v_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n$, donc $\lim v_n = 0$.

c) $u_n = \frac{v_n - 3}{v_n - 1}$, donc $\lim u_n = 3$.

Exercice 50

1. $u_1 = 3$ et $u_2 = 10$.
2. a) $u_0 \geq 0$ et $u_1 \geq 1$.
   Supposons que pour un entier naturel $k \geq 1$, $u_k \geq k$ et montrons que $u_{k+1} \geq k + 1$.

   On a : $u_k \geq k$

   $3u_k \geq 3k$

   $3u_k - 2k \geq k$

   $3u_k - 2k + 3 \geq k + 3 > k + 1$ d'où $u_{k+1} \geq k + 1$.

   Donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq n$.

   b) $\lim u_n = +\infty$.

3. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = 2(u_n - n) + 3$.

   Or : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n - n \geq 0$. Donc : $u_{n+1} - u_n \geq 3 \geq 0$.

   Donc la suite (u_n) est croissante.

4. a) $v_{n+1} = 3u_n - 3n + 3 = 3v_n$, donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 3 et de premier terme 1.

   b) $u_n = v_n + n - 1$, or $v_n = 3^n$ donc $u_n = 3^n + n - 1$.

Exercice 51

1. pour $u_0 = 0{,}5$ on a $u_1 = 0{,}6$.
2. $\frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} = \frac{-1}{2}$, donc la suite $(\frac{1}{v_n})$ est une suite arithmétique de raison $\frac{-1}{2}$ et de premier terme -2.
3. $\frac{1}{v_n} = \frac{-4-n}{2}$, donc $v_n = \frac{-2}{4+n}$.

   $u_n = v_n + 1$. Comme $\lim v_n = 0$, on a $\lim u_n = 1$. Ainsi, la suite (u_n) converge vers 1.

4. Après plusieurs reproductions, la population sera constituée uniquement de souris noires.

Exercice 52

1. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq 5$.
2. $u_{n+1} - u_n > 0$, donc la suite (u_n) est croissante.

   De plus, elle est majorée par 5. Donc, elle est convergente.

3. a) Utilisation de l'inégalité des accroissements finis en considérant la fonction f telle que :
   $f(x) = \sqrt{x+6}$.
   Montrer que $f'(x) \leq \frac{1}{3}$.
   Ensuite on a :$|f(u_n) - f(3)| \leq \frac{1}{3}|u_n - 3|$, d'où $|u_{n+1} - 3| \leq \frac{1}{3}|u_n - 3|$.
   $$|u_1 - 3| \times |u_2 - 3| \times \ldots \times |u_n - 3| \leq \frac{1}{3}|u_0 - 3| \times \frac{1}{3}|u_1 - 3| \times \ldots \times \frac{1}{3}|u_{n-1} - 3|$$
   Donc : $|u_n - 3| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n |u_0 - 3|$.

   D'où : $|u_n - 3| \leq 3\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

   b) $\lim u_n = 3$.

➢ SITUATIONS COMPLEXES

Exercice 53

Pour aider monsieur YAO, je vais utiliser mes connaissances sur les suites numériques.

Pour cela, je vais :

- déterminer une suite numérique (u_n) qui donne le salaire de M.Yao à la n-ième année du premier contrat et en déduire le salaire à la 9ème année ;
- déterminer une suite numérique (v_n) qui donne le salaire de M.Yao à la n-ième année du deuxième contrat et en déduire le salaire à la 9ème année ;
- comparer les salaires à la 9ème année dans les deux contrats et conclure.

- Soit u_n le salaire à la n-ième année avec le premier contrat.
  On a : $u_1 = 750000$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{4}{100}u_n = 1{,}04u_n$.

  Dans ce cas, le salaire évolue comme une suite géométrique de raison 1,04.

  Le salaire à la n-ième année est donné par l'expression :

  $u_n = u_1 \times (1{,}04)^{n-1} = 750000 \times (1{,}04)^{n-1}$.

  A la neuvième année, le salaire avec le premier contrat sera :

  $u_9 = 750000 \times (1{,}04)^8 \approx 1026427$.

- Soit v_n le salaire à la n-ième année avec le deuxième contrat.
  On a : $v_1 = 750000$ et $v_{n+1} = v_n + 30000$.

Dans ce cas, le salaire évolue comme une suite arithmétique de raison 30000.

Le salaire à la n-ième année est donné par l'expression :

$v_n = v_1 + 30000(n-1) = 750000 + 30000(n-1)$.

A la neuvième année le salaire avec le deuxième contrat sera :

$v_9 = 750000 + 30000 \times 8 \approx 990000$.

- On a : $u_9 > v_9$, donc le premier contrat est le plus avantageux pour monsieur YAO.

Exercice 54

Pour dire si la déclaration de mon camarade de classe est juste ou non, je vais utiliser les suites numériques. Pour cela, je vais :

- Identifier la suite numérique qui décrit l'évolution de la pandémie ;
- Déterminer la somme $S(t)$ des $t+1$ premiers termes consécutifs de cette suite numérique ;
- Déterminer le plus petit entier t tel que $S(t) \geq 10000$ et conclure.

- Identifions la suite numérique qui décrit l'évolution de la pandémie.

On a : $f(t) = 120t + 1, t \in \mathbb{N}$.

f est une suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 120.

- Déterminons la somme $S(t)$ des $t+1$ premiers termes consécutifs de la suite f.
  On a : $S(t) = f(0) + f(1) + \cdots + f(t)$

$S(t) = \frac{t+1}{2}[f(0) + f(t)]$

$S(t) = \frac{t+1}{2}(120t + 2) = 60t^2 + 61t + 1$, avec $t \geq 0$.

- Déterminons le plus petit entier t tel que $S(t) \geq 10000$.

$S(t) \geq 10000 \;\Rightarrow\; 60t^2 + 61t - 9999 \geq 0$.

Sachant que : $t \geq 0$, on obtient : $t \geq \frac{-61+\sqrt{2403481}}{120}$.

La plus petite valeur de l'entier naturel t est 14.

Le couvre-feu interviendra 14 jours après la déclaration du premier cas de COVID-19 dans ce pays

Donc, l'affirmation du camarade de classe n'est pas juste.

EXERCICE 55

Soit p_0 le prix d'un article en 2014 et p_n, son prix en 2014 + n

Entre 2014 et 2017, le taux d'inflation annuel étant de 6%, on a successivement :

$p_1 = 1{,}06\, p_0$ (prix en 2015), $p_2 = (1{,}06)^2\, p_0$ ((prix en 2016), $p_3 = (1{,}06)^3\, p_0$ (prix en 2017)

Entre 2017 et 2019, le taux d'inflation annuel étant de 7%, on a donc :

$p_4 = 1{,}07\, p_3$, soit $p_4 = 1{,}07(1{,}06)^3\, p_0$ (prix en 2018), $p_5 = (1{,}07)^2(1{,}06)^3\, p_0$ (prix en 2019),

Entre 2019 et 2020, le taux d'inflation annuel étant de 7,5%, on a donc :

$p_6 = 1{,}075(1{,}07)^2(1{,}06)^3\, p_0$ (prix en 2020),

Entre 2020 et 2021, le taux d'inflation annuel étant de 8%, on a donc :

$p_7 = 1{,}08 \times 1{,}075(1{,}07)^2(1{,}06)^3\, p_0$ (prix en 2021),

Entre 2021 et 2022, le taux d'inflation annuel étant de 8%, on a donc :

$p_8 = 1{,}1 \times 1{,}08 \times 1{,}075(1{,}07)^2(1{,}06)^3\, p_0$ (prix en 2022).

On a donc : $p_8 = 1{,}74144617632\, p_0$,

$1{,}74144617632 > 1{,}6$; donc le coût de la vie est élevé dans ce pays. Coulibaly a raison.

10 CALCUL INTÉGRAL

Traitement de la situation d'apprentissage

- Après la lecture de la situation d'apprentissage (par un élève, par le professeur et une lecture silencieuse des élèves), l'enseignant va procéder à l'explication éventuelle des mots difficiles. Dans le cas de cette situation, le texte ne semble pas contenir de mots ou expressions difficiles pour un élève de Terminale D. Toutefois le professeur donnera la parole à ses élèves afin de s'assurer que tout le monde a compris le texte.
- Il pourra ensuite faire dégager les constituants de la situation à travers une ou des questions du type :

Constituants de la situation	**Exemples de questions possibles**	**Réponses possibles des élèves**
Contexte	Où et quand se déroule la scène et qui en sont les acteurs ?	La scène se déroule dans un établissement secondaire. Il s'agit d'un exposé en Histoire-Géographie sur les infrastructures routières réalisées en Chine. Les acteurs sont les élèves de la promotion Terminale.
Circonstance	Indique la difficulté à laquelle les élèves sont confrontés.	Les élèves de la promotion de Terminale sont fascinés par les informations données par les ingénieurs et découvrent une expression mathématique qu'ils ne comprennent pas.
Tâche	Qu'est ce que les élèves de cette promotion de Terminale décident de faire ?	Les élèves de la promotion de Terminale décident de faire des recherches sur le calcul d'aire.

Le professeur profitera donc de la tâche énoncée par ses élèves pour faire la synthèse de la situation et annoncera le plan de la leçon. Il devra dans la mesure du possible se référer à la situation durant tout le déroulement de la leçon.

Découverte des habiletés

Activité 1 : Définition de l'intégrale

Corrigé de l'activité 1

1. $G(b) - G(a) = F(b) + c - F(a) - c = F(b) - F(a)$.
2. On a : $G(b) - G(a) = F(b) - F(a)$, donc le nombre réel $F(b) - F(a)$ est indépendant la primitive choisie.

Exercices de fixation

Exercice 1

× F(b) - F(a) ☐ G(a) - F(b) × G(b) - G(a) × $[F(t)]_a^b$, ☐ $[F(t)]_b^a$

Exercice 2

La fonction f étant continue sur l'intervalle I, elle admet au moins une primitive sur I..
x_0 étant un élément de I, il existe une et une primitive de f sur I qui s'annule en x_0.
Or F est une primitive sur I de f qui s'annule en x_0. D'où le résultat.

Exercice 3

Calcule :

a) $\int_2^5 (2t-1)dt = [t^2 - t]_2^5 = 18$.

b) $\int_3^1 \frac{1}{t^2} dt = [-\frac{1}{t}]_3^1 = \frac{-2}{3}$.

c) $\int_0^1 t^2 dt = [\frac{t^3}{3}]_0^1 = \frac{1}{3}$.

d) $\int_2^1 \frac{1}{t} dt = -ln2$.

Activité 2: Propriété de linéarité de l'intégrale

Corrigé de l'activité 2

1. Une primitive sur I de la fonction $\propto f + \beta\, g$ est la fonction $\propto F + \beta\, G$.
2. $\int_a^b [\propto f(t) + \beta g(t)]dt = [\propto F(t) + \beta G(t)]_a^b = \propto F(b) + \beta G(b) - \big(\propto F(a) + \beta G(a)\big)$

$$= \propto \big(F(b) - F(a)\big) + \beta\big(G(b) - G(a)\big)$$

$$= \propto \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t)dt.$$

Exercices de fixation

Exercice 4

a) $\int_a^b \big(f(t) - 2g(t)\big)dt = \cdots$

☐ $2\int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$ ☐ $2\int_a^b f(t)dt - \int_a^b g(t)dt$

☐ $2 - \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$ × $\int_a^b f(t)dt - 2\int_a^b g(t)dt$.

b) $\int_a^b \big(\alpha f(t) - \beta g(t)\big)dt = \ldots$

☐ $\beta\int_a^b f(t)dt + \alpha\int_a^b g(t))dt$; ☐ $(\alpha - \beta)\left(\int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt\right)$

☐ $(\alpha + \beta)\left(\int_a^b f(t)dt - \int_a^b g(t)dt\right)$; × $\alpha\int_a^b f(t)dt - \beta\int_a^b g(t)dt$.

Exercice 5

a) $1 + \frac{\pi^2}{8}$; b) $\frac{82}{3}$;

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x)dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x + cos^2 x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$.

Activité 3: Relation de Chasles

Corrigé de l'activité 3

1. a) $\int_a^c f(t)dt = F(c) - F(a)$ b) $\int_c^b f(t)dt = F(b) - F(c)$.
2. $\int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt = F(c) - F(a) + \big(F(b) - F(c)\big) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt$.

Exercices de fixation

Exercice 6

$$\int_{-2}^{3} 2|t+1|dt = 17.$$

Exercice 7

$$\int_{-2}^{3} 2|x-1|dx = 13.$$

Activité 4: Intégrale et inégalités

Corrigé de l'activité 4

1. a) F est une primitive de f sur $[a;b]$. Donc : $\forall x \in [a;b], F'(x) = f(x)$.
   Or: $f \geq 0$ sur $[a;b]$, donc F est croissante sur $[a;b]$.
   b) F est croissante sur $[a;b]$, donc: $a \leq b \Longrightarrow F(a) \leq F(b)$.
   c) $F(a) \leq F(b) \Longrightarrow F(b) - F(a) \geq 0$.
   Donc : $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.
2. a) $f \leq g$ sur $[a;b]$. D'où : $g - f \geq 0$ sur $[a;b]$.
   D'après la question 1 : $g - f \geq 0$ sur $[a;b] \Longrightarrow \int_a^b (g-f)(x)dx \geq 0$.

   b) $\int_a^b (g-f)(x)dx \geq 0 \Longrightarrow \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx \geq 0$.
   Donc : $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

Exercice de fixation

Exercice 8

En intégrant sur [1; 2], on a : $0 \leq \int_1^2 \frac{dx}{x} \leq \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.
Or : $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x}} = [2\sqrt{x}]_1^2 = 2\sqrt{2} - 2$, donc : $0 \leq \ln 2 \leq 2\sqrt{2} - 2$.

Exercice 9

a) La fonction $x \longmapsto sinx$ est continue et positive sur $[0; \frac{\pi}{2}]$, d'où : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sinxdx \geq 0$.
b) La fonction $x \longmapsto x^3$ est continue et négative sur $[-2; -1]$, d'où : $\int_{-2}^{-1} x^3 dx \leq 0$.

Activité 5 : Inégalité de la moyenne

Corrigé de l'activité 5

1. $\forall t \in [a;b]$, $m \leq f(t) \leq M$. D'où : $\int_a^b mdt \leq \int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b Mdt$.
   On en déduit que : $m(b-a) \leq \int_a^b f(t)dt \leq M(b-a)$.
2. $\forall t \in [a;b]$, $|f(t)| \leq M$, d'où : $-M \leq f(t) \leq M$

   D'après la question 1, on a : $-M(b-a) \leq \int_a^b f(t)dt \leq M(b-a)$.

   Donc : $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq M(b-a)$.

Exercices de fixation

Exercice 10

La fonction $x \longmapsto sinx$ étant continue sur $[0 ; \frac{\pi}{2}]$, et pour tout nombre x, $|\sin x| \leq 1$. $|\int_0^{\frac{\pi}{2}} sinxdx| \leq \frac{\pi}{2}$.
Or : $\frac{\pi}{2} \leq 2$, donc $|\int_0^{\frac{\pi}{2}} sinxdx| \leq 2$.

Exercice 11

$\forall x \in [e;e^2]$, $1 \leq ln^2x \leq 4$. D'où : $1(e^2-e) \leq \int_e^{e^2} ln^2xdx \leq 4(e^2-e)$.

On obtient donc : $e(e-1) \leq \int_e^{e^2} ln^2xdx \leq 4e(e-1)$.

Activité 6 : Valeur moyenne d'une fonction

Corrigé de l'activité 6

$$\mu = \frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} \times \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} f(x)dx = 6 \times \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{2}{x^2}dx = 12\left[-\frac{1}{x}\right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} = 12(-2+3) = 12.$$

Exercice de fixation

Exercice 12

1. $\frac{1}{3}$ 2. $\frac{1}{2}(e^1 - e^{-1})$ 3. $\frac{2}{3}$.

Activité 7 : Technique de l'intégration par parties

Corrigé de l'activité 7

$$\int_a^b (uv)'(t)dt = \int_a^b u(t)v'(t)dt + \int_a^b u'(t)v(t)dt$$

Or $\int_a^b (uv)'(t)dt = [(uv)(t)]_a^b = [u(t)v(t)]_a^b$

On en déduit que : $\int_a^b u(t)v'(t)dt + \int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b$.

Donc : $\int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt$.

Exercices de fixation

Exercice 13

$u(x) = x, \qquad u'(x) = 1$

$v'(x) = \sqrt{2x+1}, \ v(x) = \frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}$

$\int_0^1 x\sqrt{2x+1}\,dx = [\frac{x}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}\,dx = [\frac{x}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}]_0^1 - \frac{1}{15}[(2x+1)^{\frac{5}{2}}]_0^1$;

$\int_0^1 x\sqrt{2x+1}\,dx = \frac{2\sqrt{3}}{5} + \frac{1}{15}$.

Exercice 14

$u(x) = lnx, \ \ u'(x) = \frac{1}{x}$

$v'(x) = x, \quad v(x) = \frac{x^2}{2}$.

$\int_1^e xlnxdx = [\frac{x^2}{2} lnx]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2}\,dx$

$\int_1^e xlnxdx = [\frac{x^2}{2} lnx]_1^e - [\frac{x^2}{4}]_1^e = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$.

Activité 8 : Technique du changement de variable affine

Corrigé de l'activité 8

1. On sait que : $\big(F(\propto t + \beta)\big)' = \propto F'(\propto t + \beta)$.
   F étant une primitive de f sur I, alors : $F' = f$.
   On en déduit que : $\big(F(\propto t + \beta)\big)' = \propto f(\propto t + \beta)$.
2. $\int_a^b f(\propto t + \beta)\,dt = \left[\frac{1}{\propto} F(\propto t + \beta)\right]_a^b = \frac{1}{\propto}\big(F(\propto b + \beta) - F(\propto a + \beta)\big)$.

   En posant : $u = \propto t + \beta$, on a : $F(\propto b + \beta) - F(\propto a + \beta) = [\,F(u)]_{\propto a+\beta}^{\propto b+\beta}$.

   D'où : $\int_a^b f(\propto t + \beta)\,dt = \left[\frac{1}{\propto} F(u)\right]_{\propto a+\beta}^{\propto b+\beta} = \int_{\propto a+\beta}^{\propto b+\beta} \frac{1}{\propto} f(u)\,du$.

Exercices de fixation

Exercice 15

Posons : $u = x + 1$.

$\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx = \int_1^4 (\sqrt{u} - \frac{1}{\sqrt{u}})du = [\frac{2}{3}u\sqrt{u}]_1^4 - [2\sqrt{u}]_1^4 = \frac{8}{3}$.

Exercice 16

Posons : $u = 2x - 3$.

$\int_0^2 (2x-3)^4 dx = \frac{1}{2}\int_{-3}^{1} u^4 du = \frac{122}{5}$.

Activité 9 : Propriété de l'intégrale d'une fonction paire ou impaire

Corrigé de l'activité 9

1. $\int_{-a}^{0} f(t)dt + \int_0^a f(t)dt = \int_{-a}^{a} f(t)dt$.
2. Si $u = -t$, alors : $du = -dt$. Donc : $dt = -du$
   Pour $t = -a,\ u = a$.
   Pour $t = 0,\ u = 0$.
   Ainsi : $\int_{-a}^{0} f(t)dt = -\int_a^0 f(-u)du = \int_0^a f(-u)du$.
3. On a : $\int_{-a}^{a} f(t)dt = \int_{-a}^{0} f(t)dt + \int_0^a f(t)dt = \int_0^a f(-u)du + \int_0^a f(t)dt$.
   - Si f est paire, alors : $f(-u) = f(u)$.

     D'où : $\int_{-a}^{0} f(t)dt = \int_0^a f(-u)du = \int_0^a f(u)du = \int_0^a f(t)dt$.

     Ainsi : $\int_{-a}^{a} f(t)dt = \int_{-a}^{0} f(t)dt + \int_0^a f(t)dt = \int_0^a f(t)dt + \int_0^a f(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt$.

   - Si f est impaire, alors : $f(-u) = -f(u)$.

     D'où : $\int_{-a}^{0} f(t)dt = \int_0^a f(-u)du = -\int_0^a f(u)du = -\int_0^a f(t)dt$.

     Ainsi : $\int_{-a}^{a} f(t)dt = \int_{-a}^{0} f(t)dt + \int_0^a f(t)dt = -\int_0^a f(t)dt + \int_0^a f(t)dt = 0$.

Exercice de fixation

Exercice 17

a) La fonction : $x \longmapsto sinx\ cos^4x$ est continue sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ et elle est impaire, donc :
   $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} sinx\ cos^4x\ dx = 0$.

b) La fonction : $x \longmapsto x\sqrt{x^2+9}$ est continue sur $[-2; 2]$ et elle est impaire, donc :
   $\int_{-2}^{2} x\sqrt{x^2+9}\, dx = 0$.

c) La fonction : $x \longmapsto |x|$ est continue sur $[-1; 1]$ et elle est paire, donc :

   $\int_{-1}^{1} |x|\, dx = 2\int_0^1 |x|\, dx = 2\int_0^1 x\, dx = 2 \times \frac{1}{2} = 1$.

Activité 10 : Propriété de l'intégrale d'une fonction périodique

Corrigé de l'activité 10

1. $\int_{\alpha+T}^{\beta+T} f(t)dt = \int_\alpha^\beta f(x+T)dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(t)dt$.
2. a) $\int_{\alpha+T}^{\beta+T} f(t)dt = \int_\alpha^\beta f(t)dt$
   D'où : $\int_{\alpha+T}^{\beta+T} f(t)dt = \int_{\alpha+T}^{\alpha} f(t)dt + \int_\alpha^\beta f(t)dt + \int_\beta^{\beta+T} f(t)dt = \int_\alpha^\beta f(t)dt$.

On obtient : $\int_{\alpha+T}^{\alpha} f(t)dt + \int_{\beta}^{\beta+T} f(t)dt = 0$.

On en déduit que : $-\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)dt = -\int_{\beta}^{\beta+T} f(t)dt$.

Donc : $\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)dt = \int_{\beta}^{\beta+T} f(t)dt$.

b) Si $\beta = 0$, alors l'égalité précédente devient : $\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)dt = \int_{0}^{T} f(t)dt$.

Exercice de fixation

Exercice 18

a) $\int_{0}^{2\pi} sinxdx = \int_{0+2\pi}^{2\pi+2\pi} sinxdx = \int_{2\pi}^{4\pi} sinxdx$, car la fonction sinus est périodique de période 2π.

b) $\int_{0}^{2\pi} cosxdx = \int_{-\pi}^{-\pi+2\pi} cosxdx = \int_{-\pi}^{\pi} cosxdx$, car la fonction cosinus est périodique de période 2π.

Activité 11 : Fonctions du type : $x \mapsto \int_{a}^{x} f(t)dt$

Corrigé de l'activité 11

1. $\varphi(x) = \int_{a}^{x} f(t)dt = F(x) - F(a)$.
2. a) $x \in I,\ \varphi'(x) = \big(F(x) - F(a)\big)' = F'(x) - 0 = f(x)$.

   Donc, φ est une primitive de f sur I.

   b) $\varphi(a) = F(a) - F(a) = 0$.

Exercice de fixation

Exercice 19

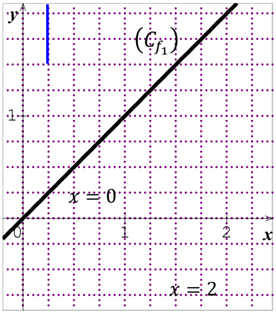
La fonction $t \mapsto \frac{e^t}{\sqrt{1+e^t}}$ est continue sur ℝ. Il en résulte que la fonction $x \mapsto \int_{0}^{x} \frac{e^t}{\sqrt{1+e^t}} dt$ définie sur ℝ est l'unique primitive de fonction $t \mapsto \frac{e^t}{\sqrt{1+e^t}}$ définie sur ℝ et qui s'annule en 0.

Activité 12 : Calcul d'aires

Corrigé de l'activité 12

1. L'aire du rectangle de dimensions OI et OJ est $OI \times OJ$ cm², soit $xy\ cm^2$.

2. a)



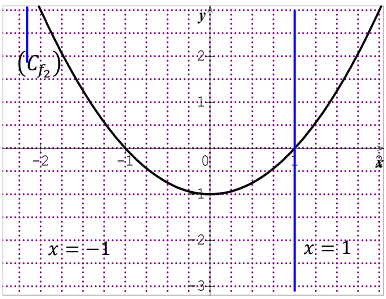
b) Pour tout $x \in [0; 2]$, $f_1(x) > 0$.

c) $\int_0^2 f_1(t)dt = \int_0^2 t dt = \left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^2 = 2 - 0 = 2$.

d) L'aire de la surface délimitée par la courbe (C_{f_1}), l'axe (OI) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$ est : $\frac{2\times2}{2} = 2$ $(\,en\ unités\ d'aire\,)$.

$(\,on\ rappelle\ que\ l'aire\ d'un\ triangle\ est\text{: } \frac{base\ \times hauteur}{2}.\,)$

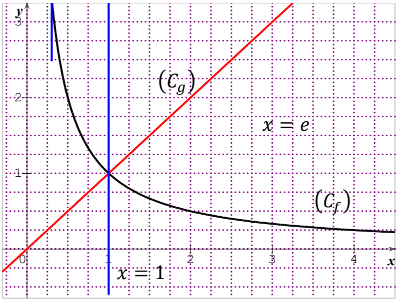
3. a)



b) Pour tout $x \in [-1; 1]$, $f_2(x) \leq 0$.

c) $-\int_{-1}^{1} f_2(t)dt = \int_{-1}^{1}(1 - t^2)dt = \left[t - \frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1} = 1 - \frac{1}{3} - \left(-1 - \frac{-1}{3}\right) = \frac{4}{3}$.

4. a)



b) Pour tout $x \in [1; e], f(x) - g(x) = \frac{1}{x} - x = \frac{1-x^2}{x}$.

Pour tout $x \in [1; e], 1 - x^2 \leq 0$ et $x > 0$, d'où $f(x) - g(x) \leq 0$.

Donc, pour tout $x \in [1; e], f(x) \leq g(x)$.

c) $\int_1^e [g(t) - f(t)]dt = \int_1^e \left(t - \frac{1}{t}\right) dt = \left[\frac{t^2}{2} - lnt\right]_1^e = \frac{e^2-3}{2}$.

Exercices de fixation

Exercice 20

L'unité d'aire est 3×2 cm^2. La fonction f étant continue et positive sur [1 ; 2], l'aire en unité d'aire est : $\int_1^2 (x^2 + x - 2)\text{dx}$, soit $\frac{11}{6}$ u.a. Ce qui donne : 11 cm^2.

Exercice 21

L'unité d'aire est 4 cm^2. La fonction f étant continue et négative sur [-2 ; 0], l'aire en unité d'aire est : $-\int_{-2}^0 (x^2 + x - 2)\text{dx}$, soit $\frac{10}{3}$ u.a. Ce qui donne : $\frac{40}{3}$ cm^2.

Exercice 22

Cette aire, en unité d'aire, vaut : $\int_0^3 (g(x) - f(x))dx$.
Ce qui donne 9 u.a.

Activité 13 : Calcul approché d'une intégrale par la méthode des rectangles

Corrigé de l'activité 13

1. L'aire du rectangle R_i est : $f(x_i)(x_{i+1} - x_i)$.
2. $u_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\left(\frac{b-a}{n}\right) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + \frac{b-a}{n} i\right)$.

Exercices de fixation

Exercice 23

a) $n = 10$, $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$.

La fonction *f* qui à $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est continue positive et décroissante sur [1 ; 2].

$$\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} f(1+\frac{1}{10}i) \leq \int_1^2 \frac{1}{x}dx \leq \frac{1}{10}\sum_{i=0}^{9} f(1+\frac{1}{10}i).$$

0,668771403 $\leq \int_1^2 \frac{1}{x}dx \leq$ 0,718771403.

D'où : 0,668 $\leq \int_1^2 \frac{1}{x}dx \leq$ 0,72.

0,694 est une valeur approchée de de $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$ à 26×10^{-3} près.

b) $n = 20$, $\int_0^1 e^{-x^2} dx$.

La fonction *f* qui à $x \longmapsto e^{-x^2}$ est continue positive et décroissante sur [0 ; 1].

$$\frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} f(\frac{1}{20}i) \leq \int_0^1 e^{-x^2}dx \leq \frac{1}{20}\sum_{i=0}^{19} f(\frac{1}{10}i).$$

On a : 0,73086782 $\leq \int_0^1 e^{-x^2}dx \leq$ 0,76247385.

D'où : 0,73 $\leq \int_0^1 e^{-x^2}dx \leq$ 0,77

0,75 est une valeur approchée $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ à 2×10^{-2} près.

c) $n = 15$, méthode identique

Exercice 24

a) $S_n = \frac{1}{n}\left(1 + cos^2\frac{\pi}{n} + \cdots + cos^2\frac{n\pi}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} cos^2\frac{k\pi}{n}$

$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} cos^2\frac{k\pi}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$, avec $f(x) = cos^2\pi x$.

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 cos^2\pi x dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}cos2\pi x\right)dx = \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{4\pi}sin2\pi x\right]_0^1$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{2}.$$

b) $S_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{1^2+n^2}} + \frac{2}{\sqrt{2^2+n^2}} + \cdots + \frac{n}{\sqrt{n^2+n^2}}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{\sqrt{k^2+n^2}}$

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{\sqrt{k^2+n^2}} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{\sqrt{\left(\frac{k}{n}\right)^2+1}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \text{, avec } f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx == \left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^1$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \sqrt{2} - 1 .$$

Des questions d'évaluation

Question 1 : Comment calculer une intégrale du type $\int_a^b \cos^m x \sin^n x\, dx$?

Corrigé de l'exercice non corrigé

a) L'exposant de $sin2x$ est impair.

On a: $\sin^3 2x \cos^2 2x = \sin 2x \sin^2 2x \cos^2 2x.$

$= (\sin 2x)(1-\cos^2 2x)\cos^2 2x.$

$\sin^3 2x \cos^2 2x = \sin 2x\cos^2 2x - \sin 2x\cos^4 2x .$

Une primitive sur $\left[-\frac{\pi}{4};\pi\right]$ de la fonction : $x \longmapsto \sin^3 2x \cos^2 2x$ est la fonction :

$x \longmapsto -\frac{1}{6}\cos^3 2x + \frac{1}{10}\cos^5 2x.$

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sin^3 2x \cos^2 2x\, dx = \left[-\frac{1}{6}\cos^3 2x + \frac{1}{10}\cos^5 2x\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\pi} = -\frac{1}{15} .$$

b) On va linéariser $\cos^4 x$

$$\cos^4 x = (\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(1+2\cos 2x+\cos^2 2x) = \frac{1}{4}\left(1+2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)$$

$$\cos^4 x = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x.$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 x\, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x\right) dx = \left[\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 x\, dx = \frac{3\pi}{32}+\frac{1}{4}-\left(-\frac{3\pi}{16}\right) = \frac{9\pi}{32}+\frac{1}{4} .$$

Question 2 : Comment calculer une intégrale du type $\int_a^b \ln(kx+p)\, dx$?

Corrigé de l'exercice non corrigé

On pose : $u(x) = \ln(2-x)$; on a : $u'(x) = \frac{-1}{2-x}$

$v'(x) = 1$ $\qquad v(x) = x$

On a : $\int_{-1}^{1} ln(2-x)\,dx \ = [xln(2-x)]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \frac{-x}{2-x}dx.$

Or : $\frac{-x}{2-x} = 1 - \frac{2}{2-x}$.

Donc, une primitive sur $[-1;1]$ de : $x \longmapsto \frac{-x}{2-x}$ est la fonction: $x \longmapsto x + 2ln(2-x)$.

On a : $\int_{-1}^{1} ln(2-x)\,dx \ = [xln(2-x)]_{-1}^{1} - [x + 2ln(2-x)]_{-1}^{1}$

$\int_{-1}^{1} ln(2-x)\,dx \ = [(x-2)ln(2-x) - x]_{-1}^{1}.$

$\int_{-1}^{1} ln(2-x)\,dx \ = 3ln3 - 2.$

Question 3 : Comment déterminer à l'aide d'une intégrale, des primitives de certaines fonctions du type fg ?

Corrigé de l'exercice non corrigé

La primitive F est définie par : $F(x) = \int_{e}^{x} \frac{lnt}{t^2}dt.$

On va effectuer une intégration par parties pour expliciter F.

Posons : $u(t) = lnt$; on a : $u'(t) = \frac{1}{t}$.

$v'(t) = \frac{1}{t^2}$ $v(t) = -\frac{1}{t}$.

D'où : $F(x) = \left[-\frac{lnt}{t}\right]_{e}^{x} - \int_{e}^{x}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt = \left[-\frac{lnt}{t}\right]_{e}^{x} - \left[\frac{1}{t}\right]_{e}^{x} = \left[\frac{-lnt-1}{t}\right]_{e}^{x}.$

$F(x) = \frac{-lnx-1}{x} + \frac{2}{e}$.

Mes séances d'exercices

- **Exercices de fixation**

Exercice 1

$N°$	Affirmation	Réponse
1	F_1 et F_2 étant deux primitives d'une fonction f sur un intervalle $[a;b]$, telles que : $\forall x \in [a;b]$, $F_1(x) = F_2(x) + 8$. On a : $[F_1(x)]_a^b \neq [F_2(x)]_a^b$.	**Faux**
2	F est une primitive d'une fonction f sur un intervalle $[-1;3]$. Si : $\int_{-1}^{3} f(x)dx = 5$, alors $F(-1) = 5 - F(3)$	**Faux**
3	L'intégrale $\int_{4}^{9} \frac{1}{2\sqrt{t}}dt$ est égale à 1.	**Vrai**
4	L'intégrale $\int_{0}^{1} e^{x}dx$ est égale à $1 - e$.	**Faux**

Exercice 2

1. $\int_{-1}^{-2} \frac{1}{t^4} dt = \left[-\frac{1}{3t^3}\right]_{-1}^{-2} = -\frac{7}{24}$.
2. $\int_1^2 \sqrt{t}dt = \int_1^2 t^{\frac{1}{2}}dt = \left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^2 == \frac{2(2\sqrt{2}-1)}{3}$.
3. $\int_{-1}^{1}(t+1)dt = \left[\frac{t^2}{2}+t\right]_{-1}^{1} = 2.$
4. $\int_0^{ln3} e^{2t}dt = \left[\frac{e^{2t}}{2}\right]_0^{ln3} = 4.$
5. $\int_1^e \frac{2}{2t-1}dt = [ln(2t-1)]_1^e = ln(2e-1).$
6. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} costdt = [sint]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
7. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin\left(3t-\frac{\pi}{6}\right)dt = \left[-\frac{1}{3}cos\left(3t-\frac{\pi}{6}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.
8. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{cos^2t} = [tant]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = 1-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Exercice 3

N°	Affirmation	Réponse	
		Vrai	**Faux**
1.	f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On a : $\int_1^{-1} f(3x)dx = 3\int_1^{-1} f(x)dx$		**Faux**
2.	$\int_0^{\pi} sin2xdx = 2\int_0^{\pi} sinx\ cosxdx$	**Vrai**	
3.	f est une fonction continue sur $[1;3]$. Si : $\int_1^3 f(x)dx = 2$, alors : $\int_1^3 \left(\frac{3}{2}f(x)-x\right)dx = -1$.	**Vrai**	
4.	$\int_{ln3}^{ln2} \frac{2e^{2x}}{lnx+2}dx + \int_{ln3}^{ln2} \frac{e^{2x}lnx}{lnx+2}dx = \frac{5}{2}$		**Faux**

Exercice 4

$$\int_1^4 (-4f+5g)(t)\,dt = -4\int_1^4 f(t)\,dt + 5\int_1^4 g(t)\,dt = -4\times 2 + 5\times(-1) = -13.$$

Exercice 5

1. $\int_0^{\frac{\pi}{6}}[2cosx - 3sinx]dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} cosxdx - 3\int_0^{\frac{\pi}{6}} sinxdx = 2[sinx]_0^{\frac{\pi}{6}} + 3[cosx]_0^{\frac{\pi}{6}} = 2 \times \frac{1}{2} + 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)$

   $\int_0^{\frac{\pi}{6}}[2cosx - 3sinx]dx = \frac{3\sqrt{3}-4}{2}$.

2. $\int_1^4 \left(\frac{5}{2\sqrt{x}} + 4x\right) dx = 5\int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}}dx + 4\int_1^4 xdx = 5\left[\sqrt{x}\right]_1^4 + 4\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^4 = 5(2-1) + 2(16-1) = 35.$

3. $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} sin^2xdx = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-cos2x}{2}dx = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}dx - \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} cos2xdx = \left[\frac{1}{2}x\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}sin2x\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{8}$.

4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2xdx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(cos^2x - sin^2x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos2xdx = \left[\frac{1}{2}sin2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0.$

Exercice 6

1. c) 2. d)

Exercice 7

$$\int_a^b f(t)dx = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt = \int_c^b f(t)dt - \int_c^a f(t)dt.$$

Exercice 8

$$\int_0^{e^2} f(x)dx = \int_0^1 e^x dx + \int_1^{e^2} \frac{e}{x}dx = [e^x]_0^1 + [e\ lnx]_1^{e^2} = e - 1 + 2e = 3e - 1.$$

Exercice 9

1. $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}|sinx|dx = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{0}(-sinx)dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} sinxdx = [cosx]_{-\frac{\pi}{3}}^{0} + [-cosx]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}$.
2. $\int_{-1}^{1}(1 - |1 - e^{-x}|)dx = \int_{-1}^{0}\left(1 - (e^{-x} - 1)\right)dx + \int_0^1\left(1 - (1 - e^{-x})\right)dx$
3. $\int_{-1}^{1}(1 - |1 - e^{-x}|)dx = \int_{-1}^{0}(2 - e^{-x})dx + \int_0^1 e^{-x}dx = [2x + e^{-x}]_{-1}^{0} + [-e^{-x}]_0^1 = 4 - e - \frac{1}{e}$.
4. $\int_1^3 \sqrt{x^2 - 4x + 4}dx = \int_1^3|x - 2|dx = \int_1^2(2 - x)dx + \int_2^3(x - 2)dx$

   $\int_1^3 \sqrt{x^2 - 4x + 4}dx = \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 + \left[\frac{x^2}{2} - 2x\right]_2^3 = 1.$

Exercice 10

1. Faux
2. Vrai
3. Vrai
4. Faux

Exercice 11

$\forall x \in [2;5],\ x - \frac{6x-9}{x} = \frac{(x-3)^2}{x}$.

Or : $\forall x \in [2;5],\ \frac{(x-3)^2}{x} \geq 0$.

D'où : $\forall x \in [2;5],\ x - \frac{6x-9}{x} \geq 0$.

On en déduit que : $\int_2^5 \left(x - \frac{6x-9}{x}\right) dx \geq 0$, donc : $\int_2^5 x dx \geq \int_2^5 \frac{6x-9}{x} dx$.

Exercice 12

$\forall x \in \left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]$, $\frac{4cosx}{\pi^2} \leq f(x) \leq \frac{36cosx}{\pi^2}$. D'où : $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{4cosx}{\pi^2} dx \leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{cosx}{x^2} dx \leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{36cosx}{\pi^2} dx$.

On obtient : $\left[\frac{4sinx}{\pi^2}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{cosx}{x^2} dx \leq \left[\frac{36sinx}{\pi^2}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$.

On en déduit que : $\frac{2}{\pi^2} \leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{cosx}{x^2} dx \leq \frac{18}{\pi^2}$.

Exercice 13

On a : $\frac{ln2}{3} \leq \frac{lnx}{x} \leq \frac{ln3}{2}$, d'où : $\int_2^3 \frac{ln2}{3} dx \leq I \leq \int_2^3 \frac{ln3}{2} dx$.

Ainsi : $\left[\frac{ln2}{3}x\right]_2^3 \leq I \leq \left[\frac{ln3}{2}x\right]_2^3$

$\frac{ln2}{3} \leq I \leq \frac{ln3}{2}$

On sait que : $\frac{1}{2} \leq ln2$, donc : $\frac{1}{6} \leq \frac{ln2}{3}$

$ln3 \leq ln4$, donc : $\frac{ln3}{2} \leq ln2$.

On obtient : $\frac{1}{6} \leq \frac{ln2}{3} \leq I \leq \frac{ln3}{2} \leq ln2$.

Exercice 14

$\forall x \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$, $1 \leq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \leq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. On en déduit que : $\frac{1}{2} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \leq \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

Or : $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$. Donc : $\frac{1}{2} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 15

3. $m = -\frac{1}{c-d}\int_c^d f(x)dx$

Exercice 16

1. $\mu = \frac{1}{3}\int_0^3 e^{\frac{x}{3}} dx = \left[e^{\frac{x}{3}}\right]_0^3 = e - 1$.

2. $\mu = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{cos\pi x}{2} dx = \left[\frac{sin\pi x}{2\pi}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\pi}$.
3. $\mu = \frac{3}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}} tanx dx = -\frac{3}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{-sinx}{cosx}\right)dx = -\frac{3}{\pi}[ln(cosx)]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{3ln2}{\pi}$.
4. $\mu = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{(x-3)^2}dx = \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{x-3}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{8}$.
5. $\mu = \frac{1}{17-10}\int_{10}^{17} g(x)dx = \frac{1}{7}\int_{10}^{17}\frac{1}{\sqrt{x-1}}dx = \frac{1}{7}\left[2\sqrt{x-1}\right]_{10}^{17} = \frac{2}{7}(4-3) = \frac{2}{7}$.

Exercice 17

Lettre b).

Exercice 18

1. Faux
2. Faux
3. Vrai
4. Vrai

Exercice 19

1. $\int_{\frac{1}{e}}^{e} ln2x\, dx$

   Posons : $u(x) = ln2x$; on a : $u'(x) = \frac{1}{x}$.

   $v'(x) = 1$ $\qquad$ $v(x) = x.$

   $$\int_{\frac{1}{e}}^{e} ln2x\, dx = [xln2x]_{\frac{1}{e}}^{e} - \int_{\frac{1}{e}}^{e} 1\, dx = [xln2x - x]_{\frac{1}{e}}^{e} = \frac{(e^2-1)ln2+2}{e} .$$

2. $\int_2^1 (x-1)lnx\, dx$

   Posons : $u(x) = lnx$; on a : $u'(x) = \frac{1}{x}$.

   $v'(x) = x-1$ $\qquad$ $v(x) = \frac{x^2}{2} - x.$

   $\int_2^1 (x-1)lnx\, dx = \left[\left(\frac{x^2}{2}-x\right)lnx\right]_2^1 - \int_2^1\left(\frac{x}{2}-1\right)dx = \left[\left(\frac{x^2}{2}-x\right)lnx - \frac{x^2}{4} + x\right]_2^1 = -\frac{1}{4}$.

3. $\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$

   Posons : $u(x) = x$; on a : $u'(x) = 1$.

   $v'(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ $\qquad$ $v(x) = 2\sqrt{x+1}.$

   $\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx = \left[2x\sqrt{x+1}\right]_3^8 - \int_3^8 2\sqrt{x+1}\, dx = \left[2x\sqrt{x+1} - \frac{4}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_3^8 = \frac{32}{3}$.

4. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{cos^2x}dx = [xtanx]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} tanx\, dx = [xtanx]_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{-sinx}{cosx}\right)dx = [xtanx]_0^{\frac{\pi}{4}} + [ln(cosx)]_0^{\frac{\pi}{4}}$

   $= \frac{\pi}{4} + ln\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}ln2 = \frac{\pi}{4} - \frac{2ln2}{4} = \frac{\pi - ln4}{4}$.

5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-x)cos4x\,dx$

Posons : $u(x) = 1 - x$; on a : $u'(x) = -1$.

$v'(x) = cos4x$ $\qquad v(x) = \frac{1}{4}sin4x.$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-x)cos4x\,dx = \left[\frac{1}{4}(1-x)sin4x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin4x\,dx = \left[\frac{1}{4}(1-x)sin4x - \frac{1}{16}cos4x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0.$

6. $\int_e^{e^2}\frac{lnx}{x^2}dx$

Posons : $u(x) = lnx$; on a : $u'(x) = \frac{1}{x}$.

$v'(x) = \frac{1}{x^2}$ $\qquad v(x) = -\frac{1}{x}.$

$\int_e^{e^2}\frac{lnx}{x^2}dx = \left[-\frac{lnx}{x}\right]_e^{e^2} + \int_e^{e^2}\frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{lnx}{x} - \frac{1}{x}\right]_e^{e^2} = \left[-\frac{lnx+1}{x}\right]_e^{e^2} = \frac{2e-3}{e^2}$.

7. $\int_{-1}^{1}(x+1)e^{2x}\,dx$

Posons : $u(x) = x + 1$; on a : $u'(x) = 1$.

$v'(x) = e^{2x}$ $\qquad v(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$.

$\int_{-1}^{1}(x+1)e^{2x}\,dx == \left[\frac{1}{2}(x+1)e^{2x}\right]_{-1}^{1} - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{2x}\,dx = \left[\frac{1}{2}(x+1)e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{4}(3e^2 + e^{-2}).$

Exercice 20

1. $\int_0^{\pi} x^2 sinx\,dx$

On pose : $u(x) = x^2$; on a : $u'(x) = 2x$.

$v'(x) = sinx$ $\qquad v(x) = -cosx.$

$$\int_0^{\pi} x^2 sinx\,dx = [-x^2 cosx]_0^{\pi} + 2\int_0^{\pi} xcosx\,dx$$

Soit $J = \int_0^{\pi} xcosx\,dx.$

On pose : $f(x) = x$; on a : $f'(x) = 1$.

$g'(x) = cosx$ $\qquad g(x) = sinx.$

On a : $J = [xsinx]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} sinx\,dx.$

D'où : $\int_0^{\pi} x^2 sinx\,dx = [-x^2 cosx]_0^{\pi} + 2J = [-x^2 cosx]_0^{\pi} + 2[xsinx]_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi} sinx\,dx$

$\int_0^{\pi} x^2 sinx\,dx = [-x^2 cosx + 2xsinx + 2cosx]_0^{\pi} = \pi^2 - 4.$

2. $\int_{-1}^{0}(x+1)^2 e^{-x}\,dx$

On pose : $u(x) = (x+1)^2$; on a : $u'(x) = 2(x+1)$.

$v'(x) = e^{-x}$ $\qquad v(x) = -e^{-x}.$

$$\int_{-1}^{0}(x+1)^2 e^{-x}\,dx = [-(x+1)^2 e^{-x}]_{-1}^{0} + 2\int_{-1}^{0}(x+1)e^{-x}\,dx$$

Soit $J = \int_{-1}^{0}(x+1)e^{-x}\,dx$

On pose : $f(x) = x + 1$; on a : $f'(x) = 1$.

$g'(x) = e^{-x}$ $\qquad g(x) = -e^{-x}.$

On a : $J = [-(x+1)e^{-x}]_{-1}^{0} + \int_{-1}^{0} e^{-x}\,dx$.

D'où : $\int_{-1}^{0}(x+1)^2e^{-x}\,dx = [-(x+1)^2e^{-x}]_{-1}^{0} + 2J$

$$\int_{-1}^{0}(x+1)^2e^{-x}\,dx = [-(x+1)^2e^{-x}]_{-1}^{0} + 2[-(x+1)e^{-x}]_{-1}^{0} + 2\int_{-1}^{0} e^{-x}\,dx$$

$$\int_{-1}^{0}(x+1)^2e^{-x}\,dx = [-(x+1)^2e^{-x} - 2(x+1)e^{-x} - 2e^{-x}]_{-1}^{0}$$

$$\int_{-1}^{0}(x+1)^2e^{-x}\,dx = [(-x^2-4x-5)e^{-x}]_{-1}^{0} = 2e-5.$$

3. $\int_1^e x(lnx)^2\,dx$

On pose : $u(x) = (lnx)^2$; on a : $u'(x) = \frac{2lnx}{x}$.

$v'(x) = x$ $v(x) = \frac{x^2}{2}$.

$$\int_1^e x(lnx)^2\,dx = \left[\frac{x^2(lnx)^2}{2}\right]_1^e - \int_1^e xlnx\,dx.$$

Soit $J = \int_1^e xlnx\,dx$

On pose : $f(x) = lnx$; on a : $f'(x) = \frac{1}{x}$.

$g'(x) = x$ $g(x) = \frac{x^2}{2}$.

On a : $J = \left[\frac{x^2lnx}{2}\right]_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e x\,dx$.

D'où : $\int_1^e x(lnx)^2\,dx = \left[\frac{x^2(lnx)^2}{2}\right]_1^e - J$

$$\int_1^e x(lnx)^2\,dx = \left[\frac{x^2(lnx)^2}{2}\right]_1^e - \left[\frac{x^2lnx}{2}\right]_1^e + \frac{1}{2}\int_1^e x\,dx$$

$$\int_1^e x(lnx)^2\,dx = \left[\frac{x^2(lnx)^2}{2} - \frac{x^2lnx}{2} + \frac{x^2}{4}\right]_1^e = \frac{e^2-1}{4}\ .$$

4. $\int_0^\pi e^x cosx\,dx$

On pose : $u(x) = e^x$; on a : $u'(x) = e^x$.

$v'(x) = cosx$ $v(x) = sinx$.

$$\int_0^\pi e^x cosx\,dx = [e^x sinx]_0^\pi - \int_0^\pi e^x sinx\,dx$$

Soit $J = \int_0^\pi e^x sinx\,dx$

On pose : $f(x) = e^x$; on a : $f'(x) = e^x$.

$g'(x) = sinx$ $g(x) = -cosx$.

On a : $J = [-e^x cosx]_0^\pi + \int_0^\pi e^x cosx\,dx$.

D'où : $\int_0^\pi e^x cosx\,dx = [e^x sinx]_0^\pi - J$

$$\int_0^\pi e^x cosx\,dx = [e^x sinx]_0^\pi - [-e^x cosx]_0^\pi - \int_0^\pi e^x cosx\,dx$$

$$2\int_0^{\pi} e^x cosx\, dx = [e^x(sinx+cosx)]_0^{\pi} = -e^{\pi}-1\ .$$

$$\int_0^{\pi} e^x cosx\, dx = \frac{-e^{\pi}-1}{2}.$$

Exercice 21

1. $\int_0^1 \frac{t}{(2t+1)^4}dt$

On pose : $u = 2t+1$.

- On a : $t = \frac{1}{2}(u-1)$.
- $dt = \frac{1}{2}du$
- Pour $t = 0,\ u = 1$
  Pour $t = 1,\ u = 3$.

Donc : $\int_0^1 \frac{t}{(2t+1)^4}dt = \int_1^3 \frac{\frac{1}{2}(u-1)}{u^4} \times \frac{1}{2}du = \frac{1}{4}\int_1^3 \left(\frac{1}{u^3}-\frac{1}{u^4}\right)du = \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{2u^2}+\frac{1}{3u^3}\right]_1^3$

$$= \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{18}+\frac{1}{81}-\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\right).$$

$$\int_0^1 \frac{t}{(2t+1)^4}dt = \frac{5}{162}\ .$$

2. $\int_1^2 t(4-t)^5\, dt$

On pose : $u = 4-t$.

- On a : $t = 4-u$.
- $dt = -du$
- Pour $t = 1,\ u = 3$
  Pour $t = 2,\ u = 2$

Donc : $\int_1^2 t(4-t)^5\, dt = -\int_3^2 (4-u)u^5\, du = \int_3^2\ (u^6-4u^5)du = \left[\frac{u^7}{7}-\frac{2u^6}{3}\right]_3^2 = \frac{3133}{21}.$

3. $\int_{-1}^0 t\sqrt{1+t}\, dt$

On pose : $u = 1+t$.

- On a : $t = u-1$.
- $du = dt$.
- Pour $t = -1,\ u = 0$
  Pour $t = 0,\ u = 1$

Donc : $\int_{-1}^0 t\sqrt{1+t}\, dt = \int_0^1 (u-1)\sqrt{u}\, du = \int_0^1\ \left(u^{\frac{3}{2}}-u^{\frac{1}{2}}\right)du = \left[\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = -\frac{4}{15}\ .$

4. $\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+2t}}\,dt$.

On pose : $u = 1 + 2t$.

- On a : $t = \frac{1}{2}(u-1)$.
- $dt = \frac{1}{2}du$
- Pour $t = 0,\ u = 1$
  Pour $t = 1,\ u = 3$

Donc : $\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+2t}}dt = \int_1^3 \frac{\frac{1}{2}(u-1)}{\sqrt{u}} \times \frac{1}{2}du = \frac{1}{4}\int_1^3 \left(u^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\sqrt{u}}\right)du = \frac{1}{4}\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{u}\right]_1^3 = \frac{1}{3}$.

Exercice 22

On pose : $u = at$.

- On a : $t = \frac{u}{a}$, d'où : $dt = \frac{1}{a}du$
- Pour $t = a,\ u = a^2$.
  Pour $t = b,\ u = ab$.

Donc : $\int_a^b \frac{1}{t}dt = \int_{a^2}^{ab} \frac{1}{\frac{u}{a}} \times \frac{1}{a}du = \int_{a^2}^{ab} \frac{a}{u} \times \frac{1}{a}du = \int_{a^2}^{ab} \frac{1}{u}du = \int_{a^2}^{ab} \frac{1}{t}dt$.

Exercice 23

$N°$	Affirmation	Vrai	Faux
1	Si g est paire, alors $\int_{-a}^{a} g(x)dx = 2\int_{a}^{0} g(x)dx$.		F
2	Si g est paire, alors $\int_{-a}^{0} g(x)dx = \int_{0}^{a} g(x)dx$.	V	
3	Si g est impaire, alors $\int_{-a}^{a}(g(x)-1)dx = a$.		F
4	Si $g(x) = tanx$, alors $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} g(x)dx = 0$	V	

Exercice 24

1. La fonction : $x \longmapsto \frac{3x}{\sqrt{x^4+1}}$ est continue sur $[-2;2]$ et elle est impaire.
   Donc : $\int_{-2}^{2} \frac{3x}{\sqrt{x^4+1}}dx = 0$.
2. La fonction : $x \longmapsto (|x|-5)sinx$ est continue sur $\left[-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right]$ et elle est impaire.
   Donc : $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (|x|-5)sinxdx = 0$.
3. Les fonctions : $x \longmapsto sin7x$ et $x \longmapsto cos2x$ sont continues sur $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$ et elles sont respectivement impaire et paire.
   Donc : $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (sin7x - cos2x)dx = -2\int_0^{\frac{\pi}{4}} cos2x\,dx = [-sin2x]_0^{\frac{\pi}{4}} = -1$.

4. La fonction : $x \longmapsto \frac{tan2x}{x^2+3}$ est continue sur $\left[-\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{8}\right]$ et est impaire.

   Donc : $\int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} \frac{tan2x}{x^2+3}dx = 0.$

5. La fonction : $x \longmapsto \frac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}}$ est continue sur $[-1;1]$ et est impaire.

   Donc : $\int_{-1}^{1} \frac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}}dx = 0.$

6. $\int_{-1}^{3} \frac{x|x|}{|x|+1}dx = \int_{-1}^{1} \frac{x|x|}{|x|+1}dx + \int_{1}^{3} \frac{x|x|}{|x|+1}dx.$

   Or, la fonction : $x \longmapsto \frac{x|x|}{|x|+1}$ est continue sur $[-1;1]$ et est impaire. Donc : $\int_{-1}^{1} \frac{x|x|}{|x|+1}dx = 0.$

   Ainsi : $\int_{-1}^{3} \frac{x|x|}{|x|+1}dx = \int_{1}^{3} \frac{x|x|}{|x|+1}dx = \int_{1}^{3} \frac{x^2}{x+1}dx$, car : $\forall x \in [1;3]\,, |x| = x.$

   D'où : $\int_{-1}^{3} \frac{x|x|}{|x|+1}dx = \int_{1}^{3} \left(x - 1 + \frac{1}{x+1}\right)dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - x + ln(x+1)\right]_1^3 = 2 + ln2.$

Exercice 25

La fonction : $x \longmapsto \ln(cos2x)$ est continue sur $\left[-\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{8}\right]$ et est paire.

Donc : : $\int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} ln(cos2x)dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{8}} ln(cos2x)dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{8}} ln[(cos2x)^2]dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{8}} ln\left(\frac{1+cos4x}{2}\right)dx.$

Exercice 26

1. La fonction : $x \longmapsto cos2x$ est continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période π.

   D'où : $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} cos2xdx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+\pi} cos2xdx = \int_{0}^{\pi} cos2xdx.$

2. La fonction : $x \longmapsto sin2x - cos2x$ est continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période π.

   D'où : $\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}}(sin2x - cos2x)dx = \int_{-\frac{\pi}{3}+\pi}^{\frac{\pi}{3}+\pi}(sin2x - cos2x)dx = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}(sin2x - cos2x)dx$

   $$= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} sin2xdx - \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} cos2xdx$$

   La fonction : $x \longmapsto sin2x$ est impaire et la fonction : $x \longmapsto cos2x$ est paire.

   On a alors : $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} sin2xdx = 0$ et $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} cos2xdx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} cos2xdx.$

   Donc : $\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}}(sin2x - cos2x)dx = -2\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} cos2xdx.$

Exercice 27

1. La fonction : $x \mapsto cos4x$ est continue sur $\left[-\frac{5\pi}{6};-\frac{\pi}{3}\right]$ et périodique de période $\frac{\pi}{2}$.

   D'où : $K = \int_{-\frac{5\pi}{6}}^{-\frac{\pi}{3}} cos4xdx = K = \int_{-\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}} cos4xdx = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} cos4xdx.$

2. $K = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} cos4xdx = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}} cos4xdx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} cos4xdx.$

Exercice 28

$$F(x) = \int_{1}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt.$$

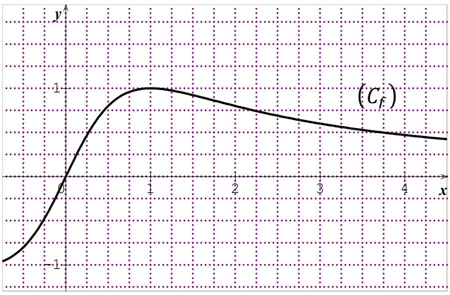
Exercice 29

1. $\forall x \in]-1;1[, g'(x) = \frac{1}{1-x^2}$.
2. $g(0) = 0.$

Exercice 30

1. a) 2. c)

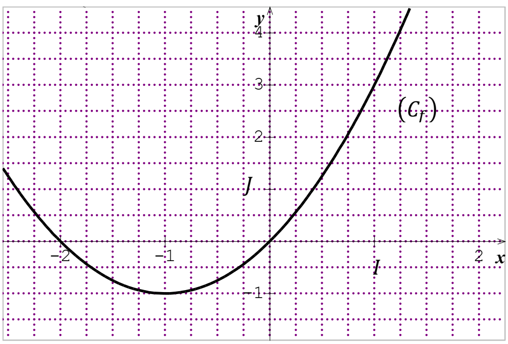
Exercice 31



$\mathcal{A} = \int_0^2 f(x)\, dx \times u.a. = 4\int_0^2 \frac{2x}{x^2+1} dx = 4[ln(x^2+1)]_0^2 = 4ln5.$

$\mathcal{A} = 4ln5\ cm^2.$

Exercice 32



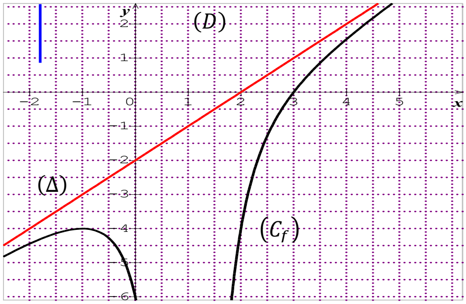
La fonction f est négative sur $[-1; 0]$ et positive sur $[0; 1]$.

$$\mathcal{A}(\Delta) = \left(-\int_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{1} f(x)\,dx\right) \times u.a. = 2\left(\int_{-1}^{0} (-x^2 - 2x)\,dx + \int_{0}^{1} (x^2 + 2x)\,dx\right)$$

$$= 2\left[-\frac{x^3}{3} - x^2\right]_{-1}^{0} + 2\left[\frac{x^3}{3} + x^2\right]_{0}^{1} = -2\left(\frac{1}{3} - 1\right) + 2\left(\frac{1}{3} + 1\right) = 4.$$

$\mathcal{A}(\Delta) = 4\ cm^2.$

Exercice 33

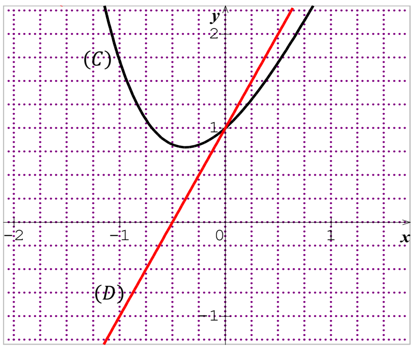


Pour tout x element de $[2; 4]$, $f(x) < x - 2$.

$\mathcal{A} = \int_2^4 (x - 2 - f(x))\,dx \times u.a. = \int_2^4 \frac{4}{(x-1)^2}\,dx = \left[\frac{-4}{x-1}\right]_2^4 = \frac{8}{3}$.

$\mathcal{A}(\Delta) = \frac{8}{3} cm^2.$

Exercice 34



Pour tout x element de $[-1; 0]$, $f(x) \geq 2x + 1$.

$\mathcal{A} = \int_{-1}^{0} (f(x) - (2x + 1))\,dx \times u.a. = -4\int_{-1}^{0} xe^{-x}\,dx$.

On va utiliser une intégration par parties.

On pose : $u(x) = x$; on a : $u'(x) = 1$

$v'(x) = e^{-x}$ $v(x) = -e^{-x}$.

$$\int_{-1}^{0} xe^{-x}\,dx = [-xe^{-x}]_{-1}^{0} + \int_{-1}^{0} e^{-x}\,dx = \ [-xe^{-x} - e^{-x}]_{-1}^{0} = [(-x-1)e^{-x}]_{-1}^{0} = -1.$$

Donc : $\mathcal{A} = -4 \times (-1) = 4$.

$\mathcal{A} = 4\ cm^2$.

Exercice 35

1. V 2. V 3. V 4. F 5. V 6. F

Exercice 36

On a : $\frac{0,6}{6}\sum_{i=0}^{5} f(x_i) \leq \int_{0,1}^{0,7} f(x)\,dx \leq \frac{0,6}{6}\sum_{i=1}^{6} f(x_i)$.

$$\frac{0,6}{6}\sum_{i=0}^{5} f(x_i) = 0,1[f(0,1) + f(0,2) + f(0,3) + f(0,4) + f(0,5) + f(0,6)]$$

$$= -2 \times 0,1\left[\frac{1}{ln(0,1)} + \frac{1}{ln(0,2)} + \frac{1}{ln(0,3)} + \frac{1}{ln(0,4)} + \frac{1}{ln(0,5)} + \frac{1}{ln(0,6)}\right]$$

$$\frac{0,6}{6}\sum_{i=0}^{5} f(x_i) = 0,1[f(0,2) + f(0,3) + f(0,4) + f(0,5) + f(0,6) + f(0,7)]$$

$$= -2 \times 0,1\left[\frac{1}{ln(0,2)} + \frac{1}{ln(0,3)} + \frac{1}{ln(0,4)} + \frac{1}{ln(0,5)} + \frac{1}{ln(0,6)} + \frac{1}{ln(0,7)}\right]$$

On en déduit que : $1,27557597 \leq \int_{0,1}^{0,7} f(x)\,dx \leq 1,74945173$.

Exercice 37

1. La fonction $f : x \longmapsto \frac{e^x}{x^2+1}$ est continue, positive et strictement croissante sur $[-1;4]$.
   On a: $\frac{5}{10}\sum_{i=0}^{9} f(x_i) \leq \int_{-1}^{4} \frac{e^x}{x^2+1}dx \leq \frac{5}{10}\sum_{i=1}^{10} f(x_i)$.
   $$\frac{5}{10}\sum_{i=0}^{9} f(x_i) =$$
   $$0,5[f(-1) + f(-0,5) + f(0) + f(0,5) + f(1) + f(1,5) + f(2) + f(2,5) + f(3) + f(3,5)].$$

   $$\frac{5}{10}\sum_{i=1}^{10} f(x_i) =$$
   $$0,5[f(-0,5) + f(0) + f(0,5) + f(1) + f(1,5) + f(2) + f(2,5) + f(3) + f(3,5) + f(4)].$$

   On obtient l'encadrement : $6,69612 \leq K \leq 8,20999$.

2. $\frac{6,69612+8,20999}{2} = 7,453055$; $\frac{8,20999-6,69612}{2} = 0,756935$.
   Donc, une valeur approchée de K à $7,57.10^{-1}$ près est : $7,453055$.

- **Exercices de renforcement /Approfondissement**

Exercice 38

1. $\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = f(x)$. Donc F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
2. $\int_{-1}^{0} x^2 e^x \, dx = [(x^2 - 2x + 2)e^x]_{-1}^{0} = 2 - \frac{5}{e}$.

Exercice 39

1. $\int_e^{e^2} \frac{1}{t(lnt)^3} dt = \int_e^{e^2} \frac{\frac{1}{t}}{(lnt)^3} dt = \left[-\frac{1}{2(lnt)^2}\right]_e^{e^2} = \frac{3}{8}$.
2. $\int_0^1 (x^2 - 1)(3x - x^3 + 1)^6 \, dx = \left[-\frac{1}{21}(3x - x^3 + 1)^7\right]_0^1 = -\frac{2186}{21}$.
3. $\int_0^2 \frac{2x}{\sqrt[3]{(x^2+1)^2}} dx = \int_0^2 \frac{2x}{(x^2+1)^{\frac{2}{3}}} dx = \left[3(x^2 + 1)^{\frac{1}{3}}\right]_0^2 = 3(\sqrt[3]{5} - 1)$.
4. $\int_{-1}^{0} \ (2x + 1)\, sinx(x + 1)dx = \int_{-1}^{0} \ (2x + 1)\, sin(x^2 + x)dx = [-cos(x^2 + x)]_{-1}^{0} = 0$.
5. $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx = -\int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(-\frac{1}{x^2}\right) e^{\frac{1}{x}} dx = \left[-e^{\frac{1}{x}}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = e^2 - e$.
6. $\int_0^2 \frac{e^x}{e^x+1} dx = [ln(e^x + 1)]_0^2 = ln\left(\frac{e^2+1}{2}\right)$.
7. $\int_{-1}^{1} \ 2x^2(1 - x^3)^2 \, dx = -\frac{2}{3}\int_{-1}^{1}(-3x^2)(1 - x^3)^2 \, dx = \left[-\frac{2}{9}(1 - x^3)^3\right]_{-1}^{1} = \frac{16}{9}$.
8. $\int_1^e \frac{(lnx)^2}{x} dx = \left[\frac{(lnx)^3}{3}\right]_1^e = \frac{1}{3}$.
9. $\int_0^2 (x + 1)\sqrt{x^2 + 2x} \ dx = \frac{1}{2}\int_0^2 (2x + 2)(x^2 + 2x)^{\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{1}{3}(x^2 + 2x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 = \frac{16\sqrt{2}}{3}$.
10. $\int_3^5 \frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}} dx = -\frac{1}{2}\int_3^5 \left(\sqrt{x - 1} - \sqrt{x + 1}\right) dx = -\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}(x - 1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(x + 1)^{\frac{3}{2}}\right]_3^5 = \frac{6\sqrt{6}+2\sqrt{2}-16}{3}$.
11. $\int_0^2 \frac{e^{-t}}{(e^{-t}+2)^4} \ dt = -\int_0^2 \frac{-e^{-t}}{(e^{-t}+2)^4} \ dt = \left[\frac{1}{3(e^{-t}+2)^3}\right]_0^2 = \frac{1}{3(e^{-2}+2)^3} - \frac{1}{81}$.
12. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} cos2tsin^4 2t \, dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2cos2tsin^4 2t \, dt = \left[\frac{sin^5 2t}{10}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{10}$.
13. $\int_{e^2}^{e^5} \frac{1}{t\sqrt{lnt-1}} \ dt = \left[2\sqrt{lnt - 1}\right]_{e^2}^{e^5} = 2$.
14. $\int_0^1 \frac{x+1}{2x^2+4x+3} \ dx = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{4x+4}{2x^2+4x+3} \ dx = \frac{1}{4}[ln(2x^2 + 4x + 3)]_0^1 = \frac{ln3}{4}$.
15. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{cosx}{e^{2sinx}} dx = -\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}(-2cosx)\, e^{-2sinx} dx = -\frac{1}{2}\left[e^{-2sinx}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{e^{-2}-e^{-\sqrt{2}}}{2}$.
16. $\int_{ln3}^{ln5} \frac{e^x-e^{-x}}{e^{-x}+e^x} dx = [ln(e^{-x} + e^x)]_{ln3}^{ln5} = ln\frac{39}{25}$.
17. $\int_e^{e^2} \frac{dx}{xlnx} = [ln(lnx)]_e^{e^2} = ln(lne^2) - ln(lne) = ln2$.

18. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin2x}{1+cos^2x} dx = -\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{-2sinxcosx}{1+cos^2x}\right) dx = -[ln(1+cos^2x)]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = ln\frac{3}{2}$.

Exercice 40

$\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq cost \leq 1$. D'où : $\frac{1}{2} \leq cos^2t \leq 1$. on a donc : $1 \leq \frac{1}{cos^2t} \leq 2$.

En appliquant l'inégalité de la moyenne sur l'intervalle $[x; y]$.

On obtient : $1(y-x) \leq \int_x^y \frac{1}{cos^2t} dx \leq 2(y-x)$.

$$[tant]_x^y \leq 2(y-x).$$

$$tany - tanx \leq 2(y-x).$$

On en déduit que : $\frac{tany-tanx}{2} \leq y - x$.

Exercice 41

1. $\int_0^1 x\sqrt{1-x}\ dx$

On pose : $u(x) = x$; on a : $u'(x) = 1$

$v'(x) = \sqrt{1-x}$ $\quad v(x) = -\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}$.

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x}\, dx = \left[-\frac{2}{3}x(1-x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 + \frac{2}{3}\int_0^1 (1-x)^{\frac{3}{2}}\, dx = \left[-\frac{2}{3}x(1-x)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}(1-x)^{\frac{5}{2}}\right]_0^1$$

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x}\, dx = \frac{4}{15}.$$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2x} cosx\, dx$

On pose : $u(x) = e^{-2x}$; on a : $u'(x) = -2e^{-2x}$.

$v'(x) = cosx$ $\quad v(x) = sinx$.

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2x} cosx\, dx = [e^{-2x}sinx]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2x} sinx\, dx$

Soit $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2x} sinx\, dx$

On pose : $f(x) = e^{-2x}$; on a : $f'(x) = -2e^{-2x}$

$g'(x) = sinx$ $\quad g(x) = -cosx$.

On a : $J = [-e^{-2x}cosx]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2x} cosx\, dx$.

D'où : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2x} cosx\, dx = [e^{-2x}sinx]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2J$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2x} cosx\, dx = [e^{-2x}sinx]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\left([-e^{-2x}cosx]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2x} cosx\, dx\right)$$

$$5\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2x} cosx\, dx = [e^{-2x}(sinx - 2cosx)]_0^{\frac{\pi}{2}} = e^{-\pi} + 2.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2x} cosx\, dx = \frac{e^{-\pi}+2}{5}.$$

3. $\int_1^e x^2 lnx\, dx$

On pose : $u(x) = lnx$; on a : $u'(x) = \frac{1}{x}$.

$v'(x) = x^2$ $v(x) = \frac{x^3}{3}$.

$$\int_1^e x^2 lnx\, dx = \left[\frac{x^3 lnx}{3}\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{3} dx.$$

$$\int_1^e x^2 lnx\, dx = \left[\frac{x^3 lnx}{3} - \frac{x^3}{9}\right]_1^e = \left[x^3\left(\frac{lnx}{3} - \frac{1}{9}\right)\right]_1^e.$$

$$\int_1^e x^2 lnx\, dx = \frac{2e^3+1}{9}.$$

4. $\int_1^e \frac{ln(1+u)}{(1+u)^2} du$

On pose : $f(u) = ln(1+u)$; on a : $f'(u) = \frac{1}{1+u}$.

$g'(u) = \frac{1}{(1+u)^2}$ $g(u) = -\frac{1}{1+u}$.

$$\int_1^e \frac{ln(1+u)}{(1+u)^2} du = \left[-\frac{ln(1+u)}{1+u}\right]_1^e + \int_1^e \frac{1}{(1+u)^2} du$$

$$\int_1^e \frac{ln(1+u)}{(1+u)^2} du = \left[-\frac{ln(1+u)+1}{1+u}\right]_1^e = \frac{ln2+1}{2} - \frac{ln(1+e)+1}{1+e}.$$

Exercice 42

1. $\int_0^1 x\sqrt{1-x}\ dx$

On pose : $u = 1 - x$.

- On a : $x = 1 - u$.
- $dx = -du$
- Pour $x = 0,\ u = 1$
  Pour $x = 1,\ u = 0$

Donc : $\int_0^1 x\sqrt{1-x}\ dx = \int_0^1 (1-u)\sqrt{u}\, du = \int_0^1 \left(u^{\frac{1}{2}} - u^{\frac{3}{2}}\right) du = \left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 = \frac{4}{15}$.

2. $\int_0^1 x(1-x)^n\ dx$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

On pose : $u = 1 - x$.

- On a : $x = 1 - u$.
- $dx = -du$
- Pour $x = 0,\ u = 1$
  Pour $x = 1,\ u = 0$

Donc : $\int_0^1 x(1-x)^n\ dx = -\int_1^0 (1-u)u^n\, du = \int_0^1\ (u^n - u^{n+1}) du = \left[\frac{1}{n+1}u^{n+1} - \frac{1}{n+2}u^{n+2}\right]_0^1$.

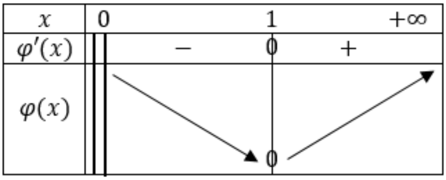
$$\int_0^1 x(1-x)^n\ dx = \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Exercice 43

Soit $x > 0$.

On a : $\varphi(x) = \int_1^x \frac{lnt}{t+1} dt$. Donc: $\varphi'(x) = \frac{lnx}{x+1}$ et $\varphi(1) = 0$

Le signe de la fonction ln est connu sur $]0;+\infty[$. On obtient le tableau de variation suivant :



Exercice 44

1. $\forall t \in [0;+\infty[,\ t+1 \geq 1$, d'où : $\frac{1}{1+t} \leq 1$.

   $\forall t \in [0;+\infty[,\ \frac{1}{1+t} - (1-t) = \frac{t^2}{1+t}$.

   On a : $\forall t \in [0;+\infty[,\ \frac{t^2}{1+t} \geq 0$, d'où : $1 - t \leq \frac{1}{1+t}$.

   On obtient donc : $\forall t \in [0;+\infty[,\ 1 - t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1$.

2. D'après la question 1, on a : $\forall x \in [0;+\infty[, \int_0^x (1-t)\, dt \leq \int_0^x \frac{1}{1+t} dt \leq \int_0^x 1\, dt$.

   Ce qui donne : $\left[t - \frac{1}{2}t^2\right]_0^x \leq [ln(1+t)]_0^x \leq [t]_0^x$.

   Donc : $\forall x \in [0;+\infty[,\ x - \frac{1}{2}x^2 \leq ln(x+1) \leq x$.

Exercice 45

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ cos^4 2x = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}cos4x + \frac{1}{8}cos8x$.
2. Calculons : $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-x)\, sin2x\, cos^3 2x dx$.

   On pose : $u(x) = 1 - x$; on a : $u'(x) = -1$.

   $v'(x) = sin2x\, cos^3 2xdx$ $\qquad v(x) = -\frac{1}{8}cos^4 2x$.

   On a : $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-x)\, sin2x\, cos^3 2xdx = \left[-\frac{1}{8}(1-x)cos^4 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{4}} cos^4 2x\, dx$.

   $$= \left[-\frac{1}{8}(1-x)cos^4 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{2}cos4x + \frac{1}{8}cos8x\right) dx$$

   $$= \left[-\frac{1}{8}(1-x)cos^4 2x - \frac{3}{64}x - \frac{1}{64}sin4x - \frac{1}{512}sin8x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

   $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-x)\, sin2x\, cos^3 2xdx = \frac{32 - 3\pi}{256}.$$

Exercice 46

1. Calcul de $\int_0^{2\pi} cos^4x\,dx$

On utilise : $2cosx = e^{ix} + e^{-ix}$ et la formule du binôme de Newton.

$16cos^4x = e^{4ix} + 4e^{3ix}e^{-ix} + 6e^{2ix}e^{-2ix} + 4e^{ix}e^{-3ix} + e^{-4ix}$

$16cos^4x = \left(e^{4ix} + e^{-4ix}\right) + 4\left(e^{2ix} + e^{-2ix}\right) + 6$

Donc : $cos^4x = \frac{1}{8}cos4x + \frac{1}{2}cos2x + \frac{3}{8}$.

Par suite : $\int_0^{2\pi} cos^4x\,dx = \left[\frac{1}{32}sin4x + \frac{1}{4}sin2x + \frac{3}{8}x\right]_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{4}$.

$$\int_0^{2\pi} cos^4x\,dx = \frac{3\pi}{4}.$$

2. Calcul de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^3x\,cos^2xdx$

   On a : $sin^3xcos^2x = sinx(1 - cos^2x)cos^2x = sinxcos^2x - sinxcos^4x$

   $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^3x\,cos^2xdx = \left[-\frac{1}{3}cos^3x + \frac{1}{5}cos^5x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

   $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^3x\,cos^2xdx = \frac{2}{15}$.

3. Calcul de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2x\,cos^2xdx$

   On a : $sin^2xcos^2x = (1 - cos^2x)cos^2x = cos^2x - cos^4x$

   $sin^2xcos^2x = \frac{1+cos2x}{2} - \left(\frac{1}{8}cos4x + \frac{1}{2}cos2x + \frac{3}{8}\right)$

   Par suite: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2x\,cos^2xdx = \frac{\pi}{16}$.

4. Calcul de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^52x\,dx$

On a : $sin^52x = sin2x - 2sin2xcos^22x - \frac{1}{2}(-2sin2x)cos^42x$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^52x\,dx = \left[-\frac{1}{2}cos2x + \frac{1}{3}cos^32x - \frac{1}{10}cos^52x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^52x\,dx = \frac{8}{15}.$$

Exercice 47

1. $\forall x \in \left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right], f'(x) = \frac{-sinx\, sin^3x - 3cos^2x\, sin^2x}{sin^6x} = \frac{-sin^4x - 3(1-sin^2x)sin^2x}{sin^6x} = \frac{2\, sin^4x - 3sin^2x}{sin^6x}$

   Donc : $\forall x \in \left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right], f'(x) = \frac{2}{sin^2x} - \frac{3}{sin^4x}$.

2. a) D'après 1, on a : $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} f'(x)\, dx = 2I - 3J$.

   D'où : $2I - 3J = [f(x)]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f\left(\frac{\pi}{6}\right) = -4\sqrt{3}$.

   b) $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{sin^2x}\, dx = [-cotanx]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \left[-\frac{cosx}{sinx}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{3}$.

   c) $2I - 3J = -4\sqrt{3}$ et $I = \sqrt{3}$.

   On en déduit que : $J = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Exercice 48

1. $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ g(x) = -\frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2+1}$.
2. $\int_1^3 g(x)\, dx = \int_1^3 \left(-\frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2+1}\right) dx = [-lnx + ln(x^2+1)]_1^3 = \left[ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right)\right]_1^3 = ln\frac{5}{3}$.

Exercice 49

1. $\forall x \in]2;+\infty[,\ \ h(x) = x + 3 - \frac{4}{(x-2)^2}$.
2. $\int_3^5 h(x)\, dx = \int_3^5 \left(x + 3 - \frac{4}{(x-2)^2}\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} + 3x + \frac{4}{x-2}\right]_1^3 = 18$.

Exercice 50

$$I_n = \int_0^1 x^n e^x\, dx,\ \ n \in \mathbb{N}$$

1. $I_0 = \int_0^1 e^x\, dx = e - 1$.

   $$I_1 = \int_0^1 xe^x\, dx$$

   A l'aide d'une intégration par parties, on obtient :

   $I_1 = [(x-1)e^x]_0^1 = 1$.

2. $I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^x\, dx$

   On pose : $u(x) = x^{n+1}$; on a : $u'(x) = (n+1)\, x^n$.

   $v'(x) = e^x$ $\quad$ $v(x) = e^x$

$I_{n+1} = [x^{n+1}e^x]_0^1 - (n+1)\int_0^1 x^n e^x\, dx.$

$I_{n+1} = e - (n+1)I_n$.

3. $J = \int_0^1 (x^3 + 2x^2 - 2x + 1)e^x\, dx = I_3 + 2I_2 - 2I_1 + I_0$

   On a : $I_0 = e - 1$; $I_1 = 1$; $I_2 = e - 2I_1 = e - 2$; $I_3 = e - 3I_2 = -2e + 6.$

   Donc : $J = e - 1.$

Exercice 51

1. $I + K = \int_{-\pi}^{\pi}(cos2x\, cos4x + sin2x\, sin4x)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} cos2x\, dx = 2\int_0^{\pi} cos2x\, dx = [sin2x]_0^{\pi}$

   $I + K = 0.$

   $I - K = \int_{-\pi}^{\pi}(cos2x\, cos4x - sin2x\, sin4x)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} cos6x\, dx = 2\int_0^{\pi} cos6x\, dx = \frac{1}{3}[sin6x]_0^{\pi}$

   $I - K = 0.$

2. $I + K = 0$ et $I - K = 0$. D'où : $I = K = 0.$

Exercice 52

1. a) La fonction : $t \longmapsto \frac{e^t}{t}$ est continue sur $]0; +\infty[$, car étant quotient de deux fonctions continues sur $]0; +\infty[$. Par suite, la fonction F est dérivable sur $]0; +\infty[$ et sa dérivée F' est définie sur $]0; +\infty[$ par : $F'(x) = \frac{e^x}{x}$.
   F' étant strictement positive sur $]0; +\infty[$, alors F est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.
   b) $F(1) = 0$, par suite F est négative sur $]0; 1[$ et positive sur $]1; +\infty[$.
2. a) Pour tout nombre réel strictement positif x, on a : $lnx = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt.$
   Par suite : $f(x) = \int_1^x \frac{e^t - 1}{t} dt$. Or, la fonction : $t \longmapsto \frac{e^t-1}{t}$ est continue et positive sur $]0; +\infty[$.
   Donc, f est négative sur $]0; 1[$ et positive sur $]1; +\infty[$.
   b) D'après 2.a), on a : $\forall x \in]0; 1[\, ,\ F(x) \leq lnx \quad (i)$
   $\forall x \in]1; +\infty[\, ,\ lnx \leq F(x) \quad (ii)$

   De (i), on a : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} F(x) = -\infty$, car : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} F(x) = -\infty$.

   De (ii), on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$, car : $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$.

3. a) $(T): y = e(x - 1).$
   b) (C) est en-dessous de (T) sur $]0; 1[$ et (C) est au-dessus de (T) sur $]1; +\infty[$.

   Indication : Etudier la fonction le signe de la fonction H telle que : $H(x) = F(x) - e(x - 1).$

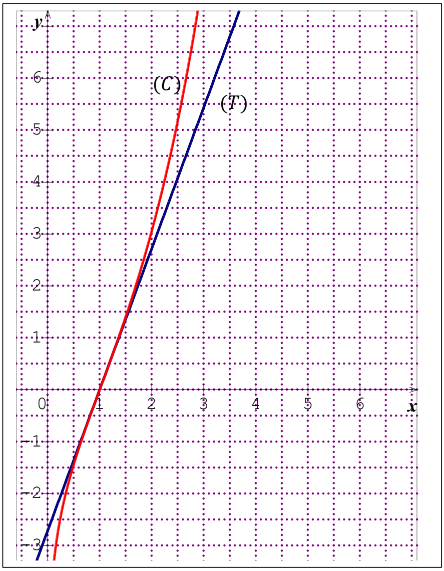
4. a) Pour démontrer que : $\forall\, t \in [1;+\infty[\,,\ e^t \geq \frac{e}{2}\, t^2$, il faut étudier le signe de la fonction φ définie sur $[1;+\infty[$ par : $\varphi(t) = e^t - \frac{e}{2}\, t^2$.

   b) En utilisant la question 4.a), on obtient : $\forall\, x \in [1;+\infty[\,,\ \frac{F(x)}{x} \geq \frac{e(x^2-1)}{4x}$.

   On en déduit que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{F(x)}{x} = +\infty$.

   c) La courbe (C) admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de (OJ).

5. Construction (T) et (C).



Exercice 53

a) Le triangle ABM étant rectangle en M, on a : $AM = 2R\cos\theta$. D'où $AM^2 = 4R^2\cos^2\theta$.
Par suite, AM^2 est une fonction de θ définie sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ dont la valeur moyenne est : $\frac{1}{\frac{\pi}{2}-0}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4R^2\cos^2\theta\, d\theta$, c'est-à-dire $2R^2$.

b) Le triangle ABM étant rectangle en M, et H le projeté orthogonal de M sur (AB), on a : $AM^2 = \overline{AH} \times \overline{AB}$.
Le point H appartenant au segment $[AB]$, on a : $AM^2 = 2Rx$, où $x \in [0;2R]$.
Par suite, AM^2 est une fonction de x définie sur $[0;2R]$ dont la valeur moyenne est : $\frac{1}{2R-0}\int_0^{2R} 2Rx\, dx$, c'est-à-dire $2R^2$.

Exercice 54

1. a) $I + J = \int_0^{\pi} (x-1)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2 - 2\pi}{2}$.

   b) $I - J = \int_0^{\pi} (x-1)cos2x\,dx$

   Posons : $u(x) = x - 1$; on a : $u'(x) = 1$

   $v'(x) = cos2x$ $\quad v(x) = \frac{1}{2}sin2x.$

   On a : $I - J = \left[\frac{1}{2}(x-1)sin2x\right]_0^{\pi} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} sin2x\,dx = \left[\frac{1}{2}(x-1)sin2x + \frac{1}{4}cos2x\right]_0^{\pi}.$

   $I - J = 0.$

2. On a le système : $\begin{cases} I + J = \frac{\pi^2 - 2\pi}{2} \\ I - J = 0 \end{cases}$

   On en déduit que : $I = J = \frac{\pi^2 - 2\pi}{4}$.

Exercice 55

La primitive F de f sur $]-\infty; 3]$ qui s'annule en 2 est définie par : $F(x) = \int_2^x t\sqrt{3-t}\,dt$.

Explicitons F à l'aide d'une intégration par parties.

On pose : $u(t) = t$; on a : $u'(t) = 1$

$v'(t) = \sqrt{3-t}$ $\quad v(t) = -\frac{2}{3}(3-t)^{\frac{3}{2}}.$

On a : $F(x) = \left[-\frac{2}{3}t(3-t)^{\frac{3}{2}}\right]_2^x + \frac{2}{3}\int_2^x (3-t)^{\frac{3}{2}}\,dt = \left[-\frac{2}{3}t(3-t)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}(3-t)^{\frac{5}{2}}\right]_2^x.$

$F(x) = -\frac{2}{3}x(3-x)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}(3-x)^{\frac{5}{2}} + \frac{14}{15}.$

Donc, les primitives de f sur $]-\infty; 3]$ sont de la forme : $x \longmapsto -\frac{2}{3}x(3-x)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}(3-x)^{\frac{5}{2}} + c$, où $c \in \mathbb{R}$.

Exercice 56

1. $K = \left[\frac{1}{4}lnx - \frac{1}{4}ln(x+2) + \frac{1}{2(x+2)}\right]_1^2 = \frac{1}{4}ln2 - \frac{1}{4}ln4 + \frac{1}{8} - \left(\frac{1}{4}ln1 - \frac{1}{4}ln3 + \frac{1}{6}\right)$

   $K = \frac{ln3}{4} - \frac{ln2}{4} - \frac{1}{24}.$

2. a) $L = \int_1^2 \frac{lnx}{(x+2)^3}\,dx$

   On pose : $u(x) = lnx$; on a : $u'(x) = \frac{1}{x}$.

   $v'(t) = \frac{1}{(x+2)^3}$ $\quad v(t) = -\frac{1}{2(x+2)^2}.$

   On a : $L = \left[-\frac{lnx}{2(x+2)^2}\right]_1^2 + \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{x(x+2)^2}\,dt = \left[-\frac{lnx}{2(x+2)^2}\right]_1^2 + \frac{1}{2}K = -\frac{ln2}{32} + \frac{1}{2}K.$

   b) $L = -\frac{ln2}{32} + \frac{1}{2}K = \frac{ln3}{8} - \frac{5ln2}{32} - \frac{1}{48}.$

Exercice 57

1. La dérivée f' de f est continue sur le segment [a ; b] donc est bornée sur ce segment. Il existe donc un nombre réel M strictement positif tel que pour tout x appartenant à l'intervalle $[a\,;b]$, $|f'(x)| \leq$ M.

2. D'après l'inégalité des accroissements finis, $|f(u)-f(a)| \leq \mathrm{M}|u-a|$, pour tout u appartenant à $[a\,;b]$. Ce qui donne : $|f(u)-f(a)| \leq \mathrm{M}(u-a)$.
   En intégrant, on obtient : $\int_a^b |f(x)-f(a)|dx \leq \mathrm{M}\frac{(b-a)^2}{2}$.

3. a) En utilisant l'égalité de Chasles, on a : $\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a+\frac{i(b-a)}{n}}^{a+\frac{(i+1)(b-a)}{n}} f(x)dx$.

$$E_n = \int_a^b f(x)dx - R_n = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a+\frac{i(b-a)}{n}}^{a+\frac{(i+1)(b-a)}{n}} f(x)dx - \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a+\frac{b-a}{n}i\right)$$

$$E_n = \int_a^b f(x)dx - R_n = \sum_{i=0}^{n-1} \left[\int_{a+\frac{i(b-a)}{n}}^{a+\frac{(i+1)(b-a)}{n}} f(x)dx - \frac{b-a}{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}i\right)\right]$$

$$E_n = \int_a^b f(x)dx - R_n = \sum_{i=0}^{n-1} \left[\int_{a+\frac{i(b-a)}{n}}^{a+\frac{(i+1)(b-a)}{n}} f(x)dx - f\left(a+\frac{b-a}{n}i\right)\int_{a+\frac{i(b-a)}{n}}^{a+\frac{(i+1)(b-a)}{n}} dx\right]$$

$$E_n = \int_a^b f(x)dx - R_n = \sum_{i=0}^{n-1} \left[\int_{a+\frac{i(b-a)}{n}}^{a+\frac{(i+1)(b-a)}{n}} f(x)dx - \int_{a+\frac{i(b-a)}{n}}^{a+\frac{(i+1)(b-a)}{n}} f\left(a+\frac{b-a}{n}i\right)dx\right]$$

$$E_n = \int_a^b f(x)dx - R_n = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a+\frac{i(b-a)}{n}}^{a+\frac{(i+1)(b-a)}{n}} \left[f(x) - f\left(a+\frac{b-a}{n}i\right)\right]dx\,.$$

c) On a :

$$|E_n| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a+\frac{i(b-a)}{n}}^{a+\frac{(i+1)(b-a)}{n}} \left|f(x) - f\left(a+\frac{b-a}{n}i\right)\right|dx\,.$$

Or d'après 2), on a : $\int_{a+\frac{b-a}{n}i}^{a+\frac{b-a}{n}(i+1)} \left|f(x) - f\left(a+\frac{b-a}{n}i\right)\right| dx \leq M\frac{(b-a)^2}{2n^2}$,

donc en sommant les n termes, on a : $|E_n| \leq M\frac{(b-a)^2}{2n}$.

4. $f(x) = e^{-x^2}$.

   On a : $\forall x \in [0; 1], |f'(x)| \leq 2$.
   Pour $M = 2$, il faut prendre $\geq 10^4$.

Un calcul à la main serait très fastidieux pour déterminer : $\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(a+\frac{b-a}{n}i)$ pour $a = 0$;

$b = 1$ et $n = 10^4$ pour la fonction donnée. L'utilisation de calculatrices programmables ou d'ordinateurs s'avère très nécessaire à ce moment.

Exercice 58

1. a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$.

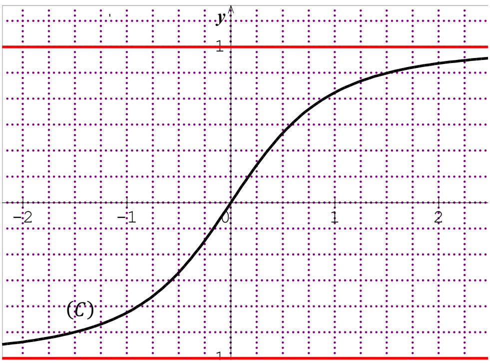
b) $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \dfrac{\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

c) $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0$.

Tableau de variation de f

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	1

2. Traçons (C) dans le repère (O, I, J).



3. $\mathcal{A} = 6\int_0^{\sqrt{3}} f(x)\,dx = 6\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \left[6\sqrt{x^2+1}\right]_0^{\sqrt{3}} = 6\ cm^2$.

Exercice 59

1. $K = \int_0^{\pi} e^x\, cos2x\, dx$

   On pose : $u(x) = e^x$; on a : $u'(x) = e^x$.

   $v'(x) = cos2x$ $v(x) = \frac{1}{2} sin2x.$

   $$K = \left[\frac{1}{2} e^x sin2x\right]_0^{\pi} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} e^x sin2x\, dx$$

   Soit $J = \int_0^{\pi} e^x sin2x\, dx.$

   On pose : $f(x) = e^x$; on a : $f'(x) = e^x.$

   $g'(x) = sin2x$ $g(x) = -\frac{1}{2} cos2x.$

   On a : $J = \left[-\frac{1}{2} e^x cos2x\right]_0^{\pi} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} e^x cos2x\, dx = \left[-\frac{1}{2} e^x cos2x\right]_0^{\pi} + \frac{1}{2} K.$

   $$K = \left[\frac{1}{2} e^x sin2x\right]_0^{\pi} - \frac{1}{2} J = \left[\frac{1}{2} e^x sin2x\right]_0^{\pi} - \frac{1}{2}\left(\left[-\frac{1}{2} e^x cos2x\right]_0^{\pi} + \frac{1}{2} K\right).$$

   $\frac{5}{4} K = \left[\frac{1}{2} e^x sin2x + \frac{1}{4} e^x cos2x\right]_0^{\pi} = \frac{1}{4} e^{\pi} - \frac{1}{4}.$

   Donc : $K = \frac{e^{\pi}-1}{5}.$

2. a) $I + J = \int_0^{\pi} e^x\, dx = e^{\pi} - 1 = 5K.$

   $I - J = \int_0^{\pi} e^x\, cos2x\, dx.$ D'où : $I - J = K.$

   b) On résout le système : $\begin{cases} I + J = 5K \\ I - J = K \end{cases}$.

   On obtient : $I = \frac{3(e^{\pi}-1)}{5}$ et $J = \frac{2(e^{\pi}-1)}{5}$.

Exercice 60

1. $I_1 = \frac{1}{2}[\ln(1 + x^2)]_0^1 = \frac{1}{2} ln2$.

2. La fonction qui à x associe $\frac{x^n}{1+x^2}$ définie sur $[0; 1]$ est continue et positive, il s'en suit que pour tout entier naturel n non nul, $I_n \geq 0$.

3. On a : $\forall x \in [0; 1],\ 1 \leq 1 + x^2 \leq 2$. D'où : $\frac{1}{2} x^n \leq \frac{x^n}{1+x^2} \leq x^n.$

   $$\int_0^1 \frac{1}{2}\, x^n\, dx \leq I_n \leq \int_0^1 x^n\, dx\ .$$

   On en déduit que : $\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}.$

4. a) x appartient à $[0; 1]$.

   Pour tout entier naturel n non nul, on a : $\frac{x^{n+1}}{1+x^2} \leq \frac{x^n}{1+x^2}$. D'où : $I_{n+1} \leq I_n$.

   Par suite, la suite (I_n) est décroissante.

b) (I_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle est convergente.
D'après 3, elle converge vers 0.

Exercice 61

1. Soit $n \geq 2$.

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sinx \times sin^{n-1}x\, dx.$$

On pose : $u(x) = sin^{n-1}x$; on a : $u'(x) = (n-1)\, cosx\, sin^{n-2}x$.

$v'(x) = sinx$ $v(x) = -cosx.$

$$I_n = [-cosxsin^{n-1}x]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2x\, sin^{n-2}x\, dx.$$

$$I_n = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-sin^2x)\, sin^{n-2}x\, dx = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (sin^{n-2}x - sin^n x)\, dx.$$

$$I_n = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{n-2}x\, dx - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n x\, dx.$$

Donc : $\forall n \geq 2$, $I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$.

2. a) $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$.

b) D'après 1, on a : $I_2 = I_0 - I_2$. D'où : $I_2 = \frac{1}{2}I_0 = \frac{\pi}{4}$.

$I_4 = 3I_2 - 3I_4$. D'où : $I_4 = \frac{3}{4}I_2 = \frac{3\pi}{16}$.

Exercice 62

1. $I_n = [(\ln t)^2]_{e^{n-1}}^{e^n}$
$= 2\,n - 1.$
2. (I_n) est non bornée, car elle n'est pas majorée.
3. On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{I_n}{n} = 2 - \frac{1}{n}$.

Donc, la suite $(\frac{I_n}{n})$ converge vers 2.
4. En utilisant l'égalité de Chasles, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} I_k = \int_1^{e^n} \frac{2lnt}{t}\, dt = [(\ln t)^2]_1^{e^n} = n^2.$$

Exercice 63

1. $I_0 = \int_1^e x^2\, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^e = \frac{e^3-1}{3}$.

2. $I_1 = \int_1^e x^2 lnx\, dx.$

On pose : $u(x) = lnx$; on a : $u'(x) = \frac{1}{x}$.

$v'(x) = x^2$ $v(x) = \frac{x^3}{3}$.

$$I_1 = \left[\frac{x^3 lnx}{3}\right]_1^e - \frac{1}{3}\int_1^e x^2\,dx = \left[\frac{x^3 lnx}{3} - \frac{x^3}{9}\right]_1^e = \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} - \left(-\frac{1}{9}\right) = \frac{2e^3+1}{9}.$$

3. $I_n = \int_1^e x^2(lnx)^n\,dx$, où $n \in \mathbb{N}^*$.
   D'où : $I_{n+1} = \int_1^e x^2(lnx)^{n+1}\,dx$.
   On pose : $u(x) = (lnx)^{n+1}$; on a : $u'(x) = (n+1)\frac{1}{x}(lnx)^n$.
   $v'(x) = x^2$ $v(x) = \frac{x^3}{3}$.

$$I_{n+1} = \left[\frac{x^3(lnx)^{n+1}}{3}\right]_1^e - \frac{1}{3}(n+1)\int_1^e x^2(lnx)^n\,dx.$$

$3I_{n+1} + (n+1)I_n = [x^3(lnx)^{n+1}]_1^e$.
$3I_{n+1} + (n+1)I_n = e^3$.

4. On a : $3I_2 + 2I_1 = e^3$. D'où : $I_2 = \frac{e^3-2I_1}{3}$. On obtient : $I_2 = \frac{5e^3-2}{27}$.
5. Démontrons que : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n \geq 0$.
   - $I_0 = \frac{e^3-1}{3}$. Donc $I_0 \geq 0$.
   - $\forall x \in [1;e],\ x^2 \geq 0,\ lnx \geq 0$. D'où : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x^2(lnx)^n \geq 0$.

     On en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n \geq 0$.

   On a : $I_0 \geq 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n \geq 0$. Donc : : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n \geq 0$.
6. D'après 3, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 3I_{n+1} + (n+1)I_n = e^3$.
   D'où : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = \frac{e^3}{n+1} - \frac{3}{n+1}I_{n+1}$.

   D'après la question 5, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{3}{n+1}I_{n+1} \geq 0$, d'où : $-\frac{3}{n+1}I_{n+1} \leq 0$.

   Ce qui donne : $\frac{e^3}{n+1} - \frac{3}{n+1}I_{n+1} \leq \frac{e^3}{n+1}$.

   Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n \leq \frac{e^3}{n+1}$.
7. On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq I_n \leq \frac{e^3}{n+1}$. Or : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e^3}{n+1} = 0$.

   D'après le théorème des gendarmes: $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

- **Situations complexes**

Exercice 64

Pour répondre à la préoccupation du maitre d'œuvre, le calcul intégral.

Je vais :

- traduire à l'aide d'une intégrale l'aire de la surface OABC ;
- calculer cette intégrale et conclure.

- L'aire de la surface OABC en mètre carré est donnée par : $\int_0^{550}\left(\frac{x^2}{1600}-\frac{x}{4}+125\right)dx$.
- On a : $\int_0^{550}\left(\frac{x^2}{1600}-\frac{x}{4}+125\right)dx=\left[\frac{x^3}{4800}-\frac{x^2}{8}+125x\right]_0^{550}$

  Cette intégrale vaut environ 65599.

Pour la couverture de la surface OABC, il faudra $65599\ m^2$ de grillage.

Exercice 65

Pour calculer la nouvelle superficie, je vais utiliser le calcul intégral.

Je vais :

- calculer l'aire du champ de maïs ;
- traduire à l'aide d'une intégrale l'aire du champ d'igname et la calculer ;
- déterminer la nouvelle superficie de la parcelle du cultivateur.

- L'aire du champ de maïs en unité d'aire est : $e\times 1=e$.
- L'aire du champ d'igname en unité d'aire est donnée par : $\int_e^{e^2}(2-\ln x)dx$

  Calculons $\int_e^{e^2}(2-lnx))\,dx$.

  $$\int_e^{e^2}(2-lnx))\,dx=\int_e^{e^2}2\,dx-\int_e^{e^2}lnx\,dx.$$

  $\int_e^{e^2}2\,dx=2e^2-2e$.

A l'aide d'une intégration par parties, on obtient : $\int_e^{e^2}lnx\,dx=[xlnx-x]_e^{e^2}=e^2$.

Donc : $\int_e^{e^2}(2-lnx))\,dx=2e^2-2e-e^2=e^2-2e$.

- La nouvelle superficie A du champ du cultivateur est : $A=e+e^2-2e=e^2-e$.

  Sachant que l'unité d'aire est 1 hm^2, A vaut environ : 5 hm^2.

Exercice 66

Pour calculer le nombre moyen μ_p de personnes contaminées sur les 30 premiers jours, je vais utiliser le calcul intégral.

Je vais :

- écrire l'expression de μ_p sous forme d'une intégrale.
- calculer cette intégrale en utilisant deux intégrations par parties.

- Donnons μ_p sous forme d'une intégrale.

  On a : $\mu_p=\frac{1}{30-0}\int_0^{30}f(x)\,dx=\frac{1}{30}\int_0^{30}x^2e^{\frac{x}{30}}\,dx$.
- A l'aide de deux intégrations par parties, calculons μ_p.

  On pose : $u(x)=x^2$; on a : $u'(x)=2x$.

  $v'(x)=e^{\frac{x}{30}}$ $v(x)=30e^{\frac{x}{30}}$.

$$\int_0^{30}x^2e^{\frac{x}{30}}\,dx=\left[30x^2e^{\frac{x}{30}}\right]_0^{30}-60\int_0^{30}xe^{\frac{x}{30}}\,dx.$$

Soit: $K = \int_0^{30} xe^{\frac{x}{30}}\,dx$.

On pose : $f(x) = x$; on a : $f'(x) = 1$.

$g'(x) = e^{\frac{x}{30}}$ $\quad g(x) = 30e^{\frac{x}{30}}$.

D'où : $K = \left[30xe^{\frac{x}{30}}\right]_0^{30} - 30\int_0^{30} e^{\frac{x}{30}}\,dx = \left[30xe^{\frac{x}{30}} - 900e^{\frac{x}{30}}\right]_0^{30}$.

Ainsi : $\int_0^{30} x^2e^{\frac{x}{30}}\,dx = \left[30x^2e^{\frac{x}{30}}\right]_0^{30} - 60K = \left[30x^2e^{\frac{x}{30}} - 1800xe^{\frac{x}{30}} + 54000e^{\frac{x}{30}}\right]_0^{30}$

$$\int_0^{30} x^2e^{\frac{x}{30}}\,dx = \left[(30x^2 - 1800x + 54000)e^{\frac{x}{30}}\right]_0^{30}.$$

$$\mu_p = \frac{1}{30}\int_0^{30} x^2e^{\frac{x}{30}}\,dx = \left[(x^2 - 60x + 1800)e^{\frac{x}{30}}\right]_0^{30} = 900e - 1800.$$

L'arrondi d'ordre 0 de μ_p est 646.

Donc, le nombre moyen μ_p de personnes contaminées sur les 30 premiers jours est 646.

11 STATISTIQUE À DEUX VARIABLES

I. LA SITUATION D'APPRENTISSAGE

- Apres la lecture de la situation d'apprentissage (par le professeur, par un élève et une lecture silencieuse des élèves), l'enseignant pourra s'assurer que les élèves ont bien compris le texte.

- Il pourra ensuite faire dégager les constituants de la situation à travers une ou des questions du type :

Constituants de la situation	Exemples de questions possibles	Réponses possibles des élèves
Contexte	Quand se déroule la situation ?	Après que le riche entrepreneur ait offert l'une de ses entreprises à son fils.
Circonstances	-Que veut faire le fils ? Y arrive-t-il ? -Comment procède-t-il ?	-Il veut connaitre le chiffre d'affaires de son entreprise en 2023 et 2024. Mais il n'y arrive. -Il me sollicite.
Tâches	-Que fais-je pour l'aider à trouver réponse à sa préoccupation ?	-Je me rends au CDI de mon lycée pour faire des recherches sur les séries statistiques à deux variables.

Le professeur utilisera la tâche énoncée par ses élèves pour faire la synthèse de la situation et présentera le plan de la leçon. Il devra dans la mesure du possible se référer à la situation durant tout le déroulement de la leçon.

II. DECOUVERTE DES HABILETES

<u>ACTIVITE 1 :</u> Série statistique double

- L'objectif de cette activité est d'identifier une série statistique double.
- Réponses aux questions de l'activité.

1- a) La population étudiée est : les patients d'un médecin.
   b) L'effectif total est : 5
2- a) Les différents caractères étudiés sont : la taille et la masse.
   b) Types de chaque caractère : Taille : quantitatif discret, Masse : quantitatif discret.

- Corrigé des exercices de fixation

  <u>Exercice 1</u>

  1. Faux ; 2. Vrai ; 3. Vrai ; 4. Faux.

<u>ACTIVITE 2 :</u> Distributions marginales en X et en Y

- L'objectif de cette activité est de connaitre et d'établir les distributions marginales d'une série statistique.

- Réponses aux questions de l'activité.

Tableau 2

Y \ X	59	62	65	68	71	74
165	**1**	**0**	**1**	**2**	**0**	**0**
168	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**
171	**0**	**0**	**1**	**2**	**0**	**0**
174	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**	**2**
177	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**

Tableau 3

X	59	62	65	68	71	74
Effectif (n_i)	**1**	**2**	**3**	**5**	**2**	**2**
Fréquence (f_i en %)	**6,67**	**13,33**	**20**	**33,34**	**13,33**	**13,33**

Tableau 4

Y	165	168	171	174	177
Effectif (n_i)	**4**	**1**	**3**	**5**	**2**
Fréquence (f_i en %)	**26,66**	**6,67**	**20**	**33,34**	**13,33**

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 2

Série des fréquences marginales en X ; Série des fréquences marginales en Y

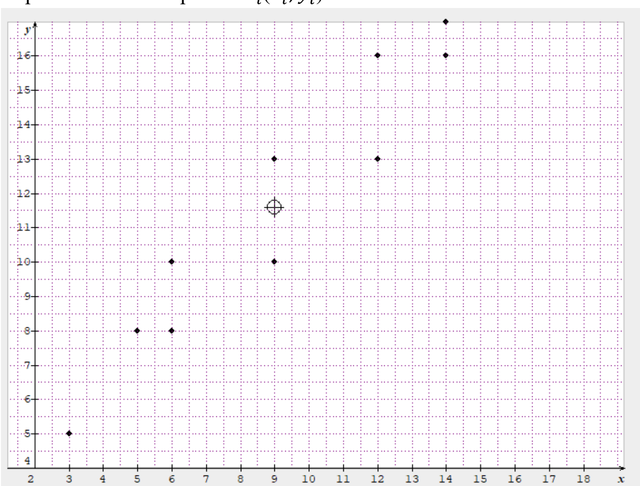
X	9	14	20
Effectif (n_i)	19	34	21
Fréquence (f_i en %)	25,68	45,94	28,38

Y	6	12	18
Effectif (n_i)	27	18	29
Fréquence (f_i en %)	36 ,49	24,32	39,19

ACTIVITE 3 : Nuage de points – Point moyen

- L'objectif de cette activité est de représenter un nuage de points et calculer les coordonnées du point moyen puis de placer ce point moyen sur un graphique.
- Réponses aux questions de l'activité.

1. Représentons les 10 points $M_i(x_i; y_i)$



2. Moyennes :

$$\bar{x} = \frac{9+12+5+6+9+14+3+6+12+14}{10} = 9$$

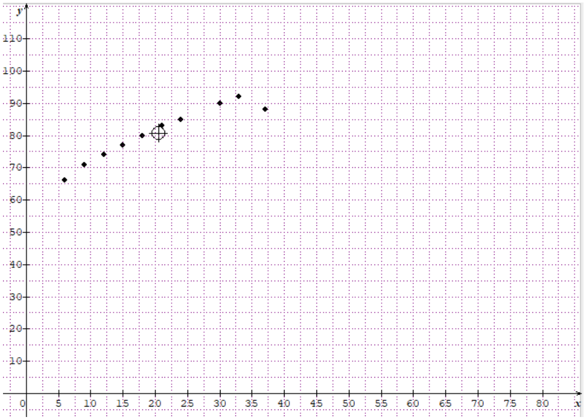
$$\bar{y} = \frac{10+13+8+10+13+17+5+8+16+16}{10} = 11{,}6$$

On a : G(9 ;11,6) .

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 3

1. Nuage de points : Sur (OI) : 1cm pour 5 ; Sur (OJ) : 1cm pour 10.



2. Coordonnées du point moyen G. On a : G(20,5 ;80,6). Voir figure.

ACTIVITE 4: Covariance d'une série statistique double

- L'objectif de cette activité est de calculer la covariance d'une série statistique double.
- Réponses aux questions de l'activité.

1. On a : G (9 ; 8,2).

2. a) Je complète le tableau.

X_i	8	7	9	10	11
Y_i	5	6	10	11	9
X_iY_i	40	42	90	110	99

b) Somme des X_iY_i est égale à : 381 ; Donc T = $\frac{381}{5} = 76{,}2$.

c) T $-\bar{X}\bar{Y} = 76{,}2 - 9 \times 8{,}2 = 2{,}4$.

- Corrigé des exercices de fixation

Exercice 4

1. F ; 2. F ; 3. V ; 4. F ; 5. F

Exercice 5

Cov(X ;Y) = 77

Exercice 6

Cov(X ;Y) = 1,57

ACTIVITE 5: Droites de régressions

- L'objectif de cette activité est de déterminer une équation de la droite de régression linéaire et une équation de la droite de régression de X en Y.
- Réponses aux questions de l'activité.

1. P_1 (x_1, y_1) ; K_1 (x_1, $ax_1 + b$), donc : $P_1K_1 = \sqrt{(y_1 - \text{a}x_1 - b)^2} = |y_1 - a_1x - b|$
2.
   a) On pose : $S = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \text{a}x_i - b)^2$
   b) $S = (y_1 - \text{a}x_1 - b)^2 + (y_2 - ax_2 - b)^2 + \ldots + (y_n - ax_n - b)^2$

$S = (y_1 - \text{a}x_1)^2 - 2b(y_1 - ax_1) + b^2 + (y_2 - \text{a}x_2)^2 - 2b(y_2 - ax_2) + b^2 + \ldots$

$+ (y_n - \text{a}x_n)^2 - 2b(y_n - ax_n) + b^2$, en regroupant les termes identiques,

On a : $S = nb^2 - 2b\sum_{i=1}^{n}(y_i - \text{a}x_i) + \sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i)^2$.

   c) S est un trinôme du second degré en b du type : $\alpha b^2 + \beta b + \delta$.

S est minimal pour : $2b\alpha + \beta = 0$ (dérivée nulle) soit : $b = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \text{a}x_i)}{n}$.

   d) $\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \text{a}x_i)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}y_i}{n} - a\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}$. On a donc : $b = \bar{y} - a\bar{x}$.
   (D) : $y = ax + b$, comme $\bar{y} = a\bar{x} + b$, donc le point moyen G ($\bar{x}$; $\bar{y}$) appartient à la droite (D).
3.
   a) Remplaçons b par sa valeur : $\bar{y} - a\bar{x}$
   $S = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \text{a}x_i - \bar{y} + a\bar{x})^2$, soit $S = \sum_{i=1}^{n}[(y_i - \bar{y} + a(\bar{x} - x_i)]^2$.

   $S = (y_1 - \bar{y})^2 - 2a(y_1 - \bar{y})(x_1 - \bar{x}) + a^2(x_1 - \bar{x})^2 + (y_2 - \bar{y})^2 - 2a(y_2 - \bar{y})(x_2 - \bar{x}) + a^2(x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (y_n - \bar{y})^2 - 2a(y_n - \bar{y})(x_n - \bar{x}) + a^2(x_n - \bar{x})^2$.

   On met en facteur a^2 et $-2a$ et on ajoute les termes indépendants du nombre réel a.

   On obtient : $S = a^2\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 - 2a\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x}) + \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$.

   b) S est un trinôme du second degré en a du type : $\alpha a^2 + \beta a + \delta$ où $\alpha = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$;

   $\beta = -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})$ et $\delta = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$.

   S est minimal pour $a = -\frac{\beta}{Z\alpha}$, soit : $a = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$.

   c) En multipliant le numérateur et le dénominateur de a par $\frac{1}{n}$, on obtient :

   $a = \frac{cov\,(x,y)}{v(x)}$.

4. En minimisant la somme $S' = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \text{a}'y_i - b')^2$, on reprend le même raisonnement que précédemment et on montre que la droite d'ajustement (D') de x en y a une équation du type : $x = a'y + b$ où $a' = \frac{cov\,(x,y)}{v(y)}$. *(L'enseignant pourra constituer des groupes de travail et laisser le soin à ses élèves de retrouver cette formule)*

- Corrigé de l'exercice de fixation

<u>ACTIVITE 6:</u> Coefficient de corrélation.

- L'objectif de cette activité est de déterminer le coefficient de corrélation d'une série.
- Réponses aux questions de l'activité.

1. En prenant le carré de r, on a : $r^2 = \frac{(cov\ (x,y))^2}{v(x)v(y)}$. Or $cov(x, y) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_2-\bar{y})\ (x_2-\bar{x})}{n}$ et

$v(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}$, d'où le résultat.

2. S = $a^2 \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 - 2a\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})\ (x_i - \bar{x}) + \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y}\ )^2$.

   a) S est un trinôme du second degré en a du type : $\alpha a^2 - 2a\ \beta + \delta$

      où $\alpha = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$; remarquons que : $\alpha > 0$; $\beta = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})\ (x_i - \bar{x})$

      et $\delta = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y}\ )^2$.

   Soit Δ' son discriminant réduit. On a $\Delta' = \beta^2 - \alpha\ \delta$,

   soit : $\Delta' = [\ \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})\ (x_i - \bar{x})]^2 - \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y}\ )^2$.

   S'étant une somme de carrés, on a : $S \geq 0$ et donc $\Delta' \leq 0$, soit :

   $[\ \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})\ (x_i - \bar{x})]^2 - \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y}\ )^2 \leq 0$.

$[\ \sum_{i=1}^{n}(y_2 - \bar{y})\ (x_2 - \bar{x})]^2 - \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y}\ )^2 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{[\ \sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})\ (x_i-\bar{x})]2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y}\ )^2} \leq 1 \Leftrightarrow r^2 \leq 1 \Leftrightarrow |r| \leq 1$.

   b) Si $|r| = 1$, on démontre que S = 0. *(il suffit de remplacer a par sa valeur minimum dans l'expression de S sous l'hypothèse $r^2 = 1$,*

   Soit : $[\ \sum_{i=1}^{n}(y_2 - \bar{y})\ (x_2 - \bar{x})]^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y}\ )^2$).

   S = 0 signifie que ∀ i, $y_i = ax_i + b$, donc tous les points du nuage sont alignés.

   On démontre dans ce cas que les droites d'ajustement (D) et (D') coïncident.

3. $a = \frac{cov\ (x,y)}{v(x)}$ et $a' = \frac{cov\ (x,y)}{v(y)}$; on a donc : $aa' = \frac{cov\ (x,y)}{v(x)} \times \frac{cov\ (x,y)}{v(y)}$.

   On a donc : $aa' = \frac{(cov\ (x,y))^2}{v(x)v(y)} = \frac{(cov\ (x,y))^2}{(\sqrt{v(x)}\sqrt{v(y)})^2} = r^2$.

<u>Exercice 8</u>

1. V ; 2. F ; 3. V ; 4. V (Supprimer la question 4 : répétition de 1)

<u>Exercice 9</u>

On a : $r = 0{,}975368$. Il y a une forte corrélation linéaire entre les caractères X et Y car $|r| > 0{,}87$.

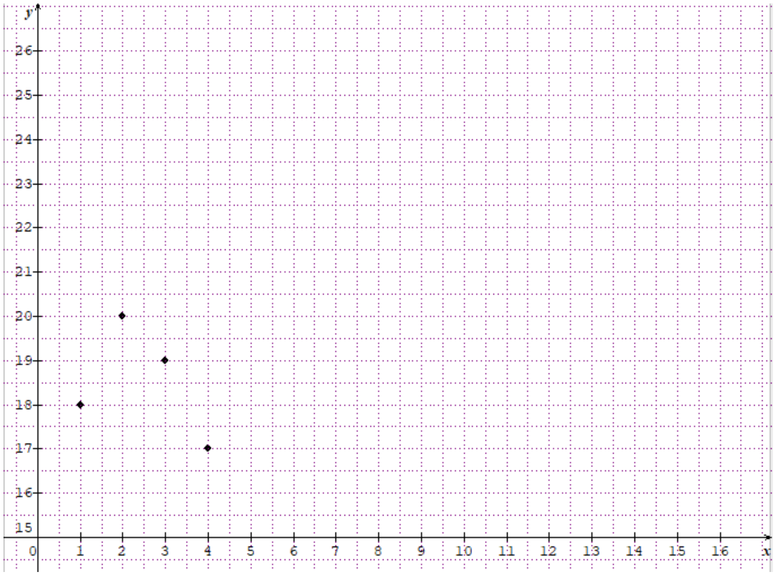
III. DES QUESTIONS D'EVALUATION

- **<u>Question 1 :</u> Comment représenter un nuage de points d'une série statistique double dans un repère orthogonal ?**

  <u>Solution de l'exercice non corrigé</u>

  On considère les points : $M_1(1;18)$; $M_2(2;20)$; $M_3(3;19)$; $M_4(4;17)$ et $M_5(5;22)$.

  On choisit l'échelle approprié : Sur (OI) : 1 cm pour 1 ; Sur (OJ) : 1 cm pour 1. Origine du repère : O (0 ; 15) .On obtient le graphique suivant:



- **<u>Question 2 :</u> Comment déterminer le point moyen d'un nuage de points ?**

  <u>Solution de l'exercice non corrigé</u>

  On a :

  $$\bar{x} = \frac{0+1+2+3+4+5}{6} = 2{,}5$$

  $$\bar{y} = \frac{280+225+180+100+98+95}{6} = 163$$

  On a : G (2,5 ; 163)

- **<u>Question 3 :</u> Comment déterminer une équation de la droite d'ajustement linéaire par la méthode des moindres carrés ?**

  <u>Solution de l'exercice non corrigé</u>

  On obtient : (D) :$y = 0{,}4758x + 6{,}2203$ et (D') : $x = 1{,}35y - 3{,}3$.

- **<u>Question 4 :</u> Comment calculer le coefficient de corrélation linéaire et l'interpréter?**

  <u>Solution de l'exercice non corrigé</u>

On obtient : $r = -0{,}956$. Interprétation : Puisque , $|r| \in [0{,}87; 1]$ donc la relation linéaire entre X et Y est forte. Dans ce cas, un ajustement linéaire est envisageable.

IV. MES SEANCES D'EXERCICES

➢ **Exercices de fixation**

- **Série statistiques double - fréquences marginales**
- Exercice 1

Les tableaux qui définissent une série statistique double : tableau 2 et tableau 4.

Exercice 2

- Le tableau des fréquences marginales de T :

T	14	15	16	17	18
Fréquence en %	20,83	20,83	22,92	18,75	16,67

- Le tableau des fréquences marginales de Z :

Z	13	14	15	16
Fréquence en %	27,08	16,67	29,17	27,08

Exercice 3

- Le tableau des fréquences marginales de X :

X	15	20	25	30
Fréquence en %	25	25	25	25

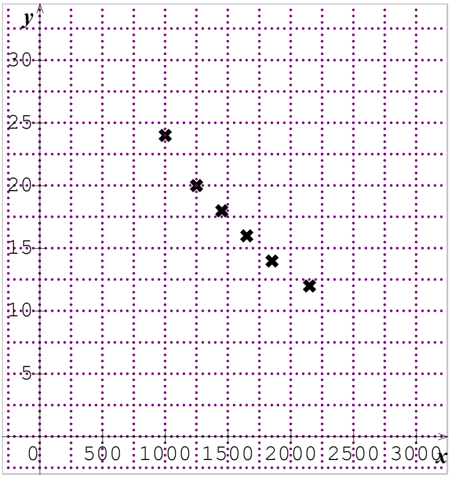
Le tableau des fréquences marginales de Y :

Y	7	3	12	8
Fréquence en %	25	25	25	25

- **Nuage de points - point moyen**

Exercice 4

Sur (OI) : 1cm pour 500 FCFA ; Sur (OJ) : 1 cm pour 5 jours.



Exercice 5

Les coordonnées du point moyen G de cette série statistique double est : d) G(4 ;6).

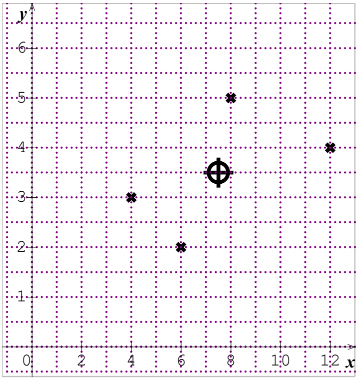
Exercice 6

Soit x_i la vitesse en Km/h et y_i la consommation en litres L.

On a : $\bar{X} = 105$ et $\bar{Y} = 8{,}5$. On obtient : G(105 ; 8,5).

Exercice 7

1) Nuage de points :



2.a) Coordonnées du point moyen G:

On a : $\bar{X} = 7{,}5$ et $\bar{Y} = 3{,}5$. On obtient : G (7,5 ; 3,5).

2.b) Plaçons le point G : Voir courbe.

- **Covariance**

Exercice 8

1. Coordonnées du point moyen G:
   On a : $\bar{X} = 103{,}6$ et $\bar{Y} = 11$. On obtient : G (103,6 ; 11).
2. Calcul de la covariance : $cov(X\,;Y) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} X_iY_i - \bar{X}\bar{Y}$.
   Donc $cov(X\,;Y) = -29{,}6$.

Exercice 9

On a : $\bar{X} = 45\ 000$ et $\bar{Y} = 2{,}6$. On obtient $cov(X\,;Y) = 2\ 000$.

- **Droites de régression**

Exercice 10

Réponse exacte : d)

Exercice 11

Regroupons les étapes de calcul dans un tableau.

X_i	4	6	8	10	14	20	$\sum X_i = 62$	$\bar{X} = \frac{62}{6}$
Y_i	14	8	13	16	50	40	$\sum Y_i = 141$	$\bar{Y} = \frac{141}{6}$
X_iY_i	56	48	104	160	700	800	$\sum X_i Y_i = 1868$	$\frac{1}{N}\sum X_i Y_i = \frac{1868}{6}$
X_i^2	16	36	64	100	196	400	$\sum X_i^2 = 812$	$V(X) = \frac{1028}{36}$

Par suite : $cov(X\,;Y) = \frac{2466}{36}$; $a = \frac{2466}{1028} = \frac{1233}{514}$, $b = -\frac{4113}{3078}$. Donc (D) : $y = \frac{1233}{514}x - \frac{4113}{3078}$
ou (D) : $y = 2{,}3988x - 1{,}2879$

Exercice 12

On a : $\bar{X} = 6{,}8$; $\bar{Y} = 4$; $V(Y) = 2$ et $cov(X;Y) = -1$.

On obtient : (D') : $x = -\frac{1}{2}y + 8{,}8$.

- **Coefficient de corrélation linéaire**

Exercice 13

Le coefficient de corrélation linéaire est : b) $r = 0{,}051$.

Exercice 14

On a $\bar{T} = 28{,}5$; $\bar{J} = 6{,}75$; $V(T) = 1{,}25$; $V(J) = 2{,}1875$ et $cov(T;J) = 1{,}375$.

On obtient : $r = 0{,}832$.

- **Exercices de renforcement/Approfondissement**

Exercice 15

1. Le point moyen a pour coordonnées ($\bar{X}$; $\bar{Y}$): On a : $\bar{X} = 2$; Or $\bar{Y} = 57{,}3\,\bar{X} + 516{,}2$. Alors : $\bar{Y} = 630{,}8$ .Donc G (2 ; 630,8).
2. Déduction de la Valeur de l'inconnue α :
   On a : $\bar{Y} = \frac{1}{5}(2463 + \alpha)$, or $\bar{Y} = 630{,}8$ donc $\alpha = 5\bar{Y} - 2463 = 691$.
3. Déterminons l'année:

On détermine le rang x pour y connu :

Pour $y = 1433$, on a : $1433 = 57{,}3x + 516{,}2$. Soit $x = 16$.

L'année correspondante est : $2017 + 16 = 2033$.

Donc le chiffre d'affaires de l'entreprise atteindra 1 433 000 000 FCFA en 2033.

Exercice 16

1. Je détermine les notes α et β :
   On a : $\bar{X} = \frac{1}{4}(36 + \alpha)$, or $\bar{X} = 10$ donc $\alpha = 4$.
   Et $\bar{Y} = \frac{1}{4}(22 + \beta)$, or $\bar{Y} = 9$ donc $\beta = 14$.
2. Je détermine le coefficient de corrélation linéaire :

On a : $V(X) = 30.V(Y) = 13$ et $cov(X;Y) = 19$. Donc $r = 0{,}962$.

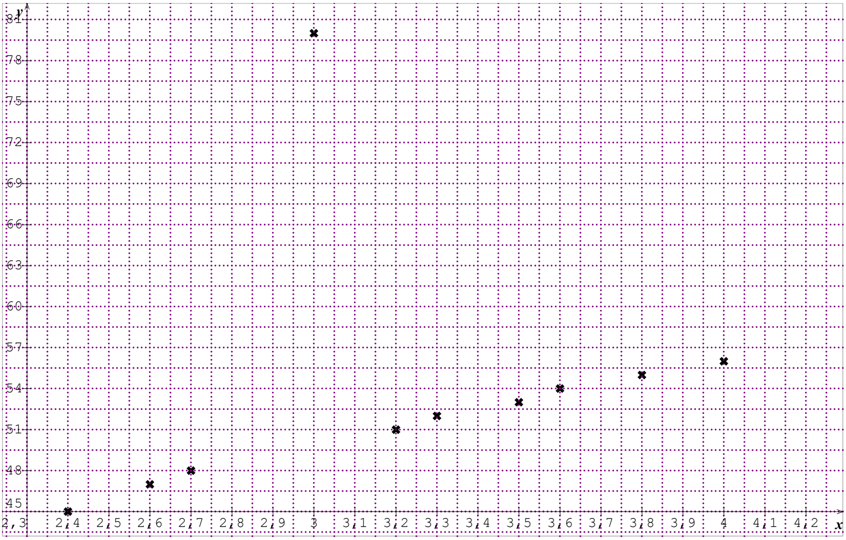
La relation entre les caractères X et Y est forte et positive. Cela traduit que plus un candidat a de bonnes notes en musique, plus il a de bonnes notes en dessin.

3. Je détermine une équation de la droite de régression de Y en X.

On a : $a = \frac{19}{30}$ et $b = \frac{8}{3}$. Donc (D) : $y = \frac{19}{30}x + \frac{8}{3}$.

Exercice 17

1) Je détermine le nuage de point associé à la série (M ;T).



2.a) Je calcule la masse moyenne $\overline{M}$: $\overline{M} = 3{,}21$.

b) Je calcule la taille moyenne $\overline{T}$: $\overline{T} = 54{,}1$.

3) Une équation de la droite de régression de (D).

Les valeurs du caractère M sont rangées dans l'ordre croissant. On partage la série en deux séries d'effectif 5 chacune.

Série 1

m_i	2,4	2,6	2,7	3	3,2
t_i	45	47	48	80	51

Série 2

m_i	3,3	3,5	3,6	3 ,8	4
t_i	52	53	54	55	56

Point moyen $G_1(\overline{m_1}; \overline{t_1})$	Point moyen $G_2(\overline{m_2}; \overline{t_2})$
$\overline{m_1} = 2{,}78$ et $\overline{t_1} = 54{,}2$ donc $G_1(2{,}78; 54{,}2)$	$\overline{m_2} = 3{,}64$ et $\overline{t_2} = 54$ donc $G_1(3{,}64 ; 54)$

On obtient : (D) = (G_1G_2) avec $a = \frac{y_{G_2} - y_{G_1}}{X_{G_2} - X_{G_1}} = -\frac{1}{43}$. $b = y_{G_1} - aX_{G_1} = \frac{117211}{2160}$

Soit (D) : $y = -\frac{1}{43}x + \frac{117211}{2160}$ ou (D) : $y = -0{,}232x + 54{,}264$.

4.a) Je calcule le coefficient de corrélation et j'interprète :

On a : : $V(M) = 0{,}25489$. $V(T) = 86{,}09$ et $cov(M; T) = 1{,}089$. Donc $r = 0{,}232$.

$r \notin [0{,}87; 1]$. La relation linéaire entre la masse M et la taille T des nouveaux nés est très faible.

b) Une équation de la droite (D) de régression de Y en X.

On a : (D) :$y = 4{,}272x + 40{,}386$

5.a) Calcul de la taille si la masse est 4,7 Kg.

On a (D) : $y = 4{,}272 \times 4{,}7 + 40{,}386$; La taille est donc : 60,46 cm.

b) Calcul de la masse du nouveau-né :

Pour $y = 60$ cm on a : $60 = 4{,}272x + 40{,}386$. Soit $x = 4{,}59$ Kg.

Exercice 18

1. Nuage de points
2. Coordonnées du point moyen G : G(2425 ;205).
3. a) Équation de (D) par la méthode des moindres carrés :
   (D) : $y = -0{,}074x + 384{,}701$

   b) Tracé de (D) : Voir figure : Pour $x = 2900$ alors $y = 170{,}1$. On a : M$(2900; 170{,}1)$

On trace alors : (GM) = (D).

4. Calcule du coefficient de corrélation et interprétation :

   $r = -0{,}992$.

Comme : $-1 \leq r \leq -0{,}87$ donc la relation linéaire entre les caractères X et Y est très forte et négative.

Exercice 19

1. Les coordonnées du point moyen G sont : On a : G$(42{,}2; 149)$.
2. Équation de (D) par la méthode des moindres carrés : (D) : $y = 0{,}473x + 129{,}041$
3. a) Calcul du diamètre du tronc si la taille est 47 m : Pour $x = 47$ on a $y = 151{,}27$. Le diamètre du tronc est estimée à 151 cm si la taille est 47 m.
   b) Calcul de la taille du tronc si le diamètre est 170 cm. Pour $y = 170$, on a $x = 86{,}594\ cm$. La taille du tronc est donc d'environ 86,6 cm.

Exercice 20

1. Déterminons $Cov(X;Y)$: $Cov(X;Y) = 65$.
2. Déterminons V(X) puis V(Y) : On a : V(X)=$\frac{35}{12}$ et V(Y)=1500.
3. Déterminons le coefficient de corrélation r : on a : $r = 0{,}98$. $r \in [0{,}87; 1]$. La relation linéaire entre X et la Y est très forte
4. a) Déterminons une équation de la droite de régression de Y en X.
   On a : (D) : $y = \frac{156}{7}x + 92$.
   b) Déterminons une équation de la droite de régression de X en Y.
   On a : (D) : $x = \frac{13}{300}y - \frac{116}{30}$.
5. Une estimation du chiffre d'affaires au bout du 8$^{\text{ème}}$ mois :
   Pour $x = 8$ on a $y = 270{,}286\ milliers\ de\ FCFA$. Donc au bout du 8$^{\text{ème}}$ mois, le chiffre d'affaires atteindra 270 286 FCFA.

Exercice 21

1. Nuage de points.
2. Coordonnées du point moyen G : on a : G(39 ;31).
3. Calcul de V(X), V(Y) et de Cov(X ;Y) :
   On a : V(X) = 56,20 ; V(Y) = 118,20 ; Cov(X ;Y) = $-81,20$.
4. Calcul du coefficient de corrélation linéaire : on a : $r = -0,99$. $r \in [-1; -0,87]$. La relation linéaire entre X et Y est très forte et négative. Cela signifie que plus le montant du forfait augmente plus le nombre de client diminue.
5. Une équation de la droite de régression de Y en X est: (D) : $y = -1,44x + 87,35$.
6. Déterminons le nombre de clients pour un montant de 6000 FCFA.
   Pour $x = 60$ on a $y = 0,95 \approx 1$. Pour un montant de 6000 FCFA, on obtient un seul client.

Exercice 22

1. Nuage de points :
2. Coordonnées du point moyen G : on a : G(15,14 ;557,14).
3. Justifions que V(X) = 61,92 et V(Y) = 32480,73.
   On applique les formules de la variance et on trouve V(X) = 61,92 et V(Y) = 32480,73.
4. a) Calcul du coefficient de corrélation linéaire : on a : $r = 0,99$. $r \in [0,87; 1]$. La relation linéaire entre X et Y est très forte et positive. Cela signifie que plus l'ancienneté est élevée, plus la prime perçue est élevée.
5. Une équation de la droite de régression de Y en X : On a : (D) : $y = 22,85x + 211,19$.
6. Déterminons la prime pour une ancienneté de 30 ans.
   Pour $x = 30$, on a : $y = 896,69$. La prime s'élève donc a 896,69 $euros$.

Exercice 23

1. A partir du graphique, dressons le tableau statistique :

x_i	1	3	4	5	7	8	9
y_i	0	1	1,5	2,5	4	4,5	4

2. Coordonnées du point moyen G : on a : G($\frac{37}{7}$;$\frac{175}{70}$), soit G(5,29 ;2,5).
3. Justifions qu'une équation de la droite de Y en X est (D) : $y = 0,59x - 0,62$.
   On a: V(X) = 7,02 ; Cov (X ;Y) = 4,13; $a = 0,59$ et $b = -0,62$.
   Donc, on a: (D) : $y = 0,59x - 0,62$.
4. Si $x = 2$ alors $y = 0,56$. On a : M(2 ;0,56). Alors (D) = (GM).

Exercice 24 (Exo 25)

1. Nuage de points.
2. a) Coordonnées du point moyen G : on a : G(3,5 ;57,12).
   b) Déterminons le coefficient de corrélation linéaire : on a : $r = 0,96$.
   c) Comme $r \in [0,87; 1]$, donc on peut envisager un ajustement affine.
3. a) Je justifie qu'une équation de la droite de régression de Y en X est On a :

(D) : $y = 1,96x + 50,27$.

$a = \frac{Cov(X;Y)}{V(X)} = \frac{10,33}{5,25} = 1,96$ et $b = \bar{y} - a\bar{x} = 57,12 - 1,96 \times 3,5 = 50,26$.

Donc (D) : $y = 1{,}96x + 50{,}27$.

Exercice 25 (Exo 26)

1. Coordonnées du point moyen G : on a : G(44 ;132,5).
2. Détermine le coefficient de corrélation linéaire : on a : $r = 0{,}74$. Comme $r \notin [0{,}87; 1]$, donc il existe une faible relation linéaire entre X et Y. Il n'est pas approprié d'envisager un ajustement affine.

Exercice 26 (Exo 27)

1. Déterminons la covariance de la série : Cov (X ;Y) = $-125{,}67$.
2. Coefficient de corrélation et interprétation : $r = -0{,}96$. Comme $|r| \in [0{,}87; 1]$ donc il y a une forte corrélation linéaire entre X et Y. Plus la valeur de X croit, plus la valeur de Y correspondant décroit.
3. Déterminons une équation de la droite de régression Y en X : On a : (D) : $y = -18{,}85x + 135{,}4$
4. Déterminons une équation de la droite de régression de X en Y : On a : (D') : $x = -0{,}049y + 6{,}93$

Exercice 27(Exo 28)

1. Nuage de points.
2. Je justifie que les coordonnées du point moyen G sont définis par G(5,63 ; 7,75).
   $\bar{X} = \frac{1}{8}\sum x_i$ et $\bar{Y} = \frac{1}{8}\sum y_i$

3. Je justifie que V(X)= 4,18 , V(Y) = 8,44 et Cov(X ;Y) = 5,37.

$V(X) = \frac{1}{8}\sum x_i{}^2 - \bar{X}^2$ et $V(Y) = \frac{1}{8}\sum y_i{}^2 - \bar{Y}^2$; cov(X,Y)=$\frac{1}{8}\sum x_i y_i - \bar{X}.\bar{Y}$

4. a) Déterminons le coefficient de corrélation linéaire : on a : $r = 0{,}90$.
   b) Interprétation du résultat : Comme $r \in [0{,}87; 1]$ alors il y a une forte corrélation linéaire entre le nombre de travailleur et la superficie exploitée. Autrement dit, plus la superficie exploitée est grande, plus le nombre de travailleurs est élevé.

5. a) Je justifie qu'une équation de la droite : (D) : $y = 1{,}28x + 0{,}54$.

$Y = ax + b$ avec $a = COV(X,Y)$ et $b = \bar{y} - a\bar{x}$.

   b) Tracé de (D) : Si $x = 3$, alors $y = 4{,}38$. M(3 ; 4,38) et (D)=(GM).

6. Estimation :

Pour $y = 16$, on a : $x = 12{,}078$. Donc pour 16 ha de superficie exploitée, il faudra 12 travailleurs.

Exercice 28(Exo 29)

1. a) Nuage de points . On pourra prendre :
   Abscisse : 1 cm pour 5 ans. Ordonnée : 1 cm pour 50 000 FCFA.
   Origine du repère : le point de coordonnées (20 ; 600).
   b) Coordonnées du point moyen G : on a : G(36 ;831). (Voir courbe)
2. Déterminons la covariance de cette série : On a Cov(X ;Y) = 1024.
3. Déterminons le coefficient de corrélation linéaire et interprétons le : on a : $r = 0{,}75$.
   Comme $\notin [0{,}87; 1]$, donc il y a une faible corrélation linéaire entre les caractères X et Y. Le salaire n'est pas forcément lié à l'âge.

Exercice 29(Exo 30)

1. Nuage de points : On pourra prendre :
   Abscisse : 1 cm pour 2. Ordonnée : 1 cm pour 3.
   Origine du repère : le point de coordonnées (8 ;9).
2. Les moyennes et écarts types : On a : $\bar{X} = 14{,}04$; $\bar{Y} = 19{,}06$. V(X) = 20,3304 donc $\sigma_X = 4{,}5$ et V(Y) = 59,1704 donc $\sigma_Y = 7{,}69$.
3. Déterminons une équation de la droite de régression de Y en X. On a : (D) :$y = 1{,}69x - 4{,}64$.
4. Détermine y pour $x = 23{,}2$. Pour $x = 23{,}2$, on a : $y = 34{,}57$.

Exercice 30 (Exo 31)

Rectifier : 248 ménages

Remplacer 500 ménages par 248 ménages.

1. Distribution marginale du nombre d'enfants :

Y	1	2	3
Fréquence en %	58,06	15,73	26,21

2. Distribution marginale des dépenses annuelles :

X	Entre 0 et 100	Entre 100 et 200	Entre 200 et 300
Fréquence en %	53,23	21,37	25,40

3.a) Proportion des ménages d'un enfant : $\frac{71+37+36}{248} \times 100 = 58{,}06\ \%$

b) Proportion des ménages dont la dépense annuelle en fournitures scolaires est comprise entre 100 000 FCFA et 200 000 FCFA : : $\frac{37+4+12}{248} \times 100 = 21{,}37\ \%$

Exercice 31(Exo 32)

1. Déterminons la valeur de α.
   On a : $y = ax + b$ avec $a = 9$ et $b = 0{,}6$. Or $b = \bar{y} - a\bar{x}$.
   On a : $\bar{x} = 1{,}6$ et $\bar{y} = \frac{55+\alpha}{5}$. Par suite : $0{,}6 = \frac{55+\alpha}{5} - 9 \times 1{,}6$. Soit $\alpha = 20$.
2. Déduisons le coefficient de corrélation linéaire.

On sait que $r^2 = a \times a'$ où $a' = \frac{cov(X;Y)}{V(Y)} = \frac{0{,}72}{8} = 0{,}09$. On obtient $r^2 = 9 \times 0{,}09 = 0{,}81$. Donc $r = 0{,}9$.

Exercice 32(Exo 33)

1. Etablissons le tableau donnant les valeurs de z_i en fonction de t_i.
   On a : $z_i = lny_i$ et $t_i = lnx_i$

t_i	10,59	11	11,28	11,51	11,93	12,42	12,89
z_i	10,31	10,52	10,64	10,73	10,92	11,17	11,37

2. Représentons le nuage de point de la série $(t_i; z_i)$. On pourra prendre :
   Sur (OI) : 5 cm pour 1 ; Sur (OJ) : 5 cm pour 1. Origine du repère : $M_0(10; 10)$.
3. Déterminons une équation de la droite de régression de Z en T.

On sait que (D) : $z = at + b$. On a : $\bar{T} = 11{,}46$; $\bar{Z} = 10{,}72$; Cov (Z ;T) = 0,16 ; V(T) = 0,36.

Soit (D) : $z = 0{,}46t + 5{,}43$.

4. Déduisons une relation entre X et Y.

On sait que : $z_i = lny_i$ et $t_i = lnx_i$ donc $z = 0{,}46t + 5{,}43$ signifie que :

$lny = 0{,}46lnx + 5{,}43$. Ainsi $lny = lnx^{0,46} + lne^{5,43}$. Soit $lny = \ln(e^{5,43} \times x^{0,46})$.

Enfin : $y = e^{5,43} \times x^{0,46}$.

5. Déterminons les dépenses mensuelles pour un salaire de 20 000 FCFA.

Pour $x = 20\,000$ on a : $y = 21\,711{,}93\ FCFA$. Donc pour un salaire mensuel moyen de 20 000 FCFA , les dépenses mensuelles moyennes alimentaires sont estimées à 21 710 FCFA.

<u>Exercice 33(Exo 35)</u>

1. Nuage de points de la série $(x_i; y_i)$. On pourra prendre :

Sur (OI) : 1 cm pour 1 ; Sur (OJ) : 1 cm pour 180. Origine du repère : $M_0(0; 180)$.

2. Nuage de points de la série $(x'; y)$ avec $x' = lnx$. On pourra prendre :

Sur (OI) : 1,5 cm pour 0,5 ; Sur (OJ) : 1 cm pour 500. Origine du repère : $M_0(0; 198)$.

Soit le tableau donnant les valeurs de y_i en fonction de x'_i.

x'_i	0	$ln2$	$ln3$	$ln4$	$ln5$	$ln6$	$ln7$	$ln8$	$ln9$	$ln10$	$ln11$	$ln13$
y_i	198	881	1256	1489	1804	1983	2104	2247	2312	2468	2541	2639

3. Déterminons le coefficient de corrélation linéaire de la série $(X'; Y)$
   On a : $r = 0{,}999$.
4. Une équation de la droite de régression de Y en X' est:
   (D) : Y = $972{,}26X' + 200{,}95$.
   5. Déduisons une relation entre X et Y de forme Y = alnX + b.

On a Y = $972{,}26X' + 200{,}95$ or $X' = lnX$ donc : Y = $972{,}26lnX + 200{,}95$ d'où a = 972,26 et b=200,95.

<u>Exercice 34 (Exo 36)</u>

1. Nuage de points :On pourra prendre:
   Abscisse : 1 cm pour 1 mois. Ordonnée : 1 cm pour 2 notes.
2. Les coordonnées du point moyen G : On a : $\bar{X} = 3$; $\bar{Y} = 10{,}8$. Donc G(3 ;10,8).
3. Déterminons la variance et l'écart type de chacune des séries X et Y.
   On a : V(X) =2 donc $\sigma_X = \sqrt{2} = 1{,}41$ et V(Y) = 3,76 donc $\sigma_Y = 1{,}94$.
4. a) Calcul de la covariance : Cov(X ;Y) = 2,6.
   b) Coefficient de corrélation linéaire : $r = 0{,}95$
5. Équation de la droite de régression Y en X. On a : (D) :$y = 1{,}3x + 6{,}9$.
   Si $x = 0$, alors $y = 6{,}9$ alors M(0 ;6,9) et (D)=(MG).

Exercice 35 (Exo 37)

1. Interprétation du nombre 7 du tableau : c'est le pourcentage (ou la proportion) des véhicules dont la puissance est 25 CV et la durée des pneumatiques est de 4000 Km.
2. a) Extrait des séries marginales X et Y puis valeurs de $\bar{X}$ et de $\bar{Y}$.

x_i	20	25	30
Fréquence	38	32	30

y_i	2	3	4
Fréquence	30	31	39

$\bar{X} = 25$ et $\bar{Y} = 3$.

b) Nuage de points des 9 points de coordonnées $(x_i; y_i)$. On pourra prendre :

Sur (OI) : 1 cm pour 5 CV. Sur (OJ) : 1 cm pour 1000 Km. Le point $M_0(15; 0)$ étant pris comme l'origine du repère.

c) Tracé de (D) et détermination d'une équation de la droite (D).

La droite passe le plus près possible des points du graphique de coordonnées (25 ; 3) et (30 ; 4).

On a : (D) :$y = ax + b$ avec $a = \frac{4-3}{30-25} = \frac{1}{5}$ et $b = 3 - \frac{1}{5}(25) = -2$. Donc : (D) :$y = \frac{1}{5}x - 2$.

3. a) Coordonnées du point moyen G. On a ; G(25 ; 3).
   b) Calcul de la variance de X et de Y. On a : V(X)= 16,67 et V(Y) = 0,6819.
   c) Calcul de la covariance. On a : Cov(X ;Y) = −2,614.
   d) Déterminons une équation de la droite de régression Y en X. On obtient :
   (D) : $y = -0{,}16x + 6{,}91$.
   e) Déterminons une équation de la droite de régression X en Y. On obtient :
   (D) : $x = -3{,}83y + 36{,}44$.

4. Calcul du coefficient de corrélation r. On a : $r = -0{,}77$. Comme $r \notin [-1; -0{,}87]$. Il existe une faible relation linéaire entre les deux caractères X et Y. Il va sans dire qu'un ajustement linéaire n'est pas envisageable ou la modélisation n'est pas adéquate.

- **Situations complexes**

Exercice 36(Exo 38)

Suggestion : Prendre le tableau ci-dessous car le tableau du document donne : $r = 0,02$.
Le modèle linéaire n'est donc pas adéquat pour faire des analyses avec justesse.
On doit normalement s'arrêter et faire des recommandations.

Taille	150	160	165	170	179
Poids	50	55	57	60	70

Pour savoir si la sensibilisation a été efficace ou non, je vais utiliser les statistiques à deux variables. Je vais orienter ma démarche comme suit :

- Je calcule le coefficient de corrélation linéaire et je détermine la droite de régression de Y en X si possible
- Je détermine le poids pour une taille de 185 cm
- Je conclus quant à la préoccupation de l'ONG.

- Je calcule le coefficient de corrélation linéaire et détermine une équation de la droite de régression de Y en X

  Soit (D) cette droite telle que : (D) : $y = ax + b$ avec $a = \frac{cov(X;Y)}{V(X)}$ et $b = \bar{Y} - a\bar{X}$.

- Je calcule $\bar{X}$ puis $\bar{Y}$.

  On a : $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i}{N} = \frac{824}{5} = 164{,}8$ cm et $\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{5} y_i}{N} = \frac{292}{5} = 58{,}4$ Kg.

- Je calcule V(X), V(Y) puis cov(X ;Y)

  V(X) = $\frac{\sum_{i=1}^{5} {x_i}^2}{N} - \bar{X}^2 = \frac{136266}{5} - 164{,}8^2 = 94{,}16$

  V(Y) = 44,24

  Cov(X ;Y) = $\frac{\sum_{i=1}^{5} x_i y_i}{N} - \bar{X}\bar{Y} = 62{,}68$

- Je calcule le coefficient de corrélation linéaire : $r = \frac{cov(X;Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$

  On a : $r = 0{,}97$.

- J'exprime l'équation de la droite (D) :

  (D) : $y = 0{,}67x + 51{,}3$.

- Je détermine le poids pour une taille de 185 cm.

  Pour $x = 185, on\ a\ \ y = 0{,}67x + 51{,}3 = 72{,}65$ Kg.

Ainsi une personne ayant la taille de 185 cm a un poids estimé à 72,65 Kg. Puisque ce poids est inférieur à 90 Kg, donc la sensibilisation a été une réussite.

<u>Exercice 37(Exo 39)</u>

Pour trouver la date, je vais utiliser les statistiques à deux variables. Je vais orienter ma démarche comme suit :

- Je calcule le coefficient de corrélation linéaire et je détermine la droite de régression de Y en X si possible
- Je détermine le rang pour 3000 adhérents.
- Je donne une estimation de la date.

- Je calcule le coefficient de corrélation linéaire et détermine une équation de la droite de régression de Y en X

  Soit (D) cette droite telle que : (D) : $y = ax + b$ avec $a = \frac{cov(X;Y)}{V(X)}$ et $b = \bar{Y} - a\bar{X}$.

- Je calcule $\bar{X}$ puis $\bar{Y}$.

  On a : $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{12} x_i}{N} = \frac{78}{12} = 6{,}5$ et $\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{12} y_i}{N} = \frac{18890}{12} = 1574{,}167$.

- Je calcule V(X), V(Y) puis cov(X ;Y)

  V(X) = $\frac{\sum_{i=1}^{12} {x_i}^2}{N} - \bar{X}^2 = \frac{650}{12} - 6{,}5^2 = 11{,}917$

  V(Y) = 96 124,181521

  Cov(X ;Y) = $\frac{\sum_{i=1}^{5} x_i y_i}{N} - \bar{X}\bar{Y} = 1025{,}42$.

- Je calcule le coefficient de corrélation linéaire : $r = \frac{cov(X;Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$

  On a : $r = 0{,}95809$.

  Le modèle linéaire est justifié pour faire les estimations car 0,87$\ll |r| \ll$ 1

  Mais si on continue :

- J'exprime l'équation de la droite (D) :
  On obtient : $a = 86{,}048$ et $b = 1014{,}84$.
  Donc : (D) : $y = 86{,}048\,x + 1014{,}84$.

- Je détermine le rang du mois pour $y = 3000$.
  Pour $y = 3000$, on a : $x = 23{,}07$. Le rang cherché est environ 23.

Ainsi la date probable de réception de ce don est prévue pour novembre 2019.

12 ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Découverte des habiletés

Activité 1 : Notion d'équation différentielle

Corrigé

f est une primitive de g sur $]0;+\infty[\Rightarrow \forall x \epsilon]0;+\infty[\,, f'(x) = g(x)$.

$$f'(x) = g(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{x}\,, x\epsilon]0;+\infty[$$

$$\Rightarrow f(x) = 2lnx + k, k \in IR$$

$$f(e) = 0 \Rightarrow k = -2$$

D'où la fonction f est définie par $x\epsilon]0;+\infty[\,, f(x) = 2lnx - 2$.

Exercices de fixation

Exercice 1

Corrigé

Toute équation dont l'inconnue est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, dans laquelle apparaissent l'inconnue et des dérivées successives de l'inconnue s'appelle une équation différentielle.

Exercice 2

Corrigé

$y' + 4 = 0$; $y'' + 2y' + y = 5$.

Activité 2 : Equations différentielles du type $y' = ay$ (*a* nombre réel)

Corrigé

1. $f(x) = ke^{ax}$. Alors : $f'(x) = ake^{ax} = af(x)$.
   Donc f est une solution de (E): $y' = ay$.
2. a) $h(x) = e^{-ax}\,g(x)$, où g est une solution de (E).
      On a : $h'(x) = -ae^{-ax}g(x) + e^{-ax}\,g'(x)$.
   b) Justifions que la fonction h est constante.
      $h'(x) = -ae^{-ax}g(x) + e^{-ax}\,g'(x)$.
      g étant solution de (E), on a : $g'(x) = ag(x)$.
      Ainsi : $h'(x) = -ae^{-ax}g(x) + e^{-ax}\,g'(x) = -ae^{-ax}g(x) + e^{-ax} \times ag(x) = 0$.
      $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = 0$.
      Donc, h est une fonction constante.
      On a : $e^{-ax}\,g(x) = k$, où $k \in \mathbb{R}$.
      Ce qui entraine : $g(x) = ke^{ax}$, où $k \in \mathbb{R}$.
3. Les solutions de l'équation différentielle (E): $y' = ay$, sont les fonctions f définies par :
   $f(x) = ke^{ax}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Exercices de fixation

Exercice 3

Corrigé

Réponse A

Exercice 4

Corrigé

Réponse B

Activité 3 Equation différentielle du type $y' = ay + b,\ a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}$

Corrigé

Soit l'équation différentielle $(F): y' = ay + b$.

1. $g(x) = -\frac{b}{a}$. On a : $g'(x) = 0$.
   D'autre part : $ag(x) + b = -b + b = 0$.
   On a ainsi : $g'(x) = ag(x) + b$.
   Donc, la fonction g une solution de l'équation différentielle (F).
2. f est solution de $(F) \Leftrightarrow\ f'(x) = af(x) + b$.
   $\Leftrightarrow\ f'(x) - af(x) = b$.
   Or : $g'(x) = ag(x) + b$. Donc : $g'(x) - ag(x) = b$.
   On en déduit que : f est solution de $(F) \Leftrightarrow\ f'(x) - af(x) = g'(x) - ag(x)$.
3. Sachant que : $f'(x) - af(x) = g'(x) - ag(x)$, on a : $f'(x) - g'(x) = af(x) - ag(x)$.
   Donc : $(f - g)'(x) = a(f - g)(x)$.
   On en déduit que $f - g$ est solution de l'équation $(E'): y' = ay$.
4. Les solutions de (E') sont les fonctions de la forme : $x \longmapsto ke^{ax}$, avec $k \in \mathbb{R}$.
5. Les solutions de (F) sont les fonctions f telles que $f - g$ soient solutions de (E').
   On a donc : $f(x) - g(x) = ke^{ax}$. D'où : $f(x) = ke^{ax} + g(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$.
   Ainsi, les solutions de (F) sont les fonctions f définies par : $f(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$, où $k \in \mathbb{R}$.

Exercices de fixation

Exercice 5

Corrigé

Réponse A

Exercice 6

Corrigé

Réponse C

Activité 4 : Equation différentielle du type $y'' = 0$

Corrigé

Soit l'équation différentielle (K): $y'' = 0$.

1. Si la dérivée seconde d'une fonction est nulle, sa dérivée première est constante.
   Dans ce cas, cette fonction est un polynôme de 1^er degré, c'est-à-dire une fonction affine.
2. $h(x) = ax + b$.
   On a : $h'(x) = a$ et $h''(x) = 0$.
   On en déduit que h est solution de (K).

Exercice de fixation

Exercice 7

Corrigé

Réponse B

Exercice 8

Corrigé

$y' = 1$, d'où $y'' = 0$.

Donc, la fonction $x \mapsto x + 8$ est une solution de l'équation différentielle $y'' = 0$.

Activité 5 : Equation différentielle du type $y'' = w^2y$, $w \in \mathbb{R}^*$.

Corrigé

Soit l'équation différentielle (P): $y'' = w^2y$, $w \in \mathbb{R}^*$.

1. $f(x) = e^{wx}$ et $g(x) = e^{-wx}$.
   - $f'(x) = we^{wx}$ et $f''(x) = w^2e^{wx}$. D'où : $f''(x) = w^2f(x)$.
   - $g'(x) = -we^{-wx}$ et $g''(x) = w^2e^{-wx}$. D'où : $g''(x) = w^2g(x)$.

   Donc, les fonctions f et g sont des solutions de l'équation différentielle (P).
2. On a : $af''(x) + bg''(x) = aw^2e^{wx} + bw^2e^{-wx} = w^2(ae^{wx} + be^{-wx})$

   $$af''(x) + bg''(x) = w^2(af(x) + bg(x)).$$

   On en déduit que la fonction : $x \longmapsto af(x) + bg(x)$ est une solution de (P).
3. Ainsi, les solutions de (P) sont les fonctions de la forme : $x \longmapsto ae^{wx} + be^{-wx}$, où $(a; b) \in \mathbb{R}^2$.

Exercices de fixation

Exercice 9

Corrigé

Réponse C

Exercice10

Corrigé

- $y'' - y = 0 \Leftrightarrow y'' = y$.

Les solutions de (E) sont les fonctions: $x \mapsto ae^{x} + be^{-x}$, où $(a; b) \in \mathbb{R}^2$.

- $y'' - 3y = 0 \Leftrightarrow y'' = 3y$.

Les solutions de (E) sont les fonctions: $x \mapsto ae^{x\sqrt{3}} + be^{-x\sqrt{3}}$, où $(a; b) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice11

Corrigé

a) $4y'' - y = 0 \Leftrightarrow y'' = \frac{1}{4}y$.

Les solutions de (E) sont les fonctions: $x \mapsto ae^{\frac{1}{2}x} + be^{-\frac{1}{2}x}$, où $(a; b) \in \mathbb{R}^2$.

b) $16y'' - 9y = 0 \Leftrightarrow y'' = \frac{9}{16}y$.

Les solutions de (E) sont les fonctions: $x \mapsto ae^{\frac{3}{4}x} + be^{-\frac{3}{4}x}$, où $(a; b) \in \mathbb{R}^2$.

c) $4y'' - 49y = 0 \Leftrightarrow y'' = \frac{49}{4}y$.

Les solutions de (E) sont les fonctions: $x \mapsto ae^{\frac{7}{2}x} + be^{-\frac{7}{2}x}$, où $(a; b) \in \mathbb{R}^2$.

Activité 6 : Equation différentielle du type $y'' = -w^2y, , w \in \mathbb{R}$

Corrigé

Soit l'équation différentielle (T): $y'' = -w^2y, w \in \mathbb{R}^*$.

1. $f(x) = \sin(wx)$ et $g(x) = \cos(wx)$.
   - $f'(x) = w\cos(wx)$ et $f''(x) = -w^2\sin(wx)$. D'où : $f''(x) = -w^2f(x)$.
   - $g'(x) = -w\sin(wx)$ et $g''(x) = -w^2\cos(wx)$. D'où : $g''(x) = -w^2g(x)$.

   Donc, les fonctions f et g sont des solutions de l'équation différentielle (T).

2. On a : $af''(x) + bg''(x) = -aw^2\sin(wx) - bw^2\cos(wx) = -w^2(a\sin(wx) + b\cos(wx))$

   $$af''(x) + bg''(x) = -w^2(af(x) + bg(x)).$$

   On en déduit que la fonction : $x \longmapsto af(x) + bg(x)$ est une solution de (T).

3. Ainsi, les solutions de (T) sont les fonctions de la forme : $x \longmapsto a\sin(wx) + b\cos(wx)$, où $(a; b) \in \mathbb{R}^2$.

Exercices de fixation

Exercice12

Corrigé

a) (E): $y'' + y = 0 \Leftrightarrow y'' = -y$.

Les solutions de (E) sont les fonctions: $x \mapsto acosx + bsinx$, où $(a; b) \in \mathbb{R}^2$.

b) $(E): y'' + 4y = 0 \Leftrightarrow y'' = -4y$.

Les solutions de (E) sont les fonctions: $x \mapsto acos2x + bsin2x$, où $(a; b) \in \mathbb{R}^2$.

c) $(E): y'' + 9y = 0 \Leftrightarrow y'' = -9y$.

Les solutions de (E) sont les fonctions: $x \mapsto acos3x + bsin3x$, où $(a; b) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice13

Corrigé

a) (E): $4y'' + y = 0 \Leftrightarrow y'' = -\frac{1}{4}y$.

Les solutions de (E) sont les fonctions: $x \mapsto acos\frac{1}{2}x + bsin\frac{1}{2}x$, où $(a; b) \in \mathbb{R}^2$.

b) $16y'' + 9y = 0 \Leftrightarrow y'' = -\frac{9}{16}y$.

Les solutions de (E) sont les fonctions: $x \mapsto acos\ \frac{3}{4}x + bsin\frac{3}{4}x$, où $(a; b) \in \mathbb{R}^2$.

c) $4y'' + 49y = 0 \Leftrightarrow y'' = -\frac{49}{4}y$.

Les solutions de (E) sont les fonctions: $x \mapsto acos\frac{7}{2}x + bsin\frac{7}{2}x$, où $(a; b) \in \mathbb{R}^2$.

Des questions d'évaluation

Question 1 : Comment résoudre une équation différentielle du type $y' = ay$, $a \in \mathbb{R}$?

Exercice 1

Résous l'équation différentielle (E_1): $y' = 5y$

Solution commentée

Cette équation est du type $y' = ay$ avec $a = 5$. Donc, les solutions de (E_1) sont les fonctions : $x \mapsto ke^{5x}$ $avec\ k \in \mathbb{R}$.

Exercice 2

Résous l'équation différentielle (E_2) : $2y' + 3y = 0$

Solution commentée

L'équation (E_2) est équivalente à l'équation différentielle (E'_2) : $y' = -\frac{3}{2}y$.

L'équation (E'_2) est du type $y' = ay$ avec $a = -\frac{3}{2}$. D'où les solutions sont les fonctions :

$x \mapsto ke^{-\frac{3}{2}x}$, $k \in \mathbb{R}$.

Exercice non corrigé

Résous l'équation différentielle $3y' + 2y = 0$.

Corrigé

L'équation différentielle $3y' + 2y = 0$ est équivalente à l'équation différentielle :

$y' = -\frac{2}{3}y$. D'où les solutions sont les fonctions : $x \mapsto ke^{-\frac{2}{3}x}$, $k \in \mathbb{R}$.

Question 2: Comment déterminer la solution de l'équation différentielle $y' = ay$ qui prend la valeur y_0 en x_0 ?

<u>Exercice</u>

On considère l'équation différentielle (E) : $y' = -3y$

Détermine la solution de (E) qui prend la valeur $\frac{1}{e^2}$ en 1.

<u>Solution commentée</u>

Soit l'équation différentielle (E) : $y' = -3y$

On détermine d'abord la solution générale. $f_k : x \mapsto ke^{-3x}$

On résout l'équation $f_k(1) = \frac{1}{e^2}$

$f_k(1) = \frac{1}{e^2} \Leftrightarrow ke^{-3} = \frac{1}{e^2} = e^{-2}$

$\Leftrightarrow k = e.$

D'où la solution de (E) qui prend la valeur $\frac{1}{e^2}$ en 1 est la fonction f définie par : $f(x) = ee^{-3x} = e^{-3x+1}$

Exercice non corrigé

On donne l'équation (E) : $y' = 4y$

Détermine la solution de (E) qui prend la valeur 3 en -2.

Corrigé

Soit l'équation différentielle (E) : $y' = 4y$

On détermine d'abord la solution générale $f_k : x \mapsto ke^{4x}$.

On résout l'équation $f_k(-2) = 3$.

$f_k(-2) = 3 \Leftrightarrow ke^{-8} = 3$

$\Leftrightarrow k = 3e^8.$

D'où la solution de (E) qui prend la valeur 3 en -2 est la fonction f définie par : $f(x) = 3e^{8+4x}$.

Question 3 : Comment résoudre une équation différentielle du type : $y' = ay + b$ avec a et b réels non nuls ?

<u>Exercice</u>

Résous l'équation (E) : $y' = 2y + 7$

Solution commentée

L'équation (E) est une équation différentielle du type $y' = ay + b$ avec $a = 2$ et $b = 7$

D'où les solutions sont les fonctions f_k définies par : $f_k(x) = ke^{2x} - \frac{7}{2}$ avec $k \in IR$.

Exercice non corrigé

Résous l'équation différentielle : (E): $y' = 3y - 2$.

Corrigé

L'équation différentielle (E) est du type $y' = ay + b$ avec $a = 3$ et $b = -2$

D'où les solutions sont les fonctions f_k définies par : $f_k(x) = ke^{3x} + \frac{2}{3}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 4 : Comment déterminer la solution d'une équation différentielle du type $y' = ay + b$ qui prend la valeur y_0 en x_0 ?

Exercice

On donne l'équation différentielle (E) : $y' = -2y + 3$.

Détermine la solution de (E) qui prend la valeur 2 en 0.

Solution commentée

L'équation (E) a pour solution générale la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f_k(x) = ke^{-2x} + \frac{3}{2},\ k \in \mathbb{R}$

La solution de (E) qui prend la valeur 2 en 0 est la fonction f telle que :

$f(x) = ke^{-2x} + \frac{3}{2}$ et $f(0) = 2$

$f(0) = 2 \Leftrightarrow k + \frac{3}{2} = 2 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$ d'où on a : $f: x \mapsto \frac{1}{2}e^{-2x} + \frac{3}{2}$.

Exercice non corrigé

Détermine la solution de l'équation $y' = 5y - 3$ qui prend la valeur $e - \frac{3}{2}$ en $\frac{-1}{5}$.

Corrigé

L'équation $y' = 5y - 3$ a pour solution générale la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f_k(x) = ke^{5x} + \frac{3}{5},\ k \in \mathbb{R}$.

La solution qui prend la valeur $e - \frac{3}{2}$ en $\frac{-1}{5}$ est la fonction f telle que:

$f(x) = ke^{5x} + \frac{3}{5}$ et $f\left(\frac{-1}{5}\right) = e - \frac{3}{2}$

$f\left(\frac{-1}{5}\right) = e - \frac{3}{5} \Leftrightarrow ke^{-1} + \frac{3}{5} = e - \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow ke^{-1} = e - \frac{3}{2} - \frac{3}{5}$

$$\Leftrightarrow ke^{-1} = e - \frac{21}{10}$$

$$\Leftrightarrow k = e\left(e - \frac{21}{10}\right)$$

d'où on a : $f : x \mapsto \left(e - \frac{21}{10}\right) e^{5x+1} + \frac{3}{5}$.

Question 5 : Comment déterminer la solution de l'équation différentielle du type $y'' = 0$ qui vérifie les conditions suivantes : y $(x_0) = y_0$ *et* y $(x_1) = y_1$?

Exercice

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' = 0$

Détermine la solution f de (E) telle que : $f(1) = -1 \ et \ f(2) = 1$.

Solution commentée

La solution générale de (E) est la fonction F définie sur IR par : $F(x) = ax + b, avec\ a\ et\ b$ des nombres réels.

On détermine les nombres réels a et b tels que : $F\ (1) = -1$ et $F\ (2) = 1$.

$F\ (1) = -1$ et $F\ (2) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = -1 \\ 2a + b = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} a + b = -1 \\ 2a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \end{cases}$

D'où la solution cherchée est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x - 3$.

Exercice non corrigé

Détermine la solution f de l'équation différentielle $y'' = 0$ telle que : $f\ (\frac{1}{3}) = 1$ et $f\ (2) = -4$.

Corrigé

La solution générale de (E) est la fonction F définie sur IR par : $F(x) = ax + b$, avec $a\ et\ b$ des nombres réels.

On détermine les nombres réels a et b tels que : $F\ (\frac{1}{3}) = 1$ et $F\ (2) = -4$.

$F\ (\frac{1}{3}) = 1$ et $F\ (2) = -4 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}a + b = 1 \\ 2a + b = -4 \end{cases}$

$\begin{cases} -\frac{1}{3}a - b = -1 \\ 2a + b = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 2 \end{cases}$

D'où la fonction cherchée est la fonction f définie sur IR par : $f(x) = -3x + 2$.

Question 6: Comment résoudre une équation différentielle du type : $y'' = my$, avec m nombre réel ?

Exercice

Résous chacune des équations différentielles suivantes :

$(E_1) : y'' = 2y$; $(E_2) : y'' = -9y$

Solution commentée

(E_1) est de la forme : $y'' = w^2y$, avec $w = \sqrt{2}$ d'où les solutions de (E_1) sont les fonctions f telles que : $f(x) = ae^{x\sqrt{2}} + be^{-x\sqrt{2}}$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. .

(E_2) est de la forme : $y'' = -w^2y$ avec $w = 3$. D'où les solutions de (E_2) sont les fonctions f telles que : $f(x) = a\cos(3x) + b sin(3x)$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

Exercice non corrigé

Résous chacune des équations différentielles suivantes

$(E_3) : y'' = 4y$; $(E_4) : y'' = -5y$.

Corrigé

(E_3) est de la forme : $y'' = w^2y$, avec $w = 2$. D'où les solutions de (E_3) sont les fonctions f telles que : $f(x) = ae^{2x} + be^{-2x}$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

(E_4) est de la forme : $y'' = -w^2y$ avec $w = \sqrt{5}$ d'où les solutions de (E_4) sont les fonctions f telles que : $f(x) = a\cos(x\sqrt{5}) + b sin(x\sqrt{5})$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

Question 7 : Comment déterminer la solution f de l'équation différentielle $y'' = my$, qui vérifie $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = z_0$? ($y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = z_0$)

Exercice 1

On considère l'équation différentielle $(E_5) : y'' = -4y$.

Détermine la solution f de (E_5) qui vérifie $f\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{5}{2}$ et $f'\left(\frac{\pi}{8}\right) = -3$.

Solution commentée 1

La solution générale est la fonction F telle que : $F(x) = a\cos 2x + b sin\, 2x \quad a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

Déterminons a et b tels que $F\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{5}{2}$ et $F'\left(\frac{\pi}{8}\right) = -3$.

$$F\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{5}{2} \Rightarrow a\cos\frac{\pi}{4} + b sin\,\frac{\pi}{4} = \frac{5}{2}.$$

$$\Rightarrow a\frac{\sqrt{2}}{2} + b\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5}{2}$$

$$F'(x) = -2a\sin 2x + 2b cos\, 2x$$

$$F'\left(\frac{\pi}{8}\right) = -3 \Rightarrow -2a\frac{\sqrt{2}}{2} + 2b\frac{\sqrt{2}}{2} = -3$$

$$\begin{cases} a\frac{\sqrt{2}}{2}+b\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5}{2} \\ -2a\frac{\sqrt{2}}{2}+2b\frac{\sqrt{2}}{2} = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b = \frac{5\sqrt{2}}{2} \\ -a+b = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ b = $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et a = $2\sqrt{2}$. D'où la solution particulière f cherchée est définie par : $f(x) = 2\sqrt{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{2} sin\ 2x = \sqrt{2}\left(2\cos 2x + \frac{1}{2} sin\ 2x\right)$.

Exercice 2

On considère l'équation différentielle (E_6) : $y'' = 3y$.

Détermine la solution g de (E_6) qui vérifie $g(0) = 2$ et $g'(0) = -\sqrt{3}$.

Solution commentée 2

La solution générale est la fonction F telle que : $F(x) = ae^{x\sqrt{3}} + be^{-x\sqrt{3}}$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

Déterminons a et b tels que $F(0) = 2$ et $F'(0) = -\sqrt{3}$.

On a : $F'(x) = a\sqrt{3}e^{x\sqrt{3}} - b\sqrt{3}e^{-x\sqrt{3}}$.

$F(0) = 2 \Rightarrow a + b = 2$

$F'(0) = -\sqrt{3} \Rightarrow a\sqrt{3} - b\sqrt{3} = -\sqrt{3}$

$$\begin{cases} a+b = 2 \\ a\sqrt{3} - b\sqrt{3} = -\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b = 2 \\ a-b = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{2} \text{ et } b = \frac{3}{2} .$$

D'où la solution particulière g cherchée est définie par: $g(x) = \frac{1}{2}e^{x\sqrt{3}} + \frac{3}{2}e^{-x\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\left(e^{x\sqrt{3}} + 3e^{-x\sqrt{3}}\right)$.

Exercice non corrigé 1

On considère l'équation différentielle (E_6) : $y'' = -25y$.

Détermine la solution f de (E_6) qui vérifie : $f(\frac{\pi}{3}) = 2$ et $f'(\frac{\pi}{3}) = 1$.

Corrigé

La solution générale est la fonction F telle que : $F(x) = acos\ 5x + bsin\ 5x$ $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

Déterminons a et b tels que $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2$ et $F'(\frac{\pi}{3}) = 1$.

$F(\frac{\pi}{3}) = 2 \Rightarrow acos\frac{5\pi}{3} + bsin\ \frac{5\pi}{3} = 2$

$\Rightarrow \frac{1}{2}a - b\frac{\sqrt{3}}{2} = 2$

$F'(x) = -5asin5x + 5bcos5x$

$F'(\frac{\pi}{3}) = 1 \Rightarrow 5a\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}b = 1$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}a - b\frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \\ 5a\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}b = 1 \end{cases} \Rightarrow b = \frac{1-10\sqrt{3}}{10} \text{ et } a = \frac{10+\sqrt{3}}{10} .$$

D'où la solution particulière f cherchée est définie par : $f(x) = \frac{10+\sqrt{3}}{10}\cos 5x + \frac{1-10\sqrt{3}}{10} sin\ 5x$.

Exercice non corrigé 2

On considère l'équation (E) : $y'' = y$.

Détermine la solution g de (E) qui vérifie $g(1) = e$ et $g'(1) = 2e$.

Corrigé

L'équation (E) a pour solution générale la fonction F telle que :

$F(x) = ae^{x} + be^{-x}$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

$F'(x) = ae^{x} - be^{-x}$

$$\begin{cases} F(1) = e \\ F'(1) = 2e \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ae + be^{-1} = e \\ ae - be^{-1} = 2e \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = -\frac{e^2}{2} \end{cases}$$

D'où la fonction g est définie sur IR par : $g(x) = \frac{3}{2}e^{x} - \frac{e^2}{2}e^{-x} = \frac{1}{2}(3e^{x} - e^{-x+2})$.

MES SEANCES D'EXERCICES

Exercices de fixation

Justifier qu'une fonction est solution d'une équation différentielle

Exercice 1

Corrigé

$f(x) = 2e^{x\sqrt{2}} \Longrightarrow f'(x) = 2\sqrt{2}e^{x\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,(2e^{x\sqrt{2}}) = \sqrt{2}\,f(x)$. D'où f est une solution de (E).

Exercice 2

Corrigé

$g(x) = 2e^{1+5x} - \frac{3}{5} \Longrightarrow g'(x) = 10e^{1+5x} = 5(2e^{1+5x} - \frac{3}{5}) + 3 = 5g(x) + 3$. D'où g est une solution de (E).

Exercice 3

Corrigé

$d(x) = x\sqrt{5} + ln3 \Longrightarrow d'(x) = \sqrt{5} \Longrightarrow d''(x) = 0$ d'où d est une solution de (E)

Exercice 4

Corrigé

$h(x) = 2e^{2x\sqrt{2}} - 3e^{-2x\sqrt{2}} \Longrightarrow h'(x) = 4\sqrt{2}e^{2x\sqrt{2}} + 6\sqrt{2}e^{-2x\sqrt{2}}$

$\Longrightarrow h''(x) = 16e^{2x\sqrt{2}} - 24e^{-2x\sqrt{2}} = 8(2e^{2x\sqrt{2}} - 3e^{-2x\sqrt{2}})$

$= 8h(x)$. D'où h est une solution de (E).

Exercice 5

Corrigé

$l(x) = \pi \cos 13x + \sqrt{2} \sin 13x \Rightarrow l'(x) = -13\pi \sin 13x + 13\sqrt{2} \cos 13x$

$$\Rightarrow l''(x) = -169\pi cos 13x - 169\sqrt{2}\, sin\, 13x$$

$$= -169(\pi \cos 13x + \sqrt{2} \sin 13x) = -169 l(x).$$

D'où l est une solution de (E).

Résoudre une équation différentielle du type $y' = ay$

Exercice 6

Corrigé

L'équation différentielle $y' = 3y$ a pour solution les fonctions f_k définies sur IR par :

$f_k(x)$= ke^{3x}, k nombre réel.

Exercice 7

Corrigé

L'équation différentielle $y' = -4y$ a pour solution les fonctions f_k définies sur IR par :

$f_k(x) = ke^{-4x}$, k nombre réel.

Déterminer une solution particulière d'une équation différentielle du type $y' = ay$

Exercice 8

Corrigé

La solution f qui vérifie f (1) = e est définie par : $f(x) = e^{2x-1}$

Exercice 9

Corrigé

La solution g de (E) qui vérifie g (3) = 5 est définie par :$g(x) = 5e^{2-\frac{2}{3}x}$.

Résoudre une équation différentielle du type $y' = ay + b, a \neq 0$

Exercice 10

Corrigé

L'équation différentielle $y' = 2y - 5$ a pour solution les fonctions f_k définies sur IR par :

$f_k(x) = ke^{2x} + \frac{5}{2}$, k nombre réel.

Exercice 11

Corrigé

L'équation différentielle $y' = 4y + 3$ a pour solution les fonctions f_k définies sur IR par :

$f_k(x) = ke^{4x} - \frac{3}{4}$, k nombre réel.

Déterminer une solution particulière d'une équation différentielle du type $y' = ay + b$, $a \neq 0$

Exercice 12

Corrigé

La solution f de cette équation différentielle qui vérifie $f(0) = -\frac{2}{5}$ est telle que : $f(x) = -\frac{4}{5}e^{5x} + \frac{2}{5}$.

Exercice 13

Corrigé

La solution g de (E) qui vérifie $g(-\frac{1}{3}) = 1$ est telle que: $g(x) = \frac{1}{3}(4 - e^{-1-3x})$.

Déterminer une solution particulière de l'équation différentielle $y'' = 0$.

Exercice 14

Corrigé

1. $f(x) = -2x + 5$
2. $g(x) = x$
3. $h(x) = 2$

Résoudre une équation différentielle de type $y'' = w^2y$

Exercice 15

Corrigé

L'équation différentielle: $y'' = 4y$ a pour solutions les fonctions : $x \mapsto ae^{2x} + be^{-2x}$, a et b étant des nombres réels.

Exercice 16

Corrigé

L'équation différentielle $y'' = 5y$ a pour solutions les fonctions : $x \mapsto ae^{\sqrt{5}x} + be^{-\sqrt{5}x}$, a et b étant des nombres réels.

Déterminer une solution particulière d'une équation différentielle de type $y'' = w^2 y$

Exercice 17

Corrigé

Soit F la solution générale on a : $F(x) = ae^{\frac{1}{2}x} + be^{-\frac{1}{2}x}$.

$F'(x) = \frac{1}{2}ae^{\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2}be^{-\frac{1}{2}x}$, $F(0) = a + b$ et $F'(0) = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$.

On a le système suivant : $\begin{cases} a + b = 4 \\ \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\mathrm{b} = 1 \end{cases}$.

La résolution de ce système donne $a = 3$ et $b = 1$. Donc la solution f qui vérifie $f(0) = 4$ et $f'(0) = 1$ est telle que : $f(x) = 3e^{\frac{1}{2}x} + e^{-\frac{1}{2}x}$.

Exercice 18

Corrigé

Soit F la solution générale, on a : $F(x) = ae^{\frac{3}{\sqrt{2}}x} + be^{-\frac{3}{\sqrt{2}}x}$, $F'(x) = a\frac{3}{\sqrt{2}}e^{\frac{3}{\sqrt{2}}x} - b\frac{3}{\sqrt{2}}e^{-\frac{3}{\sqrt{2}}x}$.

$F(\sqrt{2}) = ae^{3} + be^{-3}$ et $F'(\sqrt{2}) = \frac{3}{\sqrt{2}}ae^{3} - \frac{3}{\sqrt{2}}be^{-3}$.

On a le système suivant : $\begin{cases} \mathrm{a}e^{3} + \mathrm{b}e^{-3} = 1 \\ \frac{3}{\sqrt{2}}ae^{3} - \frac{3}{\sqrt{2}}\mathrm{b}e^{-3} = 0 \end{cases}$.

La résolution de ce système donne $a = \frac{e^{-3}}{2}$ $et\ b = \frac{e^{3}}{2}$. Donc, la solution g qui vérifie $g(\sqrt{2}) = 1$ et $g'(\sqrt{2}) = 0$ est telle que : $g(x) = \frac{e^{-3}}{2}e^{\frac{3}{\sqrt{2}}x} + \frac{e^{3}}{2}e^{-\frac{3}{\sqrt{2}}x}$.

Résoudre une équation différentielle de type $y'' = -w^2 y$

Exercice 19

Corrigé

L'équation différentielle : $y'' = -3y$ a pour solutions les fonctions : $x \longmapsto acos\sqrt{3}x + bsin\sqrt{3}x$, $a\ et\ b$ étant des nombres réels.

Exercice 20

Corrigé

L'équation différentielle : $y'' = -49y$ a pour solutions les fonctions : $x \longmapsto acos7x + bsin7x$, a et b étant des nombres réels.

Déterminer une solution particulière d'une équation différentielle du type $y'' = -w^2 y$

Exercice 21

Corrigé

Soit F la solution générale, on a : $F(x) = a\ cos3x + b\ sin3x$.

$F'(x) = -3asin3x + 3bcosx, F(\frac{\pi}{3}) = -a$ et $F'(\frac{\pi}{3}) = -3b$.

$F(\frac{\pi}{3}) = 1$ et $F'(\frac{\pi}{3})$= -6 donne $a = -1$ et $b = 2$. D'où la solution f qui vérifie $f(\frac{\pi}{3})$ = 1 et $f'(\frac{\pi}{3}) = -6$ est telle que $f(x) = -cos3x + 2\ sin3x$.

Exercice 22

Corrigé

Soit G la solution générale, on a : $G(x) = a\ cosx + b\ sinx$.

G'$(x) = -asinx + bcosx, G(\frac{\pi}{6}) = a\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}b$ et $G'(\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}a + b\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$G(\frac{\pi}{6}) = 1$ et $G'(\frac{\pi}{6})$= $\sqrt{3}$ donne $a = 0\ et\ b = 2$ d'où la solution g qui vérifie $g(\frac{\pi}{6})$ = 1 et $g'(\frac{\pi}{3})$ =$\sqrt{3}$ est telle que $g(x) = 2\ sinx$.

Exercices de renforcement / approfondissement

Exercice 23

Corrigé

1. $3y' + 2y = 0 \Leftrightarrow y' = -\frac{2}{3}y$. D'où (E) est une équation différentielle de type $y' = ay$, avec $a = -\frac{2}{3}$.

2. On en déduit que les solutions de (E) sont les fonctions f_k définies sur IR par : $f_k(x)$=$ke^{-\frac{2}{3}x}$, k étant un nombre réel.

3. La solution de (E) dont la représentation graphique passe par le point de coordonnées (0 ;2) est la fonction f telle que : $f(0) = 2$.

$f(0) = 2 \Rightarrow k = 2$. D'où: $f(x) = 2e^{-\frac{2}{3}x}$.

Exercice 24

Corrigé

1. $4y' - 3y + 8 = 0 \Leftrightarrow y' = \frac{3}{4}y - 2$ d'où (E) est une équation différentielle du type $y' = ay + b$, avec $a = \frac{3}{4}$ et $b = -2$.

2. On en déduit que les solutions de (E) sont les fonctions g_k définies sur IR par : $g_k(x) = ke^{\frac{3}{4}x} + \frac{8}{3}$, k étant un nombre réel.

3. La solution g de (E) telle que le nombre dérivé de g en 0 est 4 est telle que : $g'(0) = 4$.

$g'(x) = \frac{3}{4}\ ke^{\frac{3}{4}x}$, d'où $g'(0) = 4 \Rightarrow k = \frac{16}{3}$.

Donc, la fonction g est telle que : $g(x) = \frac{16}{3}e^{\frac{3}{4}x} + \frac{8}{3}$.

Exercice 25

Corrigé

L'équation différentielle (E) : $y'' = 0$ a pour solution générale les fonctions :

$x \longmapsto ax + b$, a et b étant des nombres réels.

La représentation graphique de h passe par le point A (3 ;0) d'où : $h(3) = 0$.

La droite (D) d'équation $2x + 3y + 1 = 0$ a pour coefficient directeur $-\frac{2}{3}$.

La représentation graphique de h est une droite et n'a aucun point commun avec la droite (D) de coefficient directeur $-\frac{2}{3}$, d'où elle a pour coefficient directeur $-\frac{2}{3}$.

On déduit de tout ce qui précède que : $a = -\frac{2}{3}$ *et* $b = 2$ et la fonction h est définie sur IR par :

$h(x) = -\frac{2}{3}x + 2$.

Exercice 26

Corrigé

1. $\frac{1}{15}y'' + \frac{5}{3}y = 0 \Leftrightarrow y'' = -25\,y$, d'où (E) est une équation différentielle du type

$y'' = -w^2 y$, avec $w = 5$.

2. On en déduit que les solutions de (E) sont les fonctions f définies sur IR par :

$f(x) = a\cos 5x + b\sin 5x$, a et b étant des nombres réels.

3. La solution f de (E) telle que la représentation graphique de f admet une tangente de coefficient directeur 5 au point A $(\frac{\pi}{15}; 3)$ est telle que : $f(\frac{\pi}{15}) = 3$ et $f'(\frac{\pi}{15})=5$.

$f(x) = a\cos 5x + b\sin 5x \Longrightarrow f'(x) = -5a\sin 5x + 5b\cos 5x$.

$f(\frac{\pi}{15})=3$ et $f'(\frac{\pi}{15})=5$ donne le système $\begin{cases} \frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b = 3 \\ -5\frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{5}{2}b = 5 \end{cases}$.

La résolution de ce système donne $a = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$ et $b = \frac{1+3\sqrt{3}}{2}$, d'où cette fonction f est telle que :

$f(x) = \frac{3-\sqrt{3}}{2}\cos 5x + \frac{1+3\sqrt{3}}{2}\sin 5x$.

Exercice 27

Corrigé

1. $4y'' - 9y = 0 \Leftrightarrow y'' = \frac{9}{4}y$, d'où (E) est une équation différentielle du type

$y'' = w^2 y$, avec $w = \frac{3}{2}$.

2. On en déduit que les solutions de (E) sont les fonctions f définies sur IR par :

$f(x) = ae^{\frac{3}{2}x} + be^{-\frac{3}{2}x}$, a et b étant des nombres réels.

3. La droite (D) a pour coefficient directeur $\frac{1}{2}$ d'où la tangente perpendiculaire à la droite (D) a pour coefficient directeur -2 ($aa' = -1$ où a et a' sont les coefficients directeurs de deux droites perpendiculaires).

La solution f de (E) telle que la représentation graphique de f admet une tangente au point B (0; 2) perpendiculaire à la droite (D) d'équation $x - 2y - 10 = 0$ est telle que : $f(0) = 2$ et $f'(0) = -2$.

$f(x) = ae^{\frac{3}{2}x} + be^{-\frac{3}{2}x}$ donne : $f'(x) = \frac{3}{2}ae^{\frac{3}{2}x} - b\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}x}$, $f(0) = a + b$ et $f'(0) = \frac{3}{2}a - \frac{3}{2}b$.

$f(0) = 2$ et $f'(0) = -2$ donne le système $\begin{cases} a + b = 2 \\ \frac{3}{2}a - \frac{3}{2}b = -2 \end{cases}$.

la résolution de ce système donne $a = \frac{1}{3}$ et $b = \frac{5}{3}$, d'où cette fonction f est telle que :

$f(x) = \frac{1}{3}e^{\frac{3}{2}x} + \frac{5}{3}e^{-\frac{3}{2}x}$.

Exercice 28

Corrigé

1. $(E) \Leftrightarrow y'' = -4y$.
   Les solutions de (E) sont de la forme : $x \longmapsto Acos2x + Bsin2x,$ où $A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}$.
2. $f'(x) = -2Asin2x + 2Bcos2x$.
3. $On\ a : \begin{cases} Acos\frac{\pi}{2} + Bsin\frac{\pi}{2} = 2 \\ -2Asin\frac{\pi}{2} + 2Bcos\frac{\pi}{2} = -1 \end{cases}$. D'où $A = \frac{1}{2}$ et $B = 2$.

   Donc : $f(x) = \frac{1}{2}cos2x + 2sin2x$.

Exercice 29

Corrigé

1. $(E) \Leftrightarrow y'' = -\frac{9}{4}y$.
   Les solutions de (E) sont de la forme : $t \longmapsto Acos\frac{3}{2}t + Bsin\frac{3}{2}t,$ où $A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R}$.
2. a) $f(0) = 1\ et\ f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$.

   b) $f'(t) = -\frac{3}{2}Asin\frac{3}{2}t + \frac{3}{2}Bcos\frac{3}{2}t$.
   On a : $\begin{cases} A = 1 \\ -\frac{3}{2}Asin\frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}Bcos\frac{\pi}{4} = 0 \end{cases}$. D'où : $A = 1$ et $B = 1$.

   On obtient : $f(t) = cos\frac{3}{2}t + sin\frac{3}{2}t$.
3. $\frac{1}{\sqrt{2}}f(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}cos\frac{3}{2}t + \frac{1}{\sqrt{2}}sin\frac{3}{2}t = cos\left(\frac{3}{2}t - \frac{\pi}{4}\right)$.

   Donc : $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \sqrt{2}cos\left(\frac{3}{2}t - \frac{\pi}{4}\right)$.

Exercice 30

Corrigé

1. On a : $g'(x) = e^{2x} + 2xe^{2x}$.
   $g'(x) - 2g(x) = e^{2x} + xe^{2x} - 2xe^{2x} = e^{2x}$. Donc g est une solution de (E).
2. Les solutions de (G) sont de la forme : $x \longmapsto Ce^{2x}$, où $C \in \mathbb{R}$.
3. $f - g$ solution de (G) $\Leftrightarrow (f - g)'(x) = 2(f - g)(x)$
   $\Leftrightarrow f'(x) - 2f(x) = g'(x) - 2g(x)$
   $\Leftrightarrow f'(x) - 2f(x) = e^{2x}$
   $\Leftrightarrow f$ solution de (E).
4. On a : $f(x) - g(x) = Ce^{2x}$,
   D'où $f(x) = Ce^{2x} + g(x) = Ce^{2x} + xe^{2x}$.
   Les solutions de (E) sont de la forme : $x \longmapsto Ce^{2x} + xe^{2x}$, où $C \in \mathbb{R}$.
5. $Ce^2 + e^2 = 0$, donc $C = -1$.
   La solution de (E) qui s'annule en 0 est : $x \longmapsto (x-1)e^{2x}$, où $C \in \mathbb{R}$.

Exercice 31

Corrigé

1. Les solutions de (1) sont de la forme : $x \longmapsto Ce^{\frac{x}{n}}$, où $C \in \mathbb{R}$.
2. On a $g(x) = ax + b$
   g est solution de (2) $\Leftrightarrow g'(x) - \frac{1}{n}g(x) = -\frac{x+1}{n(n+1)}$
   $\Leftrightarrow a - \frac{1}{n}(ax + b) = -\frac{x+1}{n(n+1)}$
   $\Leftrightarrow (-an - a)x + an^2 + an - bn - b = -x - 1$
   $\Leftrightarrow \begin{cases} -a(n+1) = -1 \\ (-1 - n)b + an(n+1) = -1 \end{cases}$
   $\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{n+1} \\ b = 1 \end{cases}$
   Donc : $g(x) = \frac{1}{n+1}x + 1$.
3. a) $h - g$ solution de (1) $\Leftrightarrow (h - g)'(x) - \frac{1}{n}(h - g)(x) = 0$
   $\Leftrightarrow h'(x) - \frac{1}{n}h(x) = g'(x) - \frac{1}{n}g(x)$
   $\Leftrightarrow h'(x) - \frac{1}{n}h(x) = -\frac{x+1}{n(n+1)}$
   $\Leftrightarrow h$ est solution de (2).

   b) h est solution de (2) si seuleument si $h - g$ est solution de (1).

   D'où : $h(x) - g(x) = Ce^{\frac{x}{n}}$, où $C \in \mathbb{R}$.

   Donc : $h(x) = Ce^{\frac{x}{n}} + \frac{1}{n+1}x + 1$, où $C \in \mathbb{R}$.

Exercice 32

Corrigé

1. $u(x) = acosx + bsin\,x \implies u'(x) = -asinx + bcosx.$

La fonction u est une solution de (E) si et seulement si : $\forall x \in IR,\ u'(x) = 2u(x) + cosx$

$\forall x \in IR\ , u'(x) = 2u(x) + cosx \iff \forall x \in IR, -asinx + bcosx = 2(acos\,x + bsin\,x) + cosx$

$\iff \forall x \in IR\ , (b - 2a - 1)cosx + (-a - 2b)sinx = 0$

$\iff b - 2a - 1 = 0\ et - a - 2b = 0$

On obtient le système $\begin{cases} -2a + b = 1 \\ -a - 2b = 0 \end{cases}$ qui a pour solution $a = -\frac{2}{5}$ et $b = \frac{1}{5}$.

D'où : $u(x) = -\frac{2}{5}\,cosx + \frac{1}{5}\,sinx.$

2. L'équation (E_0) : $y' = 2y$ a pour solutions les fonctions : $x \mapsto ke^{2x},\ k$ étant un nombre réel.

3. La fonction $f - u$ est solution de (E_0) si et seulement si :

$\forall x \in IR, (f - u)'(x) = 2(f - u)(x).$

$\forall x \in IR, (f - u)'(x) = 2(f - u)(x) \iff (f - u)'(x) - 2(f - u)(x) = 0$

$\iff f'(x) - u'(x) - 2f(x) + 2u(x) = 0$

$\iff f'(x) - 2f(x) - (u'(x) - 2u(x)) = 0$

$\iff f'(x) - 2f(x) - cosx = 0$, car u est solution de (E).

$\iff f$ est solution de (E).

On conclut que $f - u$ est solution de $(E_0) \iff f$ est solution de (E).

4. On déduit que les solutions de l'équation de (E) sont les fonctions f définies sur IR par :
$f(x) = ke^{2x} + u(x) = ke^{2x} - \frac{2}{5}\,cosx + \frac{1}{5}\,sinx, k$ étant un nombre réel.

5. $f(\frac{\pi}{2}) = ke^{\pi} + \frac{1}{5} = 0 \iff k = -\frac{1}{5e^{\pi}}$ d'où la solution de (E) qui s'annule en $\frac{\pi}{2}$ est la fonction v définie sur IR par : $v(x) = -\frac{1}{5e^{\pi}}e^{2x} - \frac{2}{5}\,cosx + \frac{1}{5}\,sinx.$

Exercice 32

Corrigé

1. v est solution de (E) $\iff \forall x \in IR,\ 2v'(x) + 6v(x) = 2x^2 - 6x + 8$

$\iff \forall x \in IR,\ v'(x) + 3v(x) = x^2 - 3x + 4$

$\iff \forall x \in IR,\ (3a - 1)x^2 + (2a + 3b + 2)x + b + 3c - 4 = 0$

$$\iff \begin{cases} 3a - 1 = 0 \\ 2a + 3b + 3 = 0 \\ b + 3c - 4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = \frac{-11}{9} \\ c = \frac{47}{27} \end{cases}$$

D'où : $v(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{11}{9}x + \frac{47}{27}$.

2. $2y' + 6y = 0 \Leftrightarrow y' = -3y$, d'où les solutions de l'équation (E_0) sont les fonctions f_k définies sur IR par : $f_k(x) = ke^{-3x}, k$ étant un nombre réel.

3. Démontre qu'une fonction g est solution de (E) si et seulement si $g - v$ est une solution de l'équation (E_0).

La fonction $g - v$ est solution de (E_0) si et seulement si :

$\forall x \in IR, (g - v)'(x) = -3(g - v)(x)$.

$$\begin{aligned}\forall x \in IR, (g - v)'(x) = -3(g - v)(x) &\Leftrightarrow (g - v)'(x) + 3(g - v)(x) = 0\\ &\Leftrightarrow g'(x) - v'(x) + 3g(x) - 3v(x) = 0\\ &\Leftrightarrow g'(x) + 3g(x) - (v'(x) + 3v(x)) = 0\\ &\Leftrightarrow g'(x) + 3g(x) - (x^2 - 3x + 4) = 0,\end{aligned}$$

car v est solution de (E).

$\Leftrightarrow g$ est solution de (E)

On conclut que $g - v$ est solution de $(E_0) \Leftrightarrow g$ est solution de (E).

4. On déduit que les solutions de l'équation (E) sont les fonctions g définies sur IR par :

$g(x) = ke^{-3x} + v(x) = ke^{-3x} + \frac{1}{3}x^2 - \frac{11}{9}x + \frac{47}{27}$, k étant un nombre réel.

5. la solution de (E) dont la représentation graphique passe par l'origine du repère est la fonction h telle que $h(x) = ke^{-3x} + v(x) = ke^{-3x} + \frac{1}{3}x^2 - \frac{11}{9}x + \frac{47}{27}$ et $h(0) = 0$.

$h(0) = k + \frac{47}{27} = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{47}{27}$, d'où : $h(x) = -\frac{47}{27}e^{-3x} + v(x) = -\frac{47}{27}e^{-3x} + \frac{1}{3}x^2 - \frac{11}{9}x + \frac{47}{27}$.

Exercice 34

Corrigé

1. $\frac{q'(t)}{q(t)-15} = -2$ d'où : $q'(t) = -2q(t) + 30$

2. $q'(t) = -2q(t) + 30$ est une équation différentielle du type $y' = ay + b$.

Elle a pour solution générale $q(t) = ke^{-2t} + 15, k \in IR$.

En tenant compte des conditions initiales c'est-à-dire $q(0) = 80$ on a : $k + 15 = 80$ c'est-à-dire $k = 65$. D'où $q(t) = 65e^{-2t} + 15$.

3. On a : 30 min = 0,5h d'où : q (0,5) = $65e^{-1} + 15 = 38{,}91$.

Au bout de 30 min la température du corps sera de 39°C.

4. $q(t) = 45 \Rightarrow 65e^{-2t} + 15 = 45$

$\Rightarrow 65e^{-2t} = 30 \Rightarrow 13e^{-2t} = 6$

$\Rightarrow -2t = ln(\frac{6}{13}) \Rightarrow t = \frac{1}{2}ln\left(\frac{13}{6}\right) \simeq 0{,}08$.

0,08h = 4,8min et 0,8 min = 48s d'où : t = 4 min 48s.

5. $\lim_{t\to+\infty} q(t) = \lim_{t\to+\infty} 65e^{-2t} + 15 = 15.$

Interprétation

La température minimale que le corps peut avoir est la température de la salle (Le corps ne peut se refroidir en dessous de la température de la salle).

Exercice 35

Corrigé

1. $y'' + \frac{\pi^2}{9}y = 0 \Leftrightarrow y'' = -\frac{\pi^2}{9}y$ d'où (E) est une équation différentielle de type $y'' = -w^2y$, avec $w = \frac{\pi}{3}$.

2. On en déduit que les solutions de (E) sont les fonctions : $x \longmapsto acos(\frac{\pi}{3}x) + bsin(\frac{\pi}{3}x), a$ et b étant des nombres réels.

3.a) $f(x) = acos(\frac{\pi}{3}x) + bsin(\frac{\pi}{3}x)\ et\ f'(x) = -\frac{\pi}{3}asin(\frac{\pi}{3}x) + \frac{\pi}{3}bcos(\frac{\pi}{3}x)$ donne

$f\ (3) = -a\ \ et\ f'(3) = -\frac{\pi}{3}b.$

Or f (3) = -3 et f'(3) = $-\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ d'où : $a = 2\ et\ b = \sqrt{3}.$

La solution f de (E) telle que f(3) = -3 et f'(3) = $-\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ a pour expression :

$f(x)$ = 3cos($\frac{\pi}{3}x$) +$\sqrt{3}$sin($\frac{\pi}{3}x$).

b) $f(x)$= 3cos($\frac{\pi}{3}x$) +$\sqrt{3}$sin($\frac{\pi}{3}x$)= $2\sqrt{3}$ ($\frac{3}{2\sqrt{3}}$cos($\frac{\pi}{3}x$) + $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$sin($\frac{\pi}{3}x$))

=$2\sqrt{3}$ ($\frac{\sqrt{3}}{2}$cos($\frac{\pi}{3}x$) + $\frac{1}{2}$sin($\frac{\pi}{3}x$))

=$2\sqrt{3}$ cos($\frac{\pi}{3}x - \frac{\pi}{6}$)

$\forall x \in IR\ , f(x) = 2\sqrt{3}\ cos\frac{\pi}{3}(x - \frac{1}{2}).$

Exercice 36

Corrigé

(E) : $\frac{1}{3}y'' - 12y - e^{2x} + x - 2 = 0$

1. $P(x) = -\frac{3}{32}e^{2x} + \frac{1}{12}x - \frac{1}{6}$

P' (x) = $-\frac{3}{16}e^{2x} + \frac{1}{12}$ et $P''(x) = -\frac{3}{8}e^{2x}$.

Posons A = $\frac{1}{3}P''(x) - 12P(x) - e^{2x} + x - 2$

On a: A = $\frac{1}{3} \times \left(-\frac{3}{8}\right)e^{2x} - 12\left(-\frac{3}{32}e^{2x} + \frac{1}{12}x - \frac{1}{6}\right) - e^{2x} + x - 2$

A $= -\frac{1}{8}e^{2x} + \frac{9}{8}e^{2x} - e^{2x} - x + 2 + x - 2$

$= 0$, d'où P est une solution de (E).

2. a) $(E_0) : \frac{1}{3}y'' - 12y = 0 \Leftrightarrow y'' = 36y = 6^2y.$

(E_0) est une équation d'inconnue y et contient la dérivée seconde de y et de la forme $y'' = w^2y$, avec $w = 6$.

b) Les solutions de (E_0) sont les fonctions définies sur IR par :

$x \mapsto ae^{6x} + be^{-6x}, a \in IR$ et $b \in IR$.

3) Soit f une solution de (E).

(1) $\frac{1}{3}f''(x) - 12f(x) - e^{2x} + x - 2 = 0,$ car f solution de (E).

(2) $\frac{1}{3}P''(x) - 12P(x) - e^{2x} + x - 2 = 0$, car P solution de (E).

(1) – (2) donne $\frac{1}{3}(f''(x) - P''(x)) - 12(f(x) - P(x)) = 0$;

$\frac{1}{3}(f - P)''(x) - 12(f - P)(x) = 0,$ d'où $f - P$ est une solution de (E_0).

Soit f une fonction telle que la fonction $f - P$ soit solution (E_0).

$$f - P \text{ solution de } E_0 \Rightarrow \frac{1}{3}(f - P)''(x) - 12(f - P)(x) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}f''(x) - 12f(x) - \frac{1}{3}P''(x) + 12P(x) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}f''(x) - 12f(x) - \frac{1}{3}\left(-\frac{3}{8}e^{2x}\right) + 12\left(-\frac{3}{32}e^{2x} + \frac{1}{12}x - \frac{1}{6}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}f''(x) - 12f(x) + \frac{1}{8}e^{2x} - \frac{9}{8}e^{2x} + x - 2 = 0.$$

$\frac{1}{3}f''(x) - 12f(x) - e^{2x} + x - 2 = 0.$ D'où f solution de (E).

4) D'après le 3) , les solutions de (E) sont les fonctions f définies sur IR par :

$f(x) = ae^{6x} + be^{-6x} - \frac{3}{32}e^{2x} + \frac{1}{12}x - \frac{1}{6},\ a \in IR \text{ et } b \in IR.$

5) Soit (C_h) la représentation graphique de la fonction h solution de (E) vérifiant les conditions indiquées.

On a : $h(0) = 1$ et $h'(0) = \frac{4}{3}$. on obtient le système:

$$\begin{cases} a + b - \frac{3}{32} - \frac{1}{6} = 1 \\ 6a - 6b - \frac{3}{16} + \frac{1}{12} = \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a + 6b = \frac{121}{16} \\ 6a - 6b = \frac{23}{16} \end{cases}.$$

On en tire $a = \frac{3}{4}$ et $b = \frac{49}{96}$ d'où : $h(x) = \frac{3}{4}e^{2x} + \frac{49}{96}e^{2x} - \frac{3}{32}e^{2x} + \frac{1}{12}x - \frac{1}{6}.$

Exercice 37

Corrigé

1. $g\ (t) = f(t) \times\ e^t \quad \Rightarrow g'\ (t)\ = f'\ (t)\times\ e^t +\ e^t \times f\ (t).$

$$= \ (f'\ (t) +\ f\ (t))\ e^t$$

$$= \alpha e^{-t} \times\ e^t$$

$g'\ (t) = \alpha \ \Rightarrow g\ (t)\ = \alpha t + b, b \in IR,$ d'où g est une fonction affine.

2. $g\ (t) =\ f\ (t) \times\ e^t =\ \alpha t + b.$

$\Rightarrow f\ (t) = (\alpha t + b)\ e^{-t}; f(0) = b = 0\ d'$où: f (t) = $\alpha t e^{-t}$.

3. a) pour $\alpha = 4$.

f (t) = $4te^{-t}$

$f'(t) = 4(e^{-t} - te^{-t}) =\ 4e^{-t}(1 - t).$

$f'(t)\ >\ 0\ \ \Rightarrow t < 1 \Rightarrow f$ croissante sur $[0; 1[$.

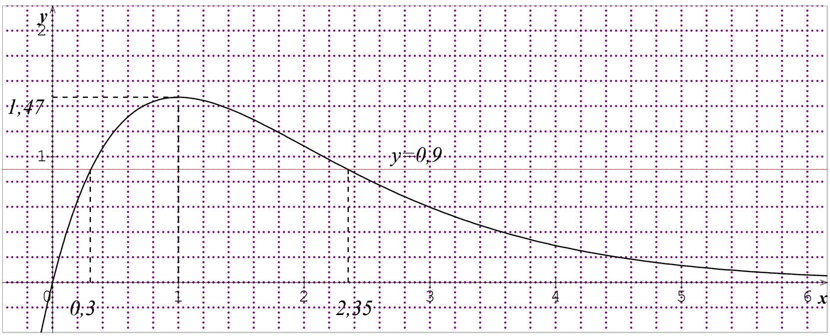
$f'(t)\ <\ 0\ \ \Rightarrow t > 1\ \Rightarrow\ f$ décroissante sur $]1; +\infty[$.

Tableau de variation

$f'(1) = 0$; $f(1) = 4e^{-1} = \frac{4}{e} \simeq 1{,}47$ ou $1{,}5$.

t	0		1	$+\infty$
$f'(t)$	0	+	0	-
$f(t)$	0	↗	$\frac{4}{e}$	↘ 0

Représentation graphique



b) Le taux maximal est $1{,}47 g.l^{-1}$ et il est atteint au bout d'une heure.

c) La période est $[0; 0{,}3]$ ou $[2{,}35; +\infty[$.

Exercice 38

Corrigé

La quantité dissoute est $f(t)$ et la quantité placée à l'instant $t = 0$ est 50 grammes, d'où la quantité non encore dissoute est $50-f(t)$. Sachant que la vitesse de dissolution est proportionnelle à la quantité non encore dissoute on a : $f'(t) = a(50 - f(t))$.

$f'(t) = a(50 - f(t)) \Leftrightarrow f'(t) = -af(t) + 50a$.

$f'(t) = -af(t) + 50a$ est une équation différentielle qui a pour solutions les fonctions f telles que : $f(t) = ke^{-at} + 50$.

Déterminons k et a.

$f(0) = 0 \Leftrightarrow k = -50$. $\quad k = -50 \Rightarrow f(t) = -50e^{-at} + 50$.

$f(10) = 20 \Leftrightarrow -50e^{-10a} + 50 = 20$.

$$\Leftrightarrow a = -\frac{ln(0,6)}{10} \approx 0{,}05.$$

On conclut que : $f(t) = -50e^{-0,05t} + 50$.

SITUATIONS COMPLEXES

Exercice 39

Corrigé

Pour déterminer le nombre de minutes qu'il faudra pour que la température de l'objet passe en-dessous de 15°C, je vais utiliser la leçon sur les équations différentielles.

Pour cela, je vais :

- déterminer l'expression de $\theta(t)$, solution de l'équation différentielle (E): $\theta'(t) = -\theta(t)ln3$;
- déterminer la température $T(t)$ de l'objet, sachant que : $T(0) = 100$;
- résoudre l'inéquation : $t \geq 0,\ T(t) < 15$;
- conclure.

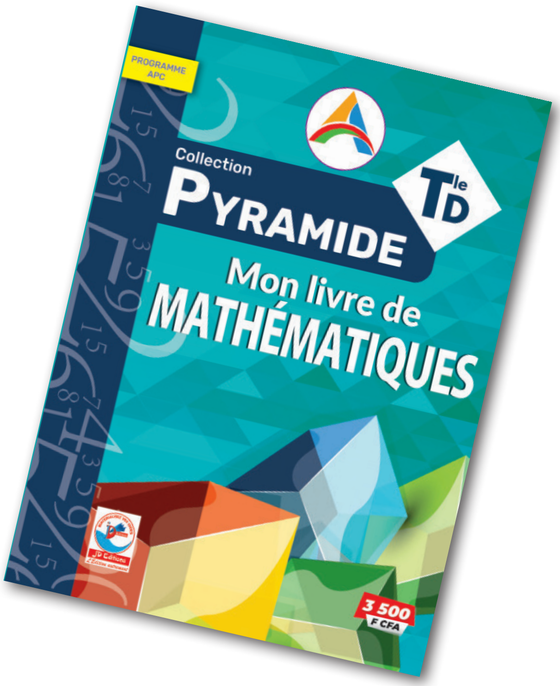
- Déterminons l'expression de $\theta(t)$.
  La solution générale de l'équation différentielle (E) est définie par : $\theta(t) = ke^{-tln3}$, où k est un nombre réel.
- Déterminons la température $T(t)$ de l'objet, sachant que : $T(0) = 100$.
  On a : $\theta(t) = T(t) - 10$.
  On en déduit que : $T(t) = ke^{-tln3} + 10$.
  Sachant que : $T(0) = 100$, on obtient $k = 90$.

  Donc : $T(t) = 90e^{-tln3} + 10$, avec $t \geq 0$.
- Résolvons l'inéquation : $t \geq 0,\ T(t) < 15$.

  On a : $90e^{-tln3} + 10 < 15$. Ce qui donne : $t > \frac{ln18}{ln3}$, avec $\frac{ln18}{ln3} \approx 2{,}63$.
- La température de l'objet passera en-dessous de 15°C après 2,63 mn, soit 2 mn 38s.

Achevé d'imprimer sous les presses de : JD Éditions
Pour le compte de JD Éditions.
Tél. : 25 23 00 17 50
Mise en page : JD Éditions

Manuel de base



COVID-19 / MESURES DE PREVENTIONS


Lavez-vous les mains fréquemment


Respectez la distanciation physique


Portez un masque


Toussez ou éternuez dans votre coude


Ouvrez les fenêtres


Faites-vous vacciner