Preface

Ce recueil d'exercices s'adresse aux élèves de la 4ème année secondaire section Economie et gestion et couvre la totalité du programme des mathématiques.

Cet ouvrage est organisé en 10 chapitres. Dans chacun d'eux, vous trouverez un rappel du cours, des exercices et leurs corrigés. Vous trouverez aussi en annexe un rappel des propriétés du calcul dans IR et un guide d'utilisation d'une calculatrice Sharp en statistiques.

Je remercie par avance tout lecteur qui me fera part de ses remarques ou suggestions et vous souhaite une bonne et profitable lecture.

Rjiba Zied

Professeur d'enseignement principal émérite

@Maths.bac.economie

rjiba.zied2@gmail.com

Table des matières

Chapitre 01

Limites et continuité

Rappel de cours

Limites et ordre

- Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I, sauf peut-être en un réel x_0, si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell'$ et pour tout x de I, différent de x_0, $f(x) \leq g(x)$ alors $\ell \leq \ell'$
- Soit f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle ouvert I, sauf peut-être en un réel x_0, si $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \ell$ et pour tout x de I, différent de x_0, $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$

Opérations sur les limites

- **Limite d'une somme**

Si f a pour limite	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si g a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $(f+g)$ a pour limite	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	pas de résultat général

- **Limite d'un produit**

Lim g \ Lim f	$\ell < 0$	$\ell > 0$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\ell' < 0$	$\ell \times \ell'$		$-\infty$	$+\infty$	0
$\ell' > 0$			$+\infty$	$-\infty$	
$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	pas de résultat général
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	
0	0				

- **Limite d'un quotient**

Lim g \ Lim f	$\ell < 0$	$\ell > 0$	0 par des valeurs positives	0 par des valeurs négatives	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' < 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$		0	0	$-\infty$	$+\infty$
$\ell' > 0$					$+\infty$	$+\infty$
0 par des valeurs positives	$+\infty$	$-\infty$	pas de résultat général		$+\infty$	$-\infty$
0 par des valeurs négatives	$-\infty$	$+\infty$			$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	0		0	0	Pas de résultat général	
$-\infty$						

- Lorsque le tableau ne donne pas de résultat général, on parle souvent de "Forme indéterminée" Les formes indéterminées sont de 4 types exprimés sous forme abrégée par $\infty - \infty$, $0 \times \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$ et $\frac{0}{0}$

Quelques techniques usuelles pour lever les indéterminations

- Mise en facteur du terme prépondérant (dominant) exemple :

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{4x^2 + x} - x = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{4x^2\left(1 + \frac{x}{4x^2}\right)} - x = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{4x^2}\sqrt{1 + \frac{1}{4x}} - x = \lim_{x \to +\infty} 2x\sqrt{1 + \frac{1}{4x}} - x$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x\left(2\sqrt{1 + \frac{1}{4x}} - 1\right)$$

$$= +\infty$$

- Utilisation d'une quantité conjuguée exemple :

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(x+1) - x}{\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right)} = 0$$

- Utilisation d'une factorisation exemple :

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+3)}=\lim_{x\to1}\frac{x^2+x+1}{(x+3)}=\frac{3}{4}$$

Continuité

- Une fonction f est continue en a si, et seulement si, $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

Théorème des valeurs intermédiaires

- **Enoncée 1**

  f est une fonction **continue** sur un intervalle I , a et b sont deux réels de I . Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c)=k$

- **Enoncée 2**

  f est une fonction **continue** sur un intervalle $[a,b]$ et vérifiant $f(a)f(b)<0$ alors il existe au moins un réel c appartenant à l'intervalle ouvert $]a,b[$ tel que $f(c)=0$

- **Enoncée 3**

  f est une fonction **continue** sur un intervalle $[a,b]$ et **strictement monotone** sur $[a,b]$ et vérifiant $f(a)f(b)<0$ alors il existe un réel **unique** c appartenant à l'intervalle ouvert $]a,b[$ tel que $f(c)=0$

Fonctions polynômes et fonctions rationnelles

- Toute fonction polynôme est définie, continue sur $\mathbb{R}$
- Toute fonction rationnelle est continue sur son domaine de définition

Attention !

- Une forme indéterminée ne veut pas dire que la fonction ne possède pas de limite ! il faut juste trouver un autre moyen de calcul de cette limite

Les exercices

Exercice 1

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{x} & \text{si } x>0\\ x^2+1 & \text{si } x\leq 0\end{cases}$

1) Calculer $f(0)$
2) a) Montrer que si $x\neq 0$ alors $\dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{x}=\dfrac{2}{\sqrt{2x+1}+1}$
   b) Montrer que f est continue en 0
3) Déterminer le domaine de continuité de f
4) Montrer que l'équation $f(x)=3$ possède une solution unique dans $[-2,0]$

Exercice 2

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=3x^3+5x-6$

1) Montrer que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$
2) a) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0,1]$
   b) Déterminer un encadrement de α à 10^{-1} près

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\begin{cases}g(x) & \text{si } x\geq 1\\ \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{si } x<1\end{cases}$

1) Etudier la continuité de f en 1
2) En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}$

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\begin{cases}x-\sqrt{x^2-1} & \text{si } x\leq -1\\ x^2+3x+1 & \text{si } x>-1\end{cases}$

1) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
2) Montrer que f est continue en -1
3) a) Montrer que f est strictement croissante sur $]-1,+\infty[$
   b) Déterminer $f(]-1,+\infty[)$
4) a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique $\alpha\in]-1,0[$
   b) Donner un encadrement de α à 10^{-1} prés.
   c) En déduire le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 4

Soit la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=x+\sqrt{x}-3$

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
2) Montrer que f est continue sur $[0,+\infty[$
3) Montrer que f est croissante sur $[0,+\infty[$
4) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution $\alpha\in]1,2[$
5) Montrer que f réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur un intervalle J qu'on précisera

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{\sqrt{x(x+1)}}{x^2}$

1) a) Déterminer le domaine de définition de f
   b) Calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$
2) a) Vérifier que $x < \sqrt{x(x+1)} < x+1$, pour tout $x > 0$
   b) En déduire que $\frac{1}{x} < f(x) < \frac{x+1}{x^2}$, pour tout $x > 0$
   c) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$
3) a) Montrer l'équation $f(x) = 1$ admet au moins une solution $\alpha \in [1,2]$
   b) Donner un encadrement de α à 10^{-1} prés.

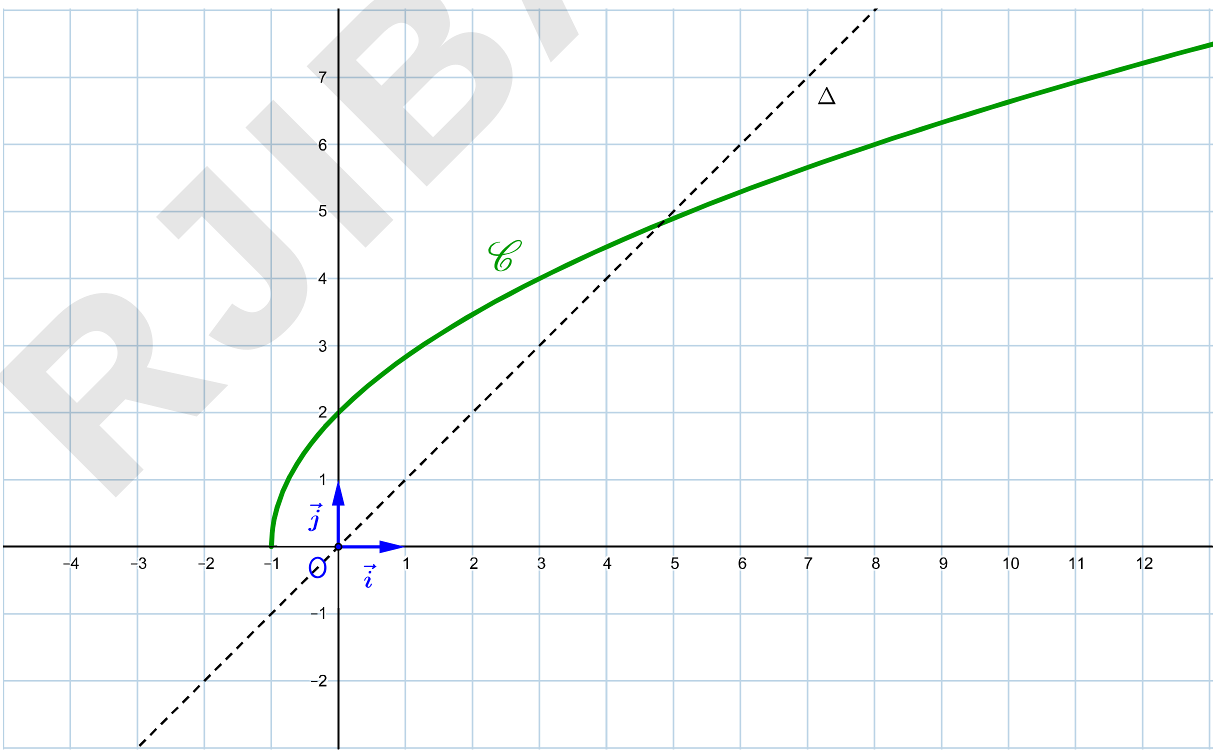
Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+6x+4}{x} & \text{si } x < -1 \\ 2\sqrt{x+1} & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$

1) a) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$
   b) Calculer $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$
   c) La fonction f est-elle continue en -1 ? Justifier
2) On donne le tableau de variation de f sur $]-\infty,-1[$

x	$-\infty$		-2		-1
f	$-\infty$	↗	2	↘	1

   La restriction de f à $]-\infty,-1[$ réalise-t-elle une bijection ? Justifier.
3) On a représenté dans un repère orthonormé $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la restriction de f à l'intervalle $[-1,+\infty[$, ainsi que la droite d'équation $y = x$
   a) Montrer que f réalise une bijection de $[-1,+\infty[$ sur un intervalle que l'on précisera.
   b) Tracer dans le même repère $\mathscr{C}'$ la courbe représentative de f^{-1}
4) Montrer que l'équation $f(x) = 3$ admet une solution unique α dans $[1,2]$



Correction des exercices

Exercice 1

1) $f(0)=1$

2) a) pour $x \neq 0$, $\dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{x} = \dfrac{(\sqrt{2x+1}-1)(\sqrt{2x+1}+1)}{x(\sqrt{2x+1}+1)} = \dfrac{2x+1-1}{x(\sqrt{2x+1}+1)} = \dfrac{2x}{x(\sqrt{2x+1}+1)} = \dfrac{2}{\sqrt{2x+1}+1}$

b) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} x^2+1 = 1 = f(0)$ donc f est continue à gauche en 0

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2}{\sqrt{2x+1}+1} = 1 = f(0)$ donc f est continue à droite en 0

$\Rightarrow$ f est continue en 0

3) La fonction f est continue sur $]-\infty,0[$ comme étant un polynôme, continue sur $]0,+\infty[$ comme étant quotient et racine de fonctions continues et continue en 0 donc f est continue sur $\mathbb{R}$

4) ◆ La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ donc elle est continue sur $[-2,0]$

◆ $\left.\begin{array}{l} f(-2)=5 \\ f(0)=1 \end{array}\right\}$ donc $f(0) \leq 3 \leq f(-2)$

◆ Soit $a,b \in]-\infty,0]$ tel que $a<b$. On a $f(b)-f(a) = b^2-a^2 = (b-a)(b+a) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]-\infty,0]$ donc sur $[-2,0]$

$\Rightarrow$ L'équation $f(x)=3$ possède une solution unique dans $[-2,0]$

Exercice 2

Partie A

1) Soit $a,b \in \mathbb{R}_+$ tel que $a<b$. On a :

$f(b)-f(a) = (3b^3+5b-6)-(3a^3+5a-6) = 3(b^3-a^3)+5(b-a)$

$= 3(b-a)(b^2+ab+a^2)+5(b-a) > 0$

donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$

2) a) ◆ La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ comme étant un polynôme donc elle est continue sur $[0,1]$

◆ g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc elle est strictement croissante sur $[0,1]$

◆ $\left.\begin{array}{l} g(0)=-6 \\ g(1)=2 \end{array}\right\}$ donc $g(0) \leq 0 \leq g(1)$

$\Rightarrow$ L'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0,1]$

b) $\left.\begin{array}{l} g(0.8)=-0.46 \\ g(0.9)=0.69 \end{array}\right\}$ donc $0.8 \leq \alpha \leq 0.9$

Partie B

1) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} = \lim\limits_{x\to 1^-}(x+1) = 2$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} 3x^3+5x-6 = 2$

donc $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2 = f(1)$ et par suite f est continue en 1

2) La fonction f est continue sur $]-\infty,1[$ comme étant une fonction rationnelle, continue sur $]1,+\infty[$ comme étant un polynôme et continue en 1 donc f est continue sur $\mathbb{R}$

Exercice 3

1) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} x-\sqrt{x^2-1} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} x^2+3x+1 = +\infty$

2) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} x-\sqrt{x^2-1} = -1 = f(-1)$ donc f est continue à gauche en 1

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} x^2+3x+1 = -1 = f(-1)$ donc f est continue à droite en -1

$\Rightarrow$ f est continue en -1

3) a) Soit $a,b \in]-1,+\infty[$ tel que $a<b$

$f(b)-f(a)=(b^2+3b+1)-(a^2+3a+1)=b^2-a^2+3(b-a)=(b-a)(b+a+3)$

$a>-1$ et >-1 donc $a+b>-2$ et par suite $b+a+3>0$ donc $f(b)-f(a)>0$ et par suite f est strictement croissante sur $]-1,+\infty[$

b) $f(]-1,+\infty[)=\left]f(-1),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right[=]-1,+\infty[$

4) a) ◆ f est continue sur $]-1,+\infty[$ comme étant un polynôme donc elle est continue sur $]-1,0[$

◆ f est strictement croissante sur $]-1,+\infty[$ donc elle est strictement croissante sur $]-1,0[$

◆ $\left.\begin{array}{l} f(-1)=-1 \\ f(0)=1 \end{array}\right\}$ donc f change de signe sur $]-1,0[$

$\Rightarrow$ L'équation $f(x)=0$ admet une solution unique $\alpha\in]-1,0[$

b) $\left.\begin{array}{l} f(-0.4)=-0.04 \\ f(-0.3)=0.19 \end{array}\right\}$ donc $-0.4\le\alpha\le-0.3$

c) Si $x\in]-\infty,-1[$ alors $f(x)=x-\sqrt{x^2-1}<0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Exercice 4

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x+\sqrt{x}-3=+\infty$

2) La fonction f est continue sur $[0,+\infty[$ comme étant somme de fonctions continues sur $[0,+\infty[$

3) Soit $a,b\in[0,+\infty[$ tel que $a<b$

$f(b)-f(a)=(b+\sqrt{b}-3)-(a+\sqrt{a}-3)=(b-a)+(\sqrt{b}-\sqrt{a})>0$ donc f est croissante sur $[0,+\infty[$

4) ◆ f est continue sur $[0,+\infty[$ donc elle est continue sur $]1,2[$

◆ f est strictement croissante

◆ $\left.\begin{array}{l} f(1)=-1 \\ f(2)=\sqrt{2}-1 \end{array}\right\}$ donc f change de signe sur $]1,2[$

$\Rightarrow$ L'équation $f(x)=0$ admet une unique solution $\alpha\in]1,2[$

5) La fonction f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$ donc elle réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $J=f([0,+\infty[)=[-3,+\infty[$

Exercice 5

1) a) Il faut que $x\neq0$ et $x(x+1)\ge0$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x(x+1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$Df=]-\infty,-1]\cup]0,+\infty[$

b) $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt{x(x+1)}}{x^2}=\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{\dfrac{x(x+1)}{x^4}}=\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{\dfrac{(x+1)}{x^3}}=+\infty$

2) a) Pour tout $x>0$ on a : $x^2<x^2+x<x^2+x+(x+1)\Leftrightarrow x^2<x(x+1)<(x+1)^2\Leftrightarrow x<\sqrt{x(x+1)}<x+1$

b) Pour tout $x>0$, $x<\sqrt{x(x+1)}<x+1\Leftrightarrow\dfrac{1}{x}<\dfrac{\sqrt{x(x+1)}}{x^2}<\dfrac{x+1}{x^2}\Leftrightarrow\dfrac{1}{x}<f(x)<\dfrac{x+1}{x^2}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

3) a) ◆ f est continue sur $]0,+\infty[$ comme étant quotient et racine de fonctions continues et positives donc elle est continue sur $[1,2]$

◆ $\left.\begin{array}{l} f(1)=\sqrt{2}\simeq1.4 \\ f(2)=\dfrac{\sqrt{6}}{4}\simeq0.6 \end{array}\right\}$ donc $f(2)\le1\le f(1)$ c'est-à-dire f change de signe sur $]1,2[$

$\Rightarrow$ L'équation $f(x)=1$ admet au moins une solution $\alpha \in]1,2[$

b) $\left.\begin{array}{l} f(1.3) \simeq 1.02 \\ f(1.4) \simeq 0.94 \end{array}\right\}$ donc $1.3 \le \alpha \le 1.4$

Exercice 6

1) a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+6x+4}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2\sqrt{x+1} = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^-} \dfrac{x^2+6x+4}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^+} 2\sqrt{x+1} = 0$

c) $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$ donc f ne possède pas de limite en -1 donc elle n'est pas continue en -1

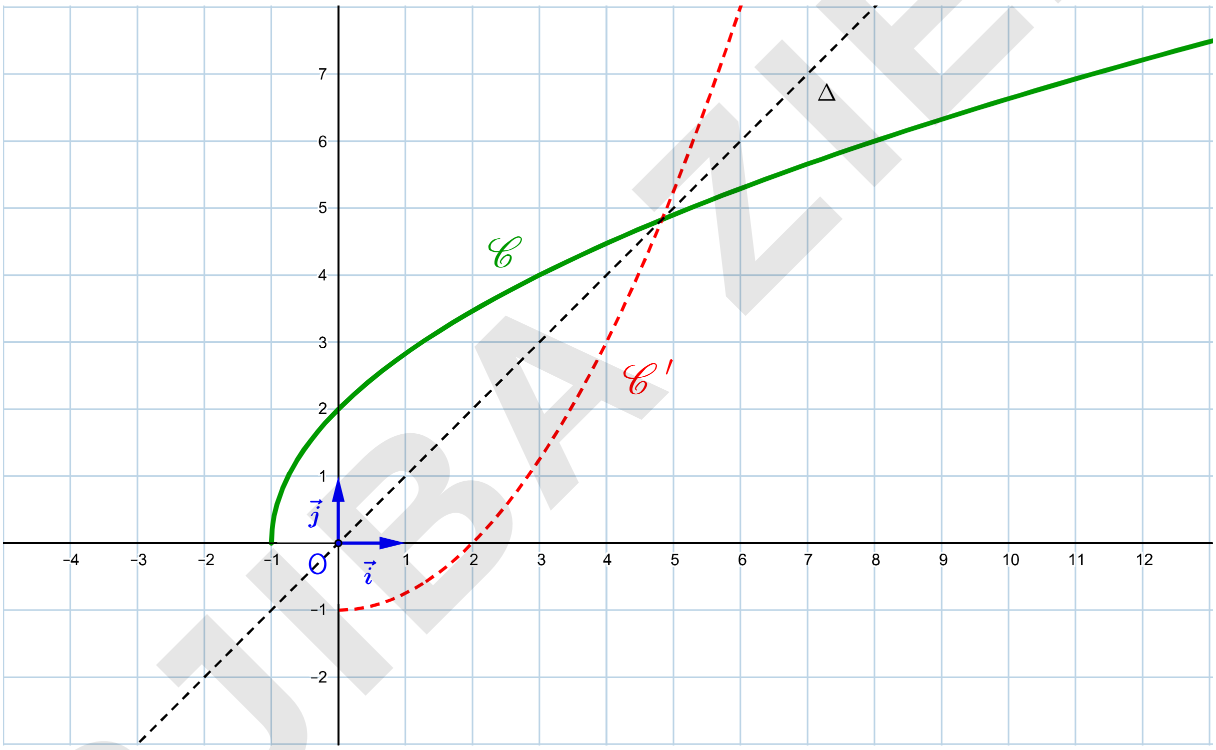
2) La fonction f est n'est pas strictement monotone sur $]-\infty,-1[$ donc elle ne réalise pas une bijection.

3) a) Soit $a,b \in [-1,+\infty[$ tel que $a<b$

$a<b \Leftrightarrow a+1<b+1 \Leftrightarrow \sqrt{a+1}<\sqrt{b+1} \Leftrightarrow 2\sqrt{a+1}<2\sqrt{b+1} \Leftrightarrow f(a)<f(b)$ donc f est strictement croissante sur $[-1,+\infty[$ et par suite elle réalise une bijection de $[-1,+\infty[$ sur

$f([-1,+\infty[) = \left[f(-1), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[= [0,+\infty[$

b)



4) • f est continue sur $[-1,+\infty[$ comme étant la racine carrée d'une fonction continue et strictement positive donc elle est continue sur $[1,2]$

• f est strictement croissante

• $\left.\begin{array}{l} f(1) = 2\sqrt{2} \simeq 2.8 \\ f(2) = 2\sqrt{3} \simeq 3.5 \end{array}\right\}$ donc $f(1) \le 3 \le f(2)$

$\Rightarrow$ L'équation $f(x)=3$ admet une unique solution $\alpha \in [1,2]$

Chapitre 02

Etude de fonctions

Rappel de cours

Dérivabilité

- Une fonction f est dérivable en x_0 s'il existe un nombre réel ℓ tel que :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x)}{h}=\ell$$

- La fonction f est dérivable en x_0 si, et seulement si, f est à la fois dérivables à droite et à gauche en x_0 et $f'_d(x_0)=f'_g(x_0)$

Dérivées usuelles

L'intervalle I	Fonction f définie sur I	Fonction dérivée f' de f sur I
$\mathbb{R}$	$f(x)=a\ ,\ a\in\mathbb{R}$	$f'(x)=0$
$\mathbb{R}$	$f(x)=ax+b,\ a,b\in\mathbb{R}$	$f'(x)=a$
$\mathbb{R}^*$	$x\mapsto\frac{1}{x}$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$
$\mathbb{R}$	$f(x)=x^n\ ,\ n\in\mathbb{Z}^*$	$f'(x)=n\,x^{n-1}$
$\mathbb{R}^*$	$f(x)=\sqrt{x}$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Règles générales de détermination des fonctions dérivées

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I

Fonction f définie sur I	Fonction dérivé f' de f sur I
$u\times v$	$u'\times v+u\times v'$
$u^n\ ,\ n\in\mathbb{Z}^*$	$n\times u'\times u^{n-1}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'\times v-u\times v'}{v^2}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$u\circ v$	$v'\times(u'\circ v)$

Extrema

- Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et x_0 un réel de I. Si la fonction dérivée f' s'annule et change de signe en x_0 alors f admet un extremum local en x_0 égal à $f(x_0)$

Parité

- Une fonction f est dite paire si pour tout réel x de Df, on a $-x\in$ Df et $f(-x)=f(x)$
- Une fonction f est dite impaire si pour tout réel x de Df, on a $-x\in$ Df et $f(-x)=-f(x)$
- La courbe d'une fonction paire, dans un repère orthonormé, est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- La courbe d'une fonction impaire, dans un repère orthonormé, est symétrique par rapport à l'origine.

Axe de symétrie

- Soit f une fonction définie sur D et soit la droite Δ d'équation $\Delta : x = a$. La droite Δ est un axe de symétrie de la courbe de f si, et seulement si :
  - $\rightarrow$ Pour tout $x\in D$, $(2a-x)\in D$
  - $\rightarrow$ Pour tout $x\in D$, $f(2a-x)=f(x)$

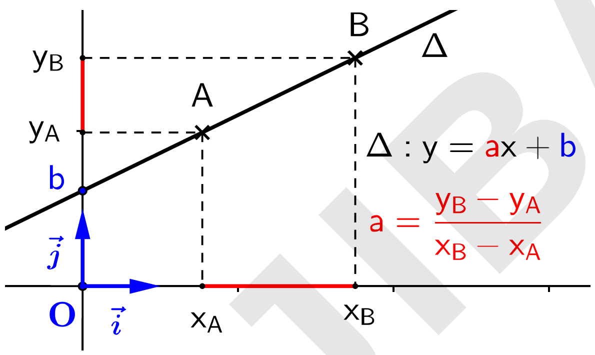
Centre de symétrie

- Soit f une fonction définie sur D et un point $I(a,b)$. Ω est un centre de symétrie de la courbe de f si, et seulement si :
  - $\rightarrow$ Pour tout $x \in D$, $(2a - x) \in D$
  - $\rightarrow$ Pour tout $x \in D$, $f(2a - x) = 2b - f(x)$

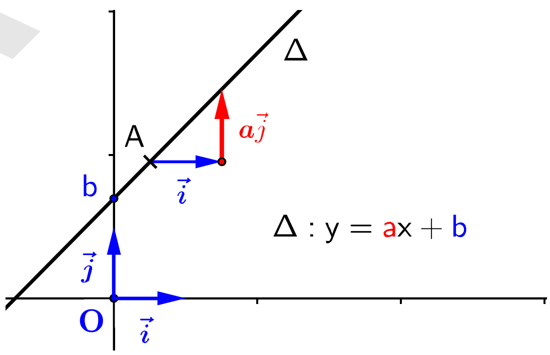
Interprétations graphiques

La fonction f est dérivable sur un intervalle I	La courbe $\mathscr{C}$ est lisse
$f'(x_0) = a$	La pente (le coefficient directeur) de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse x_0 est a
$f'(x_0) = 0$	$\mathscr{C}$ possède une tangente horizontale en x_0
$f_d'(x_0) \neq f_g'(x_0)$	$\mathscr{C}$ possède deux demi-tangentes de directions différentes en $M(x_0, f(x_0))$: M est un point anguleux
$\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \infty$ ou $\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \infty$	$\mathscr{C}$ possède une demi-tangente verticale au point $M(x_0, f(x_0))$
f'' s'annule en x_0 en changeant de signe	Le point $M(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion de $\mathscr{C}$
f' s'annule en x_0 et ne change pas de signe	

Utilisation du graphique pour déterminer l'équation d'une droite

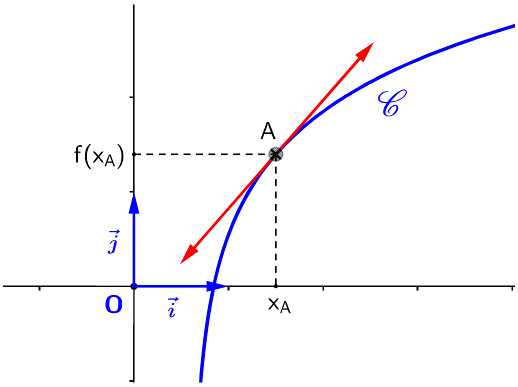


- On prend deux points de la droite Δ dont les coordonnées sont faciles à déterminer
- On calcule le coefficient directeur en utilisant la formule $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$
- On lit l'ordonnée à l'origine b sur l'axe des ordonnées : c'est l'ordonnée du point d'intersection de Δ avec l'axe des ordonnées.
- Dans le cas où le point d'intersection de Δ avec l'axe des ordonnées n'est pas utilisable on peut déterminer b en remplaçant les coordonnées de A ou de B dans l'équation $y = ax + b$ pour avoir la formule $b = y_A - a x_A$

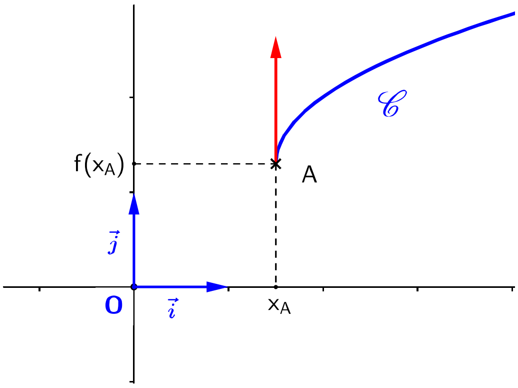


- On se déplace du point A une unité à droite et parallèlement à l'axe des abscisses, le coefficient directeur est la distance qui nous sépare de la droite Δ affectée d'un signe :
  - → Positif si on doit monter pour rejoindre la droite Δ
  - → Négatif si on doit descendre pour rejoindre la droite Δ
- On lit l'ordonnée à l'origine b sur l'axe des ordonnées : c'est l'ordonnée du point d'intersection de Δ avec l'axe des ordonnées.
- Dans le cas où le point d'intersection de Δ avec l'axe des ordonnées n'est pas utilisable on peut déterminer b en remplaçant les coordonnées de A dans l'équation $y = ax + b$ pour avoir la formule $b = y_A - a x_A$

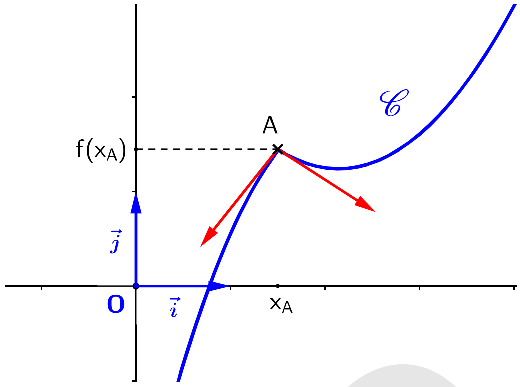
Tangente à la courbe d'une fonction



- La courbe de f possède une tangente en A : f est dérivable en A et $f'(x_A)$ est le coefficient directeur de la tangente



- La courbe de f possède une demi-tangente verticale à droite en A : f n'est pas dérivable à droite en A
- $\lim\limits_{x \to x_A^+} \dfrac{f(x)-f(x_A)}{x-x_A} = \infty$



- La courbe de f possède deux demie-tangentes en A de coefficients directeurs différents : f est dérivable à droite et dérivable à gauche mais n'est pas dérivable en x_A
- $f'_g(x_A)$ et la pente de la demi-tangente à gauche et $f'_d(x_A)$ est celle de la demi-tangente à droite
- $f'_g(x_A) \neq f'_d(x_A)$
- Le point A est un point anguleux

Branches infinies

- Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ alors la droite $\Delta : x = a$ est une asymptote à $\mathscr{C}$
- Si $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = a$ alors la droite $\Delta : y = a$ est une asymptote à $\mathscr{C}$
- Si $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) - (ax+b) = 0$ alors la droite $\Delta : y = ax+b$ est une asymptote à $\mathscr{C}$
- Si $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ et $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$ alors $\mathscr{C}$ possède une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées
- Si $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ et $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ alors $\mathscr{C}$ possède une branche parabolique de direction l'axe des abscisses

▶ $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$ ⟶ La droite $\Delta : y = b$ est une asymptote horizontale à $\mathscr{C}$

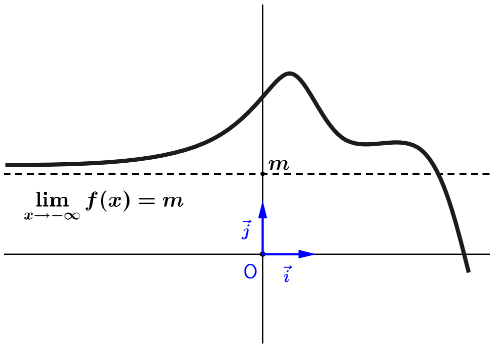
▶ $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ ⟶

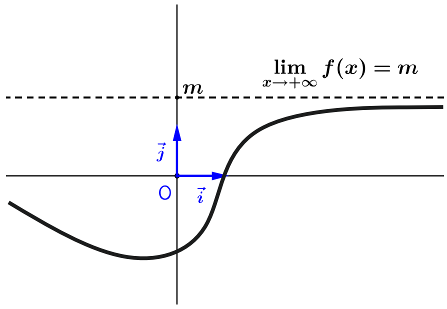
- $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$: Une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées
- $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$: Une branche parabolique de direction l'axe des abscisses
- $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) - ax = b$: La droite $\Delta : y = ax+b$ est une asymptote à $\mathscr{C}$

a et b sont deux réels

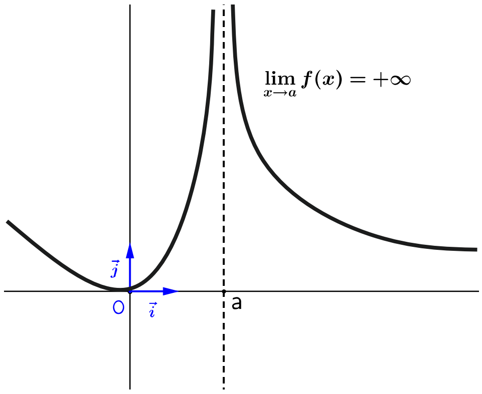
Comportement asymptotique

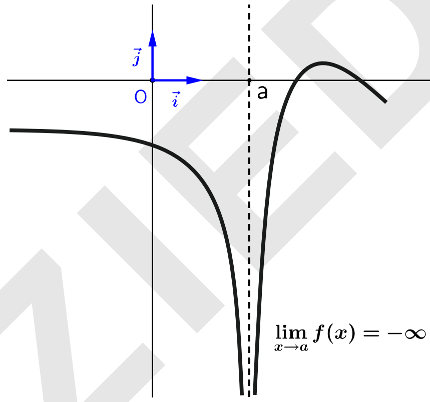
► Asymptote horizontale : droite d'équation y = m

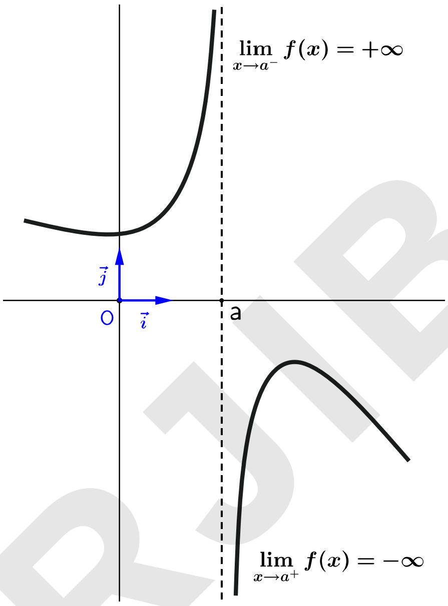


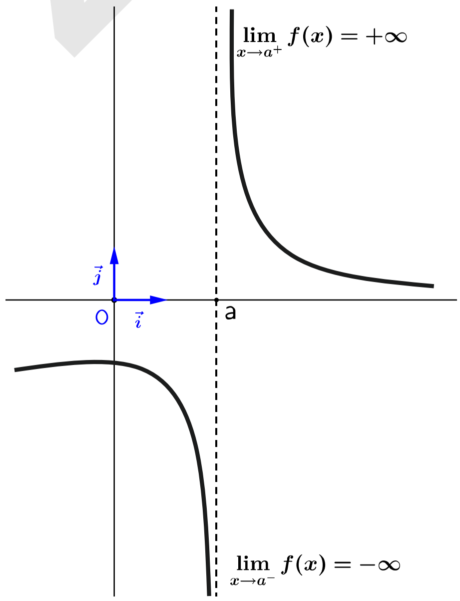


► Asymptote verticale : droite d'équation x = a

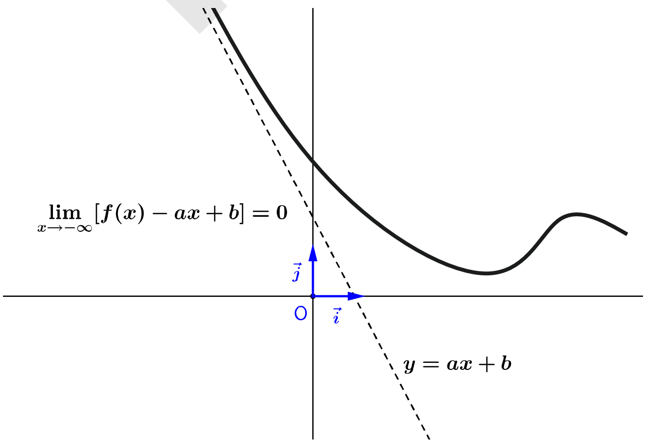


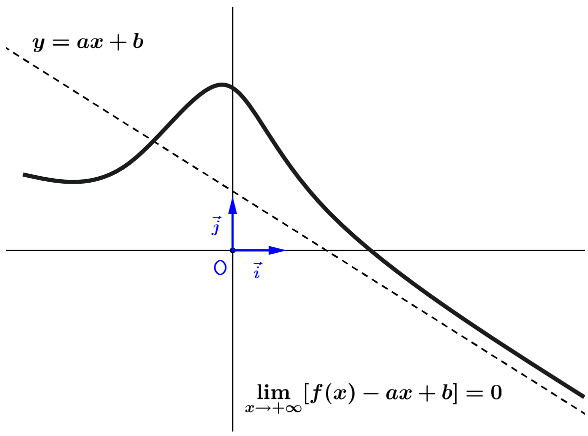






► Asymptote oblique : droite d'équation y = ax + b , avec a ≠ 0





Fonctions polynômes et fonctions rationnelles

- Toute fonction polynôme est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$
- Toute fonction rationnelle est continue et dérivables sur son domaine de définition

Position relative de deux courbes

- Pour étudier la position relative des courbes $\Gamma : y = f(x)$ et $\Gamma' : y = g(x)$, on étudie le signe de $f(x) - g(x)$:

Signe de $f(x)-g(x)$	$+$	$-$
Position relative de Γ et Γ'	Γ est au-dessus de Γ'	Γ est au-dessous de Γ'

- L'intersection des courbe $\Gamma : y = f(x)$ et $\Gamma' : y = g(x)$ est l'ensemble des points de Γ (ou Γ') dont les abscisses sont solutions de l'équation $f(x) = g(x)$

Théorème des accroissements finis

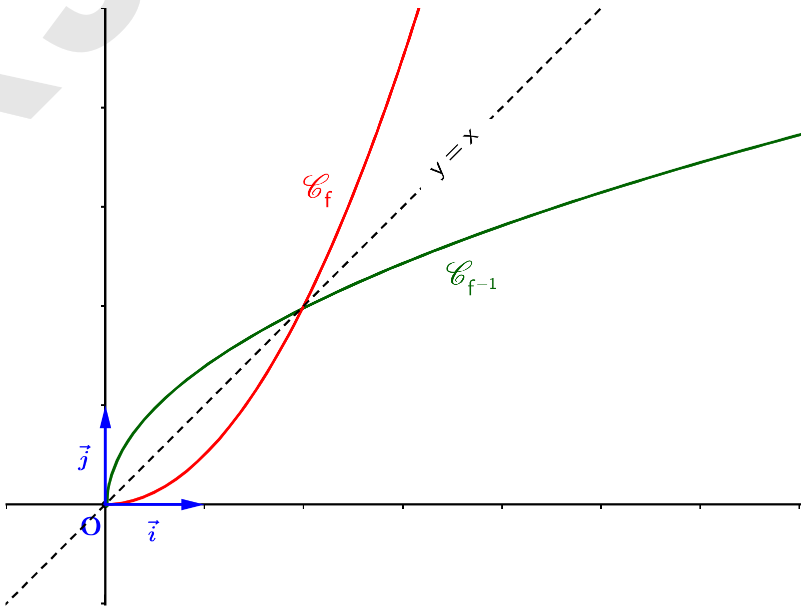
- Soient deux réels a et b tel que $a < b$. Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ alors il existe au moins un réel c appartenant à $]a,b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$
- Géométriquement cela signifie qu'en au moins un point de la courbe de f, il existe une tangente de coefficient directeur $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ c'est-à-dire parallèle à la droite (AB) avec $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$

Inégalités des accroissements finis

- Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et s'il existe deux constantes m et M telles que pour tout x de I, $m \le f'(x) \le M$ alors pour tous réels a et b de I, tels que $a < b$ on a :
$$m(b-a) \le f(b) - f(a) \le M(b-a)$$
- Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et s'il existe un réel $k > 0$ tels que pout tout x de I, $|f'(x)| \le k$ alors pour tous réels a et b de I on a $|f(b) - f(a)| \le k|b-a|$

Théorème de la bijection

- Si f est une fonction strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ alors on a :
  - $\rightarrow$ La fonction f réalise une bijection de I sur $f(I)$
  - $\rightarrow$ La fonction réciproque f^{-1}, de f, a le même sens de variation que f
  - $\rightarrow$ Pour tout x de I et pour tout y de $f(I)$ on a : $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$
  - $\rightarrow$ Si de plus, f est continue sur I alors f^{-1} est continue sur I alors f^{-1} est continue sur $J = f(I)$
  - $\rightarrow$ Les courbes représentatives de f et f^{-1}, dans un repère orthonormé du plan, sont symétriques par rapport à la première bissectrice $\Delta : y = x$



Dérivée de la fonction réciproque

- Soit f une bijection d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ sur $J = f(I)$. Soit un réel x_0 de I et $y_0 = f(x_0)$. Si f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) \neq 0$ alors la fonction réciproque f^{-1} de f est dérivable en y_0 et on a :
$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$
- Soit une bijection d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ sur $J = f(I)$. Si f est dérivable sur I et f' ne s'annule pas sur I alors la fonction réciproque f^{-1} de f est dérivable sur J et on a : $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$

Primitives d'une fonction continue

- F est une primitive de f sur l'intervalle I si, et seulement si, F est dérivable sur I et pour tout $x \in I$ on a $F'(x) = f(x)$
- Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I
- Si F est une primitive de f alors $F + c$, avec c une constante réelle, est une primitive de f
- Toute fonction f continue sur un intervalle I admet une unique fonction primitive sur I telle que $F(a) = b$

Opérations sur les primitives

- Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et deux réels α et β. Si F et G sont respectivement deux fonctions primitives de f et g sur I alors $\alpha F + \beta G$ est une primitive de la fonction $\alpha f + \beta g$ sur I

Primitives usuelles

L'intervalle I	Fonction f définie sur I	Fonction primitive F de f sur I
$\mathbb{R}$	$x \mapsto a,\ a \in \mathbb{R}$	$x \mapsto ax + c,\ c \in \mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	$x \mapsto ax,\ a \in \mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{2}ax^2 + c,\ c \in \mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	$x \mapsto x^n,\ n \in \mathbb{Z}^*$	$x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c,\ c \in \mathbb{R}$
$\mathbb{R}^*$	$x \mapsto \frac{1}{x^2}$	$x \mapsto -\frac{1}{x} + c,\ c \in \mathbb{R}$
$\mathbb{R}^*$	$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x} + c,\ c \in \mathbb{R}$

Règles générales de détermination des fonctions primitives

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I

Fonction f définie sur I	Fonction primitive F de f sur I
$u'v + uv'$	$uv + c,\ c \in \mathbb{R}$
$u'u^n,\quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1} + c,\ c \in \mathbb{R}$
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u} + c,\ c \in \mathbb{R}$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + c,\ c \in \mathbb{R}$
$\frac{u'v + uv'}{v^2}$	$\frac{u}{v} + c,\ c \in \mathbb{R}$
$(v' \circ u)u'$	$(v \circ u) + c,\ c \in \mathbb{R}$

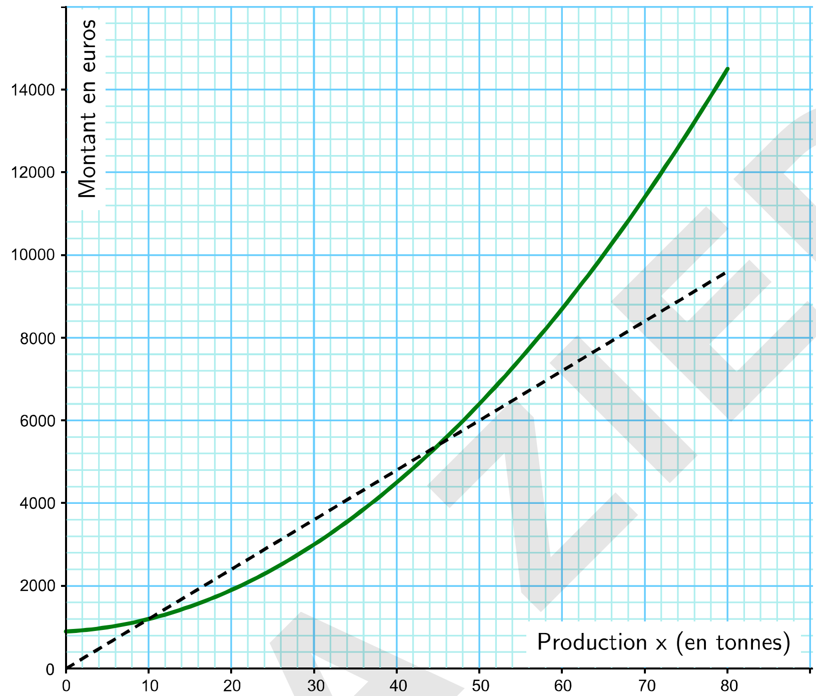
Attention !

- Une fonction f dérivable à droite et dérivable à gauche en x_0 n'est pas forcement dérivable en x_0
- Ne pas croire que si une bijection f est dérivable sur un intervalle I alors f^{-1} est dérivable sur $f(I)$: il faut que f' soit non nul sur I
- Ne pas croire que si f n'est pas paire alors elle est impaire : On a des fonctions paires, des fonctions impaires et des fonctions ni paires ni impaires
- Ne pas croire qu'une fonction continue possède une seule primitive
- La primitive d'un produit n'est pas le produit des primitives

Les exercices

Exercice 1

Une entreprise produit de la farine de blé. On note x le nombre de tonnes de farine fabriquée, avec $x \in [0,80]$.
On donne la courbe représentant le coût total C (en trait plein) et la recette R (en pointillés) en fonction du nombre de tonnes produites.



Partie A : Lecture graphique

1) Déterminer les recettes et le coût d'une production de 70 tonnes de blé. Est-ce rentable ?
2) Déterminer les quantités de blé à produire pour que les comptes de l'entreprise soient équilibrés (ni perte ni bénéfice)
3) Déterminer les quantités de blé à produire pour que l'entreprise soit rentable
4) La fonction recette est du type $R(x) = ax + b$ expliquer pourquoi ? déterminer a et b
5) Donner par lecture graphique une estimation du bénéfice maximal réalisable

Partie B :

On admet que les coûts sont données par $C(x) = 2x^2 + 10x + 900$. Soit b la fonction bénéfice définie sur $[0,80]$ par $b(x) = R(x) - C(x)$

1) Démontrer par le calcul les résultats des questions 1) 2) et 3) de la partie A
2) Calculer la dérivée b' et dresser le tableau de variations de b. En déduire la quantité de blé à produire pour obtenir un bénéfice maximal

Exercice 2

Soit $f(x) = \dfrac{3x+1}{2-x}$

1) Déterminer le domaine de définition Df de f
2) Calculer la fonction f' dérivée de f
3) a) Etudier les limites de f aux bornes de Df
   b) Dresser le tableau de variations de f
   c) Déterminer les éventuelles asymptotes à $\mathscr{C}$ courbe représentative de f sur Df
4) Déterminer une équation da la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $x = 0$
5) Représenter T et $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormé

Exercice 3

On considère une fonction f dont le tableau de variation est :

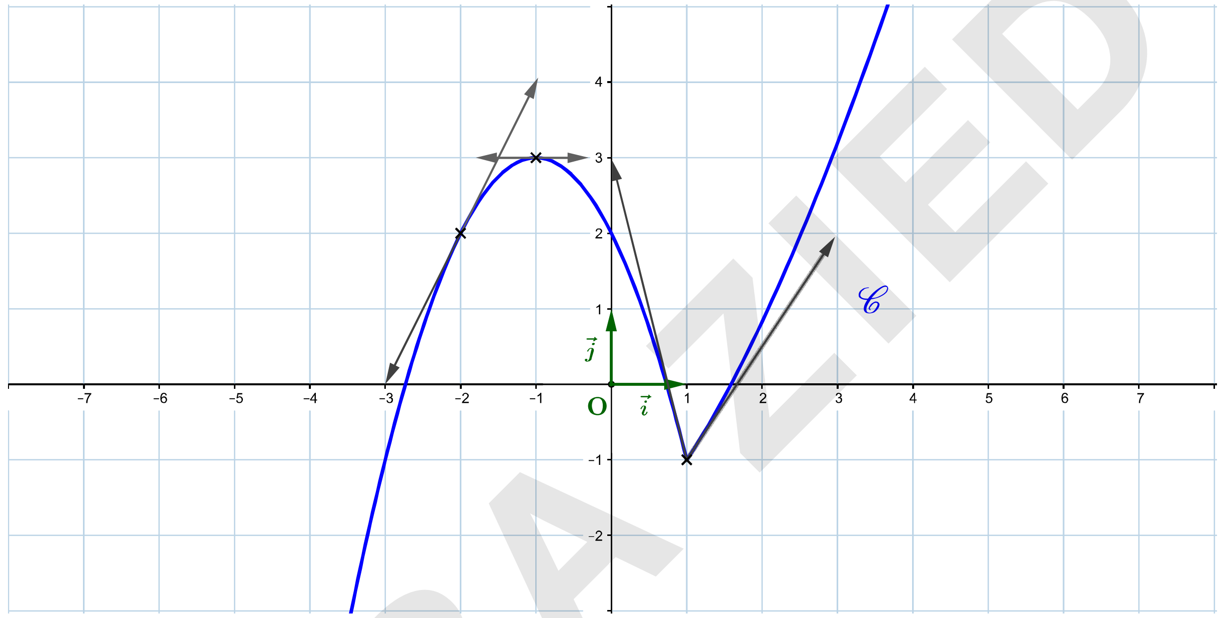
x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	-7	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Soit a, b et c trois réels. On sait que f est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ par : $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+1}$

1) Exprimer la dérivée f' de f en fonction des réels a, b et c
2) En exploitant les informations contenues dans le tableau de variation de f, déterminer les valeurs des réels a, b et c
3) Montrer que la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f admet deux asymptotes.

Exercice 4

Dans la figure ci-après $\mathscr{C}$ est la courbe représentative d'une fonction f dans le repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$



1) En utilisant le graphique ci-dessous :
   a) Déterminer $f(-2)$, $f'(-2)$, $f'(-1)$
   b) La fonction f est-elle dérivable en 1 ? Justifier
2) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\begin{cases}-x^2-2x+2 & \text{si } x<1\\ x\sqrt{x}-2 & \text{si } x\geq 1\end{cases}$
   a) Montrer que f est continue en 1
   b) Etudier la dérivabilité de f à gauche et à droite en 1
   c) La fonction f est-elle dérivable en 1 ? Justifier
3) Montrer que f est dérivable en 0 et déterminer l'équation cartésienne de sa tangente T au point d'abscisse 0
4) On admet que f est strictement croissante sur $[1,+\infty[$
   a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ possède une solution unique $\alpha\in]1,2[$
   b) Donner un encadrement de α à 0.1 près

Exercice 5

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-3x+1$. On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe de f dans un repère orthogonal.

1) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$
2) a) Calculer $f'(x)$
   b) Dresser le tableau de variation de f
   c) Préciser les extremums de f et donner leurs natures
3) a) Calculer $f''(x)$
   b) Montrer que le point $A(0,1)$ est un point d'inflexion de $\mathscr{C}$
4) Calculer $\dfrac{f(2)-f(0)}{2}$ en déduire l'existence d'une tangente T à $\mathscr{C}$ parallèle à la droite $\Delta : y=x$
5) Soit la restriction de f sur $[1,+\infty[$

a) Montrer que g réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur $[-1,+\infty[$

b) Calculer $g(2)$, en déduire $(g^{-1})'(3)$

Exercice 6

La fonction h est une fonction définie et continue sur $]0,+\infty[$ son tableau de variation est le suivant :

x	0		1		4		$+\infty$
h	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	-1

1) La courbe représentative de h dans le plan muni d'un repère orthonormé admet-elle des asymptotes ? Si oui, donner une équation de chacune d'entre elles
2) Démontrer que l'équation $h(x)=-1$ admet une solution unique sur l'intervalle $]1,4[$
3) Sans justifier, donner le nombre de solutions de l'équation $h(x)=-2$
4) Représenter une courbe possible de la fonction h

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{x-3}{x+1}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

5) Déterminer le domaine de définition de f
6) Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
7) a) Justifier la dérivabilité de f sur son domaine de définition

   b) Montrer que $f'(x)=\dfrac{4}{(x+1)^2}$

   c) Dresser le tableau de variation de f
8) Ecrire une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1
9) Soit la fonction g définie sur $[0,+\infty[$ par $g(x)=f(x)$

   a) Montrer que g réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur un intervalle J qu'on déterminera

   b) Déterminer $g^{-1}(-3)$ et $g^{-1}(0)$

Exercice 8

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ $f(x)=x^3-3x+2$ et on désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
2) a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et Calculer $f'(x)$

   b) Dresser le tableau de variation de f

   c) Préciser les extremums de f et donner leurs natures.
3) Montrer que le point $A(0,2)$ est un point d'inflexion de $\mathscr{C}$
4) Tracer $\mathscr{C}$
5) Soit la restriction de f sur $[1,+\infty[$

   a) Montrer que g réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur $[0,+\infty[$

   b) Calculer $f(2)$, en déduire $(f^{-1})'(4)$
6) a) Montrer que f possède des primitive sur $\mathbb{R}$

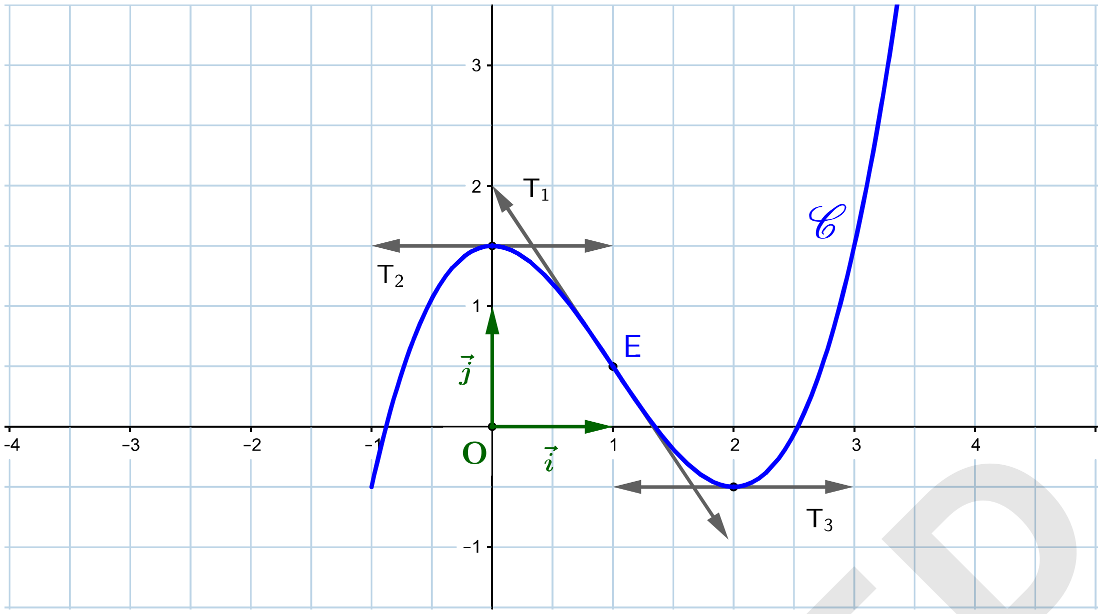
   b) Déterminer la primitive F de f qui s'annule en -2

Exercice 9

La courbe $\mathscr{C}$ donnée dans la figure ci-après représente une fonction f définie et dérivable sur $[-1,+\infty[$. Cette courbe est tracée dans un repère orthonormé.

La courbe $\mathscr{C}$ possède une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées aux voisinages de $+\infty$

On a représenté également les tangentes T_1, T_2 et T_3 à $\mathscr{C}$ aux points d'abscisses respectives 1, 0 et 2



Partie A

Dans cette partie, les réponses seront obtenues par lecture graphique.

1) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
2) Déterminer les valeurs de $f(0)$, $f'(0)$, $f'(1)$, $f(2)$ et $f'(2)$
3) Dresser le tableau de variation de f

Partie B

La fonction f étudiée dans la partie A est définie par $f(x)=\frac{1}{2}(x^3-3x^2+3)$

1) Etudier la continuité de f sur $[-1,+\infty[$
2) a) Justifier pourquoi l'équation $f(x)=0$ possède une solution unique α dans l'intervalle $[0,2]$ (une justification graphique ne sera pas acceptée)
   b) Montrer que $1.34\le\alpha\le1.35$
3) a) Montrer que pour tout $x\in[1,+\infty[$ on a $f(x)-f(-1)=\frac{1}{2}(x+1)(x-2)^2$
   b) La fonction f est-elle dérivable à droite en -1 ? justifier
4) Montrer que f est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et calculer sa fonction dérivée f'

Exercice 10

Soit f la fonction définie par $f(x)=\frac{-3x^2+5x+4}{x+1}$ et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1) a) Déterminer le domaine de définition de f
   b) Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition
   c) Montrer que $f(x)=-3x+8-\frac{4}{x+1}$
   d) Montrer alors que $D: y=-3x+8$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}$ en $-\infty$ et en $+\infty$
2) a) Déterminer la fonction dérivée de f
   b) Dresser le tableau de variation de f
3) Déterminer une équation da la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0
4) Déterminer les coordonnées des points de $\mathscr{C}$ pour lesquels $\mathscr{C}$ admet une tangente parallèle à la droite d'équation $y=-2x$

Exercice 11

Soit la fonction f définie par $f(x)=\frac{3x}{x^2-1}$. On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe de f dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f
2) a) Montrer que $O(0,0)$ est un centre de symétrie pour la courbe $\mathscr{C}$
   b) Vérifier que $\Delta: x=1$ est une asymptote verticale à la courbe $\mathscr{C}$
   c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et en déduire que la courbe possède une asymptote horizontale Δ' en $+\infty$

3) a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ et que $f'(x)=-\dfrac{3+3x^2}{(x^2-1)^2}$

   b) Dresser le tableau de variation de f sur $[0,1[\cup]1,+\infty[$

4) Tracer $\mathscr{C}$, Δ et Δ'

Exercice 12

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ par $f(x)=\dfrac{x^2-x+2}{x-2}$

1) Déterminer la fonction dérivée de f
2) a) Etudier les limites de f aux bornes de son domaine et en déduire l'existence d'asymptotes horizontales ou verticales à la courbe $\mathscr{C}$ représentative de f dans un repère orthogonale $(O,\vec{i},\vec{j})$
   b) Dresser alors le tableau de variation de f
3) a) Déterminer trois réels a, b et c tels que $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-2}$
   b) Montrer que la droite Δ d'équation $y=x+1$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}$ en $+\infty$ et en $-\infty$
   c) Etudier la position relative de $\mathscr{C}$ et Δ
4) Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ possède deux tangentes T et T' parallèles à la droite $\mathscr{D}: y=-3x$
5) Tracer $\mathscr{C}$, T, T' et Δ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

Exercice 13

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. Soit f une fonction définie sur $]-1,+\infty[$ tel que l'axe des abscisses est tangente à sa courbe représentative $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.

1) Déterminer $f'(1)$ et $f(1)$
2) La fonction f est de la forme $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+1}{x+1}$ où a et b sont deux réels.
   a) Montrer que $f'(x)=\dfrac{ax^2+2ax+b-1}{(x+1)^2}$
   b) En déduire les valeurs de a et b
3) Pour la suite, on suppose que $a=1$ et $b=-2$
   a) Déterminer $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$. Interpréter graphiquement ce résultat.
   b) Montrer que pour tout réel x de Df, $f(x)=x-3+\dfrac{4}{x+1}$
   c) En déduire que $\mathscr{C}$ admet une asymptote oblique en $+\infty$ dont on précisera l'équation.
   d) Etudier les variations de f
   e) Tracer $\mathscr{C}$

Exercice 14

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ par $f(x)=ax+b+\dfrac{1}{3-x}$ et on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) Déterminer a et b pour que $\mathscr{C}$ passe par $A(2,1)$ et admette une tangente horizontale en A.
2) Montrer que $\mathscr{C}$ admet une asymptote $\mathscr{D}$ au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$ dont on donnera une équation
3) Etudier la position relative de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$
4) Etudier la limite en 3 de $f(x)$
5) Dresser le tableau de variation de f
6) Tracer $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$

Exercice 15

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0,+\infty[$. On sait que $f(2)=-4$ et que le signe de la fonction f est donné par le tableau suivant :

x	0		4		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	

Partie A

1) Soit F la primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0,+\infty[$ telle que $F(4)=\dfrac{1}{2}$. On note $\mathscr{C}$ la courbe

représentative de la fonction F

a) Donner le tableau des variations de la fonction F

b) On suppose que la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point $A(2,3)$. Donner une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point A

2) Tracer la courbe représentative d'une fonction qui satisfait les conditions obtenues à la question précédente, dans un repère orthonormé du plan

3) Placer le point A ainsi que le point d'abscisse 4 et tracer les tangentes à la courbe en ces points

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par $f(x)=1-\frac{12}{x^2}-\frac{16}{x^3}$

1) a) Calculer la primitive F de la fonction f sur l'intervalle $]0,+\infty[$ telle que $F(4)=\frac{1}{2}$

b) Vérifier que la tangente à la courbe représentative de la fonction F au point d'abscisse 2 a pour équation $y=-4x+11$

2) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x)$. Interpréter graphiquement le résultat

3) a) Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} F(x)$

b) Montrer que la courbe de la fonction F admet pour asymptote la droite $\Delta : y = x-7$

Exercice 16

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^3+x^2+6$

1) Etudier les variations de g

2) En déduire que l'équation $g(x)=0$ possède une solution unique a dans $\mathbb{R}$ et que $-3<a<-2$

3) Etudier le signe de $g(x)$ pour $x\in\mathbb{R}$

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=x-1+\frac{x^2-3x+2}{x^3}$

1) a) Montrer que $f'(x)=\frac{(x-1)}{x^4}g(x)$

b) En déduire les variations de f

2) Donner une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ de f en son point d'abscisse 2

3) Tracer T et $\mathscr{C}$ dans le plan muni d'un repère orthonormé

Exercice 17

Soit la fonction $f(x)=\sqrt{4-2x}$. On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) Etudier le sens de variation de la fonction f

2) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0

3) Existe-t-il une tangente à $\mathscr{C}$ de coefficient directeur $-\frac{1}{4}$?

4) Existe-t-il une tangente à $\mathscr{C}$ qui passe par le point $A(2,3)$?

Exercice 18

Soit la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ et on désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter graphiquement le résultat

2) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que $f'(x)=\frac{-1}{(1+\sqrt{x})^2\sqrt{x}}$

3) Dresser le tableau de variation de f

4) Montrer que f admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J qu'on précisera. On notera $\mathscr{C}'$ sa courbe représentative dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

5) Donner le domaine de continuité et de dérivabilité de f^{-1}

6) Calculer $f(4)$ et en déduire $f^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)$

7) On pose $g(x)=f(x)-x$

a) Montrer que g est une bijection de $]0,+\infty[$ sur $]-\infty,1[$

b) En déduire que l'équation $f(x)=x$ admet une solution unique α

c) Montrer que $0<\alpha<1$

8) Tracer $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$

Correction des exercices

Exercice 1

Partie A : Lecture graphique

1) $C(70)=11400$ et $R(70)=8400$
   $R(70)-C(70)=-3000<0$ donc la production n'est rentable
2) Pour que les comptes soient équilibrés l'entreprise doit produire 10 tonne ou 45 tonnes de farine
3) L'entreprise est rentable pour une production entre 10 et 45 tonnes
4) La courbe de R est une droite donc $R(x)$ s'écrit sous la forme $R(x)=ax+b$
   $R(0)=0 \Rightarrow b=0$ et $R(50)=6000=50a \Rightarrow a=\dfrac{6000}{50}=120$ donc $R(x)=120x$
5) Le bénéfice est la différence entre la recette et le coût de production (graphiquement la distance entre les points d'intersection d'une droite verticale avec les deux courbes).
   Le bénéfice maximal réalisable est estimé à 600 €

Partie B :

1) $C(70)=11400$, $R(70)=120\times 70=8400$ et $b(70)=8400-11400=-3000$
   $b(x)=0 \Leftrightarrow 2x^2+10x+900=120x \Leftrightarrow x^2-55x+450=0 \Leftrightarrow x=10$ ou $x=45$
   $b(x)>0 \Leftrightarrow x^2-55x+450>0$
   $\Leftrightarrow 10<x<45$
2) $b(x)=120x-2x^2-10x-900=-2x^2+110x-900$
   La fonction b est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme étant une fonction polynôme et on a $b'(x)=-4x+110$

x	0		27.5		80
$b'(x)$		$+$	0	$-$	
b	-900	$\nearrow$	612.5	$\searrow$	-4900

Il faut produire 27.5 tonnes de blé pour obtenir un bénéfice maximal

Exercice 2

1) $DF=\mathbb{R}\setminus\{2\}=]-\infty,2[\cup]2,+\infty[$
2) La fonction f est dérivable sur Df comme étant une fonction rationnelle et on a :

$$f'(x)=\frac{3(2-x)-(-1)(3x+1)}{(2-x)^2}=\frac{6-3x+3x+1}{(2-x)^2}=\frac{7}{(2-x)^2}$$

3) a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x+1}{2-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x}{-x}=-3$

   $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x+1}{2-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x}{-x}=-3$

   $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{3x+1}{2-x}=+\infty$

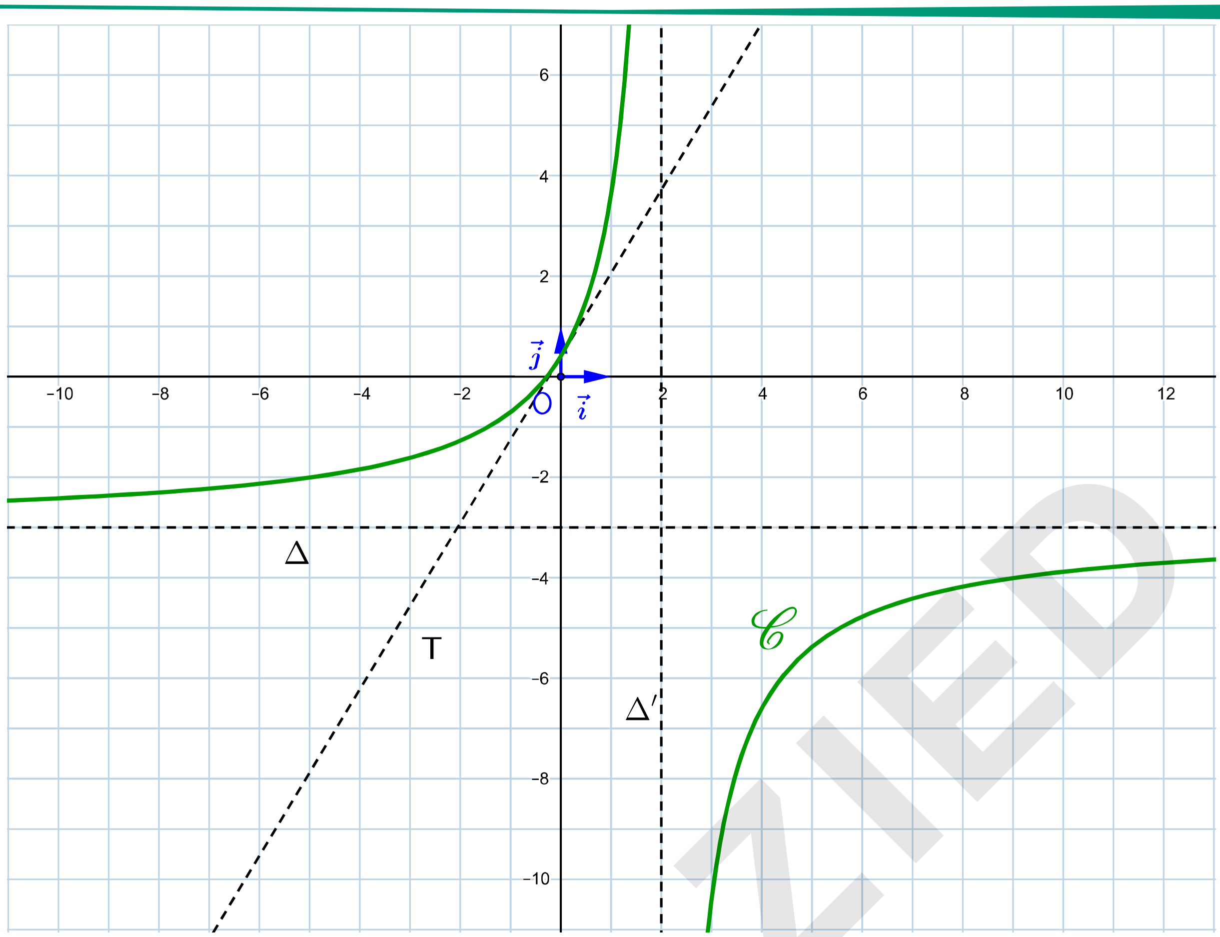
   $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{3x+1}{2-x}=-\infty$

   b)

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
f	-3	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	-3

   c) La droite $\Delta: y=-3$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$, la droite $\Delta': x=2$ est une asymptote verticale à la courbe $\mathscr{C}$

4) $T: y=f'(0)x+f(0)=\dfrac{7}{2}x+\dfrac{1}{2}$



Exercice 3

1) $f'(x) = a - \dfrac{c}{(x+1)^2}$

2) D'après le tableau on a $f(-3) = -7 = -3a + b - \dfrac{1}{2}c$, $f(1) = 1 = a + b + \dfrac{1}{2}c$ et $f'(1) = 0 = a - \dfrac{1}{4}c$

donc $\begin{cases} a+b+\frac{1}{2}c = 1 \\ -3a+b-\frac{1}{2}c = -7 \\ a-\frac{1}{4}c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+\frac{1}{2}c = 1 \\ -3a+b-\frac{1}{2}c = -7 \\ c = 4a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+2a = 1 \\ -3a+b-2a = -7 \\ c = 4a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b+3a = 1 \\ -5a+b = -7 \\ c = 4a \end{cases}$

$L_2 \leftarrow L_1 - L_2$

$\begin{cases} 8a = 8 \\ -5a+b = -7 \\ c = 4a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 4 \end{cases}$ donc $f(x) = x - 2 + \dfrac{4}{x+1}$

3) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$ donc $\mathscr{C}$ possède une asymptote verticale d'équation $x = -1$

d'autre part on a $\lim\limits_{x\to -\infty} [f(x) - (x-2)] = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{4}{x+1} = 0$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} [f(x) - (x-2)] = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{4}{x+1} = 0$ donc la droite d'équation $y = x - 2$ est une asymptote oblique de $\mathscr{C}$

Exercice 4

1) a) $f(-2) = 2$, $f'(-2) = 2$ et $f'(-1) = 0$

c) La fonction f n'est pas dérivable en 1 car sa courbe possède au point d'abscisse 1 deux demi-tangentes de coefficients différents

2) a) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} -x^2 - 2x + 2 = -1 = f(-1)$ donc f est continue à gauche en 1

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} x\sqrt{x} - 2 = -1 = f(-1)$ donc f est continue à droite en 1

Et par suite f est continue en 1

b) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{-x^2 - 2x + 3}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{-\cancel{(x-1)}(x+3)}{\cancel{x-1}} = -4$

donc f est dérivable à gauche en 1 et on a : $f'_g(1) = -4$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^+}\frac{x\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{x}^3-1^3}{\sqrt{x}^2-1^2} = \lim_{x\to1^+}\frac{\cancel{(\sqrt{x}-1)}(x+\sqrt{x}+1)}{\cancel{(\sqrt{x}-1)}(\sqrt{x}+1)} = \frac{3}{2}$$

donc f est dérivable à droite en 1 et on a : $f'_d(1) = \frac{3}{2}$

c) $f'_d(1) \neq f'_g(1)$ donc f n'est pas dérivable en 1

3) $\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to0}\frac{-x^2-2x}{x} = \lim_{x\to0} -x-2 = -2$ donc f est dérivable en 0 et on a $f'(0) = -2$

$T : y = f'(0)x + f(0) = -2x + 2$

4) a) → f est strictement croissante sur $[1,+\infty[$ donc elle est strictement croissante sur $[1,2]$

→ f est continue sur $[1,+\infty[$ comme étant le produit et la somme de fonction continues donc f est continue sur $[1,2]$

→ $f(1) = -1$ et $f(2) = 2\sqrt{2} - 2 \simeq 0,828$ donc f change de signe sur $[1,2]$

donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = 0$ possède une solution unique $\alpha \in]1,2[$

c) $\left.\begin{array}{l} f(1.5) \simeq -0.16 \\ f(1.6) \simeq 0.02 \end{array}\right\}$ donc $1.5 < \alpha < 1.6$

Exercice 5

1) La fonction f est une fonction polynôme donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$

2) a) On a $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2-1) = 3(x-1)(x+1)$

b) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	3	↘	-1	↗	$+\infty$

c) 3 est un maximum relatif de f en -1 et -1 est un minimum relatif de f en 1

3) a) $f''(x) = 6x$

b) La dérivée seconde de f s'annule en 0 en changeant de signe donc le point $A(0,f(0)) = (0,1)$ est un point d'inflexion de $\mathscr{C}f$

4) $\frac{f(2)-f(0)}{2} = \frac{3-1}{2} = 1$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0,2]$, le théorème des accroissements finis nous permet de conclure qu'il existe un réel c dans l'intervalle $[0,2]$ telle que $f'(c) = \frac{f(2)-f(0)}{2} = 1$ ce qui veut dire qu'il existe une tangent de coefficient directeur 1 donc parallèle à la droite $\Delta : y = x$

5) a) g est strictement croissante sur $[1,+\infty[$ donc elle réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur $g([1,+\infty[) = [-1,+\infty[$

b) $g(2) = f(2) = 3$

g est dérivable en 2 et on a $g'(2) = 9 \neq 0$ donc g^{-1} est dérivable en 3 et on a :

$$(g^{-1})'(3) = \frac{1}{g'(g^{-1}(3))} = \frac{1}{g'(2)} = \frac{1}{9}$$

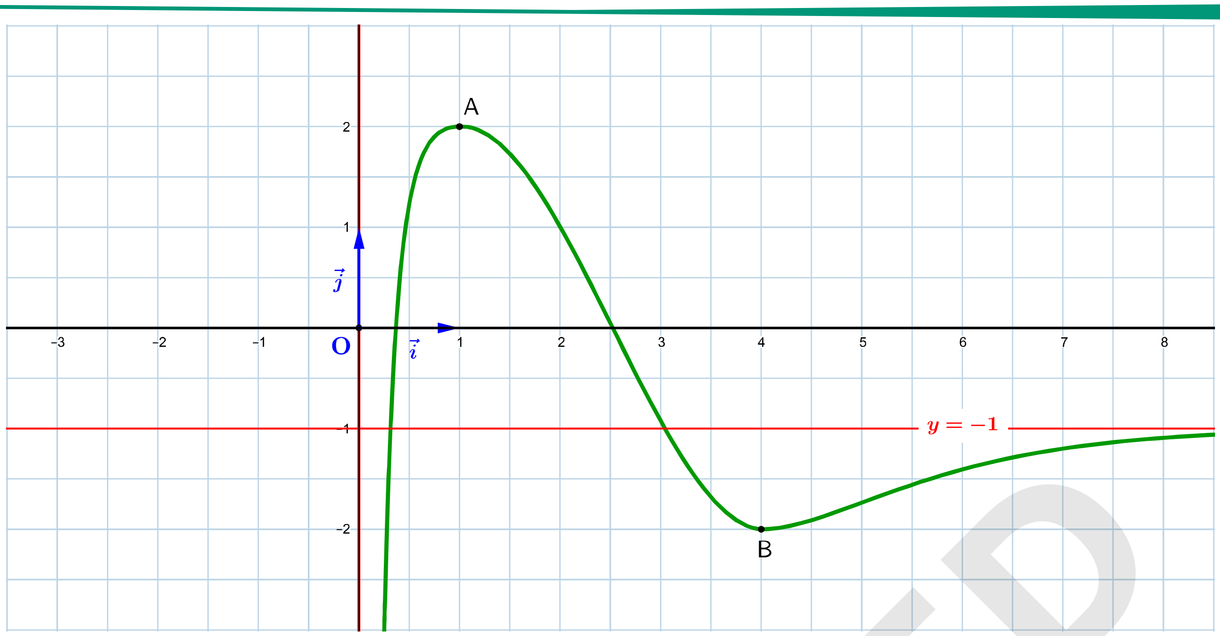
Exercice 6

1) La courbe de h possède une asymptote verticale d'équation $x = 0$ et une asymptote horizontale d'équation $y = -1$

2) La fonction h est continue, strictement décroissante sur $]1,4[$, $h(1)\times h(4) = -4 < 0$ donc $h(x) = 0$ possède une solution unique sur $]1,4[$

3) $h(x) = -2$ possède deux solutions

4)



Exercice 7

1) $Df = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x-3}{x+1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{x} = 1$, $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} \frac{x-3}{x+1} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} \frac{x-3}{x+1} = -\infty$ et

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x-3}{x+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{x} = 1$

3) a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ comme étant une fonction rationnelle

b) $f'(x) = \frac{(x+1)-(x-3)}{(x+1)^2} = \frac{x+1-x+3}{(x+1)^2} = \frac{4}{(x+1)^2}$

c)

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
f	1	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	1

4) Soit T la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1

$$T : y = f'(1)(x-1) + f(1) = x - 1 - 1 = x - 2$$

5) a) g est strictement croissante sur $[0,+\infty[$ donc elle réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur

$J = g([0,+\infty[) = \left[g(0), \lim\limits_{x \to +\infty} g(x)\right[= [-3,1[$

b) $g(x) = -3 \Leftrightarrow \frac{x-3}{x+1} = -3 \Leftrightarrow x - 3 = -3(x+1) \Leftrightarrow 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ donc $g^{-1}(-3) = 0$

$g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x-3}{x+1} = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ donc $g^{-1}(0) = 3$

Exercice 8

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 - 3x + 2 = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 - 3x + 2 = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$

2) a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme étant une fonction polynôme et on a $f'(x) = 3x^2 - 3$

b)

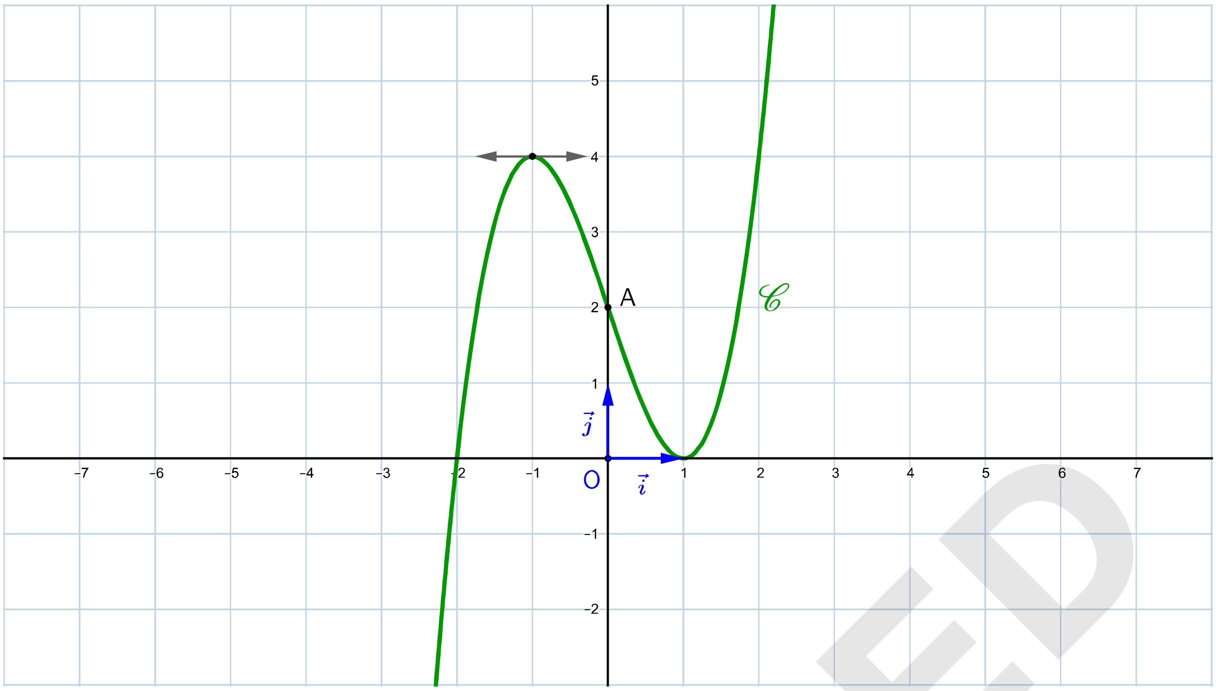
x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

c) f possède un maximum relatif en -1 égale à 4 et un minimum relatif en 1 égale à 0

3) f ' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $f''(x) = 6x$.

f " s'annule en 0 en changeant de signe donc le point $A(0,f(0)) = (0,2)$ est un point d'inflexion de $\mathscr{C}$

4)



5) a) g est strictement croissante sur $[1,+\infty[$ donc elle réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur $g([1,+\infty[)=[0,+\infty[$

b) $f(2)=2^3-3\times 2+2=4$ et $(f^{-1})'(4)=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(4))}=\dfrac{1}{f'(2)}=\dfrac{1}{9}$

6) a) f est continue sur $\mathbb{R}$ donc elle possède des primitives sur $\mathbb{R}$

b) Une primitive de f s'écrit sous la forme $F(x)=\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{3}{2}x^2+2x+k$, $k\in\mathbb{R}$

$F(-2)=0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{4}\times 16-\dfrac{3}{2}\times 4-2\times 2+k=0 \Leftrightarrow k=6$ donc $F(x)=\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{3}{2}x^2+2x-6$

Exercice 9

Partie A

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

2) $f(0)=\dfrac{3}{2}$ $\quad f'(0)=0$ $\quad f(1)=\dfrac{1}{2}$ $\quad f'(1)=-\dfrac{3}{2}$ $\quad f(2)=-\dfrac{1}{2}$ $\quad f'(2)=0$

3)

x	-1		0		2		$+\infty$
f	$-\frac{1}{2}$	↗	$\frac{3}{2}$	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	$+\infty$

Partie B

1) La fonction f est continue sur $]-1,+\infty[$ comme étant un polynôme

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{2}(x^3-3x^2+3)=-\dfrac{1}{2}=f(-1)$ donc f est continue à droite en -1 et par suite f est continue sur $[-1,+\infty[$

2) a) f est continue et strictement décroissante sur $[0,2]$ et on a $f(0)f(2)=\dfrac{3}{2}\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{3}{4}<0$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x)=0$ possède une solution unique $\alpha\in[0,2]$

b) $\left.\begin{array}{l} f(1.34)\simeq 0.009652 \\ f(1.35)\simeq -0.0035625 \end{array}\right\}$ donc f change de signe entre 1.34 et 1.35 donc $1.34<\alpha<1.35$

3) a) $\dfrac{1}{2}(x+1)(x-2)^2=\dfrac{1}{2}(x+1)(x^2-4x+4)=\dfrac{1}{2}(x^3-4x^2+4x+x^2-4x+4)=\dfrac{1}{2}(x^3-3x^2+4)$

$=\dfrac{1}{2}(x^3-3x^2+3)+\dfrac{1}{2}=f(x)-f(-1)$

b) $\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{\frac{1}{2}(x+1)(x-2)^2}{(x+1)}=\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{(x-2)^2}{2}=\dfrac{9}{2}$

donc f est dérivable à droite en -1 et on a $f'(-1)=\dfrac{9}{2}$

4) f est dérivable sur $]-1,+\infty[$ comme étant fonction polynôme et on a : $f'(x)=\dfrac{1}{2}(3x^2-6x)=\dfrac{3}{2}x^2-3x$

Exercice 10

1) a) $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-3x^2+5x+4}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-3x^2}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}-3x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-3x^2}{x}=-\infty$

c) On a pour tout $x\in D_f$,

$$-3x+8-\frac{4}{x+1}=\frac{(-3x+8)(x+1)-4}{x+1}=\frac{-3x^2-3x+8x+8-4}{x+1}=\frac{-3x^2+5x+4}{x+1}=f(x)$$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(-3x+8)]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-\dfrac{4}{x+1}\right]=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(-3x+8)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\dfrac{4}{x+1}\right]=0$ donc la droite D est une asymptote à $\mathscr{C}$

2) a) $f'(x)=-3+\dfrac{4}{(x+1)^2}=\dfrac{-3(x+1)^2+4}{(x+1)^2}=\dfrac{-3x^2-6x+1}{(x+1)^2}$

b) $-3x^2-6x+1=0$, $\Delta=36-4\times(-3)=120$ donc $x_1=\dfrac{6+\sqrt{120}}{-6}=-1-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ et $x_2=-1+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

x	$-\infty$		x_1		-1			x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	‖	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	↘		↗	$+\infty$ ‖	‖ $-\infty$	↗		↘	$-\infty$

$\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}-3x+8-\dfrac{4}{x+1}=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}-3x+8-\dfrac{4}{x+1}=+\infty$

3) $T:y=f'(0)x+f(0)=x+4$

4) La tangente à $\mathscr{C}$ en a est parallèle à $y=-2x$ si, et seulement si, $f'(a)=-2$ c'est-à-dire :

$$-3+\frac{4}{(a+1)^2}=-2\Leftrightarrow\frac{4}{(a+1)^2}=1\Leftrightarrow 4=(a+1)^2\Leftrightarrow a+1=2\ \text{ou}\ a+1=-2\Leftrightarrow a=1\ \text{ou}\ a=-3$$

Exercice 11

1) $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$

2) a) Si $x\in D_f$ alors $x\neq-1$ et $x\neq1$ donc $-x\neq1$ et $-x\neq-1$ par suite $-x\in D_f$

$f(-x)=\dfrac{-3x}{(-x)^2-1}=-\dfrac{3x}{x^2-1}=-f(x)$ donc f est impaire est par conséquence $\mathscr{C}$ est symétrique par rapport à $O(0,0)$

b) $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{3x}{x^2-1}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{3x}{x^2-1}=-\infty$ donc $\Delta:x=1$ est une asymptote à $\mathscr{C}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x}{x^2}=0$ donc $\Delta':y=0$ est une asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$

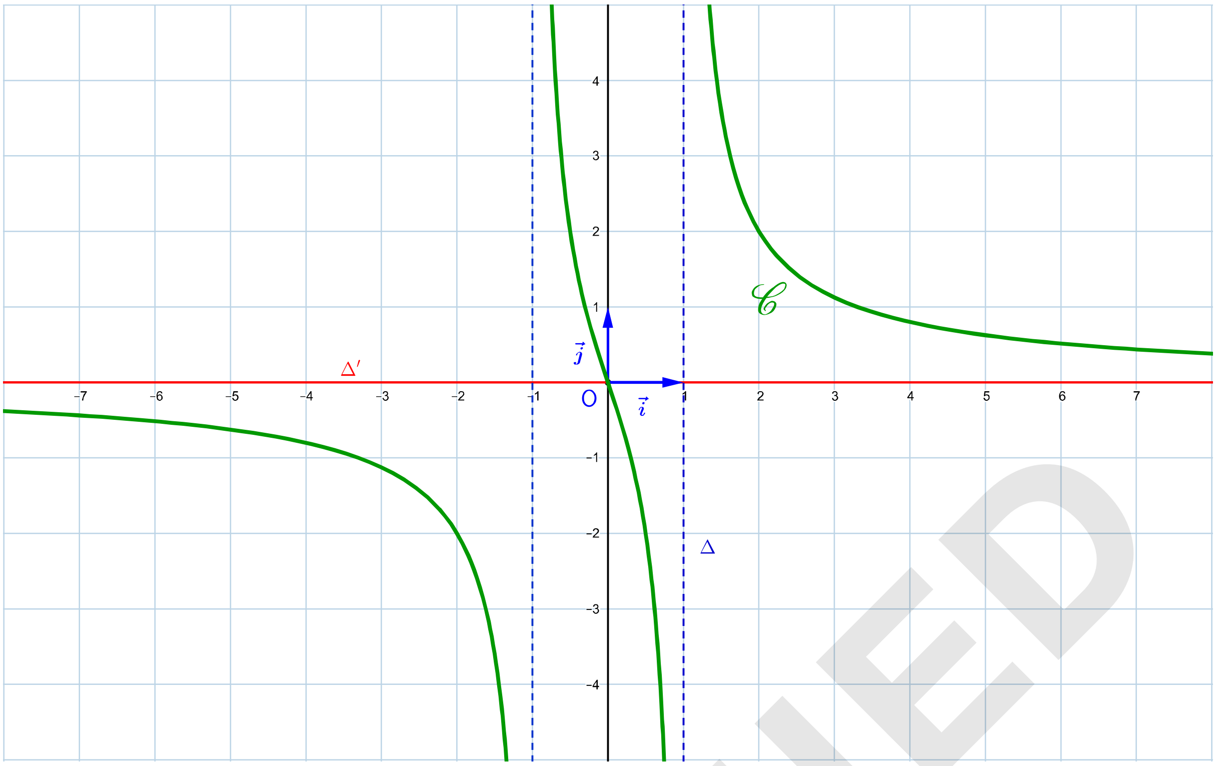
3) a) La fonction f est dérivable sur Df comme étant une fonction rationnelle et on a :

$$f'(x)=\frac{3(x^2-1)-3x(2x)}{(x^2-1)^2}=\frac{3x^2-3-6x^2}{(x^2-1)^2}=\frac{-3x^2-3}{(x^2-1)^2}=-\frac{3x^2+3}{(x^2-1)^2}<0$$

b)

x	0		1			$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	‖	$-$	
f	0	↘	$-\infty$ ‖	‖ $+\infty$	↘	0

4)



Exercice 12

1) La fonction f est dérivable sur Df comme étant une fonction rationnelle et on a :

$$f'(x)=\frac{(2x-1)(x-2)-(x^2-x+2)}{(x-2)^2}=\frac{2x^2-4x-x+2-x^2+x-2}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x}{(x-2)^2}$$

2) a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-x+2}{x-2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x}=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+2}{x-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to2^-}\frac{x^2-x+2}{x-2}=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}\frac{x^2-x+2}{x-2}=+\infty$ donc $\mathscr{C}$ possède une asymptote verticale d'équation $x=2$

b)

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	7	↗	$+\infty$

3) a) $ax+b+\frac{c}{x-2}=\frac{(ax+b)(x-2)+c}{x-2}=\frac{ax^2-2ax+bx-2b+c}{x-2}=\frac{ax^2+(-2a+b)x-2b+c}{x-2}=\frac{x^2-x+2}{x-2}$

donc $\begin{cases}a=1\\-2a+b=-1\\-2b+c=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=1\\c=4\end{cases}$ c'est-à-dire $f(x)=x+1+\frac{4}{x-2}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+1)]=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4}{x-2}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4}{x-2}=0$ donc la droite $\Delta : y=x+1$ est une asymptote oblique à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$

c)

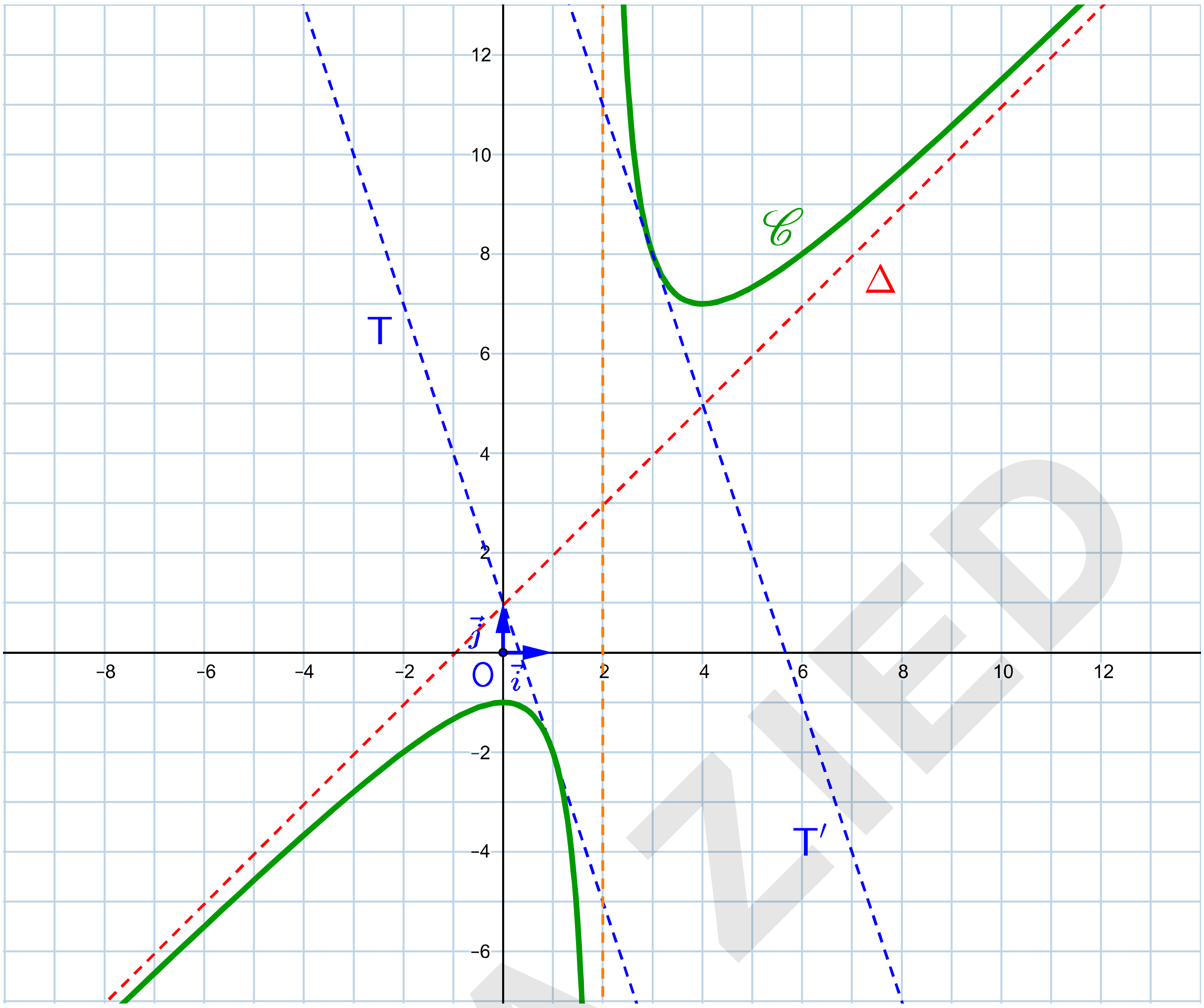
x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)-(x+1)=\frac{4}{x-2}$	$-$	‖	$+$
Position relative	$\mathscr{C}$ est au-dessous de Δ	‖	$\mathscr{C}$ est au-dessus de Δ

4) La tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a est parallèle à la droite $y=-3x$ si, et seulement si, $f'(a)=-3$

c'est-à-dire : $\frac{a^2-4a}{(a-2)^2}=-3\Leftrightarrow a^2-4a=-3(a-2)^2\Leftrightarrow a^2-4a+3(a^2-4a+4)=0\Leftrightarrow 4a^2-16a+12=0$

$\Leftrightarrow a^2-4a+3=0\Leftrightarrow a=1$ ou $a=3$

Les tangentes à $\mathscr{C}$ aux points $A(1,-2)$ et $B(3,8)$ sont parallèles à la droite $y=-3x$



Exercice 13

1) L'axe des abscisses est tangente horizontale à $\mathscr{C}$ en 1 donc $f'(1)=0$ et $f(1)=0$

2) a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ comme étant fonction rationnelle et on a :

$$f'(x)=\frac{(2ax+b)(x+1)-(ax^2+bx+1)}{(x+1)^2}=\frac{2ax^2+2ax+bx+b-ax^2-bx-1}{(x+1)^2}=\frac{ax^2+2ax+b-1}{(x+1)^2}$$

b) $f'(1)=0 \Leftrightarrow \frac{a+2a+b-1}{4}=0 \Leftrightarrow 3a+b-1=0$ et $f(1)=0 \Leftrightarrow \frac{a+b+1}{2}=0 \Leftrightarrow a+b+1=0$

donc : $\begin{cases} a+b+1=0 \\ 3a+b-1=0 \end{cases}$

$L_2-L_1 \Rightarrow 2a-2=0 \Rightarrow a=1$ et $L_1 \Rightarrow b=-2$

donc $f(x)=\frac{x^2-2x+1}{x+1}$

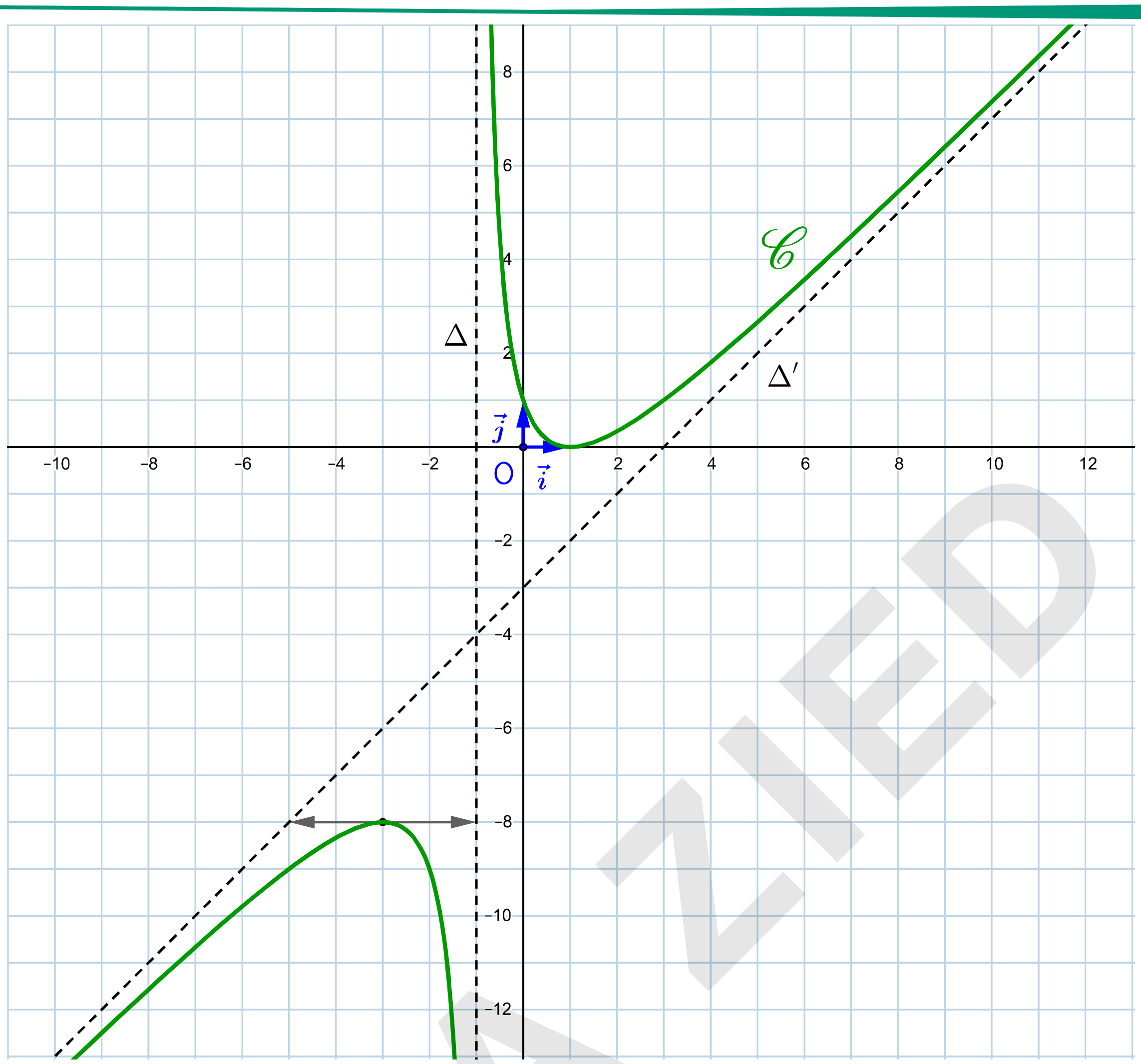
3) a) $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{x^2-2x+1}{x+1}=+\infty$ donc la droite $\Delta : x=-1$ est une asymptote verticale à $\mathscr{C}$

b) Pout tout $x\in Df$, $x-3+\frac{4}{x+1}=\frac{(x-3)(x+1)+4}{x+1}=\frac{x^2+x-3x-3+4}{x+1}=\frac{x^2-2x+1}{x+1}=f(x)$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-3)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4}{x+1}=0$ donc la droite $\Delta' : y=x-3$ est une asymptote oblique à $\mathscr{C}$ aux voisinages de $+\infty$

d) $f'(x)=\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}=\frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	‖	−	0	+	
f	$-\infty$	↗	-8	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$



Exercice 14

1) $\mathscr{C}$ passe par $A(2,3)$ donc $f(2)=3 \Leftrightarrow 2a+b+1=3$

$\mathscr{C}$ possède une tangente horizontale en A alors $f'(2)=0$ or $f'(x)=a+\dfrac{1}{(3-x)^2}$ donc $a+1=0$ c'est-à-dire $a=-1$ et $b=4$: $f(x)=-x+4+\dfrac{1}{3-x}$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(-x+4)]=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{3-x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(-x+4)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{3-x}=0$ donc la droite $\mathscr{D}: y=4-x$ est une asymptote oblique à $\mathscr{C}$ au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$

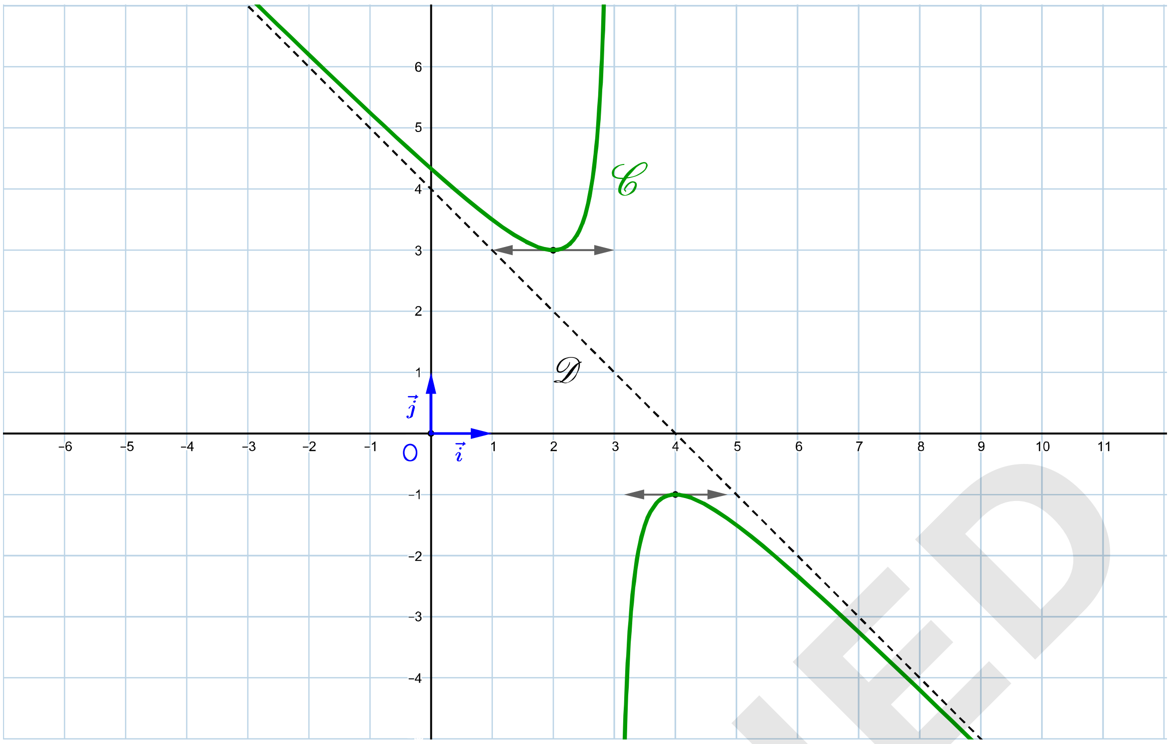
3)

x	$-\infty$ 3	3 $+\infty$
$f(x)-(-x+4)=\dfrac{1}{3-x}$	+	−
Position relative	$\mathscr{C}$ est au-dessus de $\mathscr{D}$	$\mathscr{C}$ est au-dessous de $\mathscr{D}$

4) $\lim\limits_{x\to3^-}f(x)=\lim\limits_{x\to3^-}4-x+\dfrac{1}{3-x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to3^+}f(x)=\lim\limits_{x\to3^+}4-x+\dfrac{1}{3-x}=-\infty$

5) $f'(x)=-1+\dfrac{1}{(3-x)^2}=\dfrac{-x^2+6x-8}{(3-x)^2}$

x	$-\infty$		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+	‖	+	0	−	
f	$+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$



Exercice 15

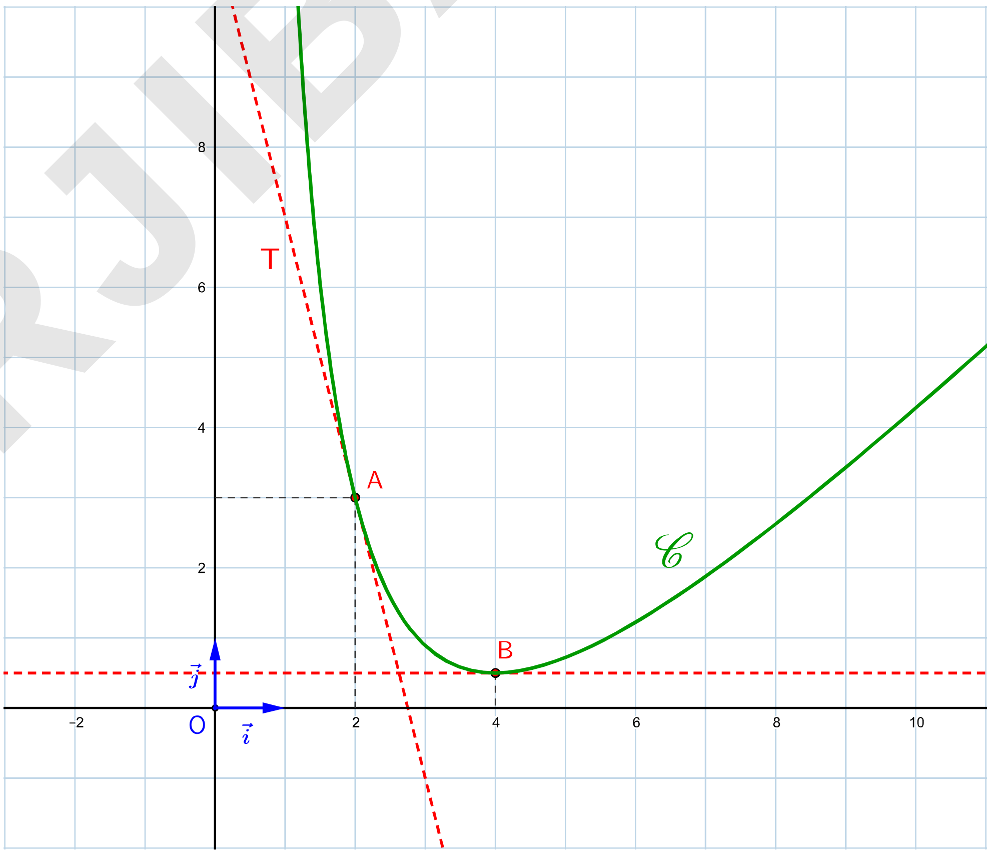
Partie A

1) a)

x	0		4		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	
F		$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	

b) $T : y = f(2)(x-2) + F(2) = -4(x-2) + 3 = -4x + 11$

2)



Partie B

1) a) $F(x) = x + \frac{12}{x} + \frac{8}{x^2} + k$ et comme $F(4) = \frac{1}{2}$ alors $\frac{1}{2} = 4 + \frac{12}{4} + \frac{8}{16} + k \Leftrightarrow 7 + k = 0 \Leftrightarrow k = -7$

donc $F(x) = x + \frac{12}{x} + \frac{8}{x^2} - 7$

b) Une équation de la tangente à la courbe de F au point d'abscisse 2 s'écrit :

$$y = f(2)(x-2) + F(2) = -4(x-2) + 3 = -4x + 11$$

2) $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(x + \frac{12}{x} + \frac{8}{x^2} - 7\right) = +\infty$

donc l'axe des ordonnées est une asymptote à la courbe de F

3) a) $\lim\limits_{x\to +\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(x + \frac{12}{x} + \frac{8}{x^2} - 7\right) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty}[F(x) - (x-7)] = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{12}{x} + \frac{8}{x^2}\right) = 0$

donc la droite $\Delta : y = x - 7$ est une asymptote à la courbe de F au voisinage de $+\infty$

Exercice 16

Partie A

1) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $g'(x) = 3x^2 + 2x = x(3x+2)$

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{166}{27}$	$\searrow$	6	$\nearrow$	$+\infty$

2) La fonction g est strictement positive sur $\left[-\frac{2}{3}, +\infty\right[$

La fonction g est continue, strictement croissante et change de signe sur $\left]-\infty, -\frac{2}{3}\right[$ donc l'équation

$g(x) = 0$ possède une solution unique a sur $\left]-\infty, -\frac{2}{3}\right[$ et donc sur $\mathbb{R}$

$g(-3) = -12$ et $g(-2) = 2$ donc g change de signe sur $]-3, -2[$ et par suite $-3 < a < -2$

3)

x	$-\infty$		a		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

Partie B

1) a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme étant une fonction rationnelle et on a :

$$f'(x) = 1 + \frac{(2x-3)x^3 - 3x^2(x^2-3x+2)}{x^6} = 1 + \frac{2x^2 - 3x - 3x^2 + 9x - 6}{x^4} = \frac{x^4 - x^2 + 6x - 6}{x^4}$$

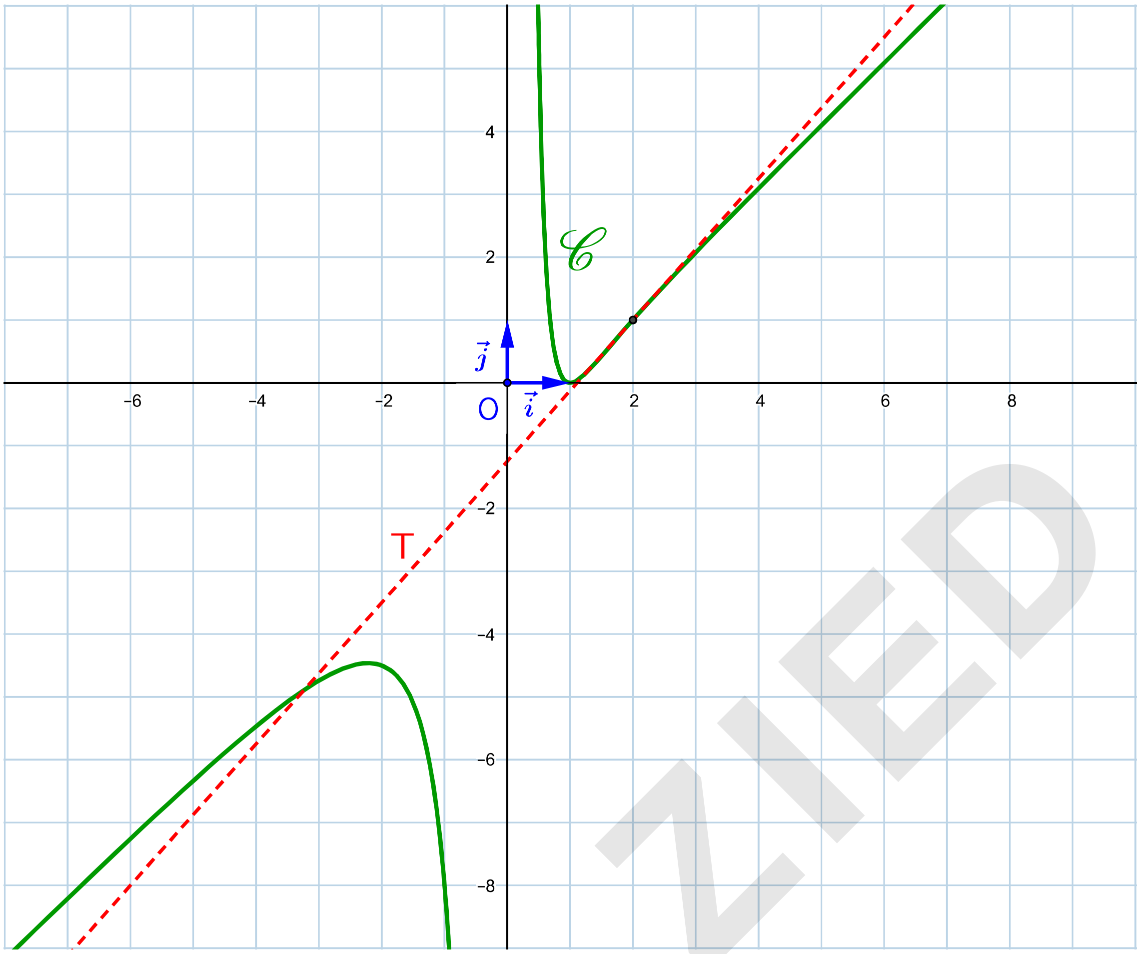
d'autre part on a :

$$\frac{(x-1)}{x^4}g(x) = \frac{(x-1)(x^3+x^2+6)}{x^4} = \frac{x^4 + x^3 + 6x - x^3 - x^2 - 6}{x^4} = \frac{x^4 - x^2 + 6x - 6}{x^4} = f'(x)$$

b)

x	$-\infty$		a		1		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

2) $T : y = f'(2)(x-2) + f(2) = \frac{9}{8}(x-2) + 1 = \frac{1}{8}(9x - 10)$



Exercice 17

1) La fonction f est continue et dérivable sur $]-\infty,2[$ et on a $f'(x)=-\frac{1}{\sqrt{4-2x}}$

x	$-\infty$ \quad 2
$f'(x)$	$-$
f	↘

2) $T: y=f'(0)x+f(0)=-\frac{1}{2}x+2$

3) Le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f en a est $f'(a)=-\frac{1}{\sqrt{4-2a}}$

$f'(a)=-\frac{1}{\sqrt{4-2a}}=-\frac{1}{4}\Leftrightarrow\sqrt{4-2a}=4\Leftrightarrow 4-2a=16\Leftrightarrow 2a=-12\Leftrightarrow a=-6$ donc la courbe de f possède en -6 une tangente de coefficient directeur $-\frac{1}{4}$

4) La tangente en a à la courbe de f a pour équation $y=f'(a)(x-a)+f(a)=-\frac{(x-a)}{\sqrt{4-2a}}+\sqrt{4-2a}$

La tangente à $\mathscr{C}$ en a passe par le point $A(2,3)$ si, et seulement si,

$3=-\frac{(2-a)}{\sqrt{4-2a}}+\sqrt{4-2a}=\frac{-(2-a)+4-2a}{\sqrt{4-2a}}=\frac{2-a}{\sqrt{4-2a}}=\frac{\sqrt{4-2a}}{2}\Leftrightarrow\sqrt{4-2a}=6\Leftrightarrow 4-2a=36$
ou encore $a=-16$

$\Rightarrow$ La tangente à $\mathscr{C}$ en -16 passe par le point A

Exercice 18

1) $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1-\sqrt{x}-1-\sqrt{x}}{x(1+\sqrt{x})}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{-2}{(1+\sqrt{x})\sqrt{x}}=-\infty$

donc f n'est pas dérivable à droite en 0 cependant la courbe $\mathscr{C}$ possède une demi-tangente vertical à droite en 0

2) La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables et on a :

$$f'(x)=\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}(1+\sqrt{x})-\frac{1}{2\sqrt{x}}(1-\sqrt{x})}{(1+\sqrt{x})^2}=\frac{-\frac{1}{\sqrt{x}}-1-\frac{1}{\sqrt{x}}+1}{2(1+\sqrt{x})^2}=\frac{-1}{(1+\sqrt{x})^2\sqrt{x}}$$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}-1}{\frac{1}{\sqrt{x}}+1}=-1$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
f	1 ↘	-1

4) La fonction f est continue et strictement décroissante sur $]0,+\infty[$ donc elle réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $J=f(]0,+\infty[)=]-1,1[$ ce qui revient à dire que f possède une fonction réciproque f^{-1} définie sur J

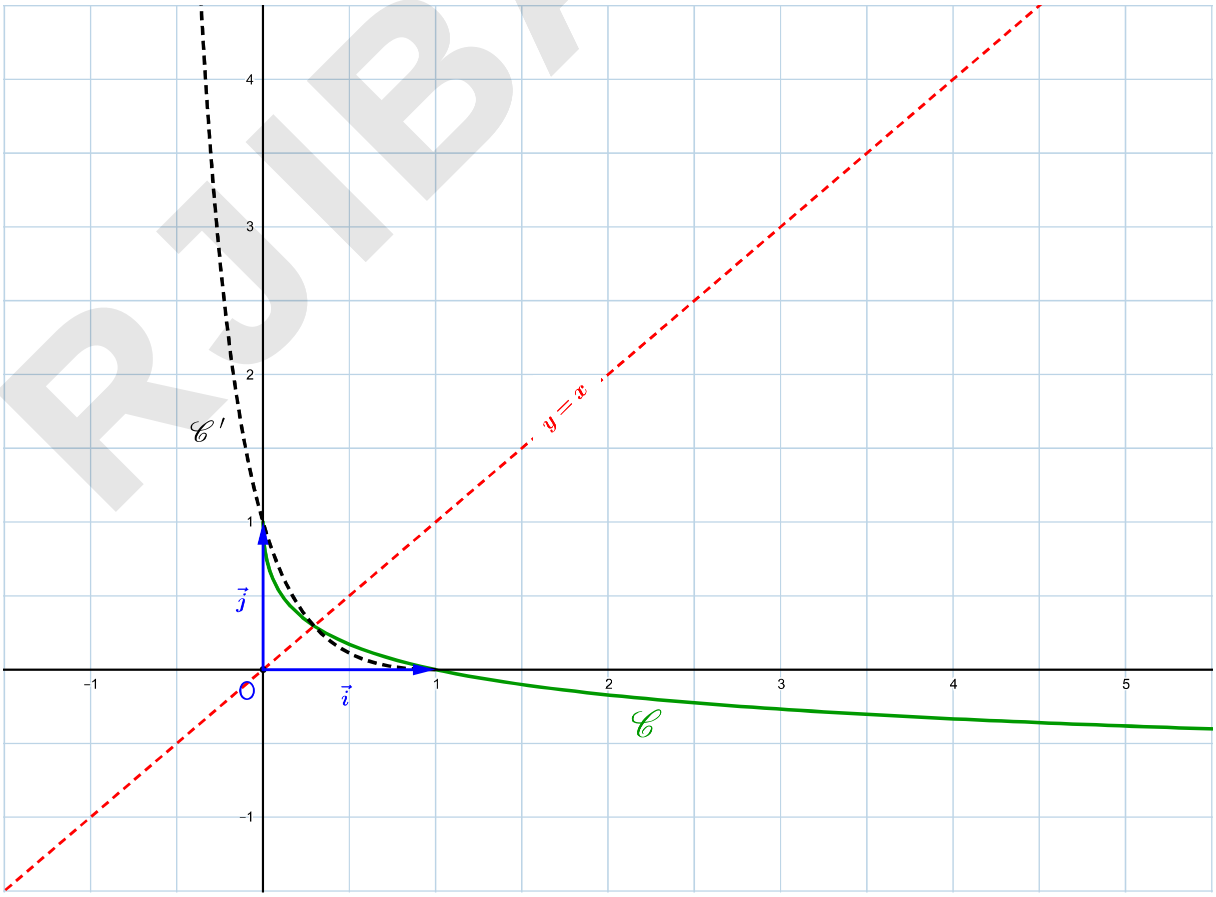
5) f^{-1} est continue et dérivable sur $]-1,1[$

6) $f(4)=-\frac{1}{3}$ donc $f^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)=4$

7) a) La fonction g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et on a $g'(x)=f'(x)-1=\frac{-1}{(1+\sqrt{x})^2\sqrt{x}}-1<0$ donc g est strictement décroissante d'autre part g est continue sur $]0,+\infty[$ comme somme de fonctions continues donc g réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $g(]0,+\infty[)=]-\infty,1[$

b) La fonction g est continue, strictement décroissante et change de signe sur $]0,+\infty[$ donc l'équation $g(x)=0$, et par conséquence l'équation $f(x)=x$, possède une solution unique α

c) $g(0)=1$ et $g(1)=-1$ donc $0<\alpha<1$



Chapitre 03

Fonction logarithme

Rappel de cours

Logarithme népérien

- La fonction logarithme népérien est la primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0,+\infty[$ qui s'annule en 1
- $\ln 1 = 0$ et $\ln e = 1$
- Pour tout réels strictement positifs x et y et pour tout $r \in \mathbb{Q}$ on a :
  - $\ln(xy) = \ln x + \ln y$
  - $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$
  - $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$
- $\ln(x^r) = r \ln x$
- La fonction logarithme népérien est continue et dérivable sur $]0,+\infty[$
- La fonction $x \mapsto \ln x$ est strictement croissantes sur $]0,+\infty[$

Limites

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to0^+} \ln x = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln x = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$
- $\lim\limits_{x\to0^+} x^r \ln x = 0$, $r \in \mathbb{Q}_+^*$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0$, $r \in \mathbb{Q}_+^*$

Equations et inéquations

- $\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$
- $\ln(a) > \ln(b) \Leftrightarrow a > b$
- $\ln(u(x)) = \ln(v(x)) \Leftrightarrow \begin{cases} u(x) > 0 \text{ et } v(x) > 0 \\ u(x) = v(x) \end{cases}$
- $\ln(u(x)) \geq \ln(v(x)) \Leftrightarrow \begin{cases} u(x) > 0 \text{ et } v(x) > 0 \\ u(x) \geq v(x) \end{cases}$

Signe

x	0		1		$+\infty$
lnx		$-$	0	$+$	

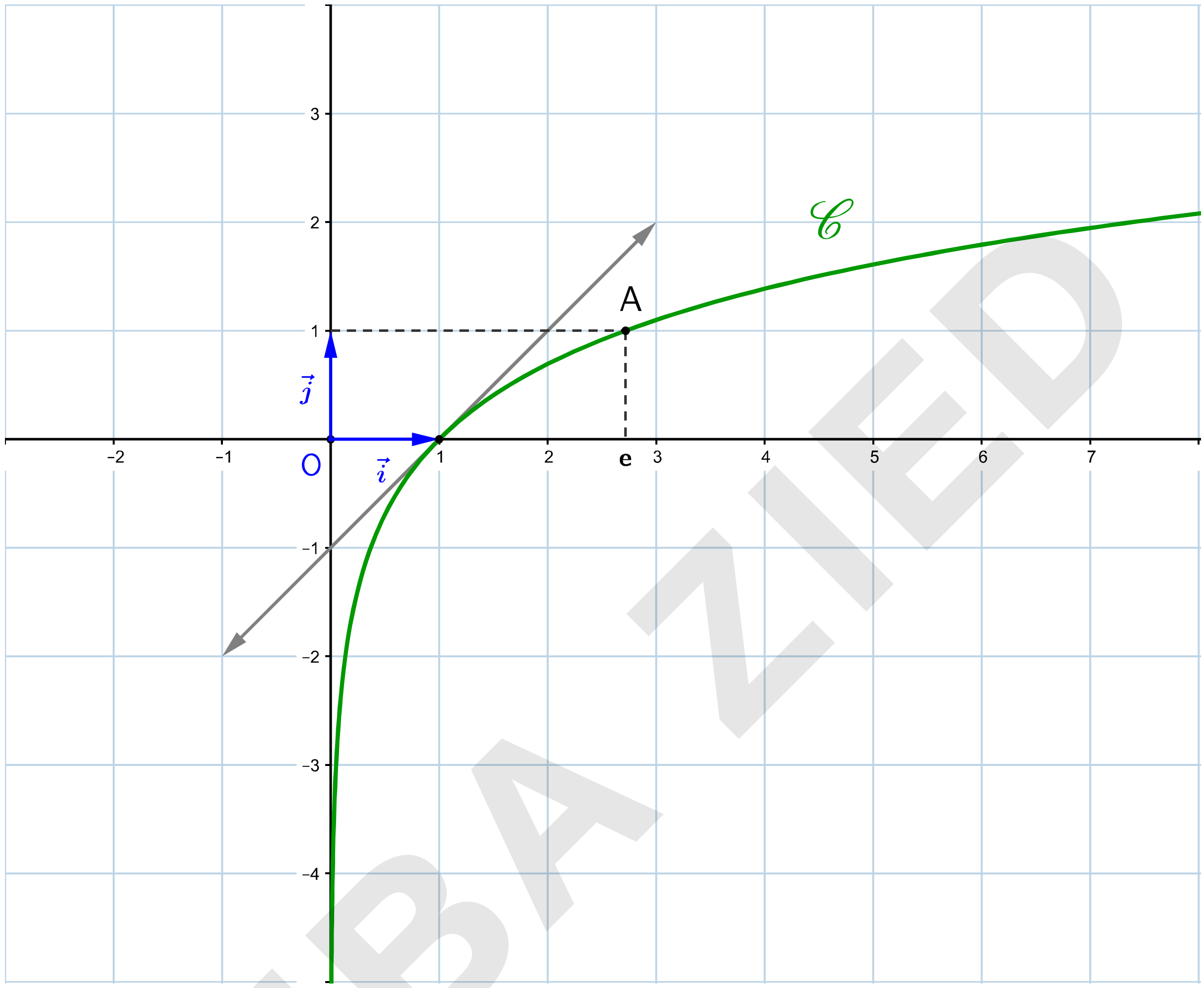
Fonctions de type $x \mapsto \ln(u(x))$

- Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I alors la fonction f définie par $f(x) = \ln(u(x))$ est dérivable sur I et on a $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$
- Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(x) \neq 0$ alors les primitives de la fonction $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ sont les fonctions définies sur I par $F(x) = \ln(|u(x)|) + k$, $k \in \mathbb{R}$

Courbe

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe de la fonction $x \mapsto \ln x$

- L'axe des ordonnées est une asymptote $\mathscr{C}$
- $\mathscr{C}$ possède une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$
- $T : y = x - 1$ est la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1



Attention !

- Ne pas croire que $\ln(ab)$ et $\ln a + \ln b$ ont le même ensemble de définition : $\ln(ab)$ est définie lorsque $ab > 0$ tandis que $\ln a + \ln b$ n'est définie que lorsque $a > 0$ et $b > 0$
- Ne pas oublier de determiner le domaine d'existence avant de plonger dans la resolution d'une équation ou inéquation : le logarithme n'existe que pour les réels strictement positifs
- Ne pas oublier de changer le sens d'une inégalité lorsqu'on multiplie ou on divise ses membres par $\ln a$ lorsque $a < 1$

Les exercices

Exercice 1

Partie A : Questions de cours

1) Etudier le signe de $\ln x$
2) Déterminer les limites $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x}$

Partie B :

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\frac{1+\ln x}{x}$. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) Déterminer la limite de f à droite en 0. Interpréter graphiquement le résultat
2) Déterminer la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat
3) a) Etudier la dérivabilité de f sur son domaine de définition et montrer que $f'(x)=-\frac{\ln x}{x^2}$

   b) Dresser le tableau de variation de f
4) a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ possède une solution α unique sur $]0,+\infty[$

   b) Donner un encadrement de α à 10^{-1} près
5) Tracer la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=1+\frac{\ln x}{x}$. Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, unité graphique 5 cm

1) Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$. Déterminer les asymptotes de $\mathscr{C}$
2) Dresser le tableau des variations de f
3) a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet sur l'intervalle $\left[\frac{1}{e},1\right]$ une solution unique, notée α

   b) Déterminer un encadrement de α, d'amplitude 10^{-1}

   c) Donner, suivant les valeurs de x, le signe de $f(x)$ sur $]0,+\infty[$
4) Tracer la courbe $\mathscr{C}$

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1,+\infty[$ par $f(x)=\ln x-\frac{1}{\ln x}$. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f et Γ la courbe d'équation $y=\ln x$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) Etudier les variations de la fonction f et préciser les limites en 1 et en $+\infty$
2) a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-\ln x]$

   b) Préciser les positions relatives de $\mathscr{C}$ et de Γ
3) On se propose de chercher les tangentes à la courbe $\mathscr{C}$ passant par le point O

   a) Soit a un réel appartenant à l'intervalle $]1,+\infty[$, démontrer que la tangente T_a à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a passe par l'origine du repère si et seulement si $f(a)-af'(a)=0$

   b) Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[1,+\infty[$ par $g(x)=f(x)-xf'(x)$. Montrer que sur $]1,+\infty[$ les équations $g(x)=0$ et $(\ln x)^3-(\ln x)^2-\ln x-1=0$ ont les mêmes solutions

   c) Apres avoir étudié les variations de la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(t)=t^3-t^2-t-1$, montrer que la fonction u s'annule une fois et une seule sur $\mathbb{R}$

   d) En déduire l'existence d'une tangente unique à la courbe $\mathscr{C}$ passant par le point O

Exercice 4

Soit la fonction numérique g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=1-x^2-\ln x$

1) a) Etudier le sens de variation de g et calculer $g(1)$. (On ne demande pas de calculer les limites de g en 0

et en $+\infty$)

b) En déduire le signe de $g(x)$

2) Soit f la fonction numérique définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\frac{\ln x}{x}+2-x$

a) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$

b) Déterminer la dérivée f' de f

c) Montrer que $f'(x)$ a le signe de $g(x)$. En déduire le tableau de variations de f.

d) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet deux solutions x_1 et x_2

Donner, en justifiant, un encadrement d'amplitude 0,1 de chacune d'elles

3) On note $\mathscr{D}$ la courbe de f dans le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

a) Montrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y=-x+2$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$

b) Etudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{D}$

c) Déterminer les coordonnées du point de la courbe $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à $\mathscr{D}$, on appellera T cette tangente

d) Tracer $\mathscr{C}$, T et $\mathscr{D}$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

Exercice 5

1) La fonction g est définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par $g(x)=2x\sqrt{x}-3\ln x+6$. En utilisant le sens de variation de g, déterminer, suivant les valeurs de x, le signe de $g(x)$

2) La fonction f est définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\frac{3\ln x}{\sqrt{x}}+x-1$

a) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$

b) Utiliser les résultats de la question 1) pour déterminer le sens de variation de f

c) Soit Δ la droite d'équation $y=x-1$ et $\mathscr{C}$ la représentation graphique de f dans un repère orthonormé.

Montrer que Δ est asymptote à $\mathscr{C}$ et étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et Δ

d) Construisez $\mathscr{C}$ et Δ

Exercice 6

Partie I

On considère la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=x^2-2\ln x$

1) Etudier le sens de variation de g

2) En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0,+\infty[$

Partie II

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\frac{x}{2}+\frac{1+\ln x}{x}$. On appelle $\mathscr{C}$ la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ unité graphique 2 cm

1) Déterminer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement le résultat

2) a) Déterminer la limite de f en $+\infty$

b) Montrer que la droite Δ d'équation $y=\frac{x}{2}$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$

c) Déterminer la position relative de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ sur $]0,+\infty[$. Montrer en particulier que Δ coupe $\mathscr{C}$ en un point A que l'on déterminera

3) Dresser le tableau de variation de f

4) Montrer qu'il existe un point B, et un seul, de la courbe $\mathscr{C}$ où la tangente T à $\mathscr{C}$ est parallèle à Δ

5) Montrer que l'équation $f(x)=0$ a une solution unique α. Justifier l'encadrement $0.34<\alpha<0.35$

6) Tracer la courbe $\mathscr{C}$ et les droites Δ et T

Exercice 7

On considère la fonction g définie sur $]-1,+\infty[$ par : $g(x)=-x^2+ax+b\ln(x+1)$

1) Déterminer les réels a et b pour que la courbe représentative de g admette une tangente parallèle à l'axe des abscisses aux points d'abscisses 0 et $\frac{3}{2}$

2) Soit f la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par $f(x)=-x^2+5x-5\ln(x+1)$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité graphique 2 cm

a) Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers -1

b) Déterminer la limite de $\frac{\ln(x+1)}{x^2}$ quand x tend vers $+\infty$. En déduire la limite de f en $+\infty$

3) Calculer $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de la fonction f
4) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[2,3]$. Donner une valeur approchée de α à 0.1 près
5) Tracer la courbe $\mathscr{C}$

Exercice 8

On considère la fonction g définie sur $]-3,3[$ par $g(x)=\ln\left(\frac{3+x}{3-x}\right)$

1) Etudier la parité de g
2) a) Calculer les limites de g en -3 et 3
   b) Etudier les variations de g sur $[0,3[$
   c) En déduire le tableau de variation de g sur $]-3,3[$
3) On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de g dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$
   a) Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0
   b) Tracer T et $\mathscr{C}$

Exercice 9

On considère la fonction f définie sur $[1,+\infty[$ par $f(x)=2x\ln x-4x$ et on désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) Déterminer la limite de f en $+\infty$
2) Calculer $f'(x)$ et étudier son signe
3) Dresser le tableau de variation de f
4) Déterminer les coordonnées du point A d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses
5) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ en ce point A
6) Etudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x
7) Représenter graphiquement T et $\mathscr{C}$ dans le même repère

Exercice 10

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$, par $f(x)=x+\frac{1+\ln x}{x}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

Partie I

On considère la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=x^2-\ln x$

1) Calculer la fonction dérivée g' de g et en déduire le sens de variation de g
2) Dresser le tableau de variation de g en en déduire le signe de g. (les limites de g aux bornes du domaine de définition ne sont pas demandées.)

Partie II

1) Calculer puis exprimer $f'(x)$ en fonction de $g(x)$. En déduire le signe de $f'(x)$ pour $x>0$
2) Dresser le tableau de variation de f
3) Soit D la droite d'équation $y=x$
   a) Montrer que D est asymptote à $\mathscr{C}$
   b) Etudier la position relative de $\mathscr{C}$ par rapport à D
   c) Déterminer le point A de $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à D
4) Calculer les valeurs approchées à 10^{-2} près de $f(x)$ pour les valeurs suivantes de x : 0.3, 1 et $\frac{1}{e}$

   Déduisez-en l'existence d'une valeur unique α comprise entre 0.3 et $\frac{1}{e}$ telle que $f(\alpha)=0$
5) Tracer la tangente en A, l'asymptote D et la courbe $\mathscr{C}$

Exercice 11

Soient f la fonction définie sur $]2,+\infty[$ par $f(x)=x-1+\ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right)$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) a) Etudier les limites de f en 2, $+\infty$ et vérifier que $\mathscr{C}$ admet une asymptote parallèle à l'axe des ordonnées

b) Montrer que $f'(x)=\dfrac{x^2}{x^2-4}$

c) Dressez le tableau de variation de f

2) Montrer que la droite D d'équation $y=x-1$ est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$. Quelle est la position relative de D et $\mathscr{C}$?
3) A est le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 3. Ecrivez une équation cartésienne de la tangente T à $\mathscr{C}$ en A
4) Construire $\mathscr{C}$, D et T
5) Montrer que la fonction G définie sur $]2,+\infty[$ par $g(x)=(x-2)\ln(x-2)-(x+2)\ln(x+2)$ est une primitive de la fonction g définie sur $]2,+\infty[$ par $g(x)=\ln\left(\dfrac{x-2}{x+2}\right)$

Exercice 12

Partie A

On considère la fonction g définie sur $]1,+\infty[$ par $g(x)=ax+\dfrac{b}{\ln x}$

Déterminer les réel a et b pour que la représentation graphique Γ de g dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ coupe l'axe $(O,\vec{i})$ au point E d'abscisse e et que la tangente à Γ en E soit parallèle à la droite d'équation $y=2x$

Partie B

On considère la fonction f définie sur $]1,+\infty[$ par $f(x)=x-\dfrac{e}{\ln x}$ et $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Calculer les limites de f en 1 et en $+\infty$

   b) Etudier les variations de f sur $]1,+\infty[$
2) a) Montrer que la droite D d'équation $y=x$ est asymptote à $\mathscr{C}$

   b) Etudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à D

   c) $\mathscr{C}$ admet une deuxième asymptote, Quelle est son équation ?
3) Donner une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse e
4) Tracer les droites D, T et la courbe $\mathscr{C}$
5) Comment peut-on déduire la représentation graphique de $|f|$ à partir de $\mathscr{C}$? Tracez-la

Exercice 13

1) Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=x^3-1+2\ln x$

   a) Etudier les variations de g

   b) Calculer $g(1)$. En déduire le signe de $g(x)$ pour tout $x\in]0,+\infty[$
2) Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=x-1-\dfrac{\ln x}{x^2}$. On note $\mathscr{C}$ la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

   a) Montrer que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^3}$

   b) Dresser le tableau de variation de f
3) a) Montrer que la droite D d'équation $y=x-1$ est une asymptote oblique à $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$ et préciser la position relative de $\mathscr{C}$ par rapport à D

   b) Tracer D et $\mathscr{C}$

Exercice 14

On considère les fonctions f et g définies sur $]-\infty,1[$ par $f(x)=\ln(1-x)$ et $g(x)=x\ln(1-x)$

1) a) Etudier les variations de f

   b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$
2) a) Calculer $g'(x)$

   b) Montrer que pour g' est décroissante sur $]-\infty,1[$

   c) Calculer $g'(0)$ et dresser le tableau de signe de g'

   d) Dresser le tableau de variation de g
3) a) Préciser la position relative de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{C}g$

   b) Résoudre $g(x)=x$

c) Tracer $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}g$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

4) Soit h la restriction de g sur $]-\infty,0]$

a) Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle à déterminer.

b) Tracer $\mathscr{C}h^{-1}$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

Exercice 15 BAC [session principale 2009]

Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x+3+3\ln x}{x}$

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique 1 cm)

1) Montrer que $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$. Interpréter graphiquement ces résultats.

2) a) Montrer que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{-3\ln x}{x^2}$

b) Dresser le tableau de variation de f

3) a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet, dans $]0,+\infty[$, une unique solution α et que $0,32<\alpha<0,34$

b) Tracer la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

4) Une usine fabrique chaque jour x objets. On suppose que son bénéfice B, exprimé en milliers de dinars, est une fonction de x définie sur $[100,6000]$ par $B(x)=f\left(\dfrac{x}{1000}\right)$

a) Déterminer le nombre d'objets à fabriquer pour que l'usine réalise un bénéfice maximal et donner en dinars ce bénéfice

b) Déterminer, au dinar près, le bénéfice réalisé pour une fabrication de 4000 objets

Exercice 16 d'après BAC [session de contrôle 2015]

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{x}$. On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b) En remarquant que $f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{\ln x}{x}$, calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement ce résultat.

2) a) Montrer que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $f'(x)=-\dfrac{\ln x}{x^2}$ et calculer $f'(1)$

b) Dresser alors le tableau de variation de f.

c) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α que l'on précisera.

d) Tracer la courbe $\mathscr{C}$

Correction des exercices

Exercice 1

Partie A

1)

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$		$-$	0	$+$	

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{x}=-\infty$

Partie B

1) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1+\ln x}{x}=-\infty$ donc la courbe de f possède une asymptote verticale d'équation $x=0$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{\ln x}{x}\right)=0$ donc la courbe de f possède une asymptote horizontale d'équation $y=0$

3) a) f est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme étant quotient de deux fonctions dérivables et on a :

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}x-(1+\ln x)}{x^2}=\frac{1-1-\ln x}{x^2}=-\frac{\ln x}{x^2}$$

b)

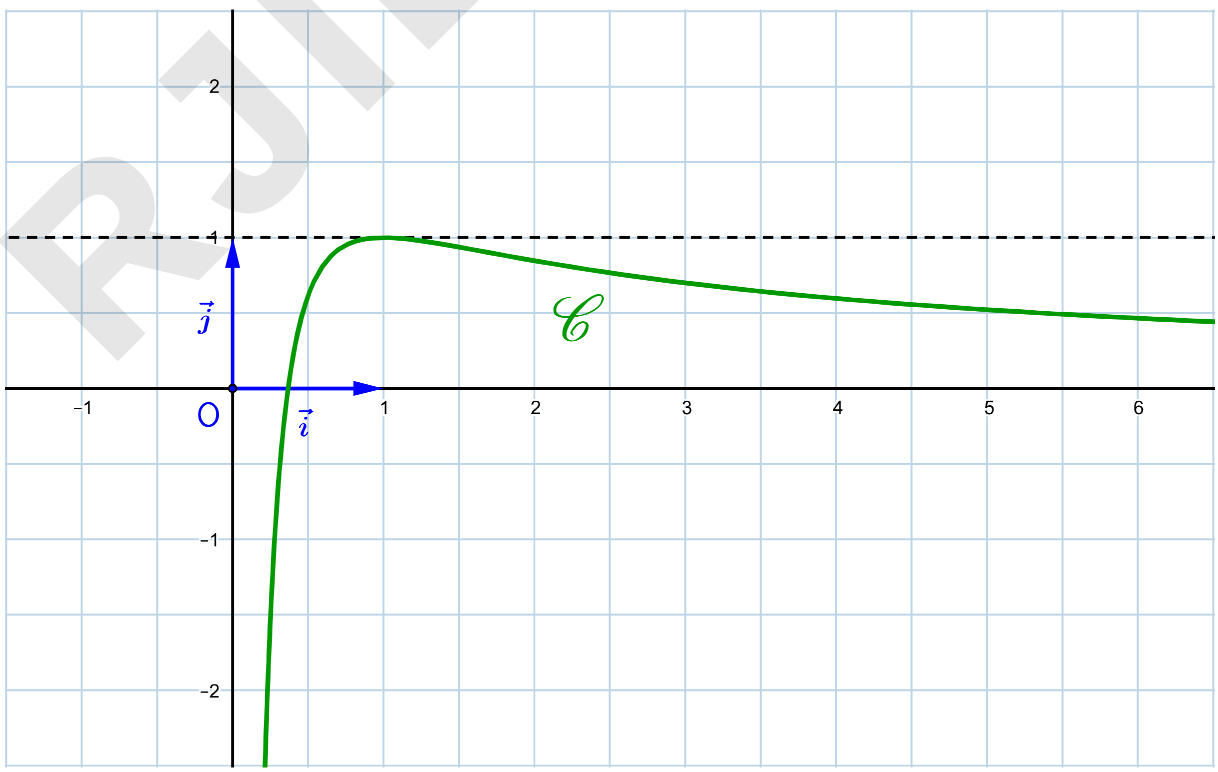
x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

4) $f(x)$ est strictement positive sur $[1,+\infty[$

f est continue, strictement croissante et Change de signe sur $]0,1[$ ($\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\infty$ et $f(1)=1$) donc,

d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=0$ possède une solution α unique et $\alpha\in]0,1[$

$\left.\begin{array}{l}f(0.3)=-0.68\\ f(0.4)=0.2\end{array}\right\}$ donc $0.3<\alpha<0.4$



Exercice 2

1) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\frac{\ln x}{x}\right) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\frac{\ln x}{x}\right) = 1$

2) La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et on a $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$1+\frac{1}{e}$	$\searrow$	1

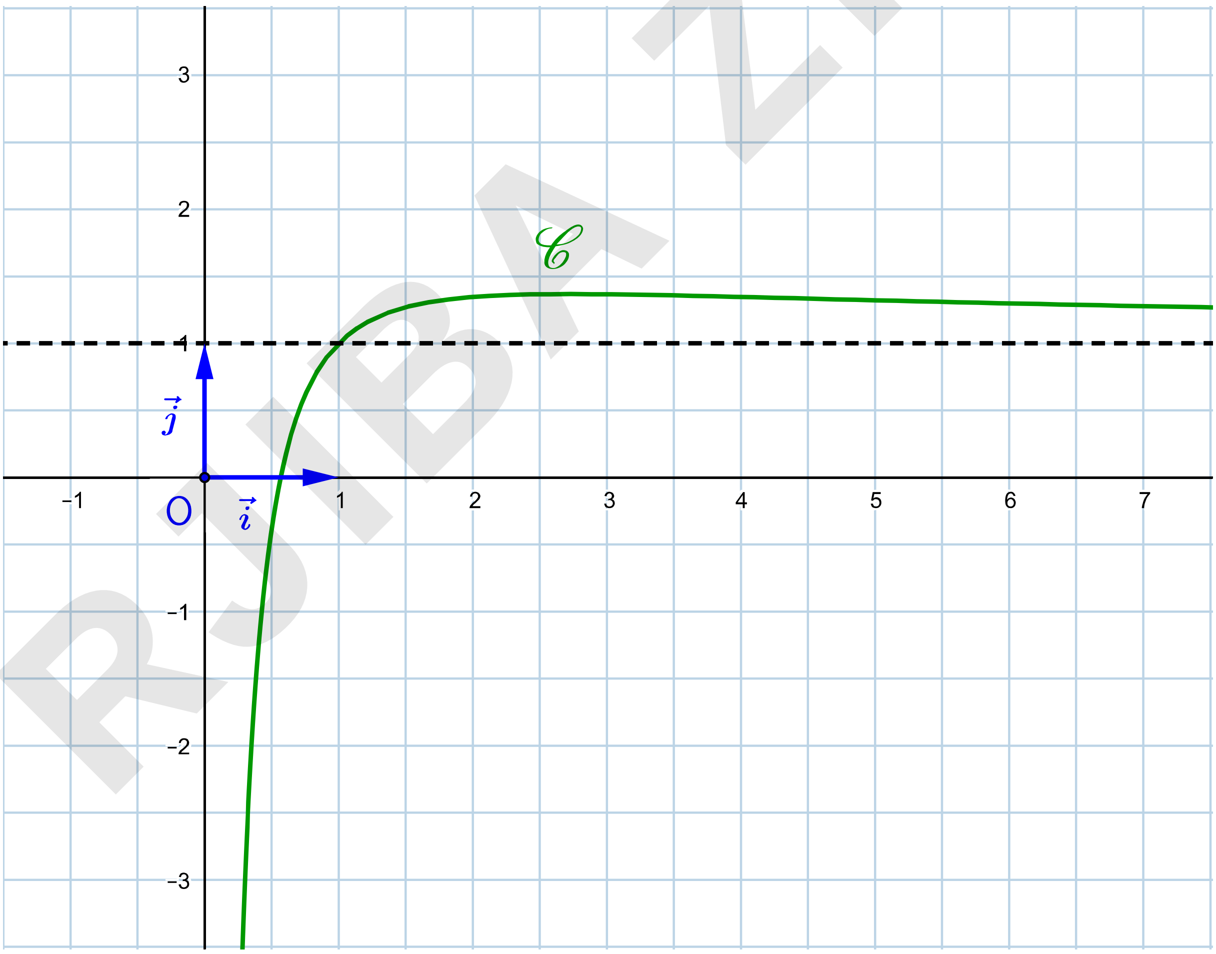
3) La fonction f est continue et strictement croissante sur $\left[\frac{1}{e},1\right]$ et on a $f\left(\frac{1}{e}\right) = 1-e \simeq -1.718$ et $f(1) = 1$

donc f change de signe sur l'intervalle $\left[\frac{1}{e},1\right]$ et par suite l'équation $f(x) = 0$ possède une solution unique

α dans $\left[\frac{1}{e},1\right]$

$\left.\begin{array}{l} f(0.56) = -0.035 \\ f(0.57) = 0.013 \end{array}\right\}$ donc $0.56 < \alpha < 0.57$

x	0		α		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	



Exercice 3

1) La fonction f est dérivable sur $]1,+\infty[$ en tant que somme de deux fonctions dérivables sur $]1,+\infty[$ et on a

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{-\frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x\ln^2 x} = \frac{\ln^2 x + 1}{x\ln^2 x}$$

f' est strictement positive sur $]1,+\infty[$ et donc f est strictement croissante sur $]1,+\infty[$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}\left(\ln x - \frac{1}{\ln x}\right) = -\infty$ et $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\left(\ln x - \frac{1}{\ln x}\right) = +\infty$

2) $\lim_{x\to +\infty}\left[f(x) - \ln x\right] = \lim_{x\to +\infty}\left[-\frac{1}{\ln x}\right] = 0$

$\left[f(x) - \ln x\right] = -\frac{1}{\ln x} < 0$ pour tout $x \in]1,+\infty[$ donc $\mathscr{C}$ est strictement au-dessous de Γ sur $]1,+\infty[$

3) Soit $a > 1$. Une équation de T_a est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$. T_a passe par O si, et seulement si, le couple $(0,0)$ vérifie l'équation de T_a c'est-à-dire $-af'(a) + f(a) = 0$

On a pour tout $x > 1$:

$$g(x) = \left(\ln x - \frac{1}{\ln x}\right) - x\left(\frac{\ln^2 x + 1}{x\ln^2 x}\right) = \ln x - \frac{1}{\ln x} - \frac{\ln^2 x + 1}{\ln^2 x} = \frac{\ln^3 x - \ln^2 x - \ln x + 1}{\ln^2 x}$$

Par suite $g(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\ln^3 x - \ln^2 x - \ln x + 1}{\ln^2 x} = 0 \Leftrightarrow \ln^3 x - \ln^2 x - \ln x + 1 = 0$

t	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$u'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
u	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{22}{27}$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que polynôme et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$u'(t) = 3t^2 - 2t - 1 = (t-1)(3t+1)$$

On en déduit, d'après son tableau de variation, que $u(x) = 0$ possède une solution unique t_0 dans $\mathbb{R}$ et on a $t_0 \in]1,+\infty[$

T_a passe par O $\Leftrightarrow -af'(a) + f(a) = 0 \Leftrightarrow g(a) = 0 \Leftrightarrow u(\ln a) = 0 \Leftrightarrow \ln a = t_0$ et comme l'équation $\ln x = t_0$ possède une solution unique alors il existe une, et une seule, tangente à $\mathscr{C}$ passant par O

Exercice 4

1) La fonction g est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$ et on a

$g'(x) = -2x - \frac{1}{x} = -\left(\frac{2x^2+1}{x}\right) < 0$ donc g est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$

$g(1) = 0$ donc

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

2) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln x}{x} + 2 - x\right) = -\infty$ $\quad\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{\ln x}{x} + 2 - x\right) = -\infty$

f est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme étant somme de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$ et on a :

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} - 1 = \frac{1 - \ln x}{x^2} - 1 = \frac{1 - \ln x - x^2}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

La fonction f est continue et strictement croissante sur $]0,1[$ et elle change de signe sur $]0,1[$ donc l'équation $f(x) = 0$ possède une solution unique x_1 dans l'intervalle $]0,1[$

$\left.\begin{array}{l} f(0.5) = 0.113706 \\ f(0.4) = -0.690727 \end{array}\right\}$ donc $0.4 < x_2 < 2.4$

La fonction f est continue et strictement croissante sur $]1,+\infty[$ et elle change de signe sur $]1,+\infty[$ donc l'équation $f(x) = 0$ possède une solution unique x_2 dans l'intervalle $]1,+\infty[$

$\left.\begin{array}{l} f(2.3) = 0.062134 \\ f(2.4) = -0.035221 \end{array}\right\}$ donc $2.3 < x_2 < 2.4$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(-x+2)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$

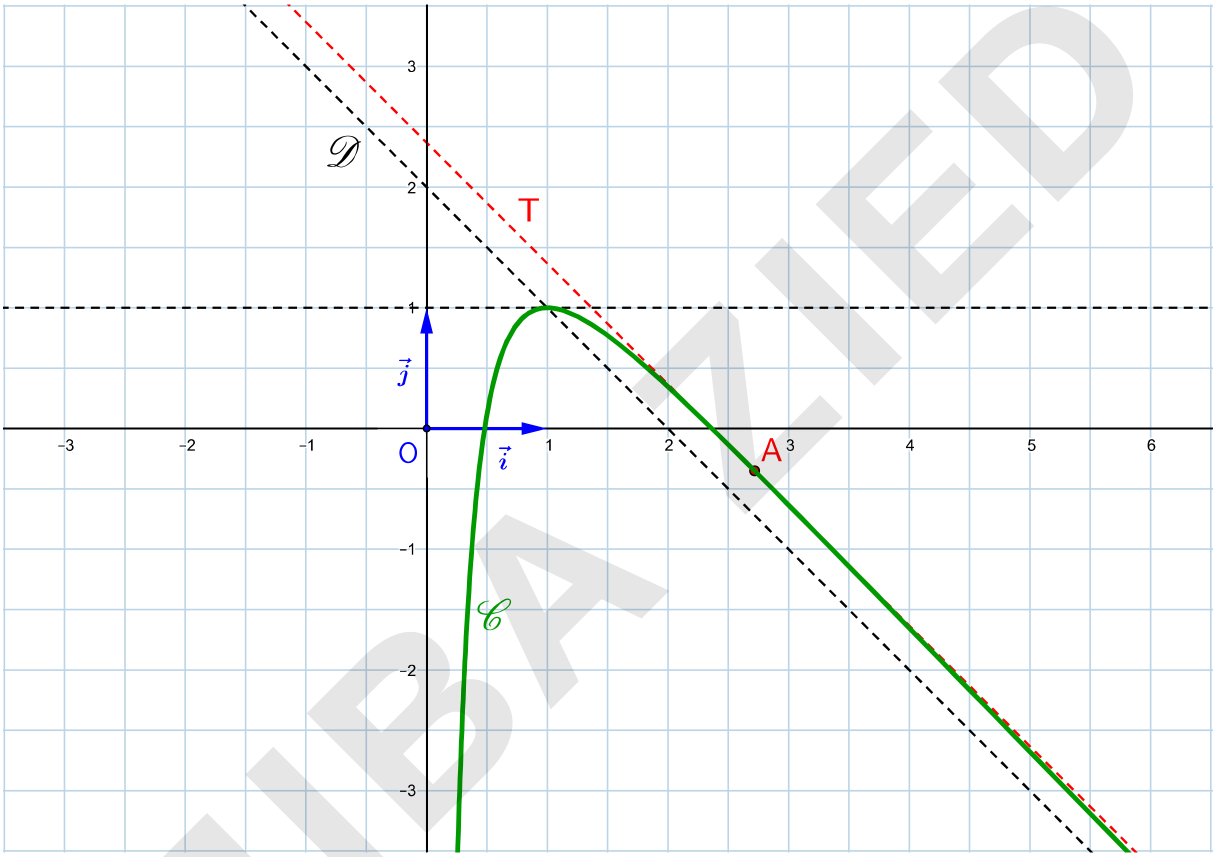
donc la droite $\mathscr{D}: y=2-x$ est une asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$

x	0		1		$+\infty$
$\dfrac{\ln x}{x}$		$-$	0	$+$	
Position relative		$\mathscr{C}$ au-dessous de $\mathscr{D}$		$\mathscr{C}$ au-dessus de $\mathscr{D}$	

$T: y=f'(a)(x-a)-f(a)$. T est parallèle à $\mathscr{D}$ si, et seulement si,

$f'(a)=-1 \Leftrightarrow \dfrac{1-\ln a-a^2}{a^2}=-1 \Leftrightarrow 1-\ln a-a^2=-a^2 \Leftrightarrow \ln a=1 \Leftrightarrow a=e$

donc la tangente à $\mathscr{C}$ au point $A(e,f(e))$ est parallèle à $\mathscr{D}$



Exercice 5

1) La fonction g est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$ et on a :

$$g'(x)=2\sqrt{x}+2x\frac{2}{2\sqrt{x}}-\frac{3}{x}=3\sqrt{x}-\frac{3}{x}=\frac{3x\sqrt{x}-3}{x}$$

$g'(x)\ge 0 \Leftrightarrow 3x\sqrt{x}-3\ge 0 \Leftrightarrow x\sqrt{x}\ge 1 \Leftrightarrow x^3\ge 1 \Leftrightarrow x^3-1\ge 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+1)\ge 0$

$\Leftrightarrow x-1\ge 0$ car $x^2+x+1>0$

$\lim\limits_{x\to0^+} g(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\sqrt{x}\left(2-\dfrac{3\ln x}{x\sqrt{x}}+\dfrac{6}{x\sqrt{x}}\right)=+\infty$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$	8	$\nearrow$	$+\infty$

donc $g(x)$ est toujours supérieur à 8 et par suite elle est toujours positive sur $]0,+\infty[$

2) $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

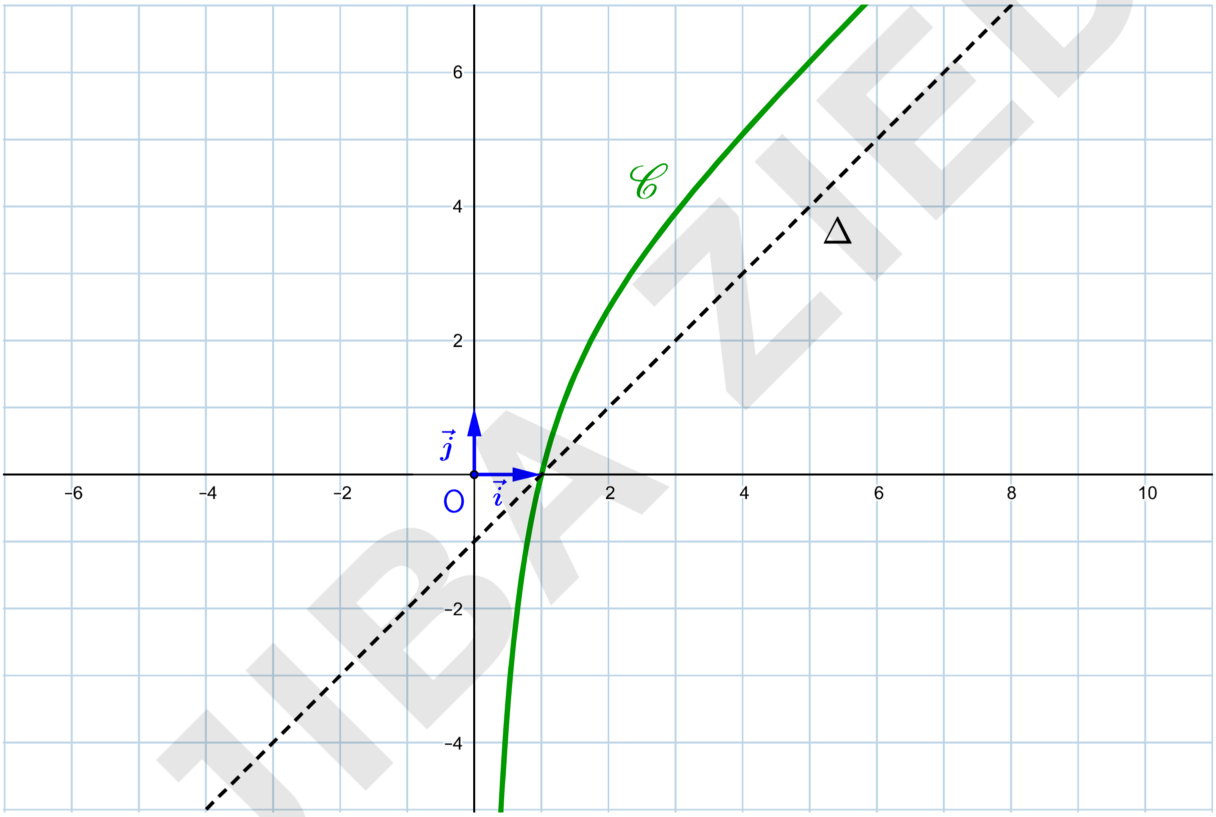
f est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$ et on a :

$$f'(x)=\frac{\frac{3}{x}\sqrt{x}-\frac{3}{2\sqrt{x}}\ln x}{x}+1=\frac{6-3\ln x+2x\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}}=\frac{g(x)}{2x\sqrt{x}}$$

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
f	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3\ln x}{\sqrt{x}}\right)=0$ donc Δ est une asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$

x	0	1	$+\infty$
$\frac{3\ln x}{\sqrt{x}}$	$-$	0	$+$
Position relative	$\mathscr{C}$ au-dessous de $\mathscr{D}$		$\mathscr{C}$ au-dessus de $\mathscr{D}$



Exercice 6

Partie I

1) La fonction g est définie et dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que somme de fonctions qui le sont, et pour tout $x\in\,]0,+\infty[$ et on a : $g'(x)=2x-\frac{2}{x}=\frac{2x^2-2}{x}=\frac{2(x-1)(x+1)}{x}$

$\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(1-\frac{2\ln x}{x^2}\right)=+\infty$

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
g	$+\infty$ $\searrow$	1	$\nearrow$ $+\infty$

2) On en déduit, d'après le tableau de variation de g, que g est toujours positive sur $]0,+\infty[$

Partie II

1) $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\infty$ donc l'axe des ordonnées est une asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de 0

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{2}+\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}\right] = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\frac{x}{2}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x} = 0$ donc Δ est une asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.

La droite Δ coupe $\mathscr{C}$ au point $A\left(\frac{1}{e},\frac{1}{2e}\right)$

x	0	e^{-1}	$+\infty$
$1+\ln x$	$-$	0	$+$
Position relative	$\mathscr{C}$ au-dessous de $\mathscr{D}$		$\mathscr{C}$ au-dessous de $\mathscr{D}$

3) f est définie et dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que somme et quotient de fonctions qui le sont, et on a :

$$f'(x) = \frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{x}x-(1-\ln x)}{x^2} = \frac{x^2-2\ln x}{2x^2} = \frac{g(x)}{2x^2} > 0$$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
f	$-\infty$ ↗	$+\infty$

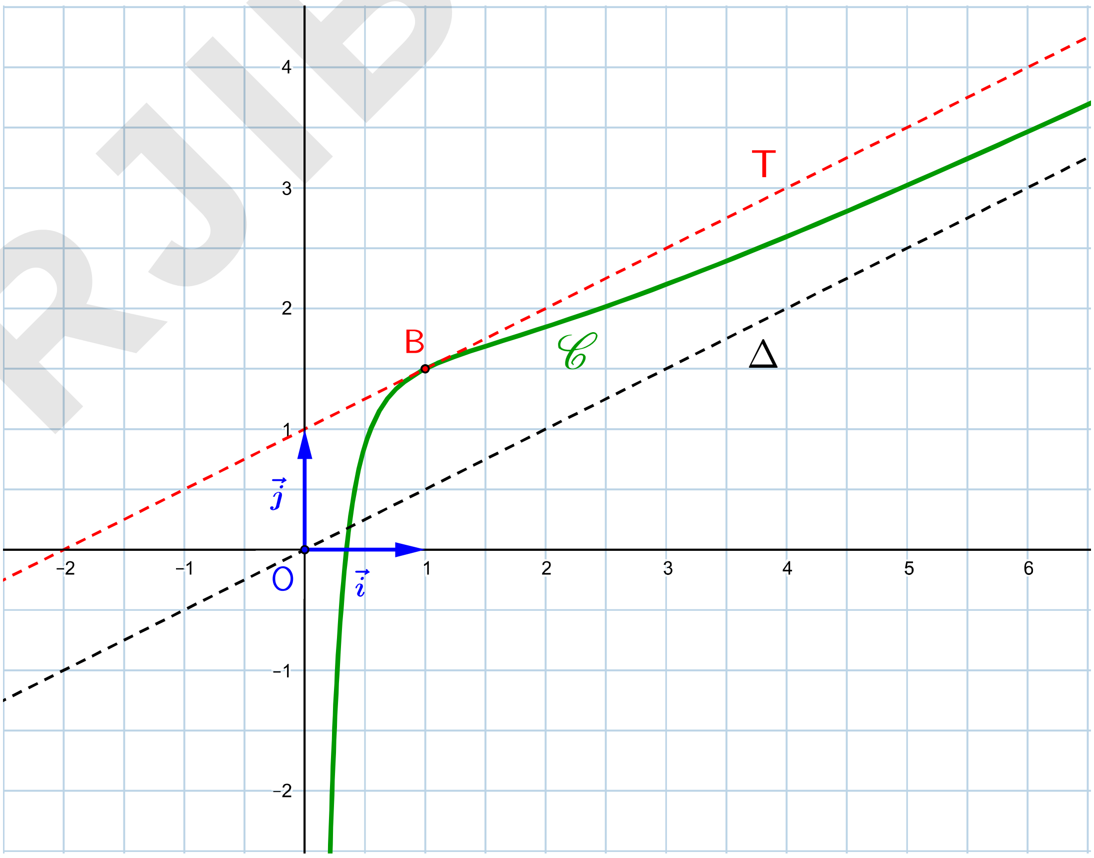
4) La droite Δ a un coefficient directeur égal à $\frac{1}{2}$

Le coefficient directeur de la tangente T en un point d'abscisse a est égale à $f'(a) = \frac{1}{2}-\frac{\ln a}{a^2}$.

La tangente T sera parallèle à Δ si et seulement si, ces deux droites ont même coefficient directeur, donc si et seulement si, $\frac{1}{2}-\frac{\ln a}{a^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\ln a}{a^2} = 0 \Leftrightarrow \ln a = 0 \Leftrightarrow a = 1$: c'est donc au point $B\left(1,\frac{3}{2}\right)$ que la tangente T sera parallèle à Δ

5) La fonction f est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$ et on a $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ donc f change de signe sur $]0,+\infty[$ et par suite, le théorème des valeurs intermédiaires affirme l'existence d'une valeur unique α tel que $f(\alpha) = 0$

$\left.\begin{array}{l} f(0.34) \simeq -0.062 \\ f(0.35) \simeq 0.033 \end{array}\right\}$ donc $0.34 < \alpha < 0.35$



Exercice 7

1) La fonction g est dérivable sur $]-1,+\infty[$ en tant que somme de fonctions qui le sont et on a :

$$g'(x) = -2x + a + \frac{b}{x+1}$$

La courbe de g admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses en 0 et $\frac{3}{2}$ si et seulement si $g'(0) = 0$ et $g'\left(\frac{3}{2} = 0\right)$ c'est-à-dire si $\begin{cases} a+b=0 \\ -3+a+\frac{2}{5}b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-b \\ -\frac{3}{5}b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=-5 \end{cases}$

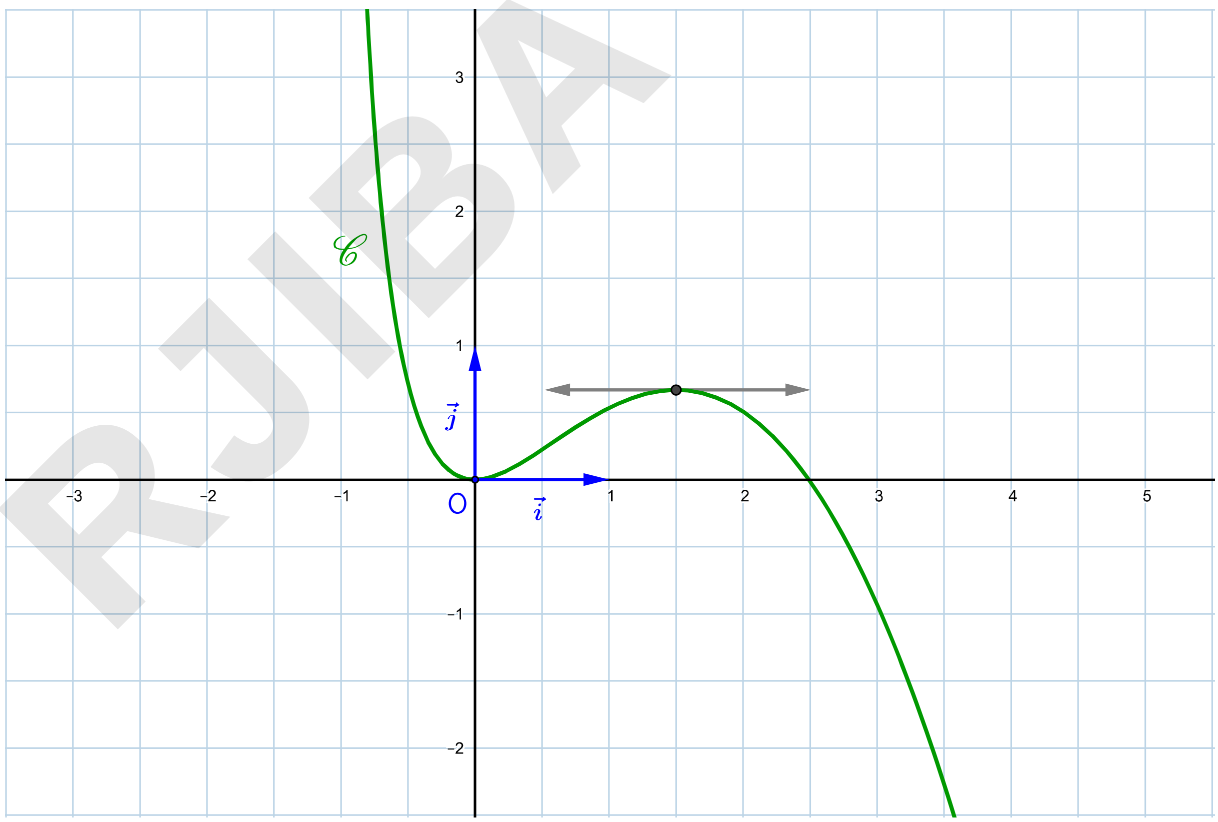
2) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\left(\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right)}{\left(\frac{x^2}{x+1}\right)} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(-1+\frac{5}{x}-5\frac{\ln(x+1)}{x^2}\right) = -\infty$

La fonction f est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et on a : $f'(x) = -2x+5-\frac{5}{x+1} = \frac{-2x^2+3x}{x+1} = -\frac{x\left(x-\frac{3}{2}\right)}{x+1}$

x	-1		0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	↘	0.22	↗	0.5	↘	$-\infty$

La fonction f est continue et strictement décroissante sur $[2,3]$, $f(2) \simeq 0.5$ et $f(3) \simeq -0.93$. Le théorème des valeurs intermédiaire affirme que l'équation $f(x) = 0$ possède une solution unique $\alpha \in [2,3]$

$\left.\begin{array}{l} f(2.4) \simeq 0.121 \\ f(2.5) \simeq -0.014 \end{array}\right\}$ donc $2.4 < \alpha < 2.5$



Exercice 8

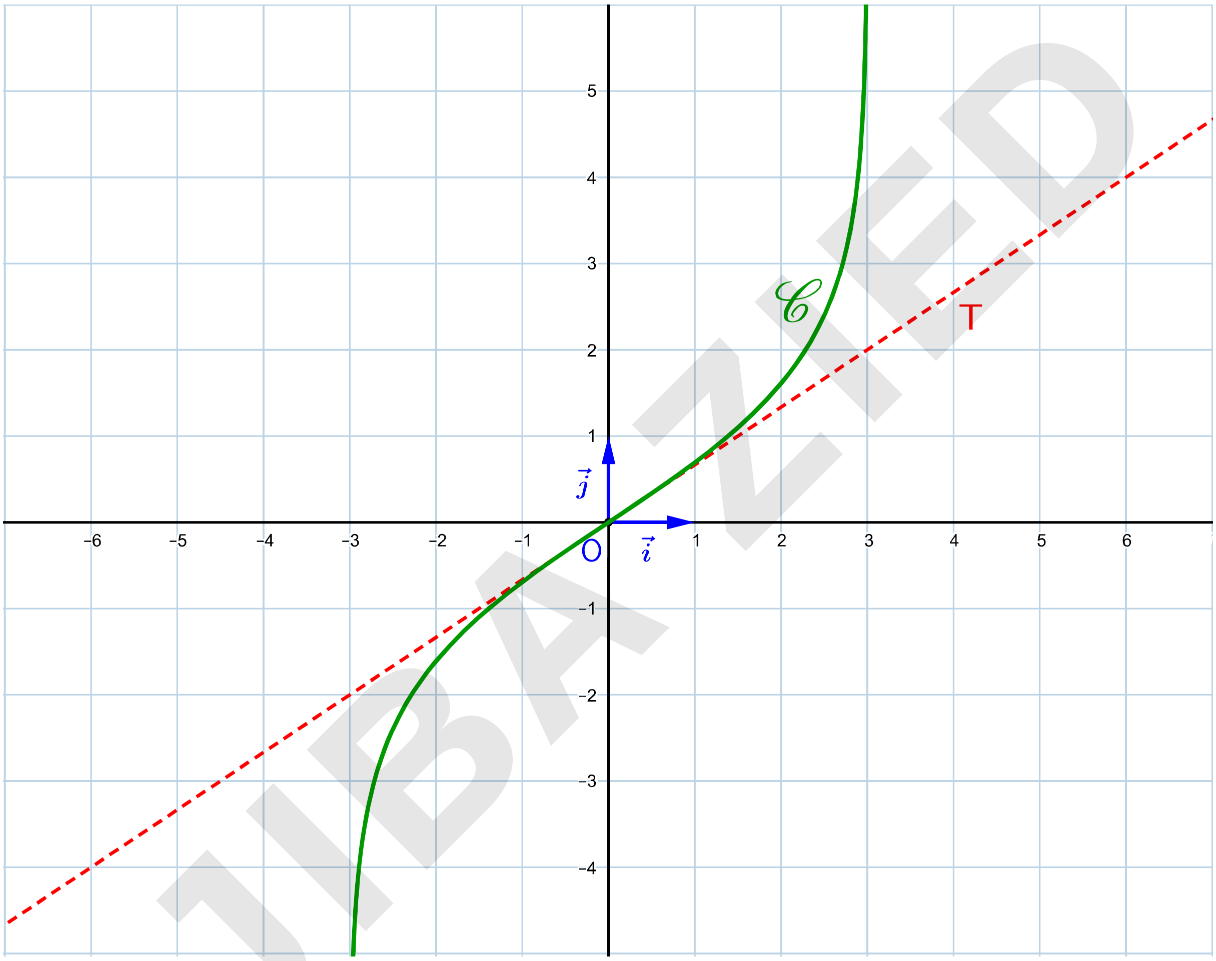
1) $x \in]-3,3[\Leftrightarrow -3 < x < 3 \Leftrightarrow -3 < -x < 3 \Leftrightarrow -x \in]-3,3[$ et $g(-x) = \ln\left(\frac{3-x}{3+x}\right) = -\ln\left(\frac{3+x}{3-x}\right) = -g(x)$ donc g est une fonction impaire

2) $\lim\limits_{x\to -3^+} g(x) = \lim\limits_{x\to -3^+} \ln\left(\dfrac{3+x}{3-x}\right) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 3^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} \ln\left(\dfrac{3+x}{3-x}\right) = +\infty$

3) g est dérivable sur $]-3,3[$ comme composé de fonctions qui le sont et on a : $g'(x) = \dfrac{6}{(3+x)^2}$

x	0		3
$g'(x)$		$+$	
g	0	$\nearrow$	$+\infty$

$T : y = g'(0)x + g(0) = \dfrac{2}{3}x$



Exercice 9

1) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} (2x\ln x - 4x) = \lim\limits_{x\to +\infty} x(2\ln x - 4) = +\infty$

La fonction f est dérivable sur $[1,+\infty[$ en tant que somme et produit de fonctions qui le sont et on a :

$$f'(x) = 2\ln x + 2x\frac{1}{x} - 4 = 2\ln x - 2 = 2(\ln x - 1)$$

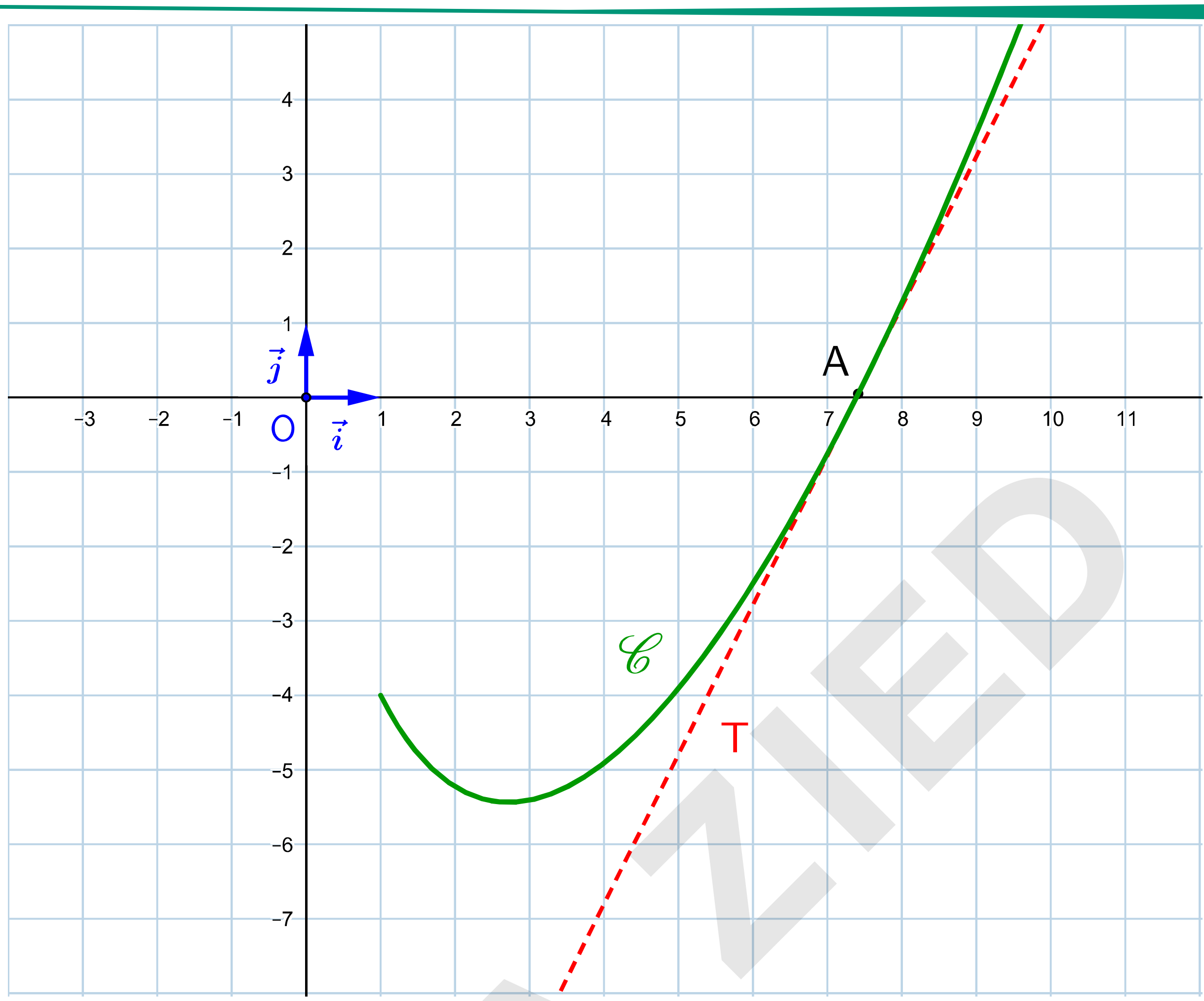
x	1		e		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	-4	$\searrow$	$-2e$	$\nearrow$	$+\infty$

2) $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x\ln x - 4x = 0 \Leftrightarrow x\ln x = 2x \Leftrightarrow x = 0$ ou $\ln x = 2 \Leftrightarrow x = e^2$

donc $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses au point $A(e^2, 0)$

3) Soit T la tangente à $\mathscr{C}$ au point A : $T : y = f'(e^2)(x - e^2) + f(e^2) = 2(x - e^2) = 2x - 2e^2$

x	1		e^2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	



Exercice 10

Partie I

1) La fonction g est définie et dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que somme de fonctions qui le sont, et on a :

$$g'(x)=2x-\frac{1}{x}=\frac{2x^2-1}{x}$$

x	0	$\left(\sqrt{2}\right)^{-1}$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
g	↘		↗

2) $g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\ln 2+1}{2}\simeq 0.846$ donc g est strictement positive

Partie II

1) La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que somme et quotient de fonctions qui le sont et on a :

$$f'(x)=1+\frac{\frac{1}{x}x-(1+\ln x)}{x^2}=1-\frac{\ln x}{x^2}=\frac{x^2-\ln x}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$$

et par conséquence $f'(x)$ est toujours positive sur $]0,+\infty[$

2) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[x+\frac{1+\ln x}{x}\right]=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x+\frac{1+\ln x}{x}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x+\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}\right]=+\infty$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	$-\infty$	↗	$+\infty$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1+\ln x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}\right)=0$ donc D est une asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$

$1+\ln x\geq 0 \Leftrightarrow \ln x\geq -1 \Leftrightarrow x\geq \frac{1}{e}=e^{-1}$

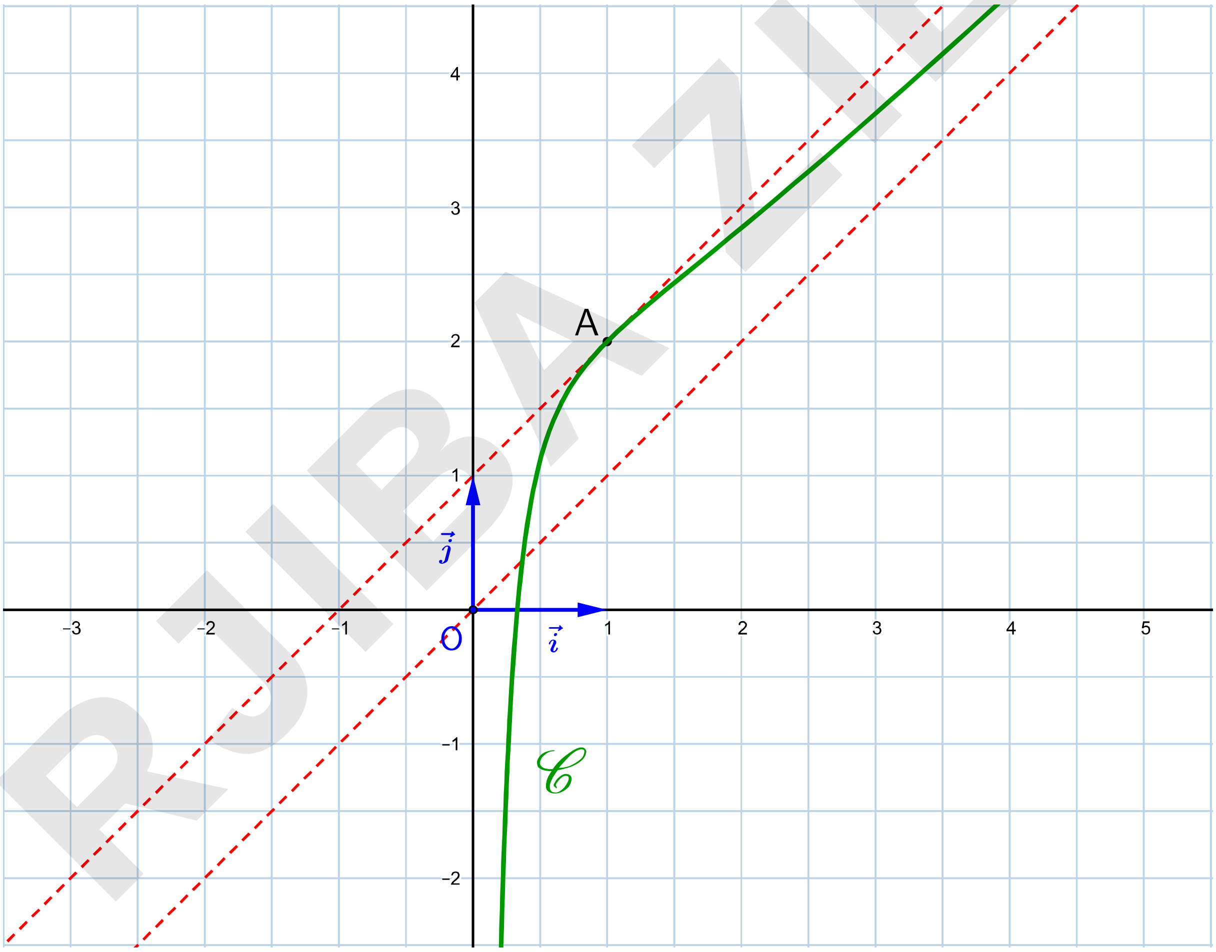
x	0		e^{-1}		$+\infty$
$1+\ln x$		$-$	0	$+$	
Position relative		D au-dessus de $\mathscr{C}$		D au-dessous de $\mathscr{C}$	

La droite D a un coefficient directeur égal à 1. Le coefficient directeur de la tangente T en un point d'abscisse a est égale à $f'(a)=\frac{a^2-\ln a}{a^2}$. La tangente T sera parallèle à D si et seulement si, ces deux droites ont même coefficient directeur, donc si et seulement si,

$\frac{a^2-\ln a}{a^2}=1 \Leftrightarrow a^2-\ln a=a^2 \Leftrightarrow \ln a=0 \Leftrightarrow a=1$: c'est donc au point $A(1,2)$ que la tangente T sera parallèle à D

4) $f(0.3)=-0.38$ $\qquad f\left(\frac{1}{e}\right)=0.37$ $\qquad f(1)=2$

La fonction f est continue, strictement croissante et change de signe sur $]0.3,e^{-1}[$ donc il existe une valeur unique α comprise entre 0.3 et e^{-1} telle que $f(\alpha)=0$



Exercice 11

1) $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left[x-1+\ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right)\right]=-\infty$ donc la droite d'équation $x=2$ est une asymptote à $\mathscr{C}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x-1+\ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right)\right]=+\infty$

2) La fonction est dérivable sur $]2,+\infty[$ en tant que somme et composée de fonctions qui le sont et on a pour tout $x\in Df$: $f(x)=x-1+\ln|x-2|-\ln|x+2|$ et

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} = \frac{(x-2)(x+2)+(x+2)-(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x^2-4+x+2-x+2}{x^2-4} = \frac{x^2}{x^2-4} > 0$$

x	2 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
f	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

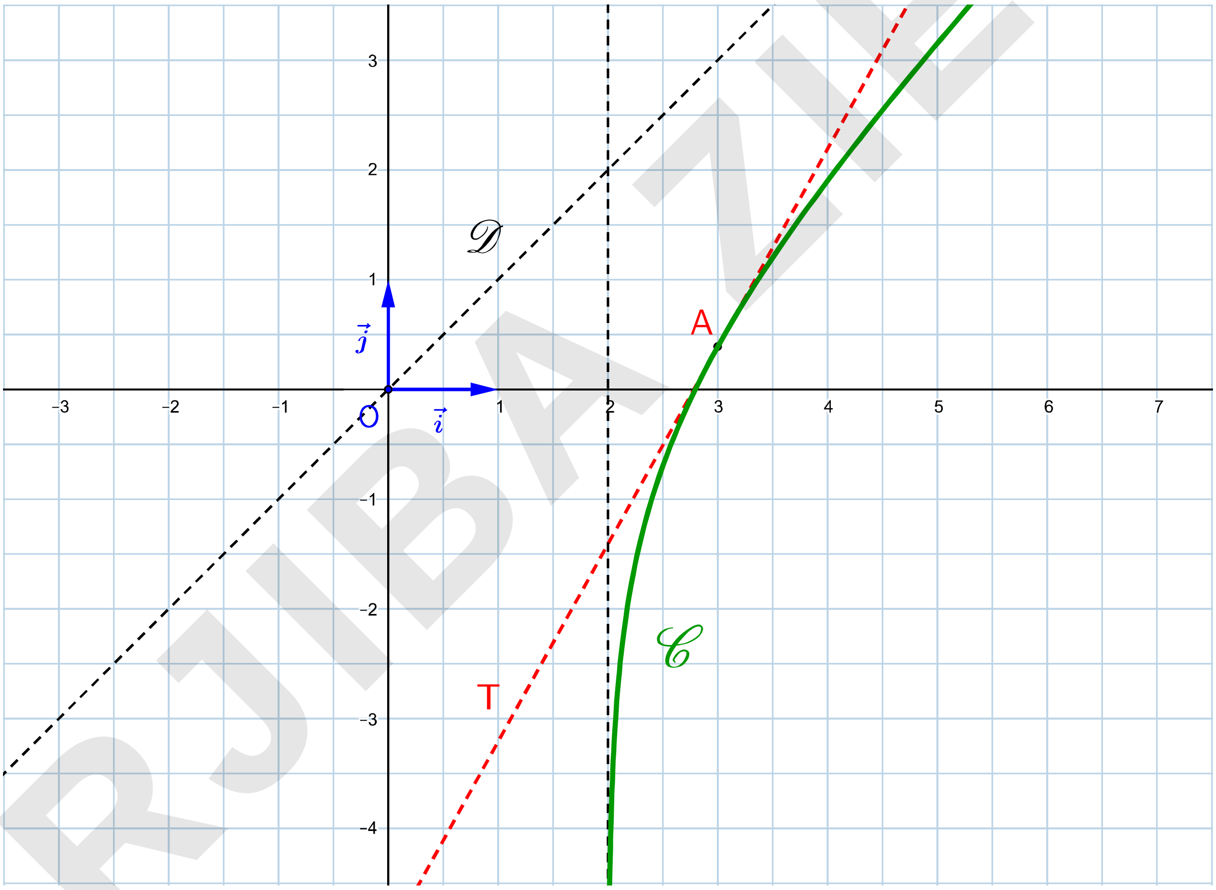
3) $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)] = \lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right) = 0$ donc D est une asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.

On a pour tout $x \in]2,+\infty[$:

$\ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(x-2)-\ln(x+2) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(x-2) \geq \ln(x+2) \Leftrightarrow x-2 \geq x+2 \Leftrightarrow -2 \geq 2$ ce qui est impossible donc pour tout x de $]2,+\infty[$ on a $\ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right) < 0$ et par suite $\mathscr{C}$ est toujours au-dessous de D

Soit T la tangente à $\mathscr{C}$ au point A,

$T : y = f'(3)(x-3)+f(3) = \frac{9}{5}(x-3)+2-\ln 5 = \frac{9}{5}x - \frac{17}{5} - \ln 5$



5) La fonction G est dérivable sur $]2,+\infty[$ comme produit de fonctions qui le sont et on a :

$$\begin{aligned} G'(x) &= (x-2)\frac{1}{(x-2)} + \ln(x-2) - \left[(x+2)\frac{1}{x+2} + \ln(x+2)\right] = 1+\ln(x-2)-1-\ln(x+2) \\ &= \ln(x-2)-\ln(x+2) \\ &= \ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right) \\ &= g(x) \end{aligned}$$

Exercice 12

Partie A

Γ coupe l'axe des abscisses au point E d'abscisse e $\Leftrightarrow g(e) = 0 \Leftrightarrow ae+b = 0$

La tangente à Γ en E est parallèle à la droite d'équation $y = 2 \Leftrightarrow g'(e) = 2$ or $g'(x) = a - \dfrac{\frac{b}{x}}{(\ln x)^2}$ donc

$g'(e) = 2 \Leftrightarrow a - \dfrac{b}{e} = 2$ et par suite : $\begin{cases} ae + b = 0 \\ a - \dfrac{b}{e} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -ae \\ a + a = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -e \end{cases}$

Partie B

1) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} x - \dfrac{e}{\ln x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x - \dfrac{e}{\ln x} = +\infty$

La fonction f est dérivable sur $]1, +\infty[$ comme somme et quotient de fonctions qui le sont et on a :

$$f'(x) = 1 + \frac{e}{x(\ln x)^2}$$

x	1 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
f	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - x] = \lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{e}{\ln x} = 0$ donc D est une asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$

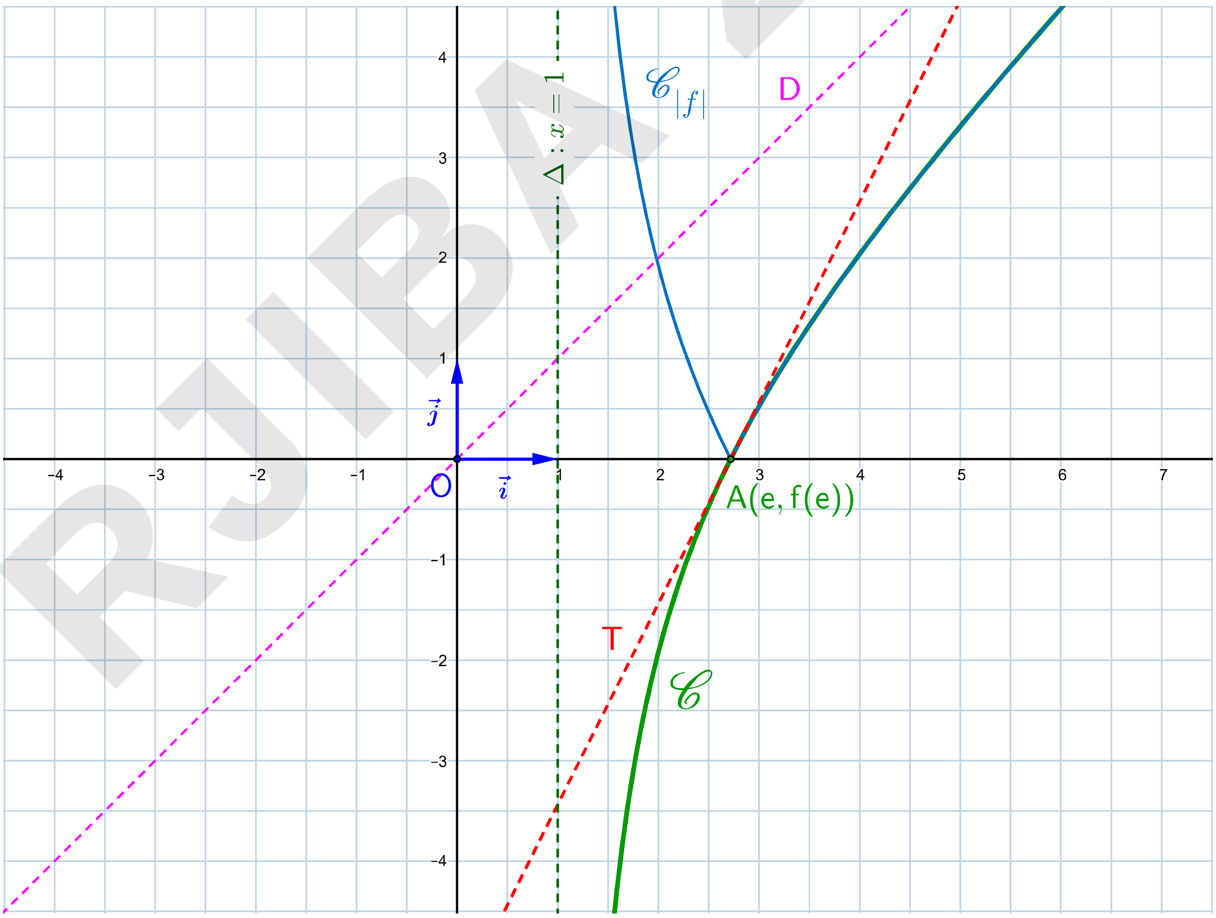
On a pour tout $x \in]1, +\infty[$, $-\dfrac{e}{\ln x} < 0$ donc $\mathscr{C}$ est au-dessous de D

$\mathscr{C}$ possède une asymptote verticale d'équation $x = 1$

3) Soit T la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse e. $T : y = f'(e)(x - e) + f(e) = 2(x - e) = 2x - 2e$

4) Voir figure ci-dessous.

5) Sur $]1, e[$ la courbe de $|f|$ est la symétrique de $\mathscr{C}$ par rapport à l'axe des abscisses, sur $]e, +\infty[$ la courbe de $|f|$ et $\mathscr{C}$ sont identiques



Exercice 13

1) La fonction g est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$ et on a :

$g'(x) = 3x^2 + \dfrac{2}{x} > 0$ donc g est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. $g(1) = 0$ donc :

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

2) La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables et on a :

$$f'(x)=1-\left(\frac{\frac{1}{x}x^2-2x\ln x}{x^4}\right)=1-\frac{x-2x\ln x}{x^4}=1-\frac{1-2\ln x}{x^3}=\frac{x^3-1+2\ln x}{x^3}=\frac{g(x)}{x^3}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(x-1-\frac{\ln x}{x^2}\right)=+\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-1-\frac{\ln x}{x^2}\right)=+\infty$$

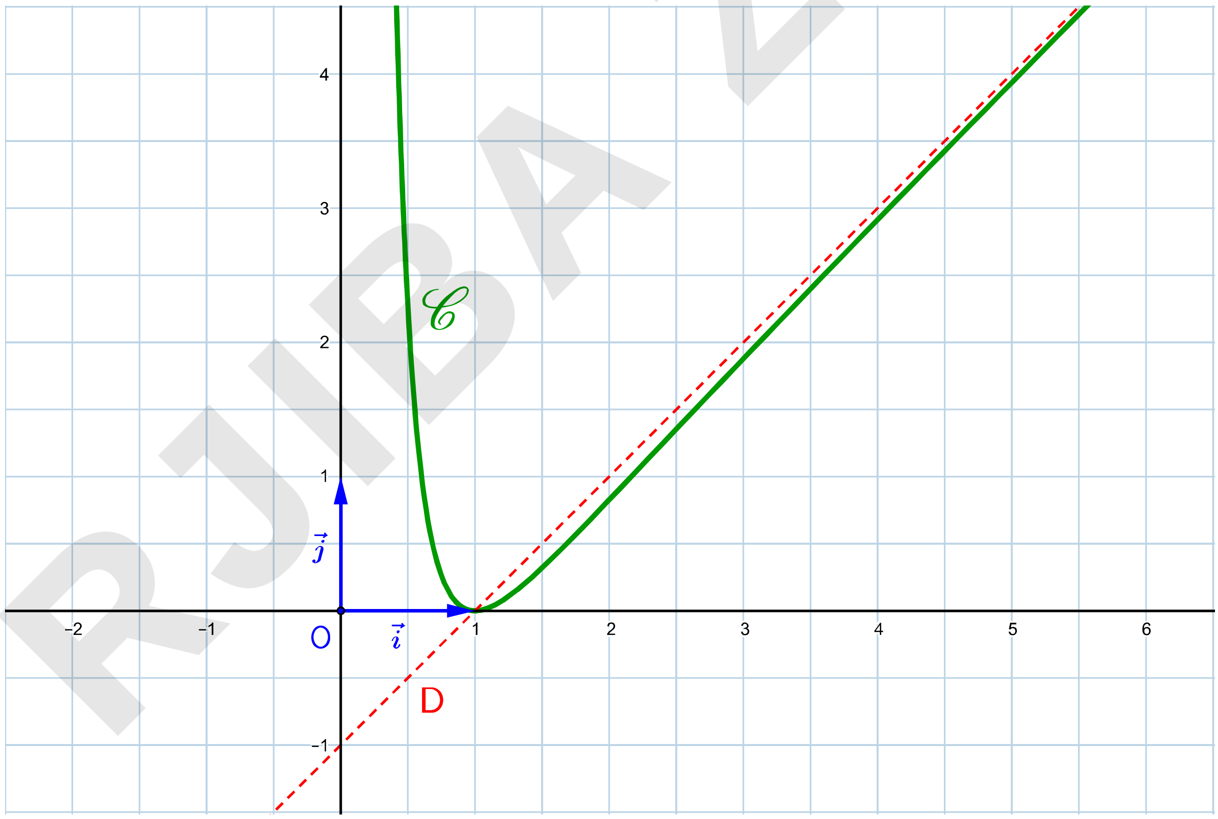
x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3) $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]=\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{\ln x}{x^2}\right]=0$

donc la droite $D : y = x-1$ est une asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$

$f(x)-(x-1)=-\frac{\ln x}{x^2}$

x	0		1		$+\infty$
$f(x)-(x-1)$		$-$	0	$+$	
Position relative		$\mathscr{C}$ est au-dessous de D		$\mathscr{C}$ est au-dessus de D	



Exercice 14

1) La fonction f est dérivable sur $]-\infty,1[$ en tant que composée de fonctions qui le sont et on a :

$f'(x)=\frac{-1}{1-x}=\frac{1}{x-1}<0$ donc f est strictement décroissante sur $]-\infty,1[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(1-x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(1-x)}{(1-x)}\times\frac{(1-x)}{x}=0$$

2) g est dérivable sur $]-\infty,1[$ en tant que produit et composée de fonctions qui le sont et on a :

$$g'(x) = \ln(1-x) - \frac{x}{1-x}$$

g' est dérivable sur $]-\infty,1[$ en tant que somme de fonctions qui le sont et on a :

$g''(x) = \frac{-1}{1-x} - \frac{1-x+x}{(1-x)^2} = \frac{x-2}{(1-x)^2} < 0$ pour tout $x \in]-\infty,1[$

donc g' est strictement décroissante sur $]-\infty,1[$

$g'(0) = 0$ $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$

x	$-\infty$		0		1
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

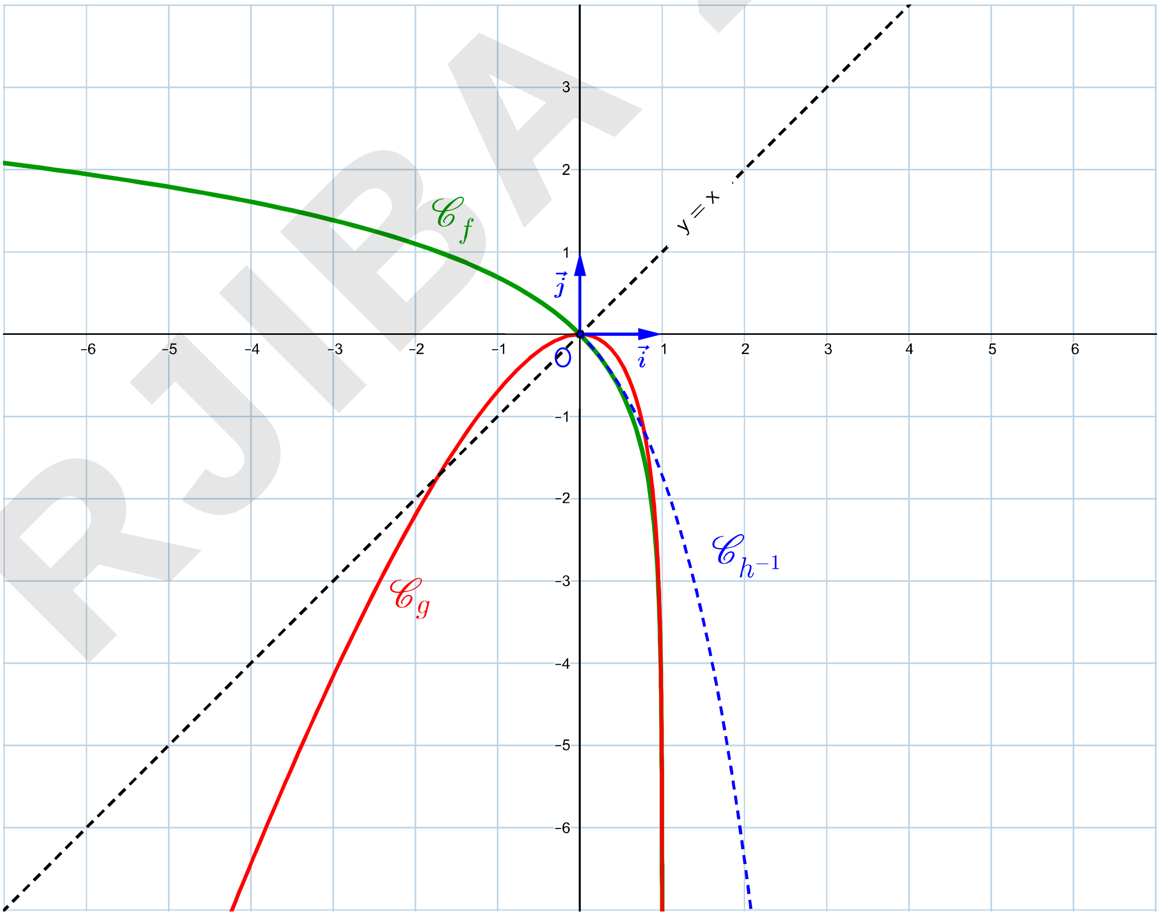
3) $g(x) - f(x) = x\ln(1-x) - \ln(1-x) = (x-1)\ln(1-x)$

x	0		1		$+\infty$
$g(x)-f(x)$		$-$	0	$+$	
Position relative		$\mathscr{C}g$ est au-dessous de $\mathscr{C}f$		$\mathscr{C}g$ est au-dessus de $\mathscr{C}f$	

$g(x) = x \Leftrightarrow x\ln(1-x) = x \Leftrightarrow x = 0$ ou $\ln(1-x) = 1 \Leftrightarrow x = 0$ ou $1-x = e$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1-e$ donc $S_{\mathbb{R}} = \{1-e, 0\}$

4) H est la restriction de g sur l'intervalle $]-\infty,0[$. La fonction h est donc continue et strictement croissante et par suite elle réalise une bijection de $]-\infty,0[$ sur $h(]-\infty,0[) =]-\infty,0[$ et par suite elle possède une fonction réciproque h^{-1} définie de $]-\infty,0[$ sur $]-\infty,0[$



Exercice 15

5) $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{x+3+3\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{x+3}{x} + 3\frac{\ln x}{x} = -\infty$ donc la droite $x = 0$ est une asymptote à $\mathscr{C}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+3+3\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+3}{x} + 3\frac{\ln x}{x} = 1$ donc la droite $y = 1$ est une asymptote à $\mathscr{C}$

6) a) f est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme étant somme et quotient de fonctions dérivables et on a :

$$f'(x) = \frac{\left(1+\frac{3}{x}\right)x - (x+3+3\ln x)}{x^2} = \frac{-3\ln x}{x^2}$$

c)

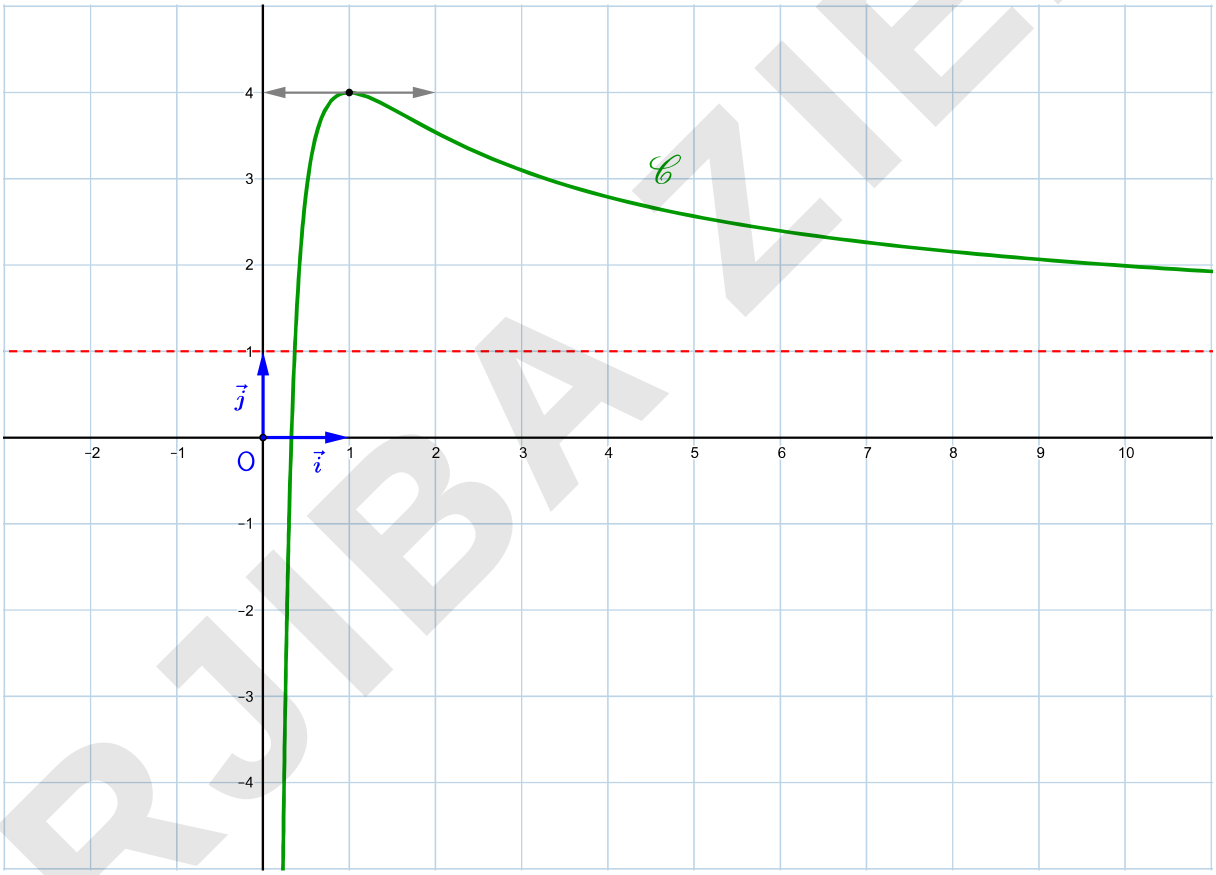
x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	1

7) a) Sur $[1,+\infty[$, $f(x) > 0$

Sur $]0,1[$, f est continue et strictement croissante et on a $0 \in f(]0,1[) =]-\infty,1[$ donc l'équation $f(x) = 0$ possède une solution unique $\alpha \in]0,1[$

$\left.\begin{array}{l} f(0.32) \simeq -0.31 \\ f(0.34) \simeq 0.3 \end{array}\right\}$ donc $0.32 < \alpha < 0.34$

c)



8) a) $B(x)$ est maximal pour $\frac{x}{1000} = 1$ c'est-à-dire pour $x = 1000$

Le bénéfice maximal sera donc $B(1000) = f(1) = 4$ milles dinars

b) $B(4000) = f(4) \simeq 2.7897$

Le bénéfice réalisé pour une fabrication de 4000 objets est donc 2790 dinars à un dinar près

Exercice 16

1) a) $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{1+\ln x}{x} = -\infty$ donc l'axe des ordonnées (droite d'équation : $x = 0$) est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1+\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} = 0$ donc la courbe $\mathscr{C}$ possède une asymptote d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses) au voisinage de $+\infty$

2) a) La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme étant somme et quotient de fonctions dérivables et on a :

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1-\ln x}{x^2} = -\frac{\ln x}{x^2}$$

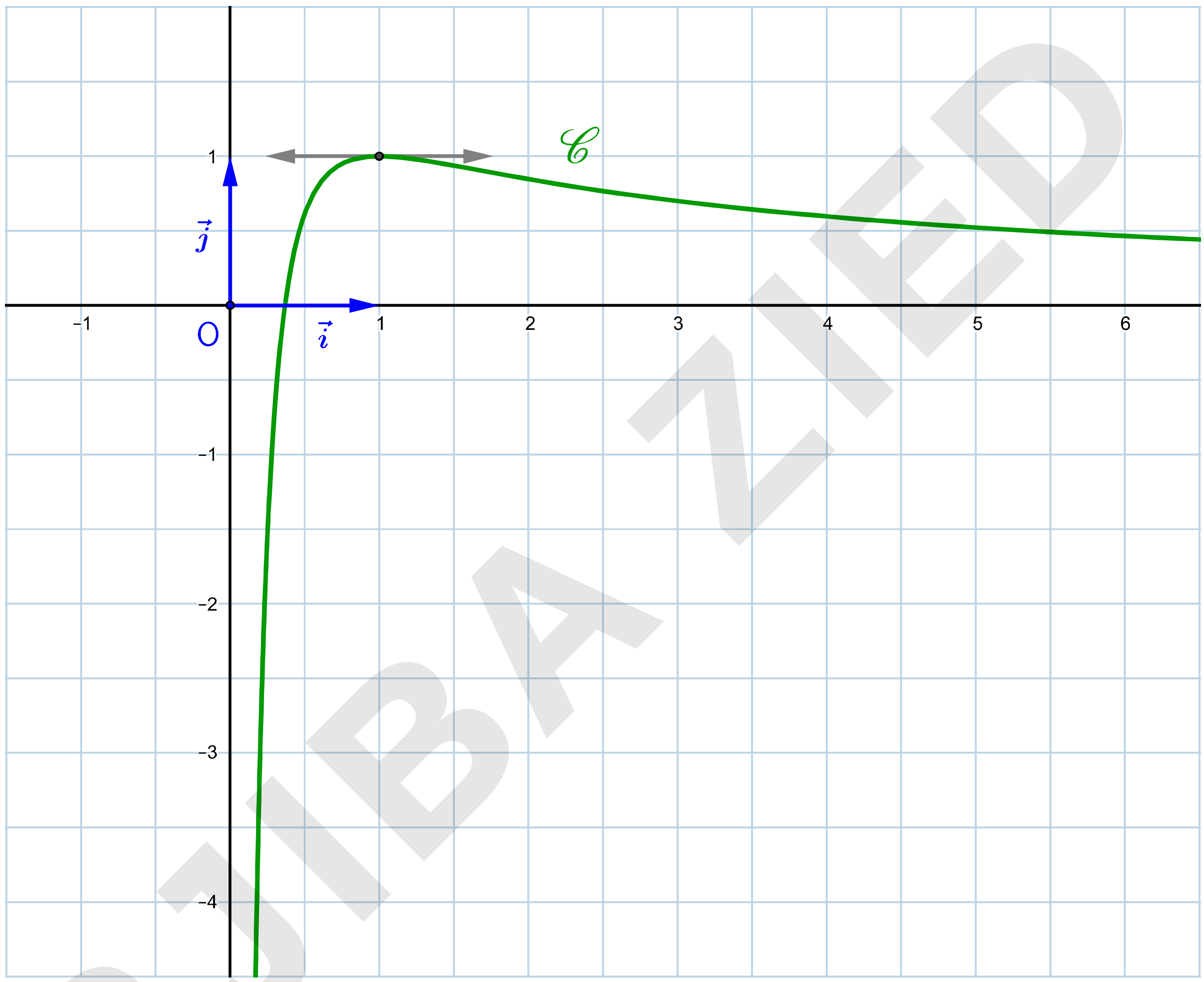
$f'(1) = 0$

b)

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

c) On a pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1+\ln x}{x} = 0 \Leftrightarrow 1+\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow \ln x = \ln\left(\dfrac{1}{e}\right) \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{e}$

d)



Chapitre 04

Fonctions exponentielles

Rappel de cours

Fonctions exponentielles

- La fonction exponentielle de base e, notée $\exp$, la réciproque de la fonction logarithme népérien
- On appelle fonction exponentielle de base a, $a \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction, notée $\exp_a$, définie par $\exp_a = a^x = e^{x\ln a}$
- La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $\exp'(x) = \exp(x) = e^x$

Propriétés

- $\exp(x) = y \Leftrightarrow x = \ln y$ pour $x, y \in]0,+\infty[$
- $\exp(\ln x) = \ln(\exp(x)) = x$ pour $x, y \in]0,+\infty[$
- Pour tout réels x et y on a : $e^{x+y} = e^x e^y$

  $\rightarrow e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$

  $\rightarrow e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$

  $\rightarrow (e^x)^r = e^{rx}$, $r \in \mathbb{Q}$

Limites

- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ $\quad \lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$, $n \in \mathbb{N}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^r} = +\infty$, $r \in \mathbb{Q}_+$
- Si $a \in]0,1[$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0$
- Si $a \in]1,+\infty[$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$

Signe

- La fonction exponentielle est strictement positif sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
e^x	$+$

Equations et inéquations

- $0 < e^x < 1 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 0[$
- $e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$
- $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$
- $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$
- $e^{u(x)} = e^{v(x)} \Leftrightarrow u(x) = v(x)$
- $e^{u(x)} \le e^{v(x)} \Leftrightarrow u(x) \le v(x)$

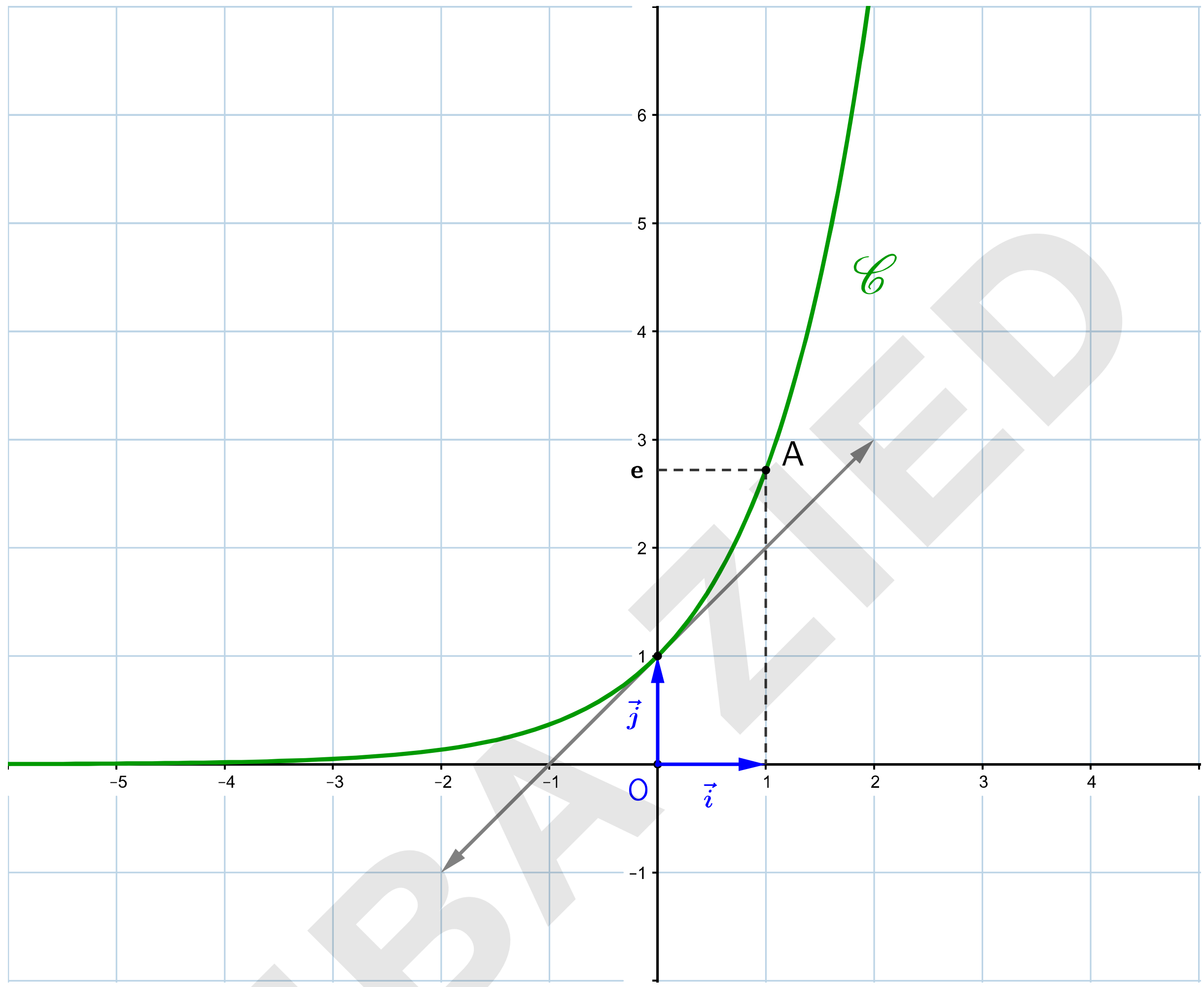
Fonction de type $x \mapsto \exp(u(x))$

- Si u est une fonction dérivable sur I alors la fonction $f : x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et on a $f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$
- Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I alors les fonctions primitives de $f : x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$ sont les fonctions de type $x \mapsto e^{u(x)} + k$ avec k est une constante réelle.

Courbe

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe de la fonction $x \mapsto e^x$

- L'axe des abscisses est une asymptote $\mathscr{C}$ au voisinage de $-\infty$
- $\mathscr{C}$ possède une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$
- $T : y = x + 1$ est la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0



Fonction puissance

- Soit a un réel strictement positif. La fonction $f : x \mapsto a^x$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $a^x = e^{x \ln a}$
- La fonction $f : x \mapsto a^x$, où a est un réel strictement positif est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $f'(x) = \ln a \times a^x$

Sens de variation de la fonction puissance

- Si $0 < a < 1$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
f	$+\infty \searrow 0$

- Si $a > 1$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
f	$0 \nearrow +\infty$

- Si $a = 1$ alors f est constante

Attention !

- Ne pas croire que e^{-x} est négatif en faite $e^{-x} = \frac{1}{e^x} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
- Ne pas croire que $e^a + e^b = e^{a+b}$
- La dérivée de la fonction $x \mapsto a^x$ n'est pas $x \mapsto x\,a^{x-1}$ mais $x \mapsto \ln a \times a^x$

Les exercices

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{x}{e^x-x}$ et on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$, unité graphique 2 cm sur l'axe des abscisses et 5cm sur l'axe des ordonnées

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=e^x-x-1$

1) Etudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$. En déduire le signe de $g(x)$
2) Justifier que pour tout x, e^x-x est strictement positif

Partie B

1) a) Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$
   b) Interpréter graphiquement les résultats précédents
2) a) Calculer $f'(x)$
   b) Dresser le tableau de variation de f
3) a) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0
   b) A l'aide de la partie A, étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite T
4) Tracer la droite T, la courbe $\mathscr{C}$ ainsi que ses asymptotes

Exercice 2

Partie A

On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par: $f(x)=e^x(x^2-2x+2)-3$

1) Dresser le tableau de variation de f
2) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α. A l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de α à 10^{-1} près
3) En déduire le signe de $f(x)$ sur $[0,+\infty[$

Partie B

Un atelier artisanal produit du caviar de grande qualité :

- Le coût de production journalier de x kg de caviar ($x\geq 0$), en dizaines de milliers d'euros, est $C(x)=e^x(x-2)+3$
- Le coût moyen de production au kg, en dizaines de milliers d'euros, est $C_m(x)=\dfrac{C(x)}{x}$

1) Pour tout réel x strictement positif, vérifier que : $C'_m(x)=\dfrac{f(x)}{x^2}$
2) Dresser le tableau de variation de C_m
3) Quel est le coût moyen minimum de production de ce caviar au kg?

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $I=]-1,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{e^x}{1+x}$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 5 cm

1) Déterminer les limites de f aux bornes de I. En déduire que $\mathscr{C}$ possède une asymptote Δ que l'on précisera.
2) Etudier les variations de f
3) a) Ecrire une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ en un point M de $\mathscr{C}$ d'abscisse a. on note T_a cette tangente.
   b) Démontrer qu'il existe deux valeurs de a pour lesquelles la droite T_a passe par l'origine.
4) Tracer $\mathscr{C}$. On mettra en évidence la droite Δ et les deux tangentes trouvée ci-dessous.

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=4e^x-e^{2x}$ et on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ dont l'unité graphique est 2 cm

Partie A

1) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Interpréter graphiquement les résultats trouvés.
2) On désigne par f' la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$
   a) Montrer que $f'(x) = 2e^{x}(2 - e^{x})$
   b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $2 - e^{x} > 0$ et en déduire le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$
   c) Dresser le tableau de variation de f

Partie B

1) Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = 0$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
2) Tracer $\mathscr{C}$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$
3) Déterminer graphiquement l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \geq 0$

Exercice 5

Partie A

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1 - (1 + x)e^{x}$

1) Dresser le tableau de variation de g
2) Calculer $g(0)$ et en déduire le signe de $g(x)$

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x(1 - e^{x})$. On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = g(x)$
   b) Dresser le tableau de variation de f
   c) Montrer que la droite $\Delta : y = x$ est une asymptote oblique à $\mathscr{C}$
   d) Préciser la position relative de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ
2) Montrer que $\mathscr{C}$ admet un point d'inflexion I dont on déterminera les coordonnées.
3) Construire Δ et $\mathscr{C}$

Exercice 6

Partie A

Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = 1 - x\ln x$

1) Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$
2) Dresser le tableau de variation de g
3) a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ possède une solution α unique sur $]0,+\infty[$
   b) Montrer que $1.7 < \alpha < 1.8$
   c) En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0,+\infty[$

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln x}{e^{x}}$. On note $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$, unité graphique 2 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées

1) Déterminer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement le résultat
2) Déterminer la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat
3) a) Déterminer la fonction dérivée f' de f et montrer que, pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x e^{x}}$
   b) Etablir le tableau de variation de f sur $]0,+\infty[$ en fonction de α.
   c) En prenant 1,76 comme valeur approchée de α, donner une valeur approchée de $f(\alpha)$
   d) Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1
4) Dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, tracer T et $\mathscr{C}$

Exercice 7

Partie A

1) Etudier le signe de $e^{-x} - 1$
2) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1 - x - e^{-x}$
   a) Dresser le tableau de variation de g
   b) En déduire le signe de $g(x)$

Partie B

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x-1)^2 e^x$ et on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) Déterminer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$
2) a) Etudier la dérivabilité de f sur son domaine de définition et montrer que $f'(x)=(x^2-1)e^x$
   b) Dresser le tableau de variation de f
3) a) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0
   b) Montrer que pour tout réel x on a $f(x)-(1-x)=(1-x)e^x g(x)$
   c) En déduire la position relative de $\mathscr{C}$ par rapport à T
4) Tracer la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

Exercice 8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{3e^x-1}{e^x+1}$

1) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
2) Dresser le tableau de variations de f
3) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=f(x)-x$
   a) Calculer $g'(x)$
   b) Etudier le signe de l'expression $2x-x^2-1$ sur $]0,+\infty[$
   c) En déduire le signe de $g'(x)$
   d) Etudier les variations de g sur $\mathbb{R}$
4) a) Montrer que l'équation $g(x)=0$ possède une solution unique α tel que $2,7<\alpha<2,8$
   b) En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$

Exercice 9

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\ln(e^{2x}-2e^x+3)$. Soit $\mathscr{C}$ la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) a) Etudier, suivant les valeurs de x, le signe de x^2-2x+3
   b) En déduire le signe de $e^{2x}-2e^x+3$
   c) En déduire que $\ln(e^{2x}-2e^x+3)$ est définie pour tout réel x
2) Calculer la limite de f en $-\infty$ et donner une Interprétation graphique du résultat obtenu
3) a) Calculer la limite de f en $+\infty$
   b) Calculer la limite de $f(x)-2x$ en $+\infty$ (On pourra remarquer que $2x=\ln(e^{2x})$) et en déduire que $\mathscr{C}$ possède une asymptote oblique $\mathscr{D}$ dont on déterminera l'équation
   c) Etudier la position relative de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$
4) Dresser le tableau de variation de f
5) Déterminer une équation de la tangente Δ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $\ln 3$
6) Tracer $\mathscr{D}$, Δ et $\mathscr{C}$

Exercice 10

Partie A

On considère la fonction g définie sur $[0,+\infty[$ par $g(x)=e^x-x-1$

1) Étudier les variations de la fonction g
2) Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x
3) En déduire que pour tout x de $[0,+\infty[$, $e^x-x>0$

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}$

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé. On admet que f est strictement croissante sur $[0,1]$

1) Montrer que $\mathscr{C}$ possède une asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$ dont on donnera une équation cartésienne
2) Déterminer $f([0,1])$

3) Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = x$

a) Montrer que pour tout x de $[0,1]$, $f(x) - x = \dfrac{(1-x)g(x)}{e^x - x}$

b) Étudier la position relative de la droite $\mathcal{D}$ et de la courbe $\mathcal{C}$ sur $[0,1]$

Exercice 11 BAC [session de contrôle 2010]

Soit la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = 20 - 3e^{0,05x}$

1) a) Déterminer $f(0)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b) Vérifier que pour tout réel $x \in [0,+\infty[$, $f'(x) = -0,15e^{0,05x}$

c) Dresser le tableau de variation de f

d) Résoudre l'équation $f(x) = 0$

2) On admet que l'expression $f(n) = 20 - 3e^{0,05n}$ représente la quantité stockée, exprimée en tonnes, d'un produit en fonction du temps n, exprimé en mois. La mise en vente de ce produit a débuté le 1er janvier 2008

a) Déterminer le nombre maximum de mois avant qu'il ait une rupture de stock

b) En déduire le mois et l'année correspondant à la rupture du stock

Exercice 12

Partie A

On considère la fonction f définie sur $[0,4]$ par $f(x) = (ax+b)e^{-x}$ où a et b sont deux réels. On désigne par f' la fonction dérivée de f sur $[0,4]$ et on note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

On sait que $\mathcal{C}$ passe par le point $E(0,1)$ et qu'elle admet au point d'abscisse 0 une tangente horizontale.

1) Déterminer $f(0)$ et $f'(0)$

2) Vérifier que $f'(x) = (-ax + a - b)e^{-x}$

3) En utilisant les résultats précédents, déterminer a et b

Partie B

Pour la suite, on admet que la fonction f est définie sur $[0,4]$ par $f(x) = (x+1)e^{-x}$

1) a) Calculer $f'(x)$

b) Dresser le tableau de variation de f.

2) Montrer que l'équation $f(x) = 0.5$ possède une unique solution α dans l'intervalle $[0,4]$ avec $1.678 \le \alpha \le 1.679$

Partie C

Une entreprise produit q milliers de pièces par jours, q étant un réel de $[0,4]$. Le prix de revient d'une pièce, exprimé en DT, dépend de q et est donné par l'expression : $f(q) = (q+1)e^{-q}$

1) Combien coûte, à un dinar près, la production de 2000 pièce par jours ?

2) A partir de quelle quantité de pièces produites le prix de revient d'une pièce est-il inférieur à 0.5 DT ?

Correction des exercices

Exercice 1

Partie A

1) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $g'(x) = e^x - 1$

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$+$	

2) On a pour tout x, $g(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x - x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x - x \geq 1$ et par suite, pour tout x, $e^x - x > 0$

Partie B

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{e^x - x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{\dfrac{e^x}{x} - 1} = -1$ donc la droite $y = -1$ est une asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de $-\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x - x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\dfrac{e^x}{x} - 1} = 0$ donc l'axe des abscisses est une asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$

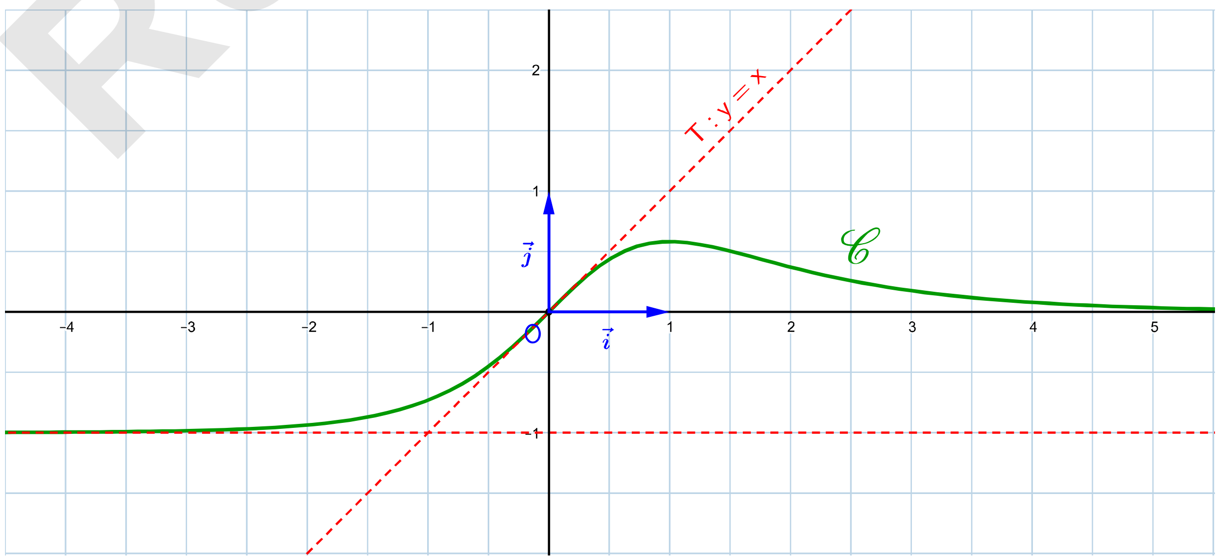
2) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $f'(x) = \dfrac{(e^x - x) - (e^x - 1)}{(e^x - x)^2} = \dfrac{e^x - x - xe^x + x}{(e^x - x)^2} = \dfrac{e^x(1 - x)}{(e^x - x)^2}$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	-1	$\nearrow$	$\dfrac{1}{e-1}$	$\searrow$	0

3) Soit T la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1. L'équation de T s'écrit donc : $T : y = f'(0)x + f(0) = x$

$f(x) - x = \dfrac{x}{e^x - x} - x = \dfrac{x - xe^x + x^2}{e^x - x} = \dfrac{x(1 - e^x + x)}{e^x - x} = -\dfrac{x}{e^x - x} g(x)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - x$	$+$	0	$-$
Position	$\mathscr{C}$ est au-dessus de T		$\mathscr{C}$ est au-dessous de T



Exercice 2

Partie A

1) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et par suite sur $[0,+\infty[$ comme étant produit et somme de fonction dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a $f'(x)=e^x(x^2-2x+2)+e^x(2x-2)=x^2e^x \geq 0$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	+	
f	-1	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} e^x(x^2-2x+2)-3=+\infty$

2) La fonction f est continue, strictement croissante et change de signe ($\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $f(0)=-1$ sur $\mathbb{R}$ donc l'équation $f(x)=0$ possède une solution unique α

$\left.\begin{array}{l} f(1)\simeq -0.28 \\ f(1.1)\simeq 0.03 \end{array}\right\}$ donc $1<\alpha<1.1$

3)

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	+	

Partie B

1) $C_m(x)=\dfrac{e^x(x-2)+3}{x}$

C_m est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme étant somme et produit de fonction dérivables et on a :

$$C'_m(x)=\frac{x[e^x(x-2)+3]-[e^x(x-2)+3]}{x^2}=\frac{e^x(x^2-2x+x-x+2)-3}{x^2}$$

$$=\frac{e^x(x^2-2x+2)-3}{x^2}$$

$$=\frac{f(x)}{x^2}$$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} C_m(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x(x-2)+3}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} e^x\left(\dfrac{x-2}{x}\right)+\dfrac{3}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^+} C_m(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^x(x-2)+3}{x}=+\infty$

$C_m(\alpha)=\dfrac{e^\alpha(\alpha-2)+3}{\alpha}\simeq 3-e$

x	0		α		$+\infty$
$C'_m(x)$		$-$	0	+	
C_m	$+\infty$	$\searrow$	$C_m(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

3) Le cout moyen minimum de la production de ce caviar au kg est donc $C_m(\alpha)\simeq 3-e$

Exercice 3

1) $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{e^x}{1+x}=+\infty$ donc la droite Δ d'équation $x=-1$ est une asymptote à $\mathscr{C}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{1+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}\times\dfrac{x}{1+x}=+\infty$

2) La fonction f est dérivable sur $]-1,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont et on a :

$$f'(x)=\frac{e^x(1+x)-e^x}{(1+x)^2}=\frac{x\,e^x}{(1+x)^2}$$

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	+	
f	-1	$\searrow$	1	$\nearrow$	0

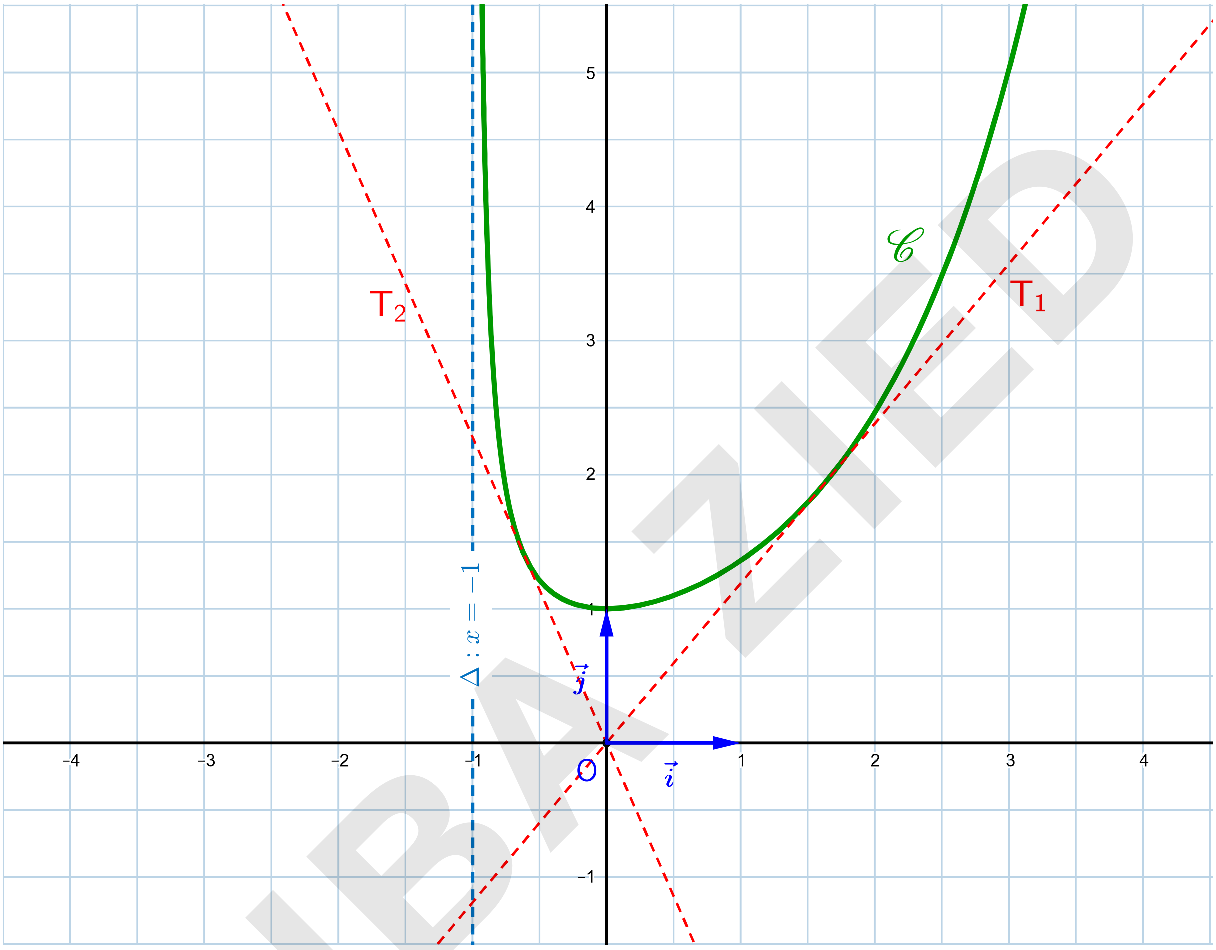
3) $T_a : y = f'(a)(x-a)+f(a) = \dfrac{ae^3}{(1+a)^2}(x-a)+\dfrac{e^3}{1+a}$

T_a passe par l'origine $\Leftrightarrow 0 = \dfrac{a\,e^a}{(1+a)^2}(-a)+\dfrac{e^a}{1+a} \Leftrightarrow \dfrac{e^a}{1+a} = \dfrac{a^2\,e^a}{(1+a)^2}$

$\Leftrightarrow (1+a) = a^2$

$\Leftrightarrow a^2 - a - 1 = 0$

$\Leftrightarrow a = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ou $a = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$



Exercice 4

Partie A

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (4e^x - e^{2x}) = 0$ donc la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de $-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (4e^x - e^{2x}) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x(4-e^x) = -\infty$

2) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme et composé de fonctions qui le sont et on a :

$$f'(x) = 4e^x - 2e^{2x} = 2e^x(2-e^x)$$

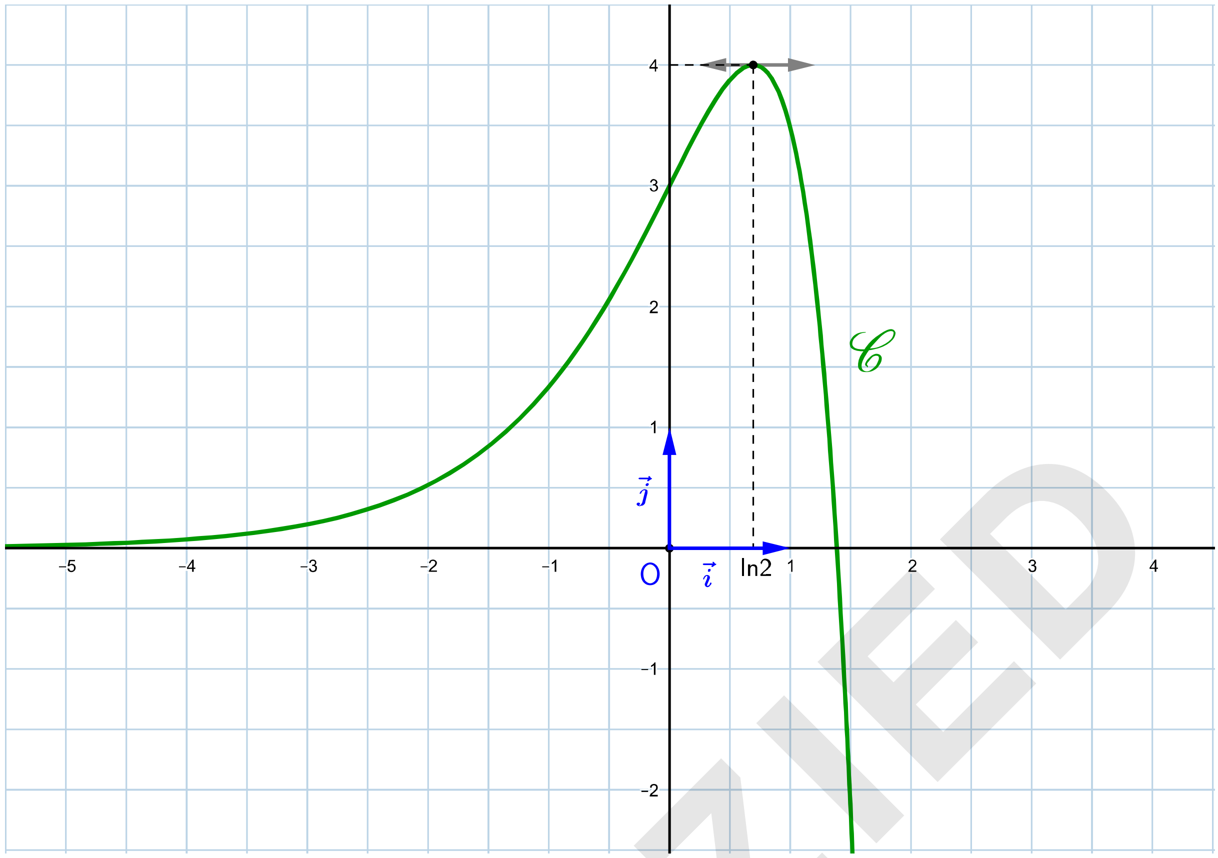
$2-e^x > 0 \Leftrightarrow 2 > e^x \Leftrightarrow \ln 2 > \ln(e^x) \Leftrightarrow x < \ln 2$ donc $x \in \left]-\infty, \ln 2\right[$

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
f	2	↗	4	↘	$-\infty$

Partie B

1) $f(x) = 0 \Leftrightarrow 4e^x - e^{2x} = 0 \Leftrightarrow 4e^x = e^{2x} \Leftrightarrow 4 = e^x \Leftrightarrow x = \ln 4$: La courbe $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses au point $A(\ln 4, 0)$

2) $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty, \ln 4\right[$



Exercice 5

Partie A

1) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions qui le sont et on a :

$$g'(x) = -e^x - (1+x)e^x = -(2+x)e^x$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (1-e^x-xe^x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (1-e^x-xe^x) = -\infty$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0		$-$		
g	0	$\nearrow$	$1+e^{-2}$		$\searrow$		$-\infty$
$g(x)$		$+$			0	$-$	

2) $g(0) = 0$

Partie B

1) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions qui le sont et on a :

$$f'(x) = (1-e^x) - xe^x = 1-(1+x)e^x = g(x)$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x-xe^x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x(1-e^x) = -\infty$

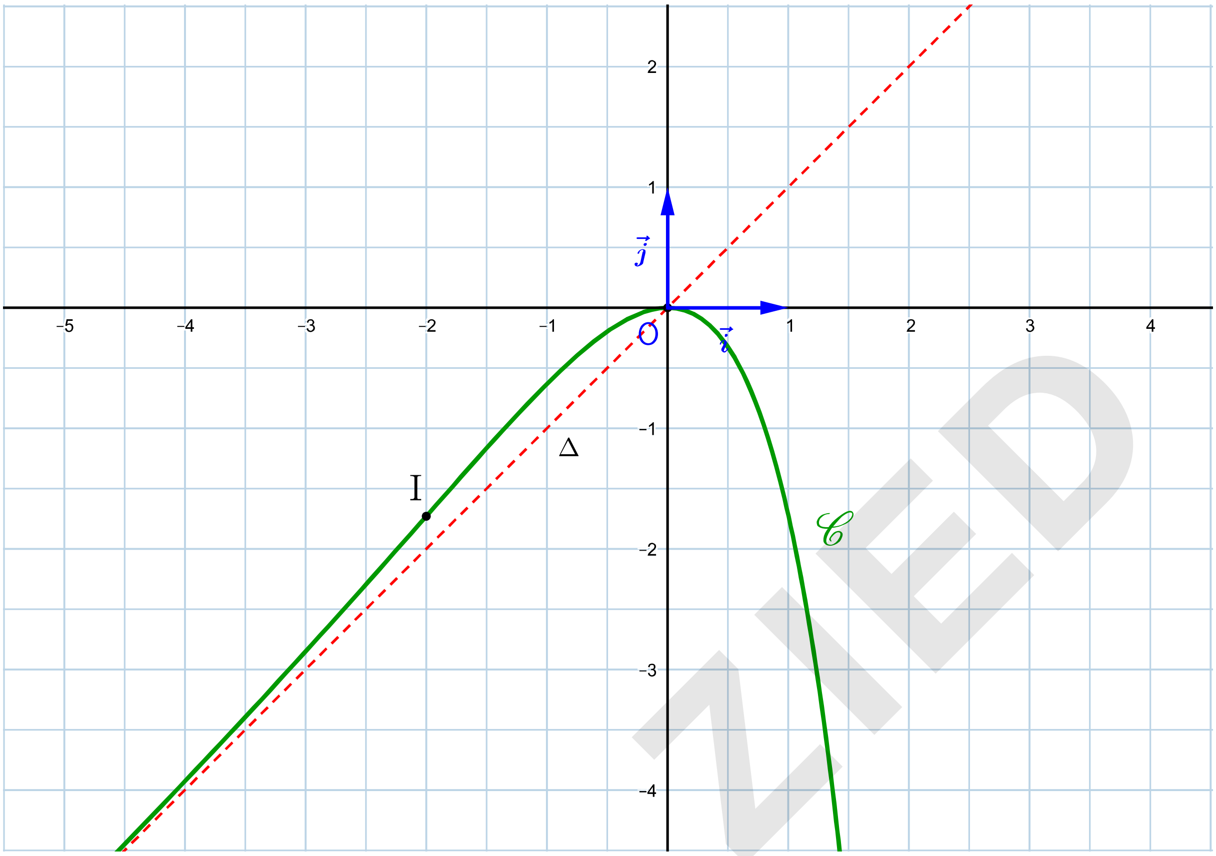
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x\to-\infty} -xe^x = 0$ donc la droite $\Delta : y = x$ est une asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de $-\infty$

$f(x) - x = -x\,e^x$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)-x$	$+$	0	$-$
Position	$\mathscr{C}$ est au-dessus de T		$\mathscr{C}$ est au-dessous de T

2) La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $f''(x) = g'(x)$ donc d'après la partie A, $g(x)$ s'annule en -2 en changeant de signe donc le point $I(-2, f(-2)) = (-2, -2(1-e^{-2}))$ est un point d'inflexion de $\mathscr{C}$



Exercice 6

Partie A

1) $\lim\limits_{x\to 0^+}[1 - x\ln x] = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}[1 - x\ln x] = -\infty$

2) g est dérivable comme somme et produit de fonction dérivables et on a : $g'(x) = -\left[x\frac{1}{x} + \ln x\right] = -1 - \ln x$

$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -1 - \ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq -1 \Leftrightarrow x \leq e^{-1}$

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	1	$\nearrow$	$1+e^{-1}$	$\searrow$	$-\infty$

3) Sur l'intervalle $]0, e^{-1}[$ la fonction g est strictement positive donc elle ne s'annule jamais. Sur l'intervalle $]e^{-1}, +\infty[$, g est continue et strictement décroissante et comme elle change de signe alors elle s'annule une seule fois et par conséquence l'équation $g(x) = 0$ admet une solution α unique dans l'intervalle $]0, +\infty[$

$\left.\begin{array}{l} g(1.7) \simeq 0.098 \\ g(1.8) \simeq -0.058 \end{array}\right\}$ donc $1.7 < \alpha < 1.8$

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

Partie B

1) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{e^x} = -\infty$ donc l'axe des ordonnées est une asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de 0

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\cdot\frac{x}{e^x} = 0$

donc l'axe des abscisses est une asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$

3) a) La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme produit de fonctions qui le sont et on a :

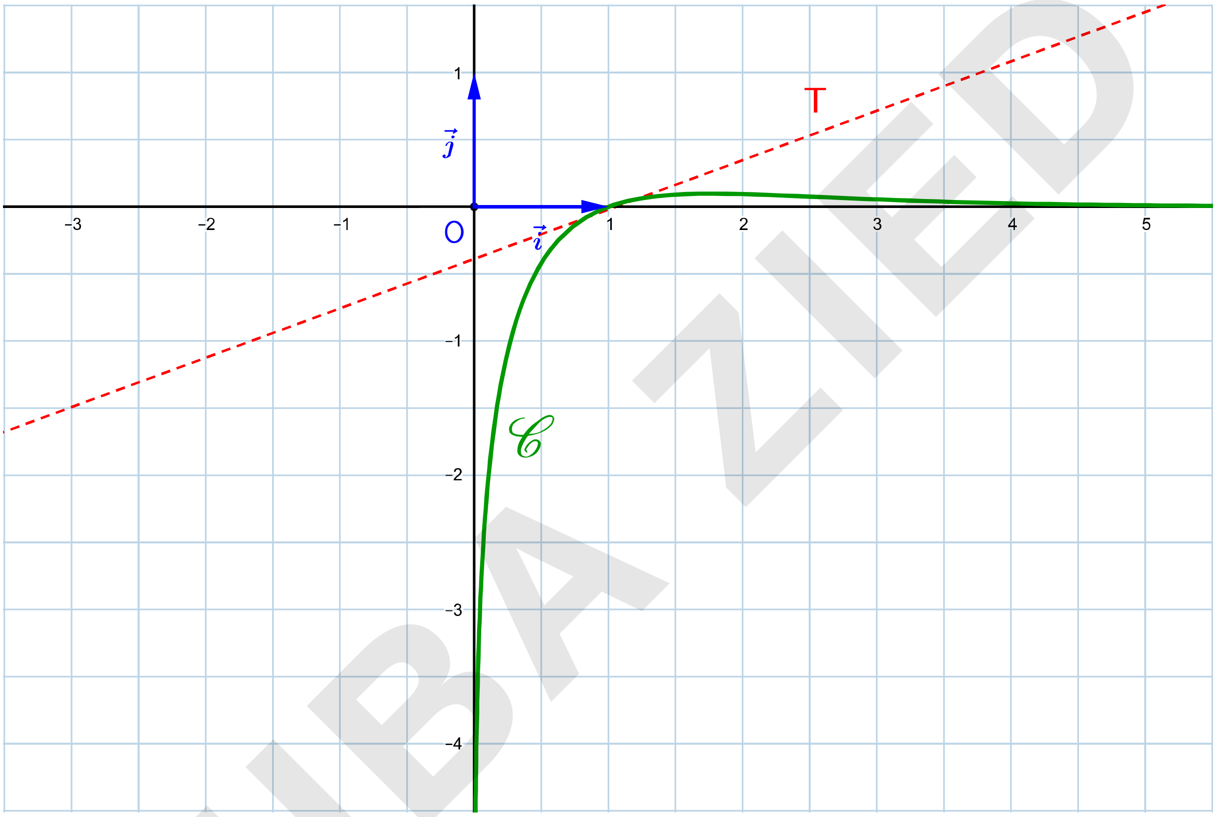
$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}e^{x}-e^{x}\ln x}{e^{2x}}=\frac{\frac{1}{x}-\ln x}{e^{x}}=\frac{1-x\ln x}{xe^{x}}=\frac{g(x)}{xe^{x}}$$

b)

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	1	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$

c) $f(\alpha)\simeq f(1.7)\simeq 0.097$

d) $T: y=f'(1)(x-1)+f(1)=\frac{1}{e}(x-1)$



Exercice 7

Partie A

1) $e^{-x}-1\geq 0 \Leftrightarrow e^{-x}\geq 1 \Leftrightarrow -x\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 0$

2) La fonction g est dérivable sur IR comme étant somme et composée de fonctions qui le sont et on a :
$g'(x)=-1+e^{-x}=e^{-x}-1$

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 1-x-e^{-x}=\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(\frac{1}{x}-1+\frac{e^{-x}}{-x}\right)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 1-x-e^{-x}=-\infty$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$
$g(x)$		$-$	0	$-$	

Partie B

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)^2e^{x}=\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^{x}-2xe^{x}+e^{x}=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)^2e^{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{x}-2xe^{x}+e^{x}=+\infty$

2) La fonction f est dérivable sur IR en tant que produit de fonctions qui le sont et on a :

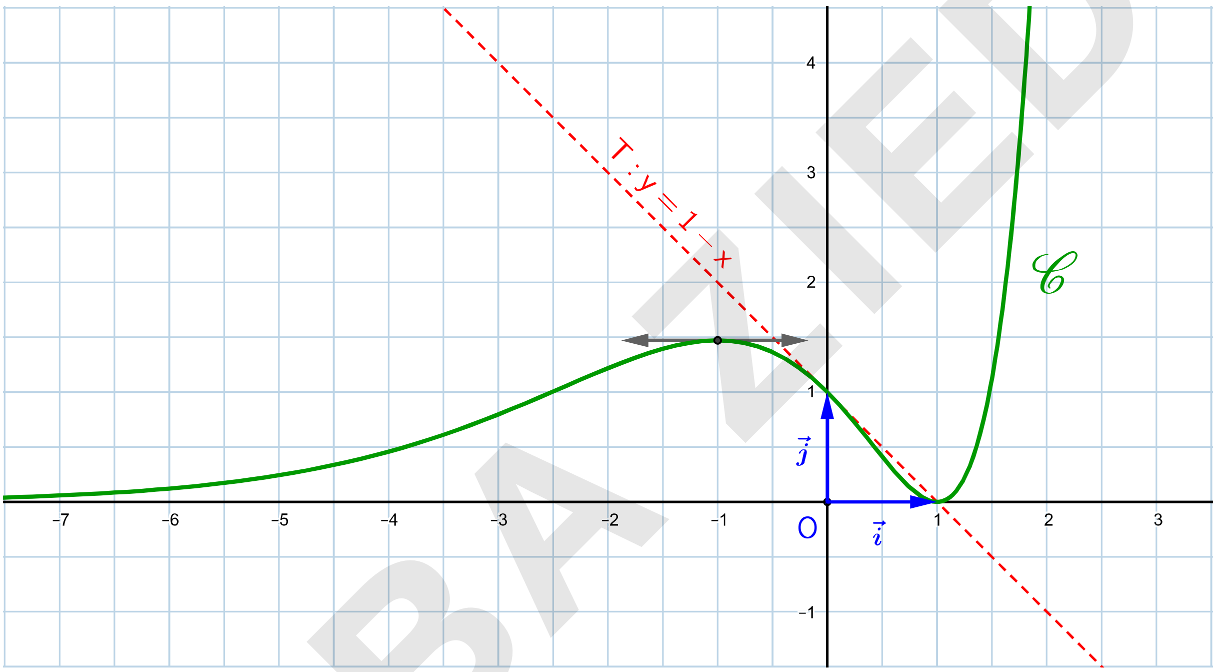
$$f'(x)=2(x-1)e^{x}+(x-1)^2e^{x}=(x^2-1)e^{x}$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$	$4e^{-1}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3) $T : y = f'(0)x + f(0) = -x + 1 = 1 - x$

$f(x) - (1-x) = (x-1)^2 e^x - (1-x) = (1-x)\left[-(x-1)e^x - 1\right] = (1-x)e^x\left(-x+1-e^{-x}\right) = (1-x)e^x g(x)$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$-$		$-$	
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)-(1-x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
Position relative		$\mathscr{C}$ est au-dessous de T		$\mathscr{C}$ est au-dessous de T		$\mathscr{C}$ est au-dessus de T	



Exercice 8

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3e^x - 1}{e^x + 1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3 - e^{-x}}{1 + e^{-x}} = 3$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3e^x - 1}{e^x + 1} = -1$

2) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme étant quotient de fonctions qui le sont et on a :

$$f'(x) = \frac{3e^x(e^x+1) - e^x(3e^x - 1)}{(e^x+1)^2} = \frac{3e^{2x} + 3e^x - 3e^{2x} + e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{4e^x}{(e^x+1)^2}$$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	-1	$\nearrow$	3

3) $g(x) = f(x) - x$. La fonction g est dérivable comme somme de deux fonctions qui le sont et on a :

$$g'(x) = f'(x) - 1 = \frac{4e^x}{(e^x+1)^2} - 1 = \frac{4e^x - (e^{2x} + 2e^x + 1)}{(e^x+1)^2} = \frac{-e^{2x} + 2e^x - 1}{(e^x+1)^2}$$

$2x - x^2 - 1 = -(x^2 - 2x + 1) = -(x-1)^2$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$2x - x^2 - 1$		$-$	0	$-$	

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^x - 2e^{2x} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = +\infty$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$-$	
g	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

4) a) Sur $]-\infty,0[$ la fonction g est strictement positive

Sur $[0,+\infty[$ la fonction g est continue, strictement décroissante et change de signe donc l'équation $g(x)=0$ possède une solution unique $\alpha \in [0,+\infty[$

$$\left.\begin{array}{l} g(2.7) \simeq 0.0481 \\ g(2.8) \simeq -0.029 \end{array}\right\} \text{ donc } 2.7 < \alpha < 2.8$$

b)

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

Exercice 9

1) a) $x^2 - 2x + 3 = 0$, $\Delta = (-2)^2 - 4\times 3 = -8 < 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
x^2-2x+3		$+$	
$e^{2x}-2e^x+3$		$+$	

c) $e^{2x} - 2e^x + 3$ est strictement positif sur $\mathbb{R}$ donc $\ln(x^2-2x+3)$ existe sur $\mathbb{R}$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \ln(e^{2x} - 2e^x + 3) = \ln 3$ donc la courbe $\mathscr{C}$ possède une asymptote horizontale d'équation $y = \ln 3$

3) a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(e^{2x} - 2e^x + 3) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(e^x(e^x - 2 + 3e^{-x})\right) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - 2x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\ln(e^{2x} - 2e^x + 3) - 2x\right)$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\ln(e^{2x} - 2e^x + 3) - \ln(e^{2x})\right)$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1 - 2e^{-x} + 3e^{-2x}) = \ln 1 = 0$

donc la droite d'équation $\mathscr{D} : y = 2x$ est une asymptote oblique à $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$

c) $f(x) - 2x = \ln(e^{2x} - 2e^x + 3) - 2x = \ln(e^{2x} - 2e^x + 3) - \ln(e^{2x}) = \ln(1 - 2e^{-x} + 3e^{-2x})$

$f(x) - 2x \geq 0 \Leftrightarrow \ln(1 - 2e^{-x} + 3e^{-2x}) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - 2e^{-x} + 3e^{-2x} \geq 1 \Leftrightarrow 3e^{-2x} \geq 2e^{-x} \Leftrightarrow 3e^{-x} \geq 2$

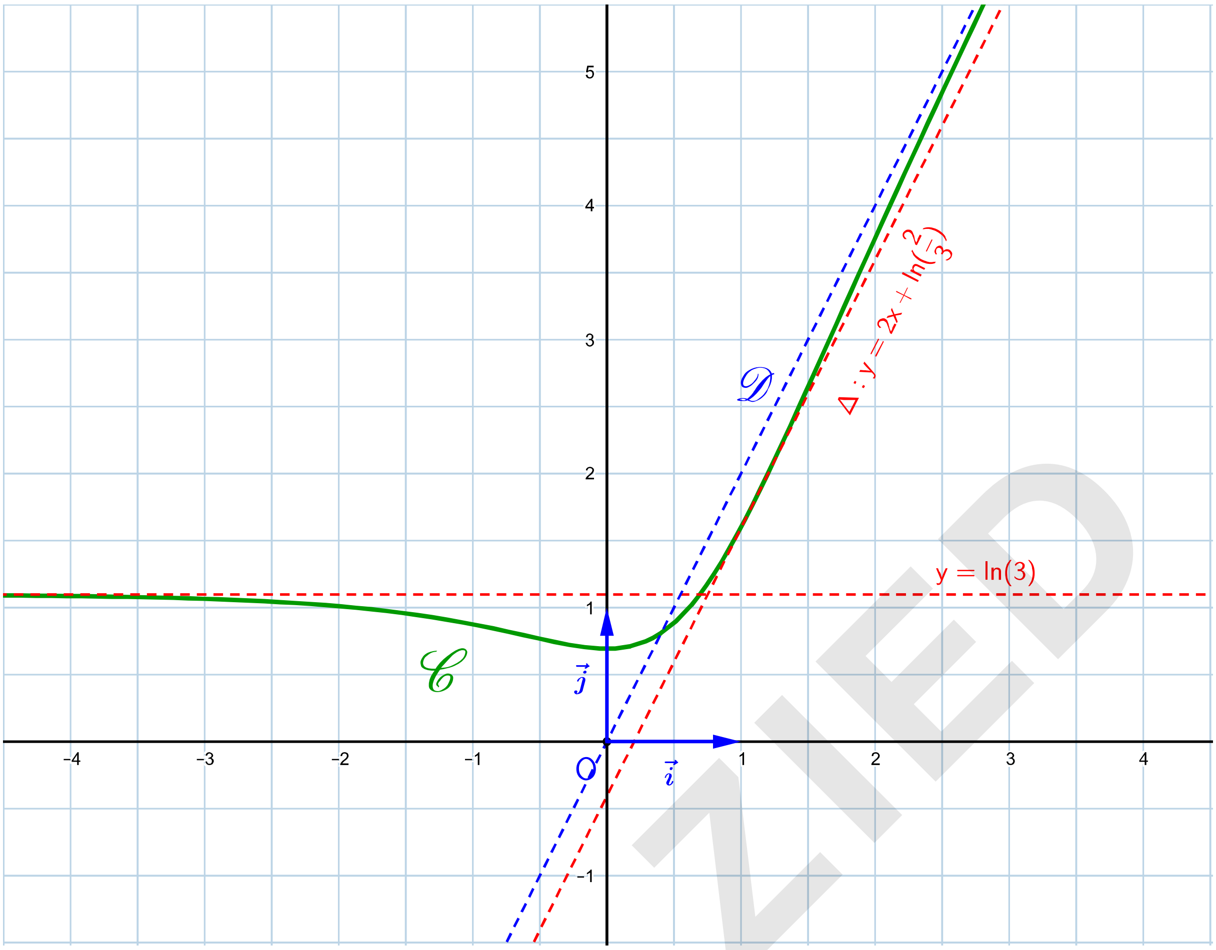
$\Leftrightarrow e^{-x} \geq \frac{2}{3} \Leftrightarrow -x \geq \ln\left(\frac{2}{3}\right) \Leftrightarrow x \leq \ln\left(\frac{3}{2}\right)$

x	$-\infty$		$\ln\left(\frac{3}{2}\right)$		$+\infty$
$f(x)-2x$		$+$	0	$-$	
Position relative		$\mathscr{C}$ est au-dessus de $\mathscr{D}$		$\mathscr{C}$ est au-dessous de $\mathscr{D}$	

4) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $f'(x) = \dfrac{2e^{2x} - 2e^x}{e^{2x} - 2e^x + 3} = \dfrac{2e^x(e^x - 1)}{e^{2x} - 2e^x + 3}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	
f	$\ln 3$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

5) $\Delta : y = f'(\ln 3)(x - \ln 3) + f(\ln 3) = 2(x - \ln 3) + \ln 6 = 2x + \ln 6 - 2\ln 3 = 2x + \ln\left(\frac{6}{9}\right) = 2x + \ln\left(\frac{2}{3}\right)$



Exercice 10

Partie A

1) $g'(x) = e^x - 1$

$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
g	$0 \nearrow +\infty$

2) D'après le tableau de variation de g on conclut que $g(x) \geq 0$ pour tout réel x

3) On a pour $x \in [0,+\infty[$, $g(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x - x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x - x \geq 1$ ou encore $e^x - x > 0$ pour tout $x \in [0,+\infty[$

Partie B

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x - 1}{e^x - x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1 - e^{-x}}{1 - x e^{-x}} = 1$ donc la droite d'équation $y = 1$ est une asymptote horizontale à $\mathscr{C}$ aux voisinages de $+\infty$

2) La fonction f est strictement croissante sur $[0,1]$ donc $f([0,1]) = [f(0), f(1)] = [0,1]$

3) a) $f(x) - x = \dfrac{e^x - 1}{e^x - x} - x = \dfrac{e^x - 1 - x e^x + x^2}{e^x - x}$

d'autre part on a pour tout $x \in [0,1]$:

$$\frac{(1-x)g(x)}{e^x - x} = \frac{(1-x)(e^x - x - 1)}{e^x - x} = \frac{e^x - x - 1 - x e^x + x^2 + x}{e^x - x} = \frac{e^x - 1 - x e^x + x^2}{e^x - x} = f(x) - x$$

b) $f(x) - x > 0$ donc $\mathscr{C}$ est au-dessus de $\mathscr{D}$ sur $[0,1]$

Exercice 11

1) a) $f(0) = 20 - 3 = 17$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 20 - 3e^{0,05x} = -\infty$

e) La fonction $x \mapsto e^{0,05x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $[0,+\infty[$ et on a :

$$f'(x) = -3\times 0,05\,e^{0,05x} = -0,15\,e^{0,05x}$$

f)

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
f	17 ↘	$-\infty$

g) $f(x)=0 \Leftrightarrow 20-3e^{0,05x}=0 \Leftrightarrow 20=3e^{0,05x} \Leftrightarrow e^{0,05x}=\dfrac{20}{3}$

$$\Leftrightarrow 0,05x=\ln\frac{20}{3}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{1}{0,05}\ln\frac{20}{3}$$

$$S_{\mathbb{R}}=\left\{20\ln\frac{20}{3}\right\}$$

2) a) La rupture de stock signifie $f(n)=0$ donc le nombre maximum de mois avant la rupture de stock est le plus grand entier naturel inférieur ou égal à $20\ln\dfrac{20}{3}\simeq 37,94$ c'est-à-dire 37 mois

b) 37 mois correspondent à Janvier 2011, donc le mois de rupture de stock est Février 2011

Exercice 12

Partie A

1) $\mathscr{C}$ passe par le point $E(0,1)$ donc $f(0)=1$

$\mathscr{C}$ admet au point d'abscisse 0 une tangente horizontale donc $f'(0)=0$

2) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=a\,e^{-x}-(ax+b)e^{-x}=(-a\,x+a-b)e^{-x}$

3) $f(0)=b=1$ et $f'(0)=(a-b)=a-1=0$ donc $a=1$

Partie B

1) a) $f'(x)=-x\,e^{-x}$

b)

x	0	4
$f'(x)$	$-$	
f	1 ↘	$5e^{-4}$

2) $\to$ La fonction f est continue et strictement décroissante sur $[0,4]$

$\to$ $f(0)=1$ et $f(4)=5e^{-4}\simeq 0.09$ donc $f(0)\le 0.5\le f(4)$

$\Rightarrow$ L'équation $f(x)=0,5$ possède une unique solution α dans l'intervalle $[0,4]$

$$\left.\begin{array}{l} f(1.678)\simeq 0.5001 \\ f(1.679)\simeq 0.4998 \end{array}\right\} \text{ donc } 1.678\le\alpha\le 1.679$$

Partie C

1) La production de 2000 pièce par jours coûte $2000\times f(2)=6000\,e^{-2}\simeq 812$ dinars

2) $f(q)\le 0.5 \Leftrightarrow q\ge\alpha \Leftrightarrow q>1.678$

A partir de 1679 de pièces produites le prix de revient d'une pièce est inférieur à 0.5 DT

Chapitre 05

Calcul intégral

Rappel de cours

Intégral d'une fonction continue

- L'intégrale de a à b d'une fonction f continue sur un intervalle I contenant a et b est le réel $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ avec F est une primitive de f sur I

Propriétés

Soit f est g deux fonctions continues sur un intervalle I contenant a et b :

- $\int_a^a f(x)dx = 0$ et $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$
- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
- $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$
- Si $f(x) \leq g(x)$ et $a < b$ sur I alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$
- Si f est paire alors $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$
- Si f est impaire alors $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$

Inégalité de la moyenne – Théorème de la moyenne

- La valeur moyenne de f sur $[a,b]$ est $\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$
- Si f est une fonction continue sur $[a,b]$ et s'il existe deux réels m et M tel que $m \leq f(x) \leq M$ pour tout $x \in [a,b]$ alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$
- Si f est continue sur $[a,b]$ alors il existe un réel c dans $[a,b]$ tel que $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

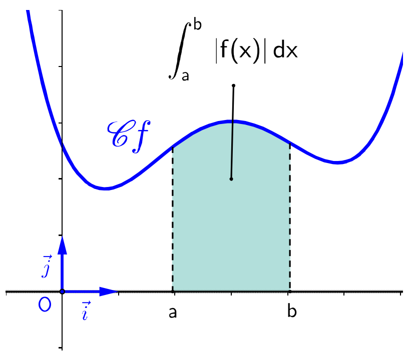
Intégration par partie

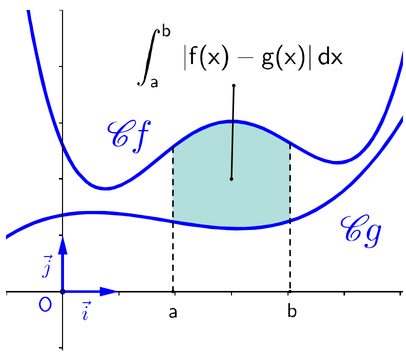
- Si u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I contenant a et b telle que leurs dérivées soient continues sur I alors on a : $\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$

Aires planes

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$

- L'unité d'aire (u.a) est l'aire du rectangle de dimension $\|\vec{i}\|$ et $\|\vec{j}\|$
- Si f est continue sur $[a,b]$ alors l'aire de la partie délimité par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à $\int_a^b |f(x)|dx$ (u.a.)
- Si f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ alors l'aire de la partie du plan délimité par les courbes de f et g et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à $\int_a^b |f(x) - g(x)|dx$ (u.a.)





Attention !

- Ne pas croire que si f est une fonction positive alors $\int_a^b f(x)dx$ est positif : il faut vérifier que $a \leq b$
- Ne pas utiliser «Si $f(x) \leq g(x)$ alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$ » sans avoir vérifié en premier lieu que $a \leq b$
- Ne pas croire que $\int_a^b |f(x)|dx = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$: cette égalité n'est vraie que si $f(x)$ garde un signe constant sur l'intervalle $[a,b]$

Les exercices

Exercice 1

Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx\ ,\ \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx\ ,\ \int_1^e (x\ln x)\,dx\ ,\ \int_0^1 (x^2+3x-1)e^{3x}dx \text{ et } \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^{2x}}{e^x-1}dx$$

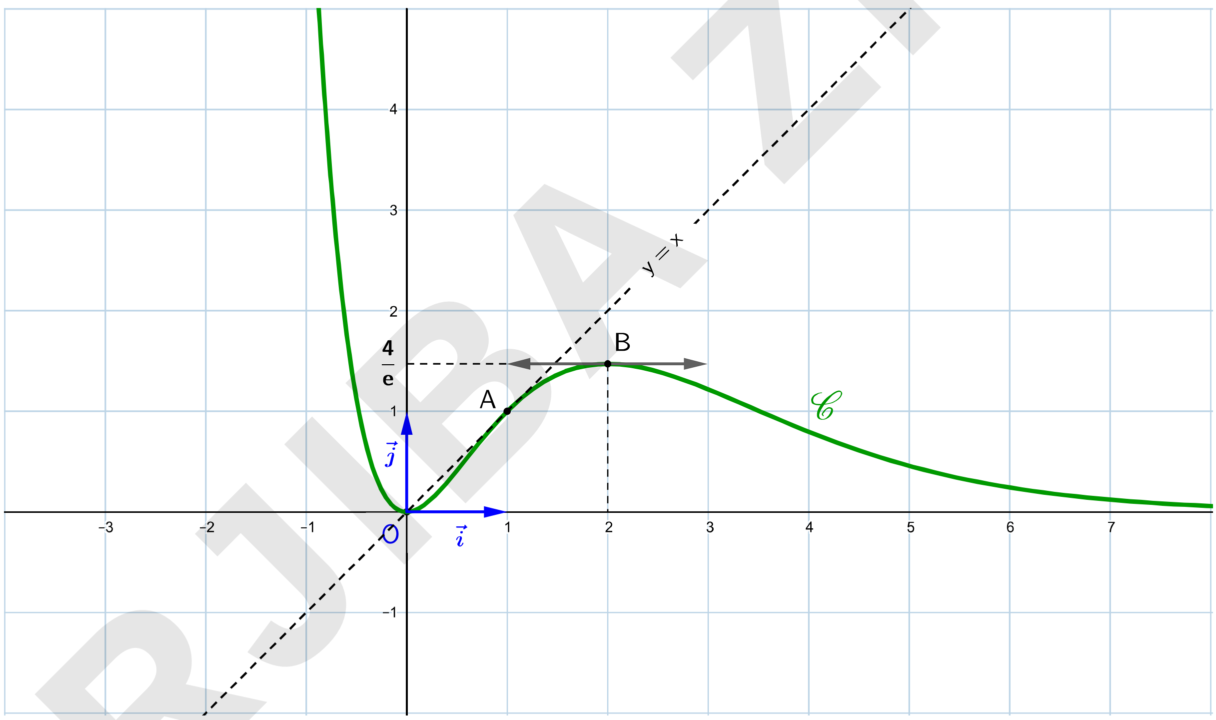
Exercice 2

Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ et $g(x)=\dfrac{x^3}{1+x^2}$

1) Calculer $J=\int_0^1 f(x)\,dx$
2) Soit $K=\int_0^1 g(x)\,dx$ calculer $J+K$ et en déduire la valeur de K

Exercice 3 BAC [session principale 2010]

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous est celle d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$



- La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point $A(1,1)$ a pour équation $y=x$
- La courbe $\mathscr{C}$ admet seulement deux tangentes horizontales, l'une à l'origine et l'autre au point $B\left(2,\dfrac{4}{e}\right)$
- $\mathscr{C}$ admet au voisinage de $-\infty$ une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées
- La droite d'équation $y=0$ est une asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$

1) Par lecture graphique :
   a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$
   b) Déterminer les réels x vérifiant $f(x)<x$
2) Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=-(x+1)e^{1-x}$ et $I=\int_0^2 x\,e^{1-x}\,dx$. Calculer $F'(x)$ et en déduire la valeur de I
3) On admet que l'expression de la fonction f est $f(x)=x^2e^{1-x}$. On désigne par $\mathscr{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=2$

a) En utilisant une intégration par parties, montrer que $\mathscr{A} = -\dfrac{4}{e} + 2I$

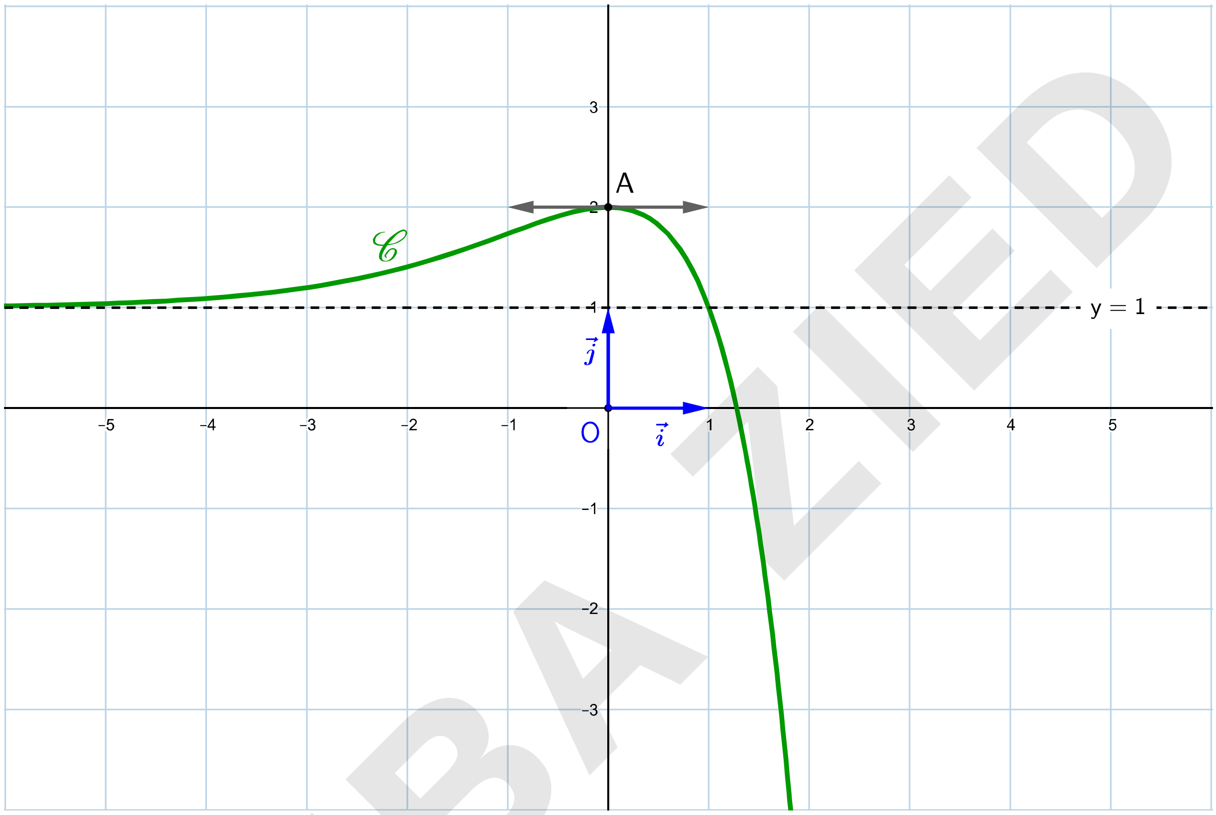
b) En déduire une valeur approchée de $\mathscr{A}$ par excès à 10^{-2} près

Exercice 4 BAC [session de contrôle 2011]

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous est celle d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

- La courbe $\mathscr{C}$ admet une tangente horizontale au point $A(0,2)$
- La droite d'équation $y = 1$ est une asymptote horizontale à $\mathscr{C}$ au voisinage de $-\infty$
- $\mathscr{C}$ admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées



1) En utilisant le graphique et les données ci-dessus :
   a) Déterminer $f(0)$, $f'(0)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
   b) Dresser le tableau de variation de f
   c) Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α comprise entre 1 et 2
2) On suppose dans la suite que f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 + (1-x)e^x$
   a) Vérifier que $e^\alpha = \dfrac{1}{\alpha - 1}$
   b) On pose $I = \int_0^\alpha x e^x \, dx$, à l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I = 2$
   c) Soit $\mathscr{A}$ l'aire de la partie du plan limité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.

   Montrer que $\mathscr{A} = \dfrac{(\alpha-2)^2}{\alpha - 1}$

Exercice 5

On considère les intégrales $I = \int_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$, $J = \int_0^1 \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} dx$ et $K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}\,dx$

1) Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+2}\right)$
   a) Calculer la dérivée de la fonction f
   b) Calculer la valeur de I
2) a) Sans calculer explicitement J et K, vérifier que $J + 2I = K$
   a) A l'aide d'une intégration par partie portant sur l'intégrale K, montrer que $K = \sqrt{3} - J$
   b) En déduire la valeur de J et de K

Exercice 6

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)$

1) a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$

   b) En déduire la valeur de l'intégrale $K=\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$

2) On pose : $J=\int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}}dx$

   a) Démontrer que l'on a $J=\int_0^2 \sqrt{x^2+4}\,dx-4K$

   b) Calculer J à l'aide d'une intégration par parties.

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(2-x)e^x-2$. On appelle $\mathscr{C}$ la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$
2) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f
3) a) Etablir que l'équation $f(x)=0$ possède deux solutions, 0 et une autre notée $\alpha\in\left]1,2\right[$

   b) Préciser le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x
4) a) A l'aide d'une intégration par parties calculer $I_1=\int_0^1 (2-x)e^x dx$

   b) Donner une interprétation graphique de $I=\int_0^1 (2-x)e^x-2\,dx$ et puis calculer I
5) Tracer $\mathscr{C}$ (On prendra pour unité graphique 2 cm)
6) Calculer l'aire $\mathscr{A}$ en cm^2 du domaine limité par la courbe $\mathscr{C}$, la droite $D: y=-2$ et les droites d'équation $x=-1$ et $x=0$

Exercice 8

On considère les fonctions f et g définies sur $\left[0,+\infty\right[$ par : $f(x)=\ln(1+x)$ et $g(x)=\frac{2x}{x+2}$ et on note $\mathscr{C}$ la courbe de f et Γ celle de g dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) a) Etudier le sens de variation de la fonction h définie sur $\left[0,+\infty\right[$ par $h(x)=f(x)-g(x)$

   b) En déduire que pour tout réel x de $\left[0,+\infty\right[$, on a $\frac{2x}{x+2}\le\ln(x+1)$

   c) Etudier les variations des fonctions f et g

   d) Tracer les courbes $\mathscr{C}$ et Γ dans le même repère.

   e) Montrer que les courbes $\mathscr{C}$ et Γ admettent en O une même tangente D que l'on tracera
2) a) Vérifier que pour $x\neq-1$ on a $\frac{x}{1+x}=1-\frac{1}{1+x}$

   b) A l'aide d'une intégration par partie, calculer $I=\int_0^1 \ln(1+x)dx$

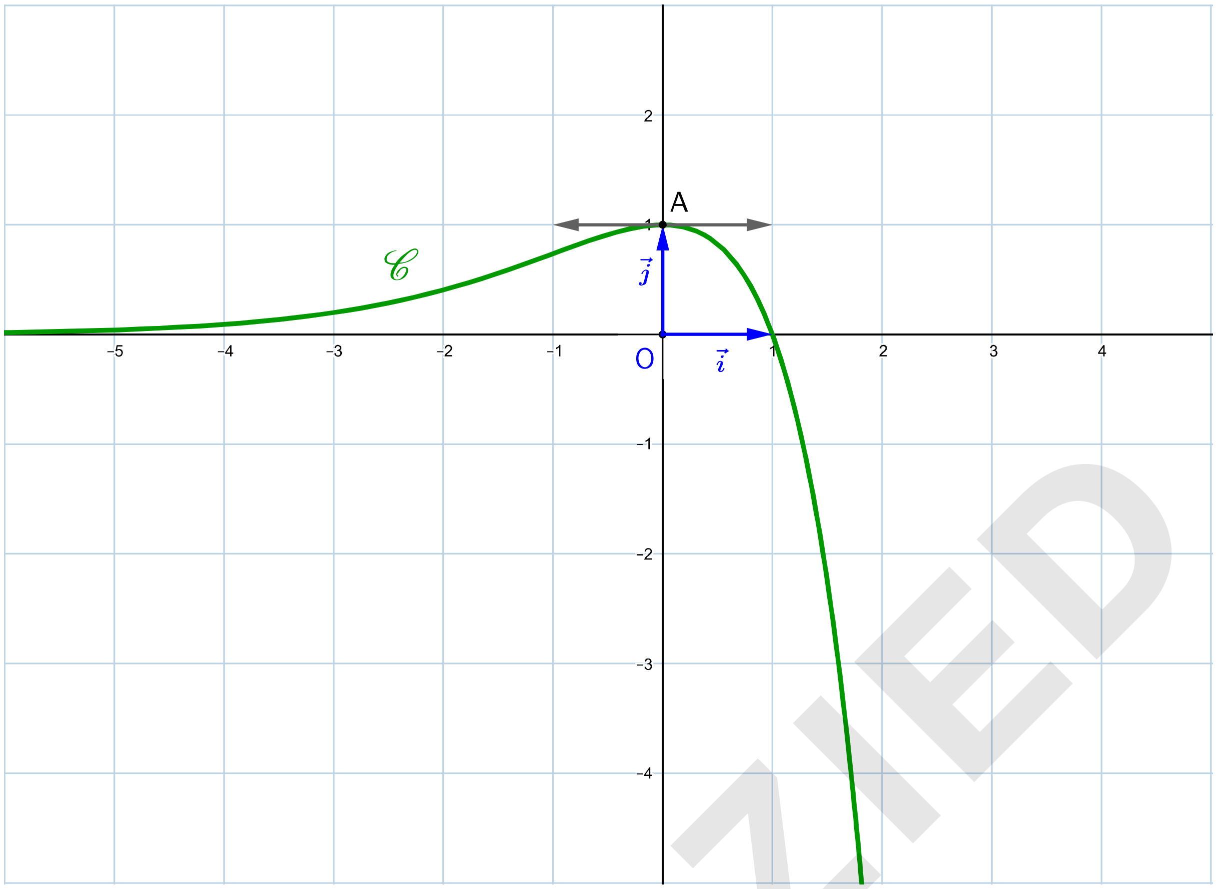
   c) En déduire le calcul de $J=\int_0^1 (x-\ln(1+x))dx$
3) a) Déterminer les réels a et b tels que pour tout $x\neq-2$ on a $\frac{2x}{x+2}=a+\frac{b}{x+2}$

   b) En déduire le calcul de $K=\int_0^1\left(\ln(1+x)-\frac{2x}{x+2}\right)dx$

   c) Interpréter géométriquement les valeurs des intégrales J et K en utilisant les courbes $\mathscr{C}$, Γ et la droite D

Exercice 9

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous est celle d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(ax+b)e^x$ où a et b sont deux réels. On sait que $\mathscr{C}$ passe par le point $A(0,1)$ et qu'elle admet au point d'abscisse 0 une tangente horizontale



1) Par lecture graphique :
   a) Déterminer $f(0)$ et $f'(0)$
   b) Vérifier que $f'(x) = (ax + a + b)e^x$ et en déduire la valeur de a et celle de b

Pour la suite, on admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1 - x)e^x$

2) a) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$
   b) Dresser le tableau de variation de f
3) Soit $I = \int_0^1 x e^x \, dx$
   a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I = 1$
   b) Soit $\mathscr{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées .
   Montrer que $\mathscr{A} = e - 2$

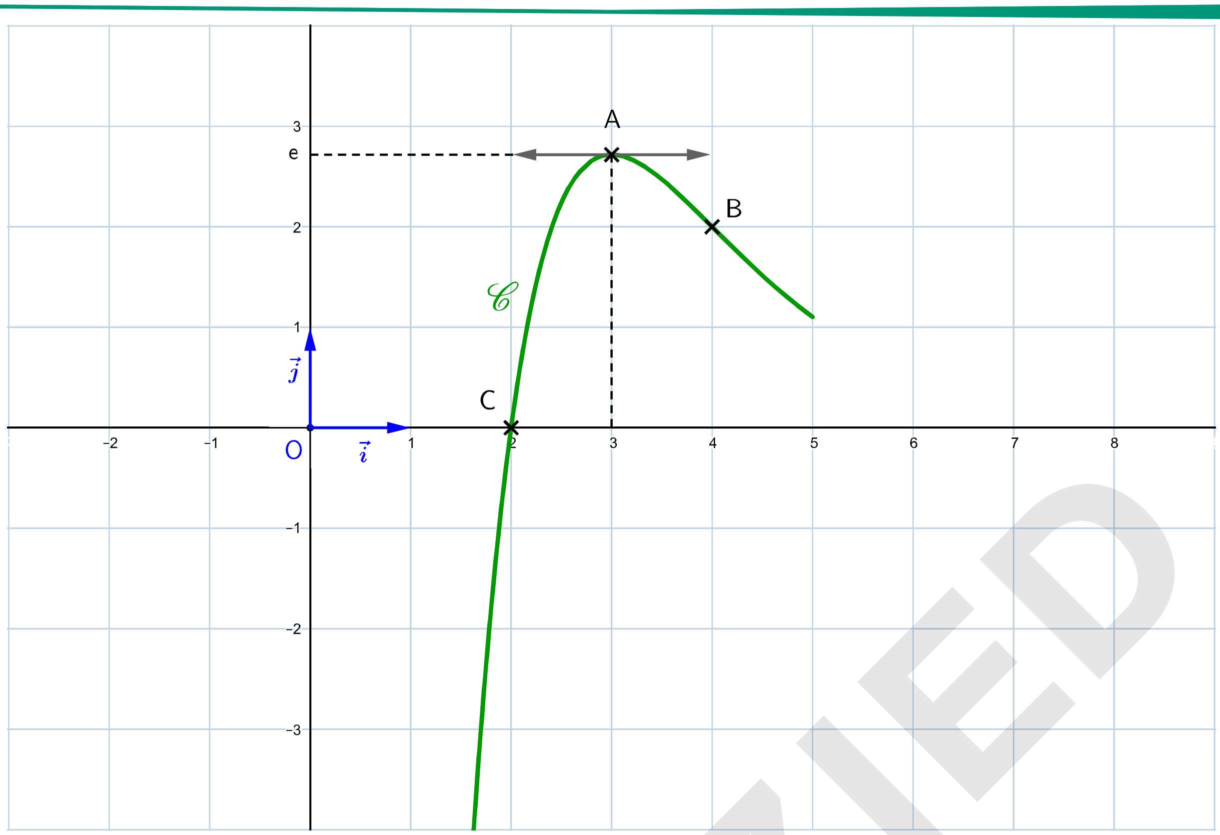
Exercice 10 BAC [session principale 2011]

Une entreprise de fabrication de produits pharmaceutiques vend chaque journée un article en quantité x exprimé en centaines. Pour des raisons techniques et commerciales, le nombre d'unités fabriquées et vendues de cet article est compris entre 150 et 500 (x est donc compris entre 1,5 et 5)

$(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé du plan. Le graphique ci-dessous représente une fonction f définie et dérivable sur $[1.5, 5]$ qui modélise le solde journalier (bénéfice ou perte), en milliers de dinars, réalisé par cette entreprise.

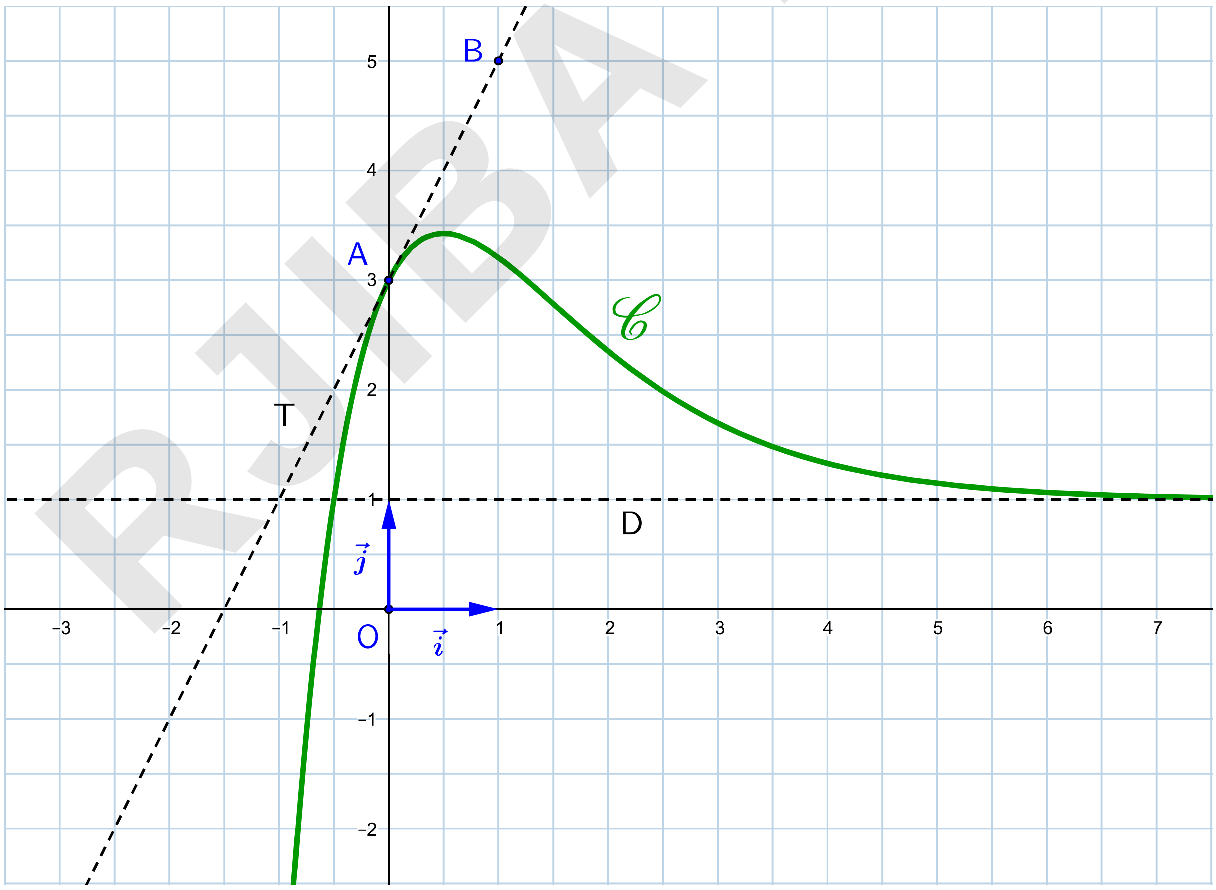
La courbe de f passe par les points $A(3, e)$, $B(4, 2)$ et $C(2, 0)$

1) Utiliser le graphique ci-dessous pour déterminer :
   a) Le solde journalier réalisé sur la vente de 400 unités
   b) La quantité journalière fabriquée et vendue pour réaliser un bénéfice maximum
   c) La quantité journalière fabriquée et vendue à partir de laquelle l'entreprise ne vend pas à perte
2) On suppose, dans la suite, que pour tout réel x de l'intervalle $[1.5, 5]$, $f(x) = (ax + b)e^{-x+4}$ où a et b sont deux réels
   a) Justifier que les réels a et b vérifient le système $\begin{cases} 4a + b = 2 \\ 2a + b = 0 \end{cases}$
   b) Déterminer alors a et b
   c) Prouver que le solde moyen en milliers de dinars, réalisé en une journée est $S_m = \frac{2}{7}\left(\frac{e^{\frac{5}{2}}}{2} - \frac{4}{e}\right)$ et en donner une valeur approchée à 10^{-3} près



Exercice 11

La courbe $\mathscr{C}$ tracée ci-dessous est la représentation d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' la fonction dérivée de f



- La tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point $A(0,3)$ passe par le point $B(1,5)$
- La droite D d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$

1) En utilisant les données et le graphique, préciser :
   a) La valeur du réel $f(0)$ et la valeur du réel $f'(0)$

b) La limite de la fonction f en $+\infty$

2) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point A

3) Préciser un encadrement par deux entiers consécutifs de l'aire $\mathscr{A}$, en unités d'aire, de la partie du plan située entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$

4) On admet que la fonction f est définie, pour tout nombre réel x, par une expression de la forme $f(x) = 1 + \dfrac{ax+b}{e^x}$, où a et b sont des nombres réels

a) Déterminer l'expression de $f'(x)$ en fonction de a, de b et de x

b) À l'aide des résultats de la question 1) a), démontrer que l'on a, pour tout réel x, $f(x) = 1 + \dfrac{4x+2}{e^x}$

5) Soit F la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = x + \dfrac{-4x-6}{e^x}$. On admet que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. Déterminer la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-2} près de l'aire $\mathscr{A}$, en unités d'aire, de la partie du plan située entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$. Ce résultat est-il cohérent avec l'encadrement obtenu à la question 3?

Correction des exercices

Exercice 1

$$\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx=\int_1^e \frac{1}{x}\ln^2 x dx = \left[\frac{1}{3}\ln^3 x\right]_1^e = \frac{1}{3}$$

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx = -\frac{1}{3}\int_0^1 -3x\sqrt{1-x^2}dx = -\frac{1}{3}\left[(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\int_1^e (x\ln x)dx = \left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{2}x\,dx = \frac{e^2}{2} - \left[\frac{1}{4}x^2\right]_1^e = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 (x^2+3x-1)e^{3x}dx &= \left[\frac{1}{3}(x^2+3x-1)e^{3x}\right]_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 (2x+3)e^{3x}dx \\ &= e^3 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}(2x+3)e^{3x}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{2}{9}e^{3x}dx \\ &= e^3 + \frac{1}{3} - \frac{5}{9}e^3 + \frac{1}{3} + \left[\frac{2}{27}e^{3x}\right]_0^1 \\ &= \frac{4}{9}e^3 + \frac{2}{3} + \frac{2}{27}e^3 - \frac{2}{27} \\ &= \frac{14e^3+16}{27}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^{2x}}{e^x-1}dx &= \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{(e^x+1)(e^x-1)+1}{(e^x-1)}dx \\ &= \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{(e^x+1)(e^x-1)}{(e^x-1)} + \frac{1}{(e^x-1)}dx \\ &= \int_{\ln 2}^{\ln 3} (e^x+1) + \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}dx \\ &= [e^x+x]_{\ln 2}^{\ln 3} + \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}dx \\ &= 3+\ln 3-2-\ln 2+\left[\ln(1-e^{-x})\right]_{\ln 2}^{\ln 3} \\ &= 1+\ln\left(\frac{3}{2}\right)+\ln\left(\frac{2}{3}\right)-\ln\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= 1+\ln 2\end{aligned}$$

Exercice 2

1) $J = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx = \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2 = \ln\sqrt{2}$

2) $J+K = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx + \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}dx = \int_0^1 \frac{x+x^3}{1+x^2}dx = \int_0^1 x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}$ et par suite $K = \frac{1}{2} - \ln\sqrt{2}$

Exercice 3

1) a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$

b) $f(x) < x \Leftrightarrow x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$

2) $F'(x) = -e^{1-x} + (x+1)e^{1-x} = x\,e^{1-x}$ et par suite $I = F(2) - F(0) = -3e^{-1} + e = e - \frac{3}{e}$

3) a) f est continue et positive sur $[0,2]$ donc $A = \int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 x^2 e^{1-x}\,dx$

On pose $u(x) = x^2$ et $v'(x) = e^{1-x}$ donc $u'(x) = 2x$ et $v(x) = -e^{1-x}$

par suite : $A = [-x^2 e^{1-x}]_0^2 - \int_0^2 -2x\,e^{1-x}\,dx = -4e^{-1} + 2I$

b) $A = -4e^{-1} + 2I = 2e - \frac{10}{e} \simeq 1{,}76$

Exercice 4

1) a) On a, d'après le graphique, $f(0)=2$, $f'(0)=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

b)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

c) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et (C) coupe l'axe des abscisses en un point unique d'abscisse comprise entre 1 et 2 donc l'équation $f(x)=0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α comprise entre 1 et 2.

2) $f(x)=1+(1-x)e^x$

a) On a $f(\alpha)=0 \Leftrightarrow 1+(1-\alpha)e^\alpha=0 \Leftrightarrow (\alpha-1)e^\alpha=1 \Leftrightarrow e^\alpha=\dfrac{1}{\alpha-1}$

b) $u(x)=x \qquad u'(x)=1$

$v'(x)=e^x \qquad v(x)=e^x$

$$I=\int_0^\alpha x\,e^x\,dx=\left[x\,e^x\right]_0^\alpha-\int_0^\alpha e^x\,dx=\alpha\,e^\alpha-\left[e^x\right]_0^\alpha=\alpha\,e^\alpha-e^\alpha+1=(\alpha-1)e^\alpha+1$$

Or $e^\alpha=\dfrac{1}{\alpha-1}$ donc $I=(\alpha-1)e^\alpha+1=(\alpha-1)\dfrac{1}{(\alpha-1)}+1=1+1=2$

c) Soit A l'aire de la partie du plan limité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.

$$A=\int_0^\alpha f(x)dx=\int_0^\alpha\left(1+(1-x)e^x\right)dx=\int_0^\alpha\left(1+e^x-xe^x\right)dx$$
$$=\int_0^\alpha dx+\int_0^\alpha e^x dx-\int_0^\alpha xe^x dx$$
$$=[x]_0^\alpha+\left[e^x\right]_0^\alpha-I$$
$$=\alpha+e^\alpha-1-2$$
$$=\alpha+e^\alpha-3$$
$$=\alpha+\frac{1}{\alpha-1}-3$$
$$=\frac{\alpha^2-\alpha}{\alpha-1}+\frac{1}{\alpha-1}+\frac{-3\alpha+3}{\alpha-1}$$
$$=\frac{\alpha^2-4\alpha+4}{\alpha-1}$$
$$=\frac{(\alpha-2)^2}{\alpha-1}$$

Exercice 5

1) $$f'(x)=\frac{1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+2}}}{x+\sqrt{x^2+2}}=\frac{\dfrac{x+\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{x^2+2}}}{x+\sqrt{x^2+2}}=\frac{x+\sqrt{x^2+2}}{\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)\sqrt{x^2+2}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}$$

donc $I=\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}=\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)\right]_0^1=\ln\left(1+\sqrt{3}\right)-\ln\left(\sqrt{2}\right)=\ln\left(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$

2) $J+2I=\displaystyle\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx+2\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}=\int_0^1\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+2}}dx=\int_0^1\sqrt{x^2+2}\,dx=K$

Posons $u(x)=\sqrt{x^2+2}$ et $v'(x)=1$ on aura $u'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}$ et $v(x)=x$ donc :

$$K=\int_0^1\sqrt{x^2+2}\,dx=\left[x\sqrt{x^2+2}\right]_0^1-\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx=\sqrt{3}-\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx=\sqrt{3}-J$$

On a donc $K=J+2I=\sqrt{3}-J$ et par suite $2J=\sqrt{3}-2I$ ou encore $J=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-I=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$

$$K=\sqrt{3}-J=\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}+\ln\left(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}+\ln\left(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$$

Exercice 6

1) $x^2 < x^2+4 \Leftrightarrow |x| < \sqrt{x^2+4} \Leftrightarrow -\sqrt{x^2+4} < x < \sqrt{x^2+4} \Leftrightarrow 0 < x+\sqrt{x^2+4} < 2\sqrt{x^2+4}$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $x+\sqrt{x^2+4} > 0$ et comme $x \mapsto x+\sqrt{x^2+4}$ est une fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions qui le sont alors f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$f'(x) = \frac{1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+4}}}{x+\sqrt{x^2+4}} = \frac{x+\sqrt{x^2+4}}{\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)\sqrt{x^2+4}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$$

$$K = \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}} = \left[f(x)\right]_0^2 = f(2)-f(0) = \ln\left(2+2\sqrt{2}\right) - \ln 2 = \ln\left(1+\sqrt{2}\right)$$

2) $J+4K = \int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}}dx + 4K = \int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}}dx + \int_0^2 \frac{4}{\sqrt{x^2+4}}dx = \int_0^2 \frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+4}}dx = \int_0^2 \sqrt{x^2+4}\,dx$

On pose $u(x) = \sqrt{x^2+4}$ et $v'(x) = 1$. On aura $u'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$ et $v(x) = x$

par suite : $\int_0^2 \sqrt{x^2+4}\,dx = \left[x\sqrt{x^2+4}\right]_0^2 - \int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}}dx = 4\sqrt{2} - J$

donc $2J = 4\sqrt{2} - 4K = 4\sqrt{2} - 4\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$ et enfin $J = 2\sqrt{2} - 2\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$

Exercice 7

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2e^x - xe^x - 2 = -2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (2-x)e^x - 2 = -\infty$

2) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme étant produit de fonctions qui le sont et on a :

$$f'(x) = -e^x + (2-x)e^x = (1-x)e^x$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	-2	$\nearrow$	$e-2$	$\searrow$	$-\infty$

3) f est continue, strictement croissante et change de signe sur $]-\infty,1]$ donc elle s'annule une seul fois sur $]-\infty,1]$ à savoir $f(0) = 2e^0 - 2 = 0$

f est continue, strictement croissante et change de signe sur $]1,+\infty[$ donc l'équation $f(x) = 0$ possède une solution unique $\alpha \in]1,+\infty[$. $f(1) = e-2 > 0$ et $f(2) = -2 < 0$ donc $\alpha \in]1,2[$

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

4) On pose $u(x) = 2-x$ et $v'(x) = e^x$ on aura donc $u'(x) = -1$ et $v(x) = e^x$ donc :

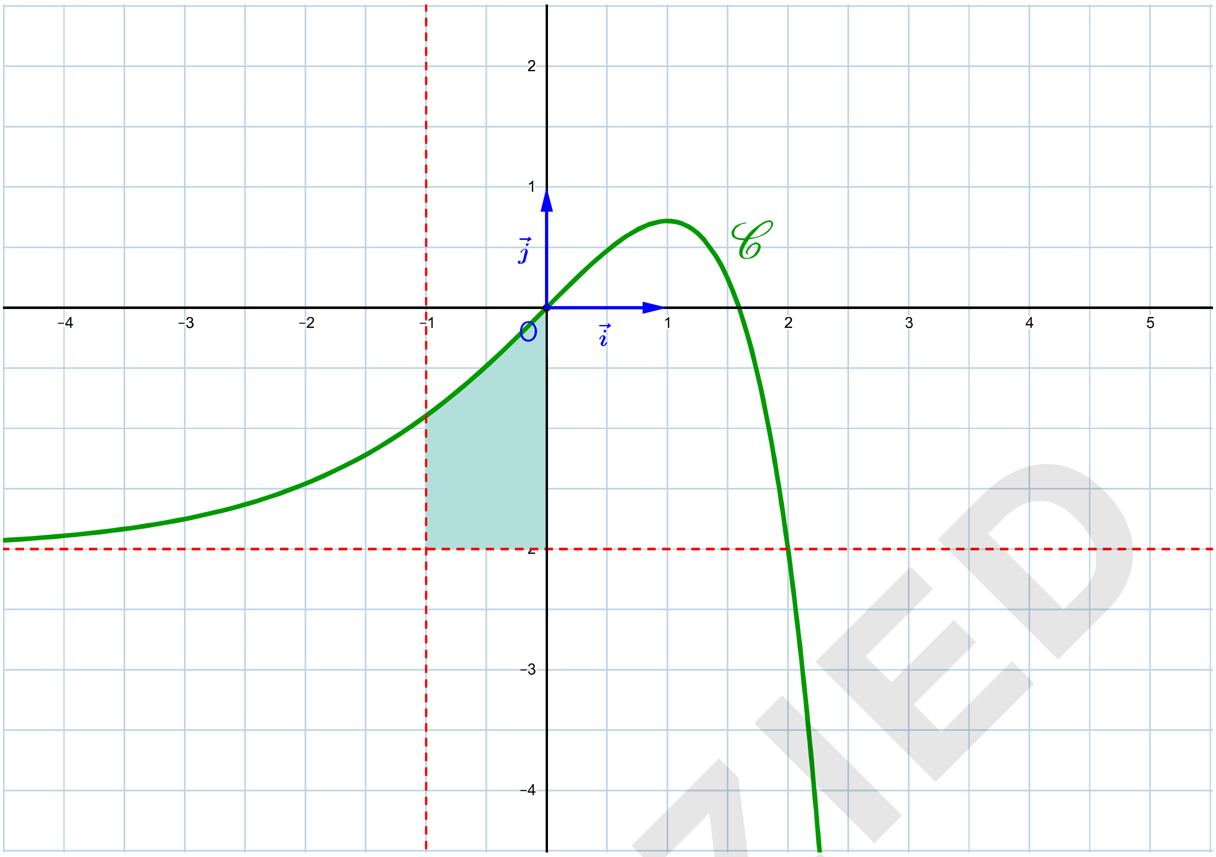
$$\int_0^1 (2-x)e^x dx = \left[(2-x)e^x\right]_0^1 - \int_0^1 -e^x\,dx = e-2+\left[e^x\right]_0^1 = e-2+e-1 = 2e-3$$

$I = \int_0^1 (2-x)e^x - 2dx$ est l'aire de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe de f et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$

$$I = \int_0^1 (2-x)e^x - 2dx = \int_0^1 (2-x)e^x dx - \int_0^1 2dx$$

$$= 2e-3-\left[2x\right]_0^1$$

$$= 2e-5$$



6) $A = \int_{-1}^{0} |f(x) - (-2)| dx = \int_{-1}^{0} |(2-x)e^x| dx$

$$= \int_{-1}^{0} (2-x)e^x dx$$
$$= \left[(2-x)e^x\right]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} -e^x \, dx$$
$$= 2 - 3e^{-1} + \left[e^x\right]_{-1}^{0}$$
$$= -3e^{-1} + 1 - e^{-1}$$
$$= 3 - 4e^{-1}$$

Exercice 8

1) La fonction h est dérivable sur $[0,+\infty[$ comme somme et composée de fonctions qui le sont et on a :

$$h'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{2(x+2)-2x}{(x+2)^2} = \frac{1}{1+x} - \frac{4}{(x+2)^2} = \frac{(x+2)^2 - 4 - 4x}{(1+x)(x+2)} = \frac{x^2}{(1+x)(x+2)} \geq 0$$

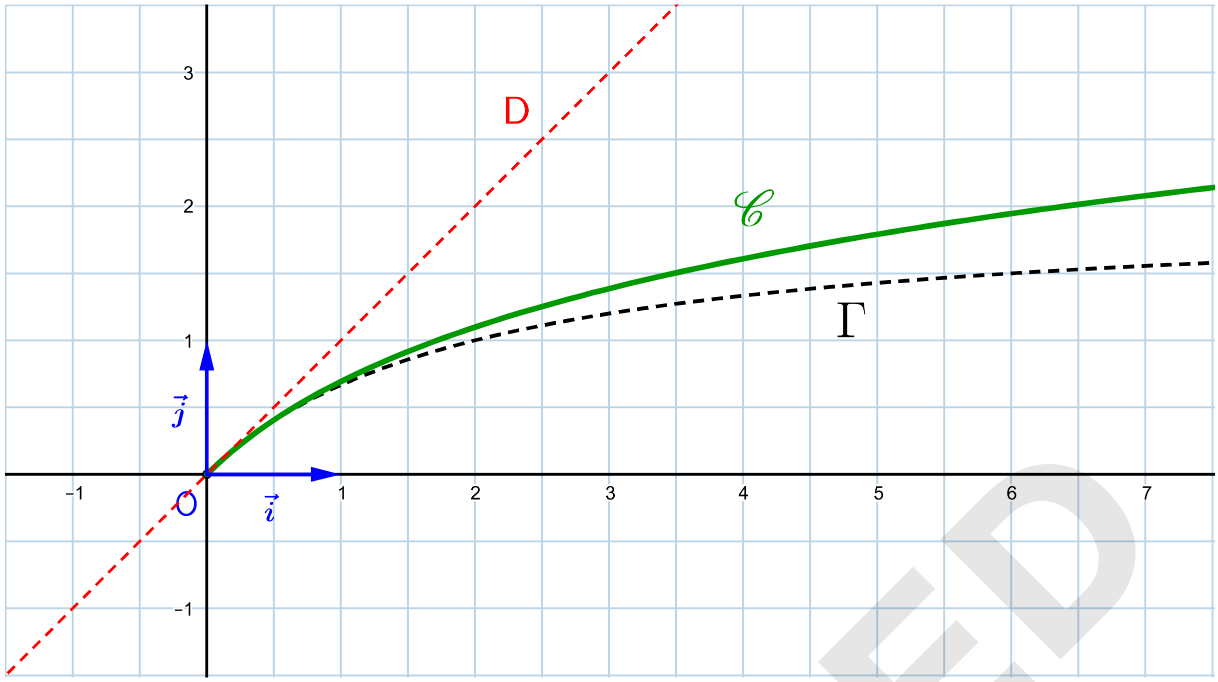
donc h est croissante sur $[0,+\infty[$ et par suite pour tout $x \in [0,+\infty[$ on a :

$$h(0) \leq h(x) \Leftrightarrow 0 \leq f(x) - g(x) \Leftrightarrow g(x) \leq f(x) \Leftrightarrow \frac{2x}{x+2} \leq \ln(1+x)$$

Les fonctions f et g sont dérivables sur $[0,+\infty[$ comme composées et quotients de fonctions qui le sont et on a :

$f'(x) = \frac{1}{1+x} > 0$ et $g'(x) = \frac{4}{(x+2)^2} > 0$ donc f et g sont croissantes sur $[0,+\infty[$

$f'(0) = 1 = g'(0)$ et $f(0) = g(0) = 0$ donc $\mathscr{C}$ et Γ admettent une même tangente D au point d'abscisse 0 et on a : D : y = x



2) Pour $x \neq -1$ on a $1-\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{1+x-1}{1+x}=\dfrac{x}{1+x}$

On pose $u(x)=\ln(1+x)$ et $v'(x)=1$, on aura donc $u'(x)=\dfrac{1}{1+x}$ et $v(x)=x$ et par suite

$$I=\int_0^1 \ln(1+x)\,dx=\left[x\ln(1+x)\right]_0^1=\ln 2-\int_0^1 \frac{x}{1+x}dx=\ln 2-\int_0^1 1-\frac{1}{1+x}dx=\ln 2-\left[x-\ln(1+x)\right]_0^1$$
$$=\ln 2-(1-\ln 2)=2\ln 2-1$$

$$J=\int_0^1 x-\ln(1+x)\,dx=\int_0^1 x\,dx-I=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1-2\ln 2+1=\frac{3}{2}-2\ln 2$$

3) On a pour tout $x \neq -2$, $a+\dfrac{b}{x+2}=\dfrac{ax+2a+b}{x+2}=\dfrac{2x}{x+2}$ donc $a=2$ et $b=-4$

$$K=\int_0^1 \ln(1+x)-\frac{2x}{x+2}dx=\int_0^1 \ln(1+x)\,dx-\int_0^1 \frac{2x}{x+2}dx$$
$$=I-\int_0^1 2-\frac{4}{x+2}dx$$
$$=2\ln 2-1-\left[2x-4\ln(2+x)\right]_0^1$$
$$=2\ln 2-1-(2-4\ln 3)-4\ln 2$$
$$=4\ln 3-2\ln 2-3$$

Exercice 9

1) a) On a, d'après le graphique, $f(0)=1$, $f'(0)=0$

b) On a $f(x)=(ax+b)e^x$ donc $f'(x)=ae^x+(ax+b)e^x=(ax+a+b)e^x$

$f(0)=1=b$ et $f'(0)=a+b$ donc $a=-1$ et $b=1$

2) a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(1-x)e^x=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x-xe^x\right)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x)e^x=-\infty$

b) $f'(x)=-xe^x$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

3) a) $I=\int_0^1 xe^x dx$ $\quad u(x)=x \quad u'(x)=1$

$\quad v'(x)=e^x \quad v(x)=e^x$

$$I=\left[xe^x\right]_0^1-\int_0^1 e^x dx=e-\left[e^x\right]_0^1=e-e+1=1$$

b) $\mathscr{A}=\int_0^1 |f(x)|\,dx=\int_0^1 (1-x)e^x dx=\int_0^1 e^x-xe^x dx=\int_0^1 e^x dx-\int_0^1 e^x dx=\left[e^x\right]_0^1-I=e-1-1=e-2$

Exercice 10

1) a) Le solde journalier réalisé sur la vente de 400 unités est $f(4)=2$
   b) La quantité journalière fabriquée et vendue pour réaliser un bénéfice maximum est 3
   c) La quantité journalière fabriquée et vendue à partir de laquelle l'entreprise ne vend pas à perte est l'antécédent de 0 c'est-à-dire 2

2) $f(x)=(ax+b)e^{-x+4}$
   a) On a $f(2)=0$ donc $(2a+b)e^{2}=0$ ou encore $2a+b=0$ d'autre part on a $f(4)=2$ donc $(4a+b)e^{0}=2$ c'est-à-dire $4a+b=2$ donc a et b vérifient le système $\begin{cases}4a+b=2\\2a+b=0\end{cases}$

   b) $\begin{cases}4a+b=2\\2a+b=0\end{cases}$

   $L_1-L_2 \Rightarrow 2a=2 \Rightarrow a=1$ et par suite $L_1 \Rightarrow 4+b=2$ donc $b=-2$

   $f(x)=(x-2)e^{-x+4}$

   c) Le solde moyen réalisé en une journée est $S_m=\frac{1}{5-1,5}\int_{1,5}^{5}f(t)dt=\frac{2}{7}\int_{1,5}^{5}(t-2)e^{-t+4}dt$

   Utilisons une intégration par partie pour calculer $\int_{1,5}^{5}(t-2)e^{-t+4}dt$:

   $u(t)=t-2 \qquad u'(t)=1$
   $v'(t)=e^{-t+4} \qquad v(t)=-e^{-t+4}$

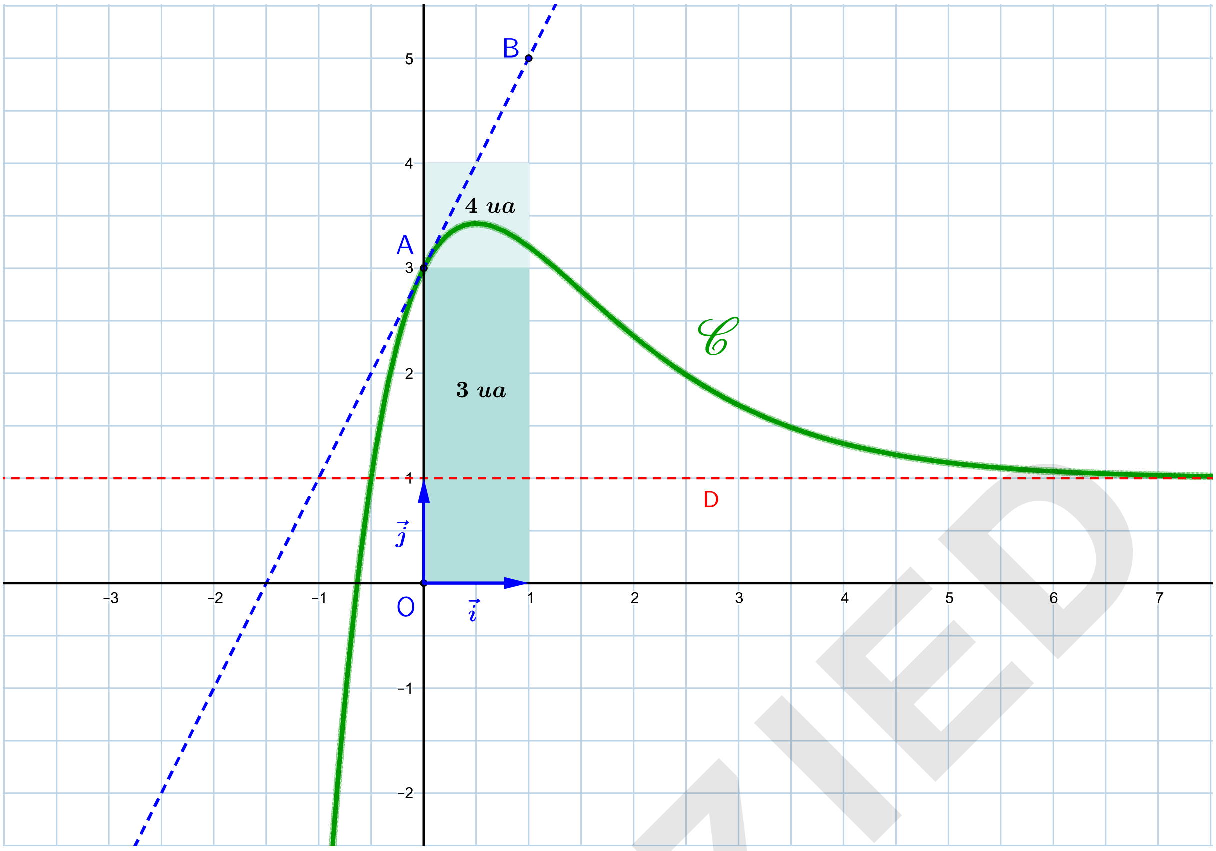
$$\begin{aligned}\int_{1,5}^{5}(t-2)e^{-t+4}dt&=\left[-(t-2)e^{-t+4}\right]_{\frac{3}{2}}^{5}-\int_{\frac{3}{2}}^{5}-e^{-t+4}dt\\&=-3e^{-1}-\frac{1}{2}e^{\frac{5}{2}}-\left[e^{-t+4}\right]_{\frac{3}{2}}^{5}\\&=-3e^{-1}-\frac{1}{2}e^{\frac{5}{2}}-\left(e^{-1}-e^{\frac{5}{2}}\right)\\&=-3e^{-1}-\frac{1}{2}e^{\frac{5}{2}}-e^{-1}+e^{\frac{5}{2}}\\&=-4e^{-1}+\frac{1}{2}e^{\frac{5}{2}}\\&=\frac{1}{2}e^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{e}\end{aligned}$$

   donc $S_m=\frac{2}{7}\left(\frac{1}{2}e^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{e}\right)\approx 1,320$

Exercice 11

1) a) $f(0)=3$ et $f'(0)=2$
   b) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$
2) $T: y=f'(0)x+f(0)=2x+3$
3) $3\le\mathscr{A}\le 4$
4) $f(x)=1+\frac{ax+b}{e^{x}}$
   d) $f'(x)=\frac{ae^{x}-(ax+b)e^{x}}{e^{2x}}=\frac{a-(ax+b)}{e^{x}}=\frac{-ax+a-b}{e^{x}}$
   e) $f(0)=3 \Leftrightarrow 1+b=3$ et $f'(0)=2 \Leftrightarrow a-b=2$ donc $\begin{cases}1+b=3\\a-b=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=2\\a-b=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=2\\a=4\end{cases}$

   donc $f(x)=1+\frac{4x+2}{e^{x}}$
5) $\mathscr{A}=\int_{0}^{1}|f(x)|dx=F(1)-F(0)=1-\frac{10}{e}-(-6)=7-\frac{10}{e}\simeq 3.32$
   On voit clairement que $3\le\mathscr{A}\le 4$


B
A
4 ua
3 ua
$\mathscr{C}$
D
O
$\vec{i}$
$\vec{j}$

Chapitre 06

Suites réelles

Rappel de cours

Suites arithmétiques

- (U_n) est une suite arithmétique s'il existe un réel r tel que pour tout entier naturel n, $U_{n+1} - U_n = r$. Le réel r est appelé la raison de la suite.
- $U_n = U_0 + nr$, pour tout entiers naturel n
- Somme des termes consécutifs $= \dfrac{\text{nombre des termes} \times (\text{premier terme} + \text{dernier terme})}{2}$

  $\rightarrow S = U_0 + U_1 + ... + U_n = \sum_{k=0}^{n} U_k = \dfrac{(n+1)(U_0 + U_n)}{2}$

  $\rightarrow 1 + 2 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$
- Limite de la suite arithmétique définie par $U_n = U_0 + nr$

  $\rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} U_n = U_0$ si $r = 0$

  $\rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$ si $r > 0$

  $\rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} U_n = -\infty$ si $r < 0$

Suites géométriques

- (V_n) est une suite géométrique s'il existe un réel q tel que pour tout entier naturel n, Le réel q est appelé la raison de la suite
- $V_n = q^n V_0$, pour tout entiers naturel n
- Si $q \neq 1$ alors : Somme des termes consécutifs = premier terme $\times \left(\dfrac{1 - q^{\text{nombre des termes}}}{1 - q} \right)$

  $\rightarrow S = V_0 + V_1 + ... + V_n = \sum_{k=0}^{n} V_k = V_0 \left(\dfrac{1 - q^{(n+1)}}{1 - q} \right)$

  $\rightarrow 1 + q + q^2 + ... + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$
- Si $q = 1$ alors on a : Somme des termes consécutifs $=$ premier terme $\times$ nombre des termes
- Limite de la suite géométrique définie par $V_n = V_0 q^n$

  $\rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} V_n = 0$ si $-1 < q < 1$

  $\rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} V_n = +\infty$ si $q > 1$ et $V_0 > 0$

  $\rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} V_n = -\infty$ si $q > 1$ et $V_0 < 0$

  $\rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} V_n = V_0$ si $q = 1$

  $\rightarrow$ Pas de limite si $q \leq -1$

Démonstration par récurrence

- Pour démontrer qu'une propriété $\mathcal{P}_n$, dépendant de n, est vraie à partir d'un certain rang n_0 c'est à dire pour tout $n \geq n_0$ on procède comme suit :

  $\rightarrow$ Initialisation : On établit que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour $n = n_0$

  $\rightarrow$ Transmission : On démontre que, pour tout entier naturel $k \geq n_0$, si la propriété $\mathcal{P}_k$ est vraie (Hypothèse de récurrence), alors la propriété $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.

  $\rightarrow$ Conclusion : La propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier n supérieur ou égal à n_0

Sens de variation

Pour étudier la monotonie d'une suite réelle (u_n) on peut utiliser l'une des techniques suivantes :

- Etudier le signe de $u_{n+1}-u_n$
  $\rightarrow$ (u_n) est croissante si $u_{n+1}-u_n \geq 0$
  $\rightarrow$ (u_n) est décroissante si $u_{n+1}-u_n \leq 0$
- Utiliser un raisonnement par récurrence.
- Comparer le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1, dans le cas où tous les termes sont non nuls et de même signe
  $\rightarrow$ Si tous les termes sont strictement positifs, et pour tout n, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ alors (u_n) est croissante
  $\rightarrow$ Si tous les termes sont strictement positifs, et pour tout n, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ alors (u_n) est décroissante
  $\rightarrow$ Si tous les termes sont strictement négatifs, et pour tout n, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ alors (u_n) est décroissante
  $\rightarrow$ Si tous les termes sont strictement négatifs, et pour tout n, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ alors (u_n) est croissante

Limites

- Toute suite décroissante et minorée est convergente.
- Toute suite croissante et majorée est convergente.
- Soit f une fonction définie sur $[a,+\infty[$ avec $a \geq 0$ et (u_n) la suite définie par $u_n = f(n)$
  $\rightarrow$ Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$
  $\rightarrow$ Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
  $\rightarrow$ Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$
- Soit f une fonction définie sur D et (u_n) la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$. Si (u_n) converge vers ℓ et f est continue en ℓ alors $f(\ell) = \ell$

Attention !

- Ne pas croire que si une suite n'est pas arithmétique alors elle est géométrique : une suite est soit arithmétique, soit géométrique soit ni arithmétique ni géométrique
- Ne pas croire que si une suite (u_n) est définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ alors f et (u_n) ont le même sens de variation

Les exercices

Exercice 1

1) Soit u la suite définie pour tout entier n par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2-u_n} \end{cases}$

   a) Calculer u_1, u_2 et u_3. On exprimera chacun de ces termes sous forme d'une fraction irréductible

   b) Comparer les quatre premiers termes de la suite u aux quatre premiers termes de la suite w définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = \dfrac{n}{n+1}$

   c) A l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = w_n$

2) Soit v la suite de terme général v_n définie par $v_n = \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$

   a) Montrer que $v_1 + v_2 + v_3 = -\ln 4$

   b) Soit S_n la somme définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $S_n = v_1 + v_2 + ... + v_n$. Exprimer S_n en fonction de n.

   c) Déterminer la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1-3u_n}$

1) a) Calculer u_1, u_2 et u_3

   b) La suite .(u_n). est-elle arithmétique ? Géométrique ?

2) Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = 1 - \dfrac{1}{u_n}$

   a) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique

   b) En déduire le terme général de la suite (u_n)

   c) Déterminer la limite de la suite (u_n)

Exercice 3

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 3}{2}$

1) Calculer u_2, u_3 et u_4

2) La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ? justifier

3) Pour tout $n \geq 1$ on pose $v_n = 3 - u_n$

   a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$

   b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n

   c) En déduire la limite de la suite (u_n)

Exercice 4 BAC [session principale 2012]

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 40 \\ u_{n+1} = 0.75u_n + 30,\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 120$

   b) Montrer que (u_n) est croissante

   c) En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite

2) Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 120$

   a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 0.75. Préciser son premier terme

   b) Exprimer v_n en fonction de n

c) Déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 120 - 80(0.75)^n$

3) Une salle de sport compte 40 abonnés pour l'année 2011, on estime que chaque année, il y a 30 nouveaux abonnés et que d'une année à l'autre, 75% des abonnés renouvellent leurs abonnements.
Dans combien d'années, le nombre d'abonnés sera-t-il supérieur à 100 ?

Exercice 5

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = -3 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1, n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Calculer u_1 et u_2
2) Montrer par récurrence que $u_n \leq 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
3) Montrer que (u_n) est croissante.
4) En déduire que (u_n) converge vers une limite ℓ que l'on déterminera.
5) Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
   a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
   b) Exprimer v_n en fonction de n
   c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$
   d) Retrouver la limite de (u_n)

Exercice 6

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3$

1) a) Calculer u_1 et u_2
   b) La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ? Justifier
2) a) Montrer par récurrence que pour $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 4$
   b) Montrer que (u_n) est croissante
   c) En déduire que (u_n) est convergente puis calculer sa limite
3) Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 4$
   a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $r = \frac{1}{4}$
   b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n
   c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

Exercice 7

On considère la suite (u_n) par $u_0 = 7$ et $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{2}u_n$

1) a) Calculer u_1 et u_2
   b) La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ? Justifier
2) a) Montrer que la suite (u_n) est minorée par 2
   b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante
   c) En déduire que la suite (u_n) est convergente
3) Soit (w_n) la suite définie par $w_0 = 5$ et $w_n = u_n - 2$
   a) Montrer que (w_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{2}$
   b) Exprimer w_n en fonction de n
   c) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n$
   d) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

Exercice 8

Les abonnements d'un club de sport sont calculés par la formule suivante : une cotisation annuelle initiale de

60DT qui augmente de 10% par an. Dès la seconde année, pour fidéliser la clientèle, on effectue une réduction de 5DT sur la cotisation annuelle. Si C_n est le montant, exprimé en dinars, de la cotisation annuelle la nième année, on a $C_1 = 60$ et pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a $C_{n+1} = 1{,}1 \times C_n - 5$

1) Soit (D_n) la suite définie pour tout entier n supérieur ou égal à 1 par $D_n = C_n + \alpha$ où α est un réel.

   Déterminer le réel α pour que la suite (D_n) soit une suite géométrique de raison 1,1 et préciser le terme initial de la suite
2) On suppose dans cette question que $\alpha = -50$
   a) Exprimer (D_n) puis C_n en fonction de n
   b) Soit S_n la somme versée au club par un membre pendant n années. Montrer que
   $S_n = 100\left((1{,}1)^n - 1\right) + 50n$

Exercice 9

On considère la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = x - e^{-x}$

1) Etudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$
2) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une solution unique α
   b) Vérifier que $\alpha \in \left[\frac{1}{2},1\right]$
3) Etudier le signe de f
4) Soit g la fonction définie sur $[0,1]$ par $g(x) = \dfrac{1+x}{1+e^x}$
   a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à l'équation $g(x) = x$
   b) En déduire que α est l'unique réel vérifiant $g(\alpha) = \alpha$
5) Montrer que $g'(x) = -\dfrac{e^x f(x)}{(1+e^x)^2}$ et en déduire que g est croissante sur $[0,\alpha]$
6) Soit (u_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = g(u_n)$
   b) Montrer que, pour tout entier naturel n, $0 \le u_n \le \alpha$
   c) En déduire que la suite (u_n) converge vers α

Exercice 10

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 300$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0.75u_n + 200$

1) Utiliser les droites d'équations y = x et $y = 0.75x + 200$ pour construire les quatre premiers termes de la suite (u_n)

   Que peut-on conjecturer à propos de la limite de la suite (u_n) ?
2) Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 800$
   a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison
   b) Exprimer, pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n. En déduire que, pour tout entier naturel n,
   $u_n = 800 - 500 \times (0.75)^n$
   c) La suite (u_n) est-elle convergente ?
3) Une salle de spectacle propose un abonnement pour l'année. En 2010, il y avait 300 abonnés. On estime que chaque année, il y a 200 nouveaux abonnés et que d'une année sur l'autre, 75 % des abonnés renouvellent leur abonnement. On note u_n le nombre d'abonnés pour l'année $2010 + n$, on a donc $u_0 = 300$ et $u_{n+1} = 0.75u_n + 200$
   a) Dans combien d'années, le nombre d'abonnés sera-t-il supérieur à 790 ?
   b) Dans ces conditions, est-il possible pour le gérant de la salle de spectacle d'espérer 1000 abonnés ?

Exercice 11

Partie A : étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3e^x - 1}{e^x + 1}$

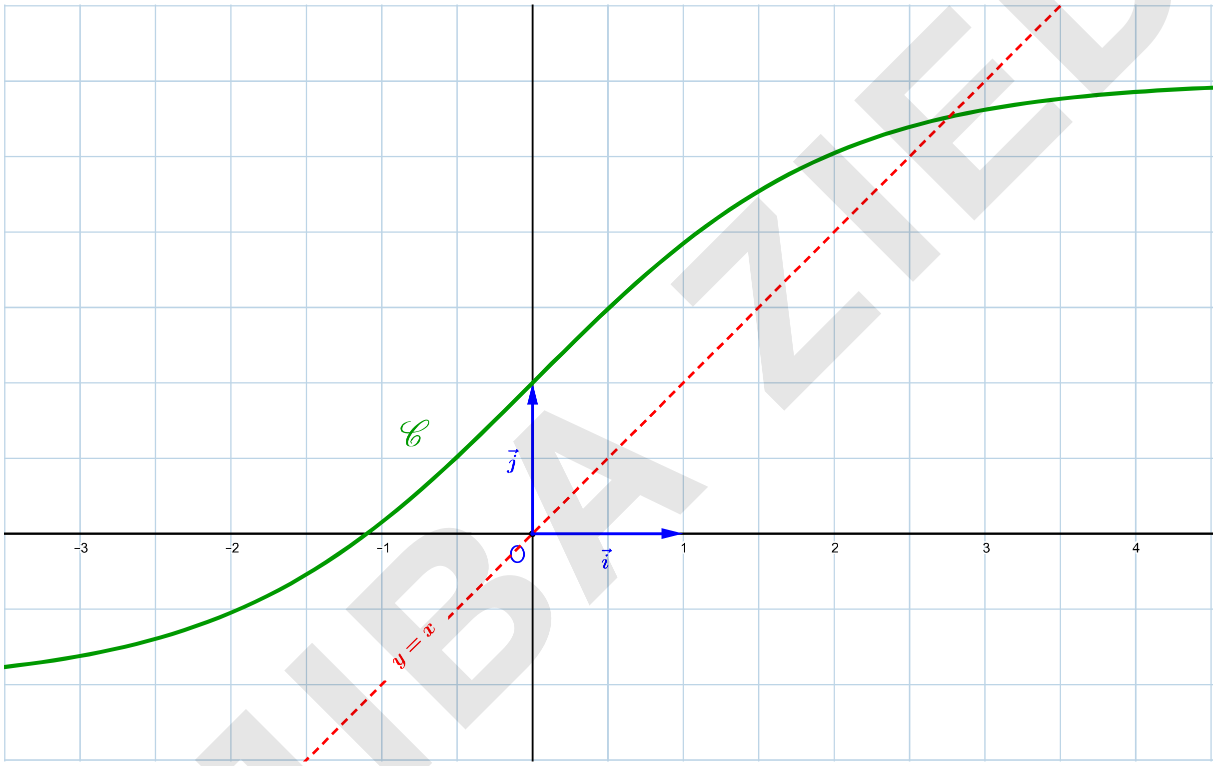
1) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
2) Dresser le tableau de variations de f

3) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - x$
   a) Calculer $g'(x)$
   b) Etudier le signe de l'expression $2x - x^2 - 1$ sur $]0, +\infty[$
   c) En déduire le signe de $g'(x)$
   d) Etudier les variations de g sur $\mathbb{R}$
4) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ possède une solution unique α tel que $2.7 < \alpha < 2.8$
5) En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$

Partie B : étude d'une suite

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$

1) En utilisant la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction f, représenter les trois premiers termes de la suite (u_n)
2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq \alpha$
3) Démontrer par récurrence que (u_n) est croissante
4) En déduire que (u_n) converge vers α



Exercice 12

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$ pour tout entier naturel n

1) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, u_n est strictement positif
2) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante
3) a) Démontrer que la suite (u_n) converge. On appelle ℓ sa limite
   b) Déterminer ℓ
4) On considère la suite $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ pour tout entier naturel n
   a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = e^{-S_n}$
   b) Etudier la limite de la suite (S_n)

Exercice 13

Soit I l'intervalle $[0,1]$. On considère la fonction f définie sur I par $f(x) = \dfrac{3x+2}{x+4}$

1) Etudier les variations de f et en déduire que, pour tout x élément de I , $f(x)$ appartient à I

2) On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2}{u_n + 4}$.

Montrer que, pour tout n, u_n appartient à I

On se propose d'étudier la suite (u_n) par deux méthodes différentes

Première méthode

3) a) Etablir la relation $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$ et en déduire le sens de variation de la suite (u_n)

b) Démontrer que la suite (u_n) est convergente

c) Prouver que la limite ℓ de la suite (u_n) vérifie $\ell = f(\ell)$ et calculer ℓ

Deuxième méthode

4) a) Prouver que (v_n) définie par $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$ est une suite géométrique

b) Calculer v_0 et exprimer v_n en fonction de n

c) Exprimer u_n en fonction de v_n, puis en fonction de n

d) En déduire la convergence de la suite (u_n) et sa limite

Correction des exercices

Exercice 1

1) a) $u_1 = \frac{1}{2}$ $\quad u_2 = \frac{2}{3}$ $\quad u_3 = \frac{3}{4}$

b) $w_0 = 0 = u_0$ $\quad w_1 = \frac{1}{2} = u_1$ $\quad w_2 = \frac{2}{3} = u_2$ $\quad w_3 = \frac{3}{4} = u_3$

c) Soit $\mathcal{P}_n$: "$u_n = w_n = \frac{n}{n+1}$" avec $n \in \mathbb{N}$

$\mathcal{P}_0$, $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont vraies

Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour $n = k$ c'est-à-dire $u_k = \frac{k}{k+1}$ et montrons que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour $n = k+1$:

$$u_{k+1} = \frac{1}{2-u_k} = \frac{1}{2-\frac{k}{k+1}} = \frac{1}{\frac{2k+2-k}{k+1}} = \frac{k+1}{k+2} = w_{k+1}$$

Conclusion : pour tout entier naturel n, on a $u_n = \frac{n}{n+1}$

2) a) $v_1 + v_2 + v_3 = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln\left(\frac{3}{4}\right) = \ln 1 - \ln 2 + \ln 2 - \ln 3 + \ln 3 - \ln 4 = -\ln 4$

b) $v_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \ln(n) - \ln(n+1)$

$S_n = v_1 + v_2 + ... + v_n = \ln 1 - \ln 2 + \ln 2 - \ln 3 + ... + \ln(n) - \ln(n+1) = -\ln(n+1)$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} -\ln(n+1) = -\infty$

Exercice 2

1) a) $u_1 = \frac{1}{1-3} = -\frac{1}{2}$ $\quad u_2 = \frac{-\frac{1}{2}}{1+\frac{3}{2}} = -\frac{1}{5}$ $\quad u_3 = \frac{-\frac{1}{5}}{1+\frac{3}{5}} = -\frac{1}{8}$

b) $u_1 - u_0 = -\frac{3}{2} \neq u_2 - u_1 = \frac{3}{10}$ donc (u_n) n'est pas arithmétique

$\frac{u_1}{u_0} = -\frac{1}{2} \neq \frac{u_2}{u_1} = \frac{2}{5}$ donc (u_n) n'est pas géométrique

2) a) $v_{n+1} - v_n = 1 - \frac{1}{u_{n+1}} - 1 + \frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_n} - \frac{1-3u_n}{u_n} = 3$ donc (v_n) est une suite arithmétique de raison 3 et du premier terme $v_0 = 0$

b) $v_n = 3n$ c'est à dire $3n = 1 - \frac{1}{u_n}$ et par suite $u_n = \frac{1}{1-3n}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} u_n = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{1-3n} = 0$

Exercice 3

1) $u_2 = 2$ $\quad u_3 = \frac{5}{2}$ $\quad u_4 = \frac{11}{4}$

2) $u_2 - u_1 = 1 \neq u_3 - u_2 = -\frac{8}{5}$ donc (u_n) n'est pas arithmétique

$\frac{u_2}{u_1} = 2 \neq \frac{u_3}{u_2} = \frac{5}{4}$ donc (u_n) n'est pas géométrique

3) a) $v_{n+1} = 3 - u_{n+1} = 3 - \frac{u_n+3}{2} = \frac{3-u_n}{2} = \frac{1}{2}(3-u_n) = \frac{1}{2}v_n$ donc la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et du premier terme $v_1 = 2$

b) $v_n = 2\times\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^{n-1}} = 3-u_n$ et par suite $u_n = 3-\frac{1}{2^{n-1}}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} u_n = \lim\limits_{x\to\infty}\left(3-\frac{1}{2^{n-1}}\right) = 3$

Exercice 4

1) a) Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété : « $U_n \le 120$, $n\in\mathbb{N}$ »

$U_0 = 40 \le 120$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie

On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour $n=k$ c'est-à-dire $U_k \le 120$ et montrons que $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie :

$U_k \le 120 \Leftrightarrow 0.75U_k \le 90 \Leftrightarrow 0.75U_k + 30 \le 120 \Leftrightarrow U_{k+1} \le 120$

Conclusion : Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $U_n \le 120$

b) On a pour tout $n\in\mathbb{N}$, $U_{n+1}-U_n = 0.75U_n + 30 - U_n = 30-0.25U_n$

Or $U_n \le 120 \Leftrightarrow 0.25U_n \le 30 \Leftrightarrow -0.25U_n \ge -30 \Leftrightarrow 30-0.25U_n \ge 0 \Leftrightarrow U_{n+1}-U_n \ge 0$ ce qui veut dire que (U_n) est croissante.

c) (U_n) est croissante et minorée donc converge vers une limite ℓ vérifiant $0.75\ell + 30 = \ell$ ou encore $\ell = 120$

2) a) $V_{n+1} = U_{n+1}-120 = 0.75U_n + 30 - 120 = 0.75U_n - 90 = 0.75(U_n - 120) = 0.75V_n$

donc (V_n) est une suite géométrique de raison $0,75$ et du premier terme $V_0 = U_0 - 120 = 80$

b) $V_n = -80\times(0.75)^n$, $n\in\mathbb{N}$

c) On a pour tout $n\in\mathbb{N}$, $V_n = U_n - 120$ donc $U_n = 120 + V_n = 120 - 80\times(0.75)^n$

3) Le nombre des abonnées en $2011+n$ est U_n donc d'après 2) ce nombre est $U_n = 120-80\times(0.75)^n$

$U_n \ge 100 \Leftrightarrow 120-80\times(0,75)^n \ge 100 \Leftrightarrow 120-100 \ge 80\times(0.75)^n \Leftrightarrow 80\times(0.75)^n \le 20 \Leftrightarrow (0.75)^n \le \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow \ln(0.75)^n \le \ln\left(\frac{1}{4}\right)$

$\Leftrightarrow n\times\ln(0.75) \le \ln(0.25)$

Or $\ln(0.75) < 0$ car $0.75 < 1$ donc $n \ge \frac{\ln(0.25)}{\ln(0.75)} \simeq 4.8$ c'est-à-dire dans 5 années le nombre des abonnées sera supérieur à 100

Exercice 5

1) $u_1 = \frac{2}{3}(-3)+1 = -1$ et $u_2 = -\frac{2}{3}+1 = \frac{1}{3}$

2) Soit la propriété $\mathcal{P}_n$: « $u_n \le 3 , n\in\mathbb{N}$ »

$u_0 = -3 \le 3$, $u_1 = -1 \le 3$ donc $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$ sont vraies

Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie c'est-à-dire $u_n \le 3$ et montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie aussi :

$u_n \le 3 \Leftrightarrow \frac{2}{3}u_n \le 2 \Leftrightarrow \frac{2}{3}u_n + 1 \le 3 \Leftrightarrow u_{n+1} \le 3$

Conclusion : $u_n \le 3$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

3) $u_{n+1}-u_n = \frac{2}{3}u_n + 1 - u_n = 1-\frac{1}{3}u_n$

or pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n \le 3 \Leftrightarrow -\frac{1}{3}u_n \ge -1 \Leftrightarrow 1-\frac{1}{3}u_n \ge 0 \Leftrightarrow u_{n+1}-u_n \ge 0$ et par conséquence (u_n) est croissante.

4) (u_n) est croissante majoré donc elle converge vers une limite ℓ tel que $\ell = \frac{2}{3}\ell + 1$ c'est-à-dire $\ell = 3$

5) a) On a pour $n\in\mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = \frac{2}{3}u_n + 1 - 3 = \frac{2}{3}u_n - 2 = \frac{2}{3}(u_n - 3) = \frac{2}{3}v_n$ donc (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et du premier terme $v_0 = u_0 - 3 = -6$

b) Pour $n\in\mathbb{N}$, $v_n = -6\times\left(\frac{2}{3}\right)^n$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} -6\times\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (3+v_n) = 3$

Exercice 6

1) a) $u_1 = \frac{1}{4}u_0 + 3 = 3$ et $u_2 = \frac{1}{4}u_1 + 3 = \frac{3}{4} + 3 = \frac{15}{4}$

b) $u_2 - u_1 = \frac{15}{4} - 3 = \frac{3}{4} \neq u_1 - u_0 = 3$ donc (u_n) n'est pas arithmétique

$u_0 = 0$ et $u_1 \neq 0$ donc (u_n) n'est pas géométrique

2) a) Soit $\mathcal{P}_n$: « $0 \le u_n \le 4$ pour $n \in \mathbb{N}$ »

$u_0 = 0$ donc $0 \le u_0 \le 4$ et par suite $\mathcal{P}_0$ est vraie

Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie c'est-à-dire $0 \le u_n \le 4$ et montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie :

$0 \le u_n \le 4 \Leftrightarrow 0 \le \frac{1}{4}u_n \le 1 \Leftrightarrow 3 \le \frac{1}{4}u_n + 3 \le 4 \Leftrightarrow 3 \le u_{n+1} \le 4$ donc $0 \le u_{n+1} \le 4$

Conclusion : $0 \le u_n \le 4$ pour $n \in \mathbb{N}$

b) $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{4}u_n + 3 - u_n = -\frac{3}{4}u_n + 3$

$u_n \le 4 \Leftrightarrow -3 \le -\frac{3}{4}u_n \Leftrightarrow 0 \le -\frac{3}{4}u_n + 3 \Leftrightarrow 0 \le u_{n+1} - u_n$ et par suite (u_n) est croissante

c) (u_n) est croissante et majorée par 4 donc elle convergente vers une limite ℓ et on a : $\ell = \frac{1}{4}\ell + 3$

donc $\frac{3}{4}\ell = 3$ ou encore $\ell = 4$ c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$

3) a) $v_{n+1} = u_{n+1} - 4 = \frac{1}{4}u_n + 3 - 4 = \frac{1}{4}u_n - 1 = \frac{1}{4}(u_n - 4) = \frac{1}{4}v_n$ donc (v_n) est une suite géométrique de raison

$r = \frac{1}{4}$ et du premier terme $v_0 = u_0 - 4 = -4$

b) $v_n = -4\times\left(\frac{1}{4}\right)^n = -\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}$

$v_n = u_n - 4 \Leftrightarrow u_n = 4 + v_n = 4 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 4 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 4$

Exercice 7

1) a) $u_1 = 1 + \frac{1}{2}\times 7 = 1 + \frac{7}{2} = \frac{9}{2}$

$u_2 = 1 + \frac{1}{2}\times\frac{9}{2} = 1 + \frac{9}{4} = \frac{13}{4}$

b) $u_1 - u_0 = \frac{9}{2} - 7 = -\frac{5}{2} \neq u_2 - u_1 = \frac{13}{4} - \frac{9}{2} = -\frac{5}{4}$ donc (u_n) n'est pas arithmétique

$\frac{u_1}{u_0} = \frac{\frac{9}{2}}{7} = \frac{9}{14} \neq \frac{u_2}{u_1} = \frac{\frac{13}{4}}{\frac{9}{2}} = \frac{13}{18}$ donc (u_n) n'est pas géométrique

2) a) Soit $\mathcal{P}_n$:" $2 \le u_n$ " avec $n \in \mathbb{N}$

$2 \le u_0 = 7$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie

Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie c'est-à-dire $2 \le u_n$ et montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie aussi :

$2 \le u_n \Leftrightarrow 1 \le \frac{1}{2}u_n \Leftrightarrow 2 \le 1 + \frac{1}{2}u_n \Leftrightarrow 2 \le u_{n+1}$

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $2 \le u_n$

b) $u_{n+1} - u_n = 1 + \frac{1}{2}u_n - u_n = 1 - \frac{1}{2}u_n$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $2 \le u_n \Leftrightarrow -1 \ge -\frac{1}{2}u_n \Leftrightarrow 0 \ge 1 - \frac{1}{2}u_n \Leftrightarrow 0 \ge u_{n+1} - u_n$ donc (u_n) est décroissante

c) (u_n) est décroissante et minorée donc elle est convergente

3) a) $w_{n+1} = u_{n+1} - 2 = 1 + \frac{1}{2}u_n - 2 = \frac{1}{2}u_n - 1 = \frac{1}{2}(u_n - 2) = \frac{1}{2}w_n$ donc (w_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{2}$

b) $w_n = 5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

d) $u_n = w_n + 2$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (w_n + 2) = 2$

Exercice 8

1) (D_n) est une suite géométrique de raison 1.1 si, et seulement si :

$D_{n+1} = C_{n+1} + \alpha = 1.1 \times C_n - 5 + \alpha = 1.1 \times D_n = 1.1 \times (C_n + \alpha) = 1.1 \times C_n + 1.1 \times \alpha$

donc $\alpha - 5 = 1.1 \times \alpha \Leftrightarrow 0.1 \times \alpha = -5 \Leftrightarrow \alpha = -50$

$D_1 = C_1 + \alpha = 60 - 50 = 10$

2) a) Pour $\alpha = -50$ la suite (D_n) est géométrique de raison 1.1 donc pour tout entier $n \geq 1$:

$D_n = D_1 \times (1.1)^{n-1} = 10 \times (1.1)^{n-1}$

$C_n = D_n - \alpha = 10 \times (1.1)^{n-1} + 50$

b) $S_n = C_1 + C_2 + \ldots + C_n = D_1 + D_2 + \ldots + D_n - n \times \alpha$

$$= D_1\left(\frac{1-(1.1)^n}{1-1.1}\right) + 50n$$

$$= 10\left(\frac{1-(1.1)^n}{-0.1}\right) + 50n$$

$$= -100\left(1-(1.1)^n\right) + 50n$$

$$= 100\left((1.1)^n - 1\right) + 50n$$

Exercice 9

1) La fonction $x \mapsto x - e^{-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $[0,1]$ et on a $f'(x) = 1 + e^x > 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

2) a) f est continue sur $[0,1]$, strictement croissante sur $[0,1]$ et on a $f(0)f(1) = -1 \times (1 - e^{-1}) = e^{-1} - 1 < 0$ donc f change de signe sur $[0,1]$: le théorème des valeurs intermédiaires permet de conclure que l'équation $f(x) = 0$ possède une solution unique α dans l'intervalle $[0,1]$

b) $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - e^{-\frac{1}{2}} = -0.10653$ et $f(1) = 0.6321$ donc $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

3)

x	0		α		1
$f(x)$		$-$	0	$+$	

4) a) $g(x) = x \Leftrightarrow \frac{1+x}{1+e^x} = x \Leftrightarrow 1 + x = x + x e^x \Leftrightarrow 1 - x e^x = 0 \Leftrightarrow (e^{-x} - x)e^x = 0 \Leftrightarrow (e^{-x} - x)e^x = 0$

$\Leftrightarrow f(x) = 0$

b) $g(x) = x \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \alpha$ donc α est l'unique réel vérifiant $g(\alpha) = \alpha$

5) La fonction g est dérivable comme quotient de fonctions dérivables et on a :

$$g'(x) = \frac{(1+e^x) - (1+x)e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{1 - x e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x(e^{-x} - x)}{(1+e^x)^2} = \frac{-e^x f(x)}{(1+e^x)^2}$$

x	0		α		1
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$		$\nearrow$	

La fonction g est croissante sur $[\alpha, 0]$

6) a) Soit $\mathcal{P}_n$: "$0 \le u_n \le \alpha$" $n \in \mathbb{N}$

$0 \le u_0 \le \alpha$: $\mathcal{P}_0$ est vraie

Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour $n = k$ c'est-à-dire que $0 \le u_k \le \alpha$ et montrons que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour $n = k+1$:

$0 \le u_k \le \alpha \Leftrightarrow g(0) \le g(u_k) \le g(\alpha) \Leftrightarrow \frac{1}{2} \le u_{k+1} \le \alpha$ donc $0 \le u_{k+1} \le \alpha$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \le u_n \le \alpha$

b) Soit $\mathcal{P}_n$: "$u_n \le u_{n+1}$" $n \in \mathbb{N}$

$u_0 = 0$, $u_1 = g(0) = \frac{1}{2}$ donc $u_0 \le u_1$: $\mathcal{P}_0$ est vraie

Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour $n = k$ c'est-à-dire que $u_k \le u_{k+1}$ et montrons que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour $n = k+1$:

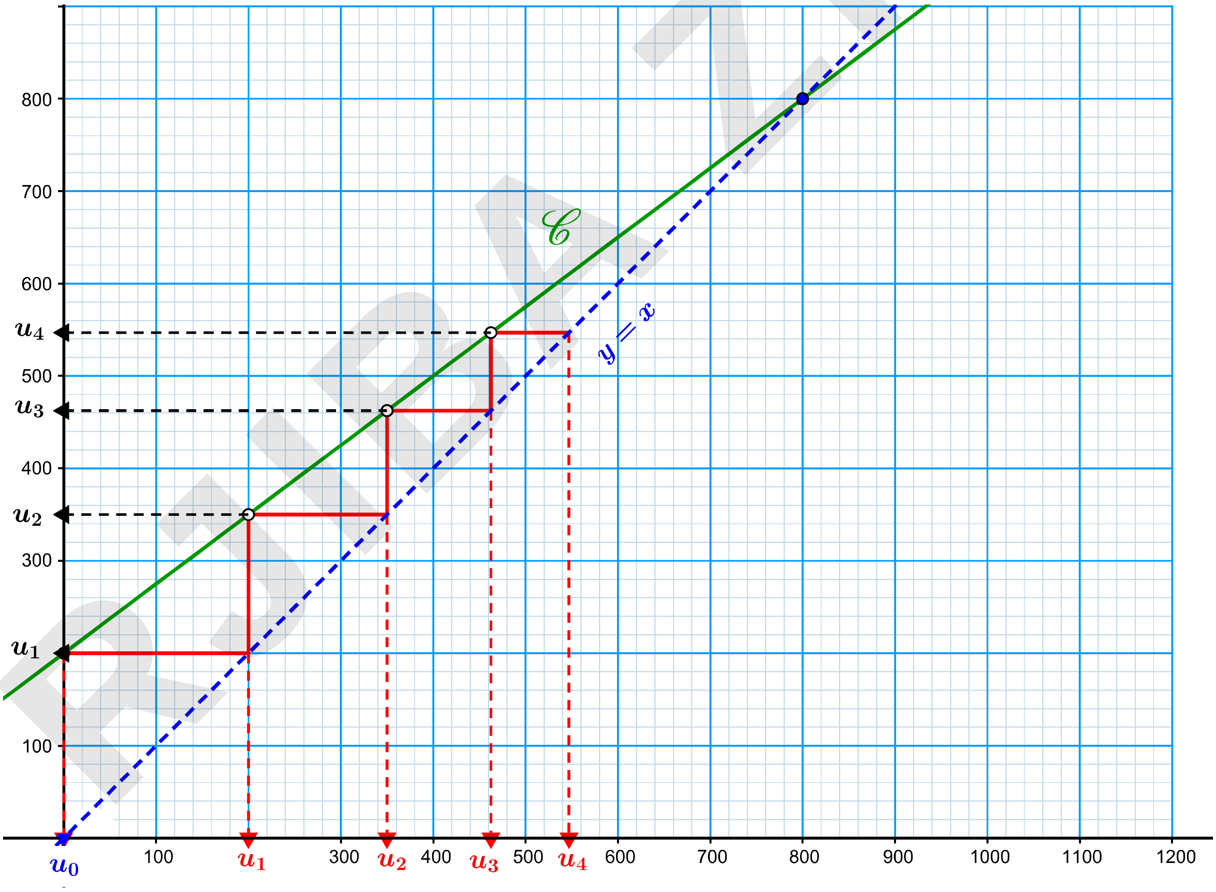
$u_k \le u_{k+1} \Leftrightarrow g(u_k) \le g(u_{k+1}) \Leftrightarrow u_{k+1} \le u_{k+2}$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \le u_{n+1}$

La suite (u_n) est croissante majorée donc elle converge vers une limite ℓ tel que $g(\ell) = \ell$ or α est l'unique réel vérifiant une tel condition $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \alpha$

Exercice 10

1) Graphiquement, la suite (u_n) semble converger vers l'abscisse du point d'intersection des deux droites.



2) Pour tout entier n, on a :

$v_{n+1} = u_{n+1} - 800 = 0.75u_n + 200 - 800 = 0.75u_n - 600 = 0.75(u_n - 800) = 0.75v_n$

donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0.75 et de premier terme $v_0 = -500$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -500 \times (0.75)^n$ et par suite $u_n = 800 - 500 \times (0.75)^n$

$\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \lim\limits_{\to\infty}\left[-500 \times (0.75)^n\right] = 0$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} u_n - 800 = 0$ ou encore $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 800$

3) L'évolution du nombre d'abonnés est modélisée par la suite (u_n). D'après la question précédente, on a $u_n = 800 - 500\times(0.75)^n$ Par conséquent, le nombre d'abonnés sera supérieur à 790 pour le plus petit entier n tel que :

$$\begin{aligned}800 - 500\times(0.75)^n \geq 790 &\Leftrightarrow 500\times(0.75)^n \leq 10\\ &\Leftrightarrow (0.75)^n \leq 0.2\\ &\Leftrightarrow n\times\ln(0.75) \leq \ln(0.2)\\ &\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0.2)}{\ln(0.75)}\\ &\Leftrightarrow n \geq 14\end{aligned}$$

Pour tout entier n, on a :

$$u_{n+1} - u_n = -500\times(0.75)^{n+1} + 500\times(0.75)^n = 500\times(0.75)^n\times(-0.75+1) = 500\times(0.75)^n\times 0.25 > 0$$

donc (u_n) est croissante et comme (u_n) converge vers 800 alors pour tout n on a $u_n \leq 800$ ce qui signifie qu'il n'est pas possible d'envisager un nombre d'abonnés supérieur à 800 avec ce modèle

Exercice 11

Partie A

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3e^x - 1}{e^x + 1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3 - e^{-x}}{1 + e^{-x}} = 3$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3e^x - 1}{e^x + 1} = -1$

2) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme étant quotient de fonctions qui le sont et on a :

$$f'(x) = \frac{3e^x(e^x+1) - e^x(3e^x-1)}{(e^x+1)^2} = \frac{3e^{2x} + 3e^x - 3e^{2x} + e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{4e^x}{(e^x+1)^2}$$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		+	
f	-1	$\nearrow$	3

3) $g(x) = f(x) - x$. La fonction g est dérivable comme somme de deux fonctions qui le sont et on a :

$$g'(x) = f'(x) - 1 = \frac{4e^x}{(e^x+1)^2} - 1 = \frac{4e^x - (e^{2x} + 2e^x + 1)}{(e^x+1)^2} = \frac{-e^{2x} + 2e^x - 1}{(e^x+1)^2}$$

$2X - X^2 - 1 = -(X^2 - 2X + 1) = -(X-1)^2$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$2x - x^2 - 1$		$-$	0	$-$	

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^x - 2e^{2x} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = +\infty$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$-$	
g	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

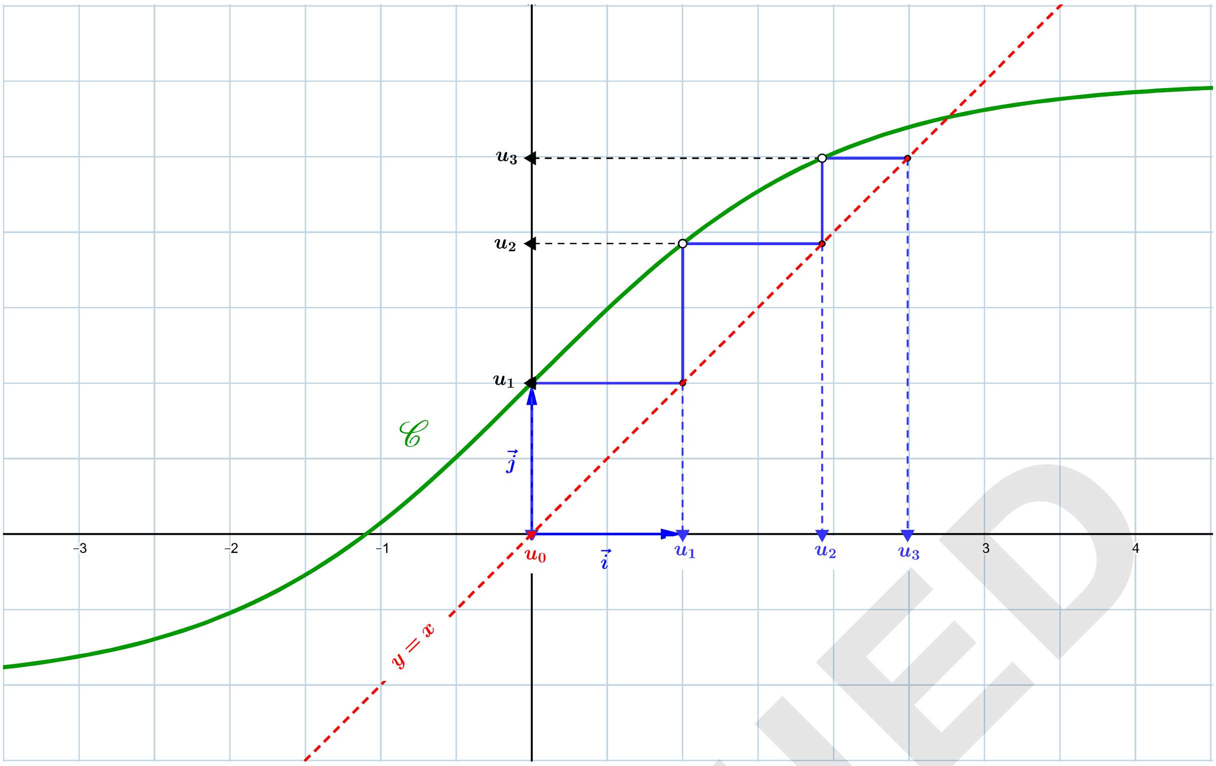
Sur $]-\infty,0[$ la fonction g est strictement positive

Sur $[0,+\infty[$ la fonction g est continue, strictement décroissante et change de signe donc le théorème des valeurs intermédiaires affirme que l'équation $g(x) = 0$ possède une solution unique $\alpha \in [0,+\infty[$

$\left.\begin{array}{l} g(2.7) \simeq 0.0481 \\ g(2.8) \simeq -0.029 \end{array}\right\}$ donc $2.7 < \alpha < 2.8$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		+	0	$-$	

Partie B



2) Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété « $0 \leq u_n \leq \alpha$, pour $n \in \mathbb{N}$ »

$u_1 = f(u_0) = f(0) = 1$ on a $0 \leq u_0 \leq \alpha$ et $0 \leq u_1 \leq \alpha$ donc $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$ sont vraies.

Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \leq k$ et montrons que $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie :

$0 \leq u_k \leq \alpha \Leftrightarrow f(0) \leq f(u_k) \leq f(\alpha) \Leftrightarrow 1 \leq u_{k+1} \leq \alpha \Leftrightarrow 0 \leq u_{k+1} \leq \alpha$ d'où le résultat

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq \alpha$

3) Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété « $u_n \leq u_{n+1}$, pour $n \in \mathbb{N}$ ».

$u_0 \leq u_1$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \leq k$ et montrons que $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie :

$u_k \leq u_{k+1} \Leftrightarrow f(u_k) \leq f(u_{k+1}) \Leftrightarrow u_{k+1} \leq u_{k+2}$ d'où le résultat

Conclusion : (u_n) est une suite croissante

4) La suite (u_n) est une suite croissante majorée par α donc elle converge vers une limite ℓ tel que $f(\ell) = \ell$ donc $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = \alpha$

Exercice 12

1) Soit $\mathcal{P}_n$:" $u_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$ "

$u_0 = 1$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie

On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie c'est-à-dire $u_n > 0$ et montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie :

$u_n > 0$ et $e^{-u_n} > 0$ donc $u_n e^{-u_n} > 0 \Leftrightarrow u_{n+1} > 0$

Conclusion : $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

2) La fonction $x \mapsto e^{-x}$ est décroissante (dérivée négative) sur $\mathbb{R}$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$e^{-u_n} < e^0 = 1 \Leftrightarrow e^{-u_n} - 1 < 0 \Leftrightarrow u_n(e^{-u_n} - 1) < 0 \Leftrightarrow u_n e^{-u_n} - u_n < 0 \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n < 0$ donc (u_n) est décroissante

3) a) (u_n) est décroissante et minorée donc converge vers une limite ℓ vérifiant $\ell = \ell e^{-\ell}$

b) $\ell = \ell e^{-\ell} \Leftrightarrow \ell = 0$ ou $e^{-\ell} = 1 \Leftrightarrow \ell = 0$ donc $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$

4) a) Soit $\mathcal{P}_n$:" $u_{n+1} = e^{-S_n}, n \in \mathbb{N}$ "

$u_0 = 1$ et $u_1 = e^{-1} = e^{-S_0}$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie

On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie c'est-à-dire $u_{n+1} = e^{-S_n}$ et montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie :

$u_{n+2} = u_{n+1} e^{-u_{n+1}} = e^{-S_n} e^{-u_{n+1}} = e^{-(S_n + u_{n+1})} = e^{-S_{n+1}}$

Conclusion : $u_{n+1} = e^{-S_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} u_{n+1} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} e^{-S_n} = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} -S_n = -\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$

Exercice 13

1) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-4\}$ et on a $f'(x)=\dfrac{3(x+4)-(3x+2)}{(x+4)^2}=\dfrac{10}{(x+4)^2}>0$ donc f est strictement croissante sur $]-4,+\infty[$ et par suite $f([0,1])=[f(0),f(1)]=\left[\dfrac{1}{2},1\right]\subset[0,1]$

donc pour tout $x\in I$, $f(x)\in I$

2) Soit $\mathcal{P}_n$:" $u_n \in[0,1]$, $n\in\mathbb{N}$ "

$u_0 = 0\in I$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie

On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie c'est-à-dire $u_n \in[0,1]$ et montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie :

$u_n\in[0,1]\Leftrightarrow f(u_n)\in[0,1]\Leftrightarrow u_{n+1}\in[0,1]$

Conclusion : $u_n\in[0,1]$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

Première méthode

3) a) $u_{n+1}-u_n=\dfrac{3u_n+2}{u_n+4}-u_n=\dfrac{3u_n+2-u_n^2-4u_n}{u_n+4}=\dfrac{-u_n^2-u_n+2}{u_n+4}=\dfrac{-(u_n-1)(u_n+2)}{u_n+4}=\dfrac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$

$0\le u_n\le 1$ donc $1-u_n\ge 0$ et $u_n+2\ge 0$ et par suite $u_{n+1}-u_n\ge 0$ donc (u_n) est croissante

b) La suite (u_n) est croissante majorée donc elle converge vers une limite ℓ vérifiant $f(\ell)=\ell$

$f(\ell)=\ell\Leftrightarrow\dfrac{3\ell+2}{\ell+4}=\ell\Leftrightarrow 3\ell+2=\ell^2+4\ell\Leftrightarrow \ell^2+\ell-2=0\Leftrightarrow \ell=1$ ou $\ell=-2$

Or $0\le u_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ donc $\ell\ge 0$ et par conséquence $\ell=1$

Deuxième méthode

4) a) $v_{n+1}=\dfrac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+2}=\dfrac{\dfrac{3u_n+2}{u_n+4}-1}{\dfrac{3u_n+2}{u_n+4}+2}=\dfrac{3u_n+2-u_n-4}{3u_n+2+2u_n+8}=\dfrac{2u_n-2}{5u_n+10}=\dfrac{2(u_n-1)}{5(u_n+2)}=\dfrac{2}{5}\left(\dfrac{u_n-1}{u_n+2}\right)=\dfrac{2}{5}v_n$

(v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{5}$

b) $v_0=-\dfrac{1}{2}$ et $v_n=-\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{2}{5}\right)^n$

c) $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+2}\Leftrightarrow v_n\times u_n+2v_n=u_n-1\Leftrightarrow v_n\times u_n-u_n=-1-2v_n\Leftrightarrow(v_n-1)u_n=-1-2v_n$

$\Leftrightarrow u_n=-\dfrac{1+2v_n}{v_n-1}=\dfrac{1+2v_n}{1-v_n}$

donc $u_n=\dfrac{1+2v_n}{1-v_n}=\dfrac{1-\left(\dfrac{2}{5}\right)^n}{1+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} v_n=\lim\limits_{n\to\infty} -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n=0$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\left(\dfrac{2}{5}\right)^n}{1+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n}=1$

Chapitre 07

Matrices et systèmes

Rappel de cours

Matrices unités

- La matrice unité d'ordre 2 est $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- La matrice unité d'ordre 3 est $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Somme de deux matrices et produit d'une matrice par un réel

Soit $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices de même ordre $n \times p$

- La somme des deux matrices A et B est la matrice $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$
- Le produit de la matrice A par le réel k est la matrice $kA = (k\,a_{ij})$
- Pour tout réel k on a $k(A+B) = kA + kB$
- $A \times I_n = I_n \times A = A$

Produit de deux matrices

- Le produit de deux matrices ne peut se définir que si le nombre de colonnes de la première matrice est le même que le nombre de lignes de la deuxième matrice, c'est-à-dire lorsqu'elles sont de type compatible.
- Soit $A = (a_{ij})$ une matrice d'ordre $n \times p$ et $B = (b_{ij})$ une matrice d'ordre $p \times q$. Le produit de la matrice A par la matrice B est la matrice $A \times B$ d'ordre $n \times q$ définie par $A + B = (c_{ij})$ avec

  $c_{ij} = a_{i1} b_{1i} + a_{i2} b_{2i} + \dots + a_{ik} b_{ki} + \dots + a_{ip} b_{pi}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boxed{a_{i1}} & \cdots & \boxed{a_{ik}} & \cdots & \boxed{a_{ip}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \overset{\times}{} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & \boxed{b_{1j}} & \cdots & b_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & \boxed{b_{pj}} & \cdots & b_{pq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & \boxed{c_{ij}} & \cdots & c_{iq} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nj} & \cdots & c_{nq} \end{pmatrix}$$

Déterminant d'une matrice d'ordre 2 ou d'ordre 3

- Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2 alors $\det M = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$
- Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_2 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 3 alors : $\det A = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$
- $\det(I_2) = \det(I_3) = 1$

Inverse d'une matrice

- Une matrice A est inversible si, et seulement si, il existe une matrice B tel que $A \times B = B \times A = I_n$ où I_n est la matrice unité d'ordre n.
- Une matrice A est inversible si, et seulement si, $\det A \neq 0$
- Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice tel que $\det M \neq 0$ alors $M^{-1} = \dfrac{1}{\det M} \times \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$
- L'inverse de l'inverse de la matrice A est A : $(A^{-1})^{-1} = A$

Résolution des systèmes linéaires : Méthode du pivot de Gauss

On considère un système linéaire (S) à n lignes notées : L_1, L_2 ,… L_n. On appelle opérations élémentaires sur les lignes les opérations suivantes :

- Echange de deux lignes : $L_i \leftrightarrow L_j$
- Multiplication d'une ligne par un réel $\alpha \neq 0$: $L_i \leftarrow \alpha L_i$
- Addition à une ligne d'un multiple d'une autre ligne : $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j \ (\lambda \in \mathbb{R})$

Le système (S') obtenue en effectuant des opérations élémentaires sur (S) est équivalent à (S)

La méthode du pivot de Gauss a pour but de transformer un système (S) en un système (S') équivalent (en utilisant les opérations élémentaires sur les lignes) et triangulaire supérieur.

	Etapes	Exemple
Etape 0	(S) est un système à n lignes	$(S)\begin{cases} 2x - y + z = 5 & L_1 \\ x + 2y + 3z = 2 & L_2 \\ 3x + 7y - 2z = 3 & L_3 \end{cases}$
Etape 1	On place en L_1 une ligne dont le coefficient de la première inconnue est non nul. (ce coefficient est appelé "le pivot") Choisir, si possible, un pivot égale à ± 1	$L_1 \leftrightarrow L_2$ $\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 & L_1 \\ 2x - y + z = 5 & L_2 \\ 3x + 7y - 2z = 3 & L_3 \end{cases}$
Etape 2	On élimine la première inconnue dans L_2 , L_3 ,… L_n par l'opération élémentaire $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_1$	$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$ $\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 & L_1 \\ -5y - 5z = 1 & L_2 \\ y - 11z = -3 & L_3 \end{cases}$
Etape 3	On choisit parmi $L_2, \dots, L_n$ une ligne où le coefficient de l'inconnue suivante est non nul et l'on utilise ce coefficient comme nouveau pivot	$L_3 \leftrightarrow L_2$ $\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 & L_1 \\ y - 11z = -3 & L_2 \\ -5y - 5z = 1 & L_3 \end{cases}$
Etape 4	On recommence l'étape 2 à la ligne adéquate jusqu'à obtenir un système triangulaire supérieur	$L_3 \leftarrow L_3 + 5L_2$ $\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 & L_1 \\ y - 11z = -3 & L_2 \\ -60z = -14 & L_3 \end{cases}$
Etape 5	Les solutions du système s'obtiennent par résolution d'équations de proche en proche	$z = \frac{14}{16} = \frac{7}{30}$ $y = -3 + 11 \times \frac{7}{30} = -\frac{13}{30}$ $x = 2 - 2 \times \left(-\frac{13}{30}\right) - 3 \times \frac{7}{30} = \frac{13}{6}$

Résolution des systèmes linéaires : Méthode Matricielle

Soit le système $(S) : \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = \alpha \\ a_2x + b_2y + c_2z = \beta \\ a_3x + b_3y + c_3z = \gamma \end{cases}$

- On appelle matrice du système (S) la matrice $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$
- L'écriture matricielle de (S) est $AX = B$ avec A est la matrice de (S), $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$
- Si $\det A \neq 0$ alors le système (S) possède une solution unique : $X = A^{-1} \times B$
- Si $\det A = 0$ alors le système (S) n'a pas de solution ou possède une infinité de solutions

Attention !

- Ne pas penser que $A \times B = B \times A$ en fait la multiplication matricielle n'est pas commutative : $A \times B \neq B \times A$

Les exercices

Exercice 1

Un chocolatier fabrique trois sortes de chocolat avec du cacao, du beurre, du lait et du sucre le tableau suivant donne les quantités d'unités nécessaires à la fabrication de chaque sorte de chocolat.

	Cacao	Beurre de cacao	Lait	sucre
Chocolat noir	8	2	0	4
Chocolat au lait	5	3	4	6
Chocolat blanc	0	8	6	5

1) Représenter ces données par une matrice M de dimension 4×3
2) On reçoit une commande de 5 unités de chocolat noir, 6 unités de chocolat au lait et 9 unités de chocolat blanc
   a) Représenter cette commande par une matrice colonne C
   b) A l'aide d'un produit matriciel, calculer les quantités nécessaires pour chaque ingrédient
   c) Les prix respectifs de chaque ingrédient, en DT par unité, sont 10, 8, 4 et 3. En utilisant un produit de matrices convenablement choisies, calculer le prix total pour cette commande

Exercice 2

Il existe deux variétés de café : le café arabica et le café robusta. Une entreprise fabrique et vend des paquets A, B et C d'un kilogramme de café moulu.

- Un paquet A contient 70% d'arabica et 30% de robusta
- Un paquet B contient 50% d'arabica et 50% de robusta
- Un paquet C contient 80% d'arabica et 20% de robusta.

Il y a en stock 150 kg d'arabica et 100 kg de robusta.

1) Écrire une matrice M d'ordre 2×3 donnant les quantités (en kilogrammes) d'arabica et de robusta présentes dans les paquets A, B et C
2) Un certain jour, l'entreprise fabrique 25 paquets A, 40 paquets B et 35 paquets C.
   a) Écrire la matrice colonne X de sa fabrication.
   b) Calculer la matrice $M\times X$ et interpréter ses coefficients.
3) Calculer la matrice colonne donnant l'état du stock d'arabica et de robusta à la fin de la journée.

Exercice 3

Un parfumeur utilise des essences de rose et de lavande pour fabriquer trois parfums différents.

Chaque colonne de la matrice $A=\begin{pmatrix} 26 & 50 & 60 \\ 74 & 50 & 40 \end{pmatrix}$ indique pour un parfum les pourcentages de composition selon les essences. Ainsi le premier parfum comporte 26% d'essence de rose et 74% d'essence de lavande.

1) Donner la composition des deuxième et troisième parfums.
2) 1% d'essence de rose coûte 5 DT et 1% d'essence de lavande coûte 3 DT. Le parfumeur code cela à l'aide de la matrice $P=\begin{pmatrix} 5 & 3 \end{pmatrix}$
   a) Calculer $B=PA$
   b) Que représente B ?
3) En raison d'un été caniculaire, le prix de 1% d'essence de rose augmente de 1 DT et celui de 1% d'essence de lavande diminue de 1 DT
   a) Donner la nouvelle valeur de P
   b) Calculer la nouvelle valeur de B
   c) Quelle est l'influence de cette canicule sur les coûts des différents parfums ?

Exercice 4

On donne les matrices $A=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1) Vérifier que $B=A+4I_3$
2) Calculer $\det A$ et en déduire que A est inversible
3) a) Calculer A^2
   b) Vérifier que $A^2+5A=-4I_3$

c) En déduire que $A(B+I_3) = -4I_3$ et déterminer la matrice inverse de A

Exercice 5

On donne les matrices suivantes $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ et $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1) Calculer A^2 et montrer qu'il existe deux réels a et b que l'on déterminera tel que $A^2 = aA + bI_3$
2) En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A et I_3

Exercice 6

On considère les matrices P et Q définies par $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \frac{1}{4}(P + I_3)$

1) Calculer P^2, PQ et QP en fonction de P
2) Calculer les produits $(4\times I_3 - P)Q$ et $Q(4\times I_3 - P)$
3) Qu'en concluez-vous pour la matrice Q?

Exercice 7

On considère les matrices $P = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} -3 & -6 & -2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

1) a) Montrer que P et inversible
   b) Vérifier que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$
2) Déterminer la matrice D telle que $A = P \times D \times P^{-1}$
3) Calculer D^2 et D^3
4) En déduire A^2 et A^3

Exercice 8

Soit les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

1) a) Calculer $\det A$
   b) Déduire que A est inversible
2) a) Calculer $A \times B$
   b) Déterminer alors la matrice A^{-1} l'inverse de A.
   c) Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système : $(S) : \begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + y + z = -1 \\ -x + z = 4 \end{cases}$

Exercice 9

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1) a) Montrer que A est inversible
   b) Déterminer sa matrice inverse A^{-1}
2) Résoudre le système $(S) : \begin{cases} x - y - z = 10 \\ -2x + 3y + 4z = 15 \\ -x + y + 2z = -12 \end{cases}$

Exercice 10

On considère la matrice carré suivante $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1) a) Calculer le déterminant de M en déduire que M est inversible

b) Calculer $A = \frac{1}{2}(M - I_3)$ où I_3 est la matrice unité d'ordre 3

c) Calculer $A \times M$ et en déduire la matrice inverse M^{-1} de M

2) On considère le système linéaire suivant : $(S) : \begin{cases} y + z = 2 \\ x + z = 4 \\ x + y = -2 \end{cases}$

a) Donner l'écriture matricielle du système (S)

b) En déduire la solution du système (S)

Exercice 11

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

1) Calculer le déterminant de M et déduire que M est inversible

2) Montrer que $M^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

3) On considère le système linéaire suivant $(S) : \begin{cases} y + 2z = 5 \\ -x + 3y = 2 \\ x - 2y + z = -2 \end{cases}$

a) Donner l'écriture matricielle du système S

b) Résoudre alors dans $\mathbb{R}^3$ le système S

Exercice 12

On considère dans $\mathbb{R}^3$ le système $(S) : \begin{cases} x + 3y + 2z = 1 \\ 2y - z = 4 \\ x + y + 2z = 5 \end{cases}$

1) Déterminer la matrice M de (S)

2) Montrer que (S) admet une solution unique.

3) Soit la matrice $N = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

a) Calculer la matrice $M \times N$

b) En déduire la matrice M^{-1}

c) Déterminer alors la solution de (S)

Exercice 13

Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

1) Déterminer la matrice A^{-1} inverse de la matrice A

2) Dans une boulangerie, Amal achète deux croissants et trois pains au chocolat pour un total de 2,8DT. Dans la même boulangerie, Sami achète trois croissants et cinq pains au chocolat pour un total de 4,5DT

a) Traduire ce problème par un système (S) de deux équations

b) Ecrire (S) sous forme matricielle

c) Déterminer le prix d'un croissant et celui d'un pain au chocolat

Exercice 14

Soit le système $\begin{cases} x - 2y = 6 \\ 3x - 5y = 17 \end{cases}$

1) Traduire ce système sous forme matricielle $AX = C$, où A est la matrice des coefficients de x et y, X la matrice colonne des inconnues et C la matrice colonne des constantes

2) Vérifier que la matrice $B = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice inverse de A

3) En déduire la solution du système

Exercice 15

Une entreprise de confection fabrique des jupes, des robes et des pantalons.

- Pour fabriquer une jupe il faut 1.5 m de tissue, 4 boutons et une fermeture
- Pour fabrique une robe il faut 2m de tissue, 8 boutons et une fermeture
- Pour fabrique un pantalon il faut 1.5 m de tissue, 2 boutons et une fermeture

Soit $A = \begin{pmatrix} 1.5 & 2 & 1.5 \\ 4 & 8 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -6 & 0.5 & 8 \\ 2 & 0 & -3 \\ 4 & -0.5 & -4 \end{pmatrix}$

1) a) Donner l'ordre de A
   b) Que représente la première colonne de A ?
2) a) Montrer que A est inversible
   b) Montrer que B est l'inverse de A
3) Déterminer les quantités de tissus (en mètres), de boutons et de fermetures utilisés pour la fabrication de 100 jupes, 80 robes et 60 pantalons
4) L'entreprise dispose de 620 m de tissus, 1680 boutons et 380 fermetures. Combien de robes, de jupes et de pantalons peut-elle fabriquer ?

Exercice 16

1) On considère le système $(S): \begin{cases} 5x + 7y + 9z = 235 \\ x + 2y + 3z = 65 \\ 2x + 2y + 3z = 80 \end{cases}$
   a) Déterminer la matrice M du système (S)
   b) Démontrer que la matrice M est inversible et vérifier que $M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix}$
   c) Résoudre alors le système (S)
2) Le tableau suivant indique les frais de fabrication en matière première, main d'œuvre et frais divers pour chaque unité des différents types de produits A, B et C

Type de produit / Frais de fabrication	Unité de type A	Unité de type B	Unité de type C
Matière première en DT	5	7	9
Main d'œuvre en DT	1	2	3
Frais divers en DT	2	2	3

Les frais de tous les produits fabriqués en une journée donnée sont les suivants :
▪ Matière première : 235 DT ▪ Main d'œuvre : 65 DT ▪ Frais divers : 80 DT
Déterminer le nombre de produits fabriqués en cette journée de chaque type A, B et C

Exercice 17 BAC [Session de contrôle 2010]

Une chaine hôtelière gère des hôtels, tous de même catégorie, dans les villes de Tabarka, Sousse et Zarzis. Les prix (en dinars) en pension complète d'une journée et par personne, dépendent de la saison du séjour et sont donnés dans le tableau suivant :

Villes / périodes	Tabarka	Sousse	Zarzis
Haute saison	100	140	60
Moyenne saison	80	80	60
Basse saison	40	40	40

Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} 100 & 140 & 60 \\ 80 & 80 & 60 \\ 40 & 40 & 40 \end{pmatrix}$

1) Vérifier que $P^{-1} = \frac{1}{80}\begin{pmatrix} -2 & 8 & -9 \\ 2 & -4 & 3 \\ 0 & -4 & 8 \end{pmatrix}$
2) Un client choisit d'effectuer un séjour de 14 jours dans les différents hôtels de cette chaîne, composé de la façon suivante : Quatre jours à Tabarka, quatre jours à Sousse et six jours à Zarzis

   On associe à ce choix la matrice $M = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

   a) Calculer le produit $P \times M$. En déduire le coût du séjour de ce client pour chacune des trois périodes
   b) Ce client dispose d'un budget de 900 dinars. En quelle saison peut-il séjourner ?

3) Dans un spot publicitaire, la chaîne hôtelière affirme qu'un séjour complet de 14 jours est possible au prix de 1080 dinars en haute saison, 920 dinars en moyenne saison et 560 dinars en basse saison. Comment ce séjour se compose-t-il ?

Exercice 18 BAC [session de contrôle 2012]

Un bijoutier fabrique pendant une semaine 12 bracelets en or, en trois modèles B_1, B_2 et B_3. Il dispose de 150g d'or pour la fabrication de ces bracelets d'un coût total de 7900 DT.
De plus, la masse et le coût de fabrication d'un bracelet de chacun des trois modèles sont donnés dans le tableau suivant :

Type de bracelet	B_1	B_2	B_3
Le coût de fabrication d'un bracelet en dinars	500	600	1000
Masse d'un bracelet	10	10	20

On se propose de déterminer le nombre de bracelets fabriqués de chaque modèle
1) Justifier que le problème revient à résoudre le système suivant :
$$(S):\begin{cases}500x+600y+1000z=7900\\10x+10y+20z\\x+y+z=12\end{cases}$$
2) On pose $A=\begin{pmatrix}500&600&1000\\10&10&20\\1&1&1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}-1&40&200\\1&-50&0\\0&10&-100\end{pmatrix}$
   a) Calculer AB, en déduire la matrice A^{-1} inverse de A
   b) On pose U et V les matrices colonnes suivantes : $U=\begin{pmatrix}7900\\150\\12\end{pmatrix}$ et $V=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$. Vérifier que $AV=U$ est équivalent à $V=\frac{1}{100}BU$
   c) Déterminer alors le nombre de bracelets fabriqués pour chacun des modèles B_1, B_2 et B_3

Exercice 19

Un parfumeur utilise des essences de rose et de lavande pour fabriquer trois parfums différents. Chaque colonne de la matrice $A=\begin{pmatrix}26&50&60\\74&50&40\end{pmatrix}$ indique pour un parfum les pourcentages de composition selon les essences. Ainsi le premier parfum comporte 26% d'essence de rose et 74% d'essence de lavande.
1) Donner la composition des deuxième et troisième parfums.
2) 1% d'essence de rose coûte 5 € et 1% d'essence de lavande coûte 3 €. Le parfumeur code cela à l'aide de la matrice $P=\begin{pmatrix}5&3\end{pmatrix}$
   a) Calculer $B=PA$
   b) Que représente B ?
3) En raison d'un été caniculaire, le prix de 1% d'essence de rose augmente de 1 € et celui de 1% d'essence de lavande diminue de 1 €.
   a) Donner la nouvelle valeur de P
   b) Calculer la nouvelle valeur de B
   c) Quelle est l'influence de cette canicule sur les coûts des différents parfums ?

Exercice 20

Soit A la matrice $A=\begin{pmatrix}2&3\\3&5\end{pmatrix}$
1) Déterminer le nombre z tel que $B=\begin{pmatrix}5&z\\z&2\end{pmatrix}$ soit l'inverse de A
2) Dans une boulangerie, Pierre achète deux croissants et trois pains au chocolat pour un total de 4,6 €. Dans la même boulangerie, Marie achète trois croissants et cinq pains au chocolat pour un total de 7,4 €
   a) Traduire ce problème par un système de deux équations
   b) En utilisant les matrices A et B, déterminer le prix d'un croissant et celui d'un pain au chocolat

Correction des exercices

Exercice 1

1) $M=\begin{pmatrix}8&5&0\\2&3&8\\0&4&6\\4&6&5\end{pmatrix}$

2) a) $C=\begin{pmatrix}5\\6\\9\end{pmatrix}$

b) $M\times C=\begin{pmatrix}8&5&0\\2&3&8\\0&4&6\\4&6&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\6\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}70\\100\\78\\101\end{pmatrix}$ donc il faut 70 unités de cacao, 100 unités de beurre, 78 unités de lait et 101 unités de sucre.

c) Les prix sont représentés par la matrice ligne $P=\begin{pmatrix}10&8&4&3\end{pmatrix}$, le prix total pour cette commande sera donc $P\times(M\times C)=\begin{pmatrix}10&8&4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}70\\100\\78\\101\end{pmatrix}=2115$

Exercice 2

1) $M=\begin{pmatrix}0.7&0.5&0.8\\0.3&0.5&0.2\end{pmatrix}$

2) a) $X=\begin{pmatrix}25\\40\\35\end{pmatrix}$

b) $M\times X=\begin{pmatrix}0.7&0.5&0.8\\0.3&0.5&0.2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}25\\40\\35\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}65.5\\34.5\end{pmatrix}$. La matrice $M\times X$ donne les quantités respectives d'arabica et de robusta utilisées ce jour-là.

3) L'état du stock est donné par la matrice $\begin{pmatrix}150\\100\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}65.5\\34.5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}84.5\\65.5\end{pmatrix}$

Exercice 3

1) Le deuxième parfum comporte 50% d'essence de rose et 50% d'essence de lavande.
Le troisième parfum comporte 60% d'essence de rose et 40% d'essence de lavande.

2) a) $B=PA=\begin{pmatrix}5&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}26&50&60\\74&50&40\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}352&400&420\end{pmatrix}$

b) B représente les coûts des trois parfums, 352 € pour le premier parfum, 400 € pour le deuxième et 420 € pour le troisième

3) a) On a $P=\begin{pmatrix}5+1&3-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&2\end{pmatrix}$

b) On a $B=PA=\begin{pmatrix}6&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}26&50&60\\74&50&40\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}304&400&440\end{pmatrix}$

c) Le premier parfum contenant peu d'essence de rose a vu son coût diminuer. Le deuxième parfum équilibré en parfums a un coût inchangé. Le troisième parfum riche en essence de rose a vu son coût augmenter

Exercice 4

1) $A+4I_3=\begin{pmatrix}-3&1&1\\1&-3&1\\1&1&-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}=B$

2) $\det A = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -24+4+4 = -16 \neq 0$ donc A est inversible

3) a) $A^2 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -5 & -5 \\ -5 & 11 & -5 \\ -5 & -5 & 11 \end{pmatrix}$

b) $A^2 + 5A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & -5 \\ -5 & 11 & -5 \\ -5 & -5 & 11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -15 & 5 & 5 \\ 5 & -15 & 5 \\ 5 & 5 & -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = -4I_3$

c) $A(B+I_3) = A(A+5I_3) = A^2+5A = -4I_3$ donc $A \times \left[-\frac{1}{4}(B+I_3)\right] = I_3$ et par suite $A^{-1} = -\frac{1}{4}(B+I_3)$

Exercice 5

1) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \\ -6 & 10 & -12 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad aA + bI_3 = \begin{pmatrix} a+b & -3a & 6a \\ 6a & -8a+b & 12a \\ 3a & -3a & 4a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \\ -6 & 10 & -12 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ donc $a=-1$ et $b=2$

2) $A^2 = -A + 2I_3$ donc $A^2 + A = 2I_3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(A+I_3)A = I_3$ et par suite $A^{-1} = \frac{1}{2}(A+I_3)$

Exercice 6

1) $P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3P$ $\qquad Q = \frac{1}{4}(P+I_3) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$PQ = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} = P$ et $QP = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} = P$

2) $(4 \times I_3 - P)Q = 4Q - PQ = 4Q - P = P + I_3 - P = I_3$

et $Q(4 \times I_3 - P) = 4Q - QP = 4Q - P = P + I_3 - P = I_3$ donc la matrice Q est inversible et on a

$Q^{-1} = 4 \times I_3 - P = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 7

1) a) $\det P = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -(-2)\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 4 - 5 = -1 \neq 0$ donc P est inversible

b) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$ donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

2) $A = P \times D \times P^{-1} \Leftrightarrow P^{-1} \times A \times P = P^{-1} \times P \times D \times P^{-1} \times P = I_3 \times D \times I_3 = D$

donc $D = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -6 & -2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 2 \\ 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3) $D^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $D^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4) $A^2 = P \times D \times P^{-1} \times P \times D \times P^{-1} = P \times D^2 \times P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & -18 & -6 \\ 12 & 19 & 6 \\ -6 & -9 & -2 \end{pmatrix}$

$A^3 = P \times D^2 \times P^{-1} \times P \times D \times P^{-1} = P \times D^3 \times P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27 & -42 & -14 \\ 26 & 41 & 14 \\ -8 & -15 & -6 \end{pmatrix}$

Exercice 8

1) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 3 = 4 \neq 0$ donc A est inversible

2) a) $A\times B=\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&1&1\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&-1\\-3&1&-1\\1&1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}=4I_3$

b) $A^{-1}=\frac{1}{4}B$

3) La forme matricielle du système (S) est $AX=C$ avec $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix}$

Donc $X=A^{-1}\times C=\frac{1}{4}B\times C=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&1&-1\\-3&1&-1\\1&1&3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-4\\-8\\12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\3\end{pmatrix}$ donc $S_{\mathbb{R}^3}=\{(-1,-2,3)\}$

Exercice 9

1) a) $\det A=\begin{vmatrix}1&-1&-1\\-2&3&4\\-1&1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&4\\1&2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-2&4\\-1&2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}-2&3\\-1&1\end{vmatrix}=2-1=1$

b) $A^{-1}=\begin{pmatrix}2&1&-1\\0&1&-2\\1&0&1\end{pmatrix}$

2) $(S)\Leftrightarrow AX=K$ avec $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $K=\begin{pmatrix}10\\15\\-12\end{pmatrix}$ et par suite $X=A^{-1}K=\begin{pmatrix}2&1&-1\\0&1&-2\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10\\15\\-12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}47\\39\\-2\end{pmatrix}$

donc $\begin{cases}x=47\\y=39\\z=-2\end{cases}$ $\quad S_{\mathbb{R}^3}=\{(47,39,-2)\}$

Exercice 10

1) a) $\det M=\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&1\\1&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}=1+1=2\neq 0$ donc M est inversible

b) $A=\frac{1}{2}(M-I_3)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$

c) $A\times M=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I_3$ donc $A=M^{-1}$

2) a) $(S)\Leftrightarrow MX=C$ avec $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix}2\\4\\-2\end{pmatrix}$

b) $X=M^{-1}\times C=A\times C=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\4\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-2\\4\end{pmatrix}$ donc $S_{\mathbb{R}^3}=\{(0,-2,4)\}$

Exercice 11

4) $\det M=\begin{vmatrix}0&1&2\\-1&3&0\\1&-2&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&0\\-2&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&2\\3&0\end{vmatrix}=3-6=-3\neq 0$ donc M est inversible

5) $\begin{pmatrix}0&1&2\\-1&3&0\\1&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3&5&6\\-1&2&2\\1&-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I_3$ donc $M^{-1}=\begin{pmatrix}-3&5&6\\-1&2&2\\1&-1&-1\end{pmatrix}$

6) a) $(S)\Leftrightarrow MX=C$ avec $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix}5\\2\\-2\end{pmatrix}$

b) $X=M^{-1}C=\begin{pmatrix}-3&5&6\\-1&2&2\\1&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\2\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-17\\-5\\5\end{pmatrix}$ donc $S_{\mathbb{R}^3}=\{(-17,-5,5)\}$

Exercice 12

4) $M=\begin{pmatrix}1&3&2\\0&2&-1\\1&1&2\end{pmatrix}$

5) $\det M=\begin{vmatrix}1&3&2\\0&2&-1\\1&1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&-1\\1&2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}3&2\\2&-1\end{vmatrix}=5+-7=-2\neq 0$ donc (S) possède une solution unique

6) a) $M\times N=\begin{pmatrix}-5&4&7\\1&0&-1\\2&-2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3&2\\0&2&-1\\1&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=2I_3$

b) $M^{-1}=\frac{1}{2}N$

c) $(S)\Leftrightarrow MX=C$ avec $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}$ donc $X=M^{-1}C=\frac{1}{2}NC=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&3&2\\0&2&-1\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}26\\2\\18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13\\1\\9\end{pmatrix}$

donc $S_{\mathbb{R}^3}=\{(13,1,9)\}$

Exercice 13

1) $A^{-1}=\begin{pmatrix}5&-3\\-3&2\end{pmatrix}$

2) a) Soit x le prix d'un croissant et soit y le prix d'un pain au chocolat. On a donc $\begin{cases}2x+3y=4.6\\3x+5y=7.4\end{cases}$

b) La matrice A représente les coefficients des inconnues dans le système. Si on pose $C=\begin{pmatrix}2.8\\4.5\end{pmatrix}$, la solution du système est donnée par $A^{-1}C=\begin{pmatrix}5&-3\\-3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2.8\\4.5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.5\\0.6\end{pmatrix}$

Un croissant coûte 0,5 DT et un pain au chocolat coûte 0.6 DT

Exercice 14

1) $(S)\Leftrightarrow AX=C$ avec $A=\begin{pmatrix}1&-2\\3&-5\end{pmatrix}$, $X\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix}6\\17\end{pmatrix}$

2) $AB=\begin{pmatrix}1&-2\\3&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5&2\\-3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I_2$ donc A est inversible et $A^{-1}=B$

3) $(S)\Leftrightarrow X=BC\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&2\\-3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\17\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$ donc $\begin{cases}x=4\\y=-1\end{cases}$

Exercice 15

1) a) A est une matrice carrée d'ordre 3

b) La première colonne de A représente la matière première nécessaire pour fabriquer une jupe

2) a) $\det A=\begin{vmatrix}1.5&2&1.5\\4&8&2\\1&1&1\end{vmatrix}=1.5\begin{vmatrix}8&2\\1&1\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}4&2\\1&1\end{vmatrix}+1.5\begin{vmatrix}4&8\\1&1\end{vmatrix}=9-4-6=-1\neq 0$ donc A est inversible

b) $A\times B=\begin{pmatrix}1.5&2&1.5\\4&8&2\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-6&0.5&8\\2&0&-3\\4&-0.5&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I_3$ donc $B=A^{-1}$

3) $A\times\begin{pmatrix}100\\80\\60\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1.5&2&1.5\\4&8&2\\1&1&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}100\\80\\60\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}400\\1160\\240\end{pmatrix}$ donc pour fabriquer 100 jupes, 80 robes et 60 pantalons il faut 400m de tissu, 1160 boutons et 240 fermetures

4) Soit x, y et z les nombres respectifs des jupes, de robes et de pantalons qu'on peut fabriquer. (x,y,z) est la solution du système (S) : $AX=C$ avec $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix}620\\1680\\380\end{pmatrix}$

$$AX = C \Leftrightarrow X = A^{-1} \times C = \begin{pmatrix} -6 & 0.5 & 8 \\ 2 & 0 & -3 \\ 4 & -0.5 & -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 620 \\ 1680 \\ 380 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 160 \\ 100 \\ 120 \end{pmatrix}$$

On peut donc fabriquer 160 jupes, 100 robes et 120 pantalons

Exercice 16

1) a) La matrice A associée au système (S) est $M = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

b) $\det(M) = 5\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5(6-6) + (21-18) = 3 \neq 0$ donc M est inversible et soit M^{-1} sa matrice inverse.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-1+2 & 0-2+2 & 0-3+3 \\ 5-1-4 & 7-2-4 & 9-3-9 \\ -\frac{10}{3}+\frac{4}{3}+2 & -\frac{14}{3}+\frac{8}{3}+2 & -6+4+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

et par suite $M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix}$

c) $(S) \Leftrightarrow MX = K$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} 235 \\ 65 \\ 80 \end{pmatrix}$ ce qui signifie $X = M^{-1} \times K$ ou encore :

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 235 \\ 65 \\ 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -65-80 \\ 235-65-2\times 80 \\ -\frac{2}{3}\times 235 + \frac{4}{3}\times 65 + 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} \text{ donc } \begin{cases} x = 15 \\ y = 10 \\ z = 10 \end{cases}$$

2) On pose x le nombre de produit du type A, y le nombre de produits du type B et z le nombre de produit de type C ; x, y et z sont donc les solutions du système $(S) : \begin{cases} 5x+7y+9z = 235 \\ x+2y+3z = 65 \\ 2x+2y+3z = 80 \end{cases}$

et par suite $\begin{cases} x = 15 \\ y = 10 \\ z = 10 \end{cases}$ donc 15 produits de type A, 10 produits de type B et 10 produits de type C ont été fabriqués en cette journée.

Exercice 17

1) $\frac{1}{80}\begin{pmatrix} -2 & 8 & -9 \\ 2 & -4 & 3 \\ 0 & -4 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 100 & 140 & 60 \\ 80 & 80 & 60 \\ 40 & 40 & 40 \end{pmatrix} = \frac{1}{80}\begin{pmatrix} 80 & 0 & 0 \\ 0 & 80 & 0 \\ 0 & 0 & 80 \end{pmatrix} = I_3$ donc $P^{-1} = \frac{1}{80}\begin{pmatrix} -2 & 8 & -9 \\ 2 & -4 & 3 \\ 0 & -4 & 8 \end{pmatrix}$

2) a) $P \times M = \begin{pmatrix} 100 & 140 & 60 \\ 80 & 80 & 60 \\ 40 & 40 & 40 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1320 \\ 1000 \\ 560 \end{pmatrix}$

En haute saison le client payera 1320 DT, en moyenne saison il payera 1000 DT et en basse saison il payera 560 DT.

b) Avec un budget de 900 DT, ce client peut profiter d'un séjour en basse saison.

3) On désigne par X, Y et Z le nombre de jours respectivement en mode haute saison, moyenne saison et basse saison. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 100 & 140 & 60 \\ 80 & 80 & 60 \\ 40 & 40 & 40 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1080 \\ 920 \\ 560 \end{pmatrix} \text{ avec } X+Y+Z = 14$$

Et par suite $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = P^{-1} \times \begin{pmatrix} 1080 \\ 920 \\ 560 \end{pmatrix} = \frac{1}{80}\begin{pmatrix} -2 & 8 & -9 \\ 2 & -4 & 3 \\ 0 & -4 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1080 \\ 920 \\ 560 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}$

Donc le séjour se compose de : 2 jours en haute saison, 2 jours en moyenne saison et 10 jours en basse saison

Exercice 18

1) En posant x le nombre de bracelet du modèle B_1, y le nombre de bracelets du modèle B_2 et z le nombre de

bracelets du model B_3. On obtient le système suivant : $\begin{cases} 500x+600y+1000z=7900 \\ 10x+10y+20z=150 \\ x+y+z=12 \end{cases}$

2) a) $AB=\begin{pmatrix} 500 & 600 & 1000 \\ 10 & 10 & 20 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 40 & 200 \\ 1 & -50 & 0 \\ 0 & 10 & -100 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{pmatrix}$ donc $A^{-1}=\frac{1}{100}B$

b) $AV=U \Leftrightarrow BAV=BU \Leftrightarrow 100\times I_3\times V=BU \Leftrightarrow V=\frac{1}{100}BU$

c) $V=\frac{1}{100}\begin{pmatrix} -1 & 40 & 200 \\ 1 & -50 & 0 \\ 0 & 10 & -100 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7900 \\ 150 \\ 12 \end{pmatrix}=\frac{1}{100}\begin{pmatrix} 500 \\ 400 \\ 300 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Ainsi le bijoutier a fabriqué 5 bracelets du model B_1, 4 du modèle B_2 et 3 du modèle B_3

Exercice 19

4) Le deuxième parfum comporte 50% d'essence de rose et 50% d'essence de lavande.
Le troisième parfum comporte 60% d'essence de rose et 40% d'essence de lavande.

5) a) $B=PA=\begin{pmatrix} 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 26 & 50 & 60 \\ 74 & 50 & 40 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 352 & 400 & 420 \end{pmatrix}$

c) B représente les coûts des trois parfums, 352 € pour le premier parfum, 400 € pour le deuxième et 420 € pour le troisième

6) a) On a $P=\begin{pmatrix} 5+1 & 3-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 2 \end{pmatrix}$

d) On a $B=PA=\begin{pmatrix} 6 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 26 & 50 & 60 \\ 74 & 50 & 40 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 304 & 400 & 440 \end{pmatrix}$

e) Le premier parfum contenant peu d'essence de rose a vu son coût diminuer. Le deuxième parfum équilibré en parfums a un coût inchangé. Le troisième parfum riche en essence de rose a vu son coût augmenter

Exercice 20

3) On veut que la matrice B soit l'inverse de A, c'est-à-dire $A\times B=I_2$:

$$AB=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & z \\ z & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3z+10 & 2z+6 \\ 5z+15 & 3z+10 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc $3z+10=1$, $2z+6=0$, $5z+15=0$ et $3z+10=1$. Chacune des quatre équations a pour solution -3 donc $z=-3$

4) a) Soit x le prix d'un croissant et soit y le prix d'un pain au chocolat. On a donc $\begin{cases} 2x+3y=4.6 \\ 3x+5y=7.4 \end{cases}$

c) La matrice A représente les coefficients des inconnues dans le système. Si on pose $C=\begin{pmatrix} 4.6 \\ 7.4 \end{pmatrix}$, la solution du système est donnée par $A^{-1}C=BC=\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4.6 \\ 7.4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0.8 \\ 1 \end{pmatrix}$

Un croissant coûte 0,80 € et un pain au chocolat coûte 1 €

Chapitre 08

Statistiques

Rappel de cours

Dans la suite on considère la série statistique double (x, y)

Valeurs x_i	x_1	x_2	$\dots$	$\dots$	$\dots$	x_n
Valeurs y_i	y_1	y_2	$\dots$	$\dots$	$\dots$	y_n

Paramètres

- Les valeurs moyennes de cette série statistique sont : $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} x_i$ et $\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} y_i$
- La variance de la série statistique x est $V(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n}(x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} x_i^2 - \overline{x}^2$
- La variance de la série statistique y est $V(y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n}(y_i - \overline{y})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} y_i^2 - \overline{y}^2$
- L'écart-type est la racine carrée de la variance : $\sigma_x = \sqrt{V(x)}$ et $\sigma_y = \sqrt{V(y)}$
- La covariance entre x et y est : $\operatorname{cov}(x, y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} x_i y_i - \overline{x}.\overline{y}$

Nuage de points d'une série statistique double

- Le nuage de points de cette série double est l'ensemble des points de coordonnées (x_i, y_i)
- Le point moyen G de ce nuage a pour coordonnées $G(\overline{x}, \overline{y})$

Ajustement affine : Méthode de Mayer

1) Partager le nuage de points suivant les valeurs croissantes de x_i en deux nuages d'égale importance
2) On calcule les coordonnées des points moyens G_1 et G_2 de ces deux nuages
3) On détermine l'équation de la droite (G_1G_2). Cette droite est appelée **droite de Mayer**

- La droite de Mayer passe par le point moyen G

Ajustement affine : Méthode des moindres carrées

- Le coefficient de corrélation linéaire est $r = \frac{\operatorname{cov}(x, y)}{\sigma_x \sigma_y}$
- $-1 \le r \le 1$
- Si $|r| \le 0{,}75$ alors la corrélation entre x et y est faible.
- Si $0{,}75 < |r| \le 1$ alors la corrélation entre x et y est forte.
- Lorsque le coefficient de corrélation linéaire est proche, en valeur absolue, de 1 $(0{,}75 \le |r| \le 1)$, il est possible d'approcher la liaison entre x et y par deux relations affines représentées graphiquement par deux droites passant par le point le point moyen G :
  - La droite de régression de y en x : $y = ax + b$ avec $a = \frac{\operatorname{cov}(x, y)}{V(x)}$ et $b = \overline{y} - a\overline{x}$
  - La droite de régression de x en y : $x = a'y + b$ avec $a' = \frac{\operatorname{cov}(x, y)}{V(y)}$ et $b' = \overline{x} - a'\overline{y}$

Attention !

- L'équation de la droite de régression de x en y ne s'obtient pas à partir de l'équation de la droite de régression de y en x

- Ne pas croire que r est toujours positif : $-1 \leq r \leq 1$
- Ne pas croire que $\operatorname{cov}(X,Y) = \sigma_X \sigma_Y$

Les exercices

Exercice 1

En prévision du lancement d'un nouveau produit, une société a effectué une enquête auprès de clients éventuels pour fixer le prix de vente de ce produit. Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous :

Prix x_i de vente en dinars	9	10	11	12	14	15	16	17
Nombre y_i d'acheteurs éventuels	180	160	150	130	100	90	80	70

1) Représenter graphiquement le nuage de points $M_i(x_i, y_i)$
2) a) Donner une équation cartésienne de la droite de Mayer associée à ce nuage de point
   b) Estimer graphiquement le prix maximum pour qu'il y ait au moins 50 acheteurs potentiels
   c) Donner le nombre d'acheteurs que l'on peut prévoir si le prix de vente est fixé à 13 Dinars

Exercice 2 BAC [session de contrôle 2011]

Le coefficient budgétaire, en pourcentage, d'une dépense d est égal a $\frac{d}{D} \times 100$ où D représente la dépense totale.
Le tableau suivant donne révolution du coefficient budgétaire, donne en pourcentage, des dépenses consacrées au transport et aux communications des ménages tunisiens.

armée	1975	1980	1985	1990	1995	2000	2005
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6	7
Coefficient budgétaire des dépenses consacrées au transport et aux communications y_i	4.7	4.9	7	8.7	9.1	10	10.3

Source: institut national des statistiques

1) Déterminer les moyennes $\overline{x}$ et $\overline{y}$
2) Représenter le nuage de points de la série statistique (x_i, y_i) et placer le point moyen G
3) La forme du nuage de points suggère un ajustement affine. Déterminer équation de la droite de régression de y en x obtenue par la méthode des moindres carrées
4) D'après cet ajustement, quel serait le coefficient budgétaire des dépenses consacrées au transport et aux communications des ménages tunisiens en 2015 ? En 2030 ?

Exercice 3

Le tableau suivant donne l'âge (en année) et la tension artérielle maximale de 5 patients

x (Age)	36	42	48	54	60
y (Tension artérielle)	11.5	12	13.5	14	15

1) a) Calculer $\overline{x}$, $\overline{y}$, $V(x)$, $V(y)$ et $\text{cov}(x,y)$
   b) Calculer le coefficient de corrélation entre x et y
   c) Y-a-t-il forte corrélation entre x et y ? Justifier
   d) Déterminer une équation cartésienne de la droite de régression de y en x
2) Quelle tension maximale devrait avoir un patient de 30 ans ?

Exercice 4

On donne la série statistique suivante à deux caractères, où a remplace l'une des données effacées

x_i	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7
y_i	10	11	15	14	a	15

Par la méthode des moindres carrés, on a obtenu l'équation de la droite D de régression de y en x, à savoir $D : y = 10x - 1$. Déduisez-en la valeur de a

Exercice 5

Le tableau ci-dessous permet de suivre l'évolution de l'espérance de vie des femmes à la naissance (en années) dans un pays :

Année x_i	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
Espérance de vie y_i	80.9	81.1	81.3	81.4	81.8	81.9	82	82.3	82.4	82.4

1) a) Représenter, dans un repère orthogonal, le nuage de points associé à la série.
b) Un ajustement affine de cette série est-il justifié ?
2) a) Calculer la moyenne $\overline{X}$ et l'écart type σ_X de la variable X
b) Calculer la moyenne $\overline{Y}$ et l'écart type σ_Y de la variable Y
3) a) Calculer le coefficient de corrélation entre X et Y
b) Interpréter le résultat trouvé
4) Donner une équation de la droite de régression de Y en X par la méthode des moindres carrées.
5) Quelle pourrait être une estimation de l'espérance de vie d'une femme de ce pays en 2010?

Exercice 6 BAC [session principale 2011]

Le tableau ci-dessous donne l'évolution de la dépense annuelle moyenne par personne, exprimée en dinars, tous les cinq ans entre 1970 et 2005

Période	1970 - 1975	1975 - 1980	1980 - 1985	1985 - 1990	1990 - 1995	1995 - 2000	2000 - 2005
Rang de la période x	1	2	3	4	5	6	7
Dépense moyenne y des dépenses en dinars	147	248	471	716	966	1329	1820

Source : INS

Le nuage de points ci-contre associé à la série statistique (x, y) dans un repère orthogonal du plan suggère un ajustement exponentiel.
On pose $z = \ln y$

1) a) Copier et compléter le tableau suivant de la série (x, y) (On donnera les valeurs au centième près)

x	1	2	3	4	5	6	7
$z = \ln y$					6.87		

b) Déterminer les moyennes $\overline{x}$ et $\overline{z}$ respectives de x et z
c) Construire dans un repère orthogonal le nuage de points associé à la série (x, z) et placer le point moyen $G(\overline{x}, \overline{z})$
d) Donner une équation de la droite de régression linéaire D de z en x obtenue par la méthode des moindres carrées. (les coefficients a et b de cette droites seront arrondis au centième)
2) a) Vérifier que $y = \alpha e^{\beta x}$ avec $\alpha = 114,43$ et $\beta = 0,42$
b) Déterminer une estimation de la dépense moyenne, exprimée en dinars, par personne et par an pendant la période $[2010, 2015[$

Exercice 7 BAC [session de contrôle 2009 Section sciences techniques]

Un nourrisson est pesé quotidiennement durant le 1er mois de sa naissance. Dans le tableau statistique ci-dessous, la variable X désigne le nombre de jours après la naissance de nourrisson et la variable Y le poids en kilogrammes.

X (en jours)	4	6	9	14	17	19	22
Y (en Kg)	3.6	3.75	3.80	3.90	4	4.25	4.50

1) a) Représenter, dans un repère orthogonal, le nuage de points associé à la série (X, Y)
b) Un ajustement affine de cette série est-il justifié ?
2) a) Calculer la moyenne $\overline{X}$ et l'écart type σ_X de la variable X
b) Calculer la moyenne $\overline{Y}$ et l'écart type σ_Y de la variable Y
3) a) Calculer le coefficient de corrélation entre X et Y
b) Interpréter le résultat trouvé
4) a) Calculer la covariance du couple (X, Y)
b) En déduire qu'une équation de la droite de régression de Y en X est $Y = 0.04X + 3.41$ (les coefficients sont donnés à 0.01 près)

5) a) Quelle pourrait être une estimation du poids du nourrisson après 30 jours de sa naissance ?
b) Quel pourrait être l'âge du nourrisson sachant que son poids est 3.85 kg

Exercice 8

Voici l'évolution du tirage (en milliers d'exemplaires) d'un journal durant les sept derniers mois.

Mois x_i	1	2	3	4	5	6	7
Tirages y_i	6	4	6	8	10	10	12

1) a) Dans un repère orthogonal, représentez le nuage de points associé à cette série
b) Calculez les coordonnes du point moyen G de ce nuage
2) Donner, par la méthode des moindres carrés, les équations de la droite de régression de y en x et la droite de régression de x en y
3) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre x et y. interprétez-le
4) En supposant que l'évolution du tirage de ce journal se poursuive ainsi dans les mois futurs, estimez le tirage lors du dixième mois à l'aide de la droite de régression de y en x

Exercice 9

Une enquête menée pour le compte d'une entreprise a permis d'établir le nombre d'acheteurs d'un produit X selon le montant de son prix de vente. Les résultats de l'enquête sont résumés dans le tableau ci-dessous dans lequel :

- x_i désigne le prix de vente unitaire (en dinars) du produit X
- y_i le nombre d'acheteurs en milliers

x_i	1	1.50	2	3	4
y_i	3.75	2.8	2	1	0.5

1) Représenter le nuage de points associé à la série (x_i, y_i) dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan (unités graphiques : 2 cm pour 1 dinar en abscisse et 2 cm pour 1000 acheteurs en ordonnée)
2) On recherche un ajustement affine de la série (x_i, y_i)
   a) Donner l'équation de la droite d'ajustement de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés. Les calculs seront faits à la calculatrice et les valeurs cherchées seront arrondies au centième, on ne demande aucune justification
   b) Tracer cette droite dans le même repère que précédemment
   c) Utiliser cet ajustement pour estimer le nombre d'acheteurs potentiels pour un produit vendu 2.50 dinars

Exercice 10

Pour une série statistique double $(x_i, y_i)_{1\le i\le 5}$ la méthode des moindres carrés a permis de trouver :

- L'équation de la droite D de régression de y en x : $y = -0.7x + 5.6$
- L'équation de la droite D' de régression de x en y : $x = -0.8y + 2$

Calculer les coordonnées du point moyen G associé à cette série

Exercice 11

Dans tout l'exercice, le détail des calculs n'est pas demandé. Les résultats seront arrondis à 10^{-3}

On rappelle que l'image d'un réel x par la fonction exponentielle peut être notée $\exp(x) = e^x$

On veut étudier l'évolution des records de l'épreuve d'athlétisme du 100 mètres masculin. Pour cela on cherche un ajustement des records pour en prévoir l'évolution.

On donne dans le tableau suivant certains records, établis depuis 1900

Année	1900	1912	1921	1930	1964	1983	1991	1999
Rang de l'année, x_i	0	12	21	30	64	83	91	99
Temps en seconde y_i	10.80	10.60	10.40	10.30	10.06	9.93	9.86	9.79

1) **Étude d'un modèle affine**
   a) Construire le nuage de point $M_i(x_i, y_i)$ avec i compris entre 1 et 8, associé à cette série statistique double. On prendra comme unité graphique 1 cm pour dix ans en abscisse et 1 cm pour un dixième de seconde en ordonnées. On commencera les graduations au point de coordonnées $(0, 9)$
   b) Peut-on envisager un ajustement affine à court terme ? Cet ajustement permet-il des prévisions pertinentes à long terme sur les records futurs ?

2) **Étude d'un modèle exponentiel**
Après étude, on choisit de modéliser la situation par une autre courbe
On effectue les changements de variables suivants $X = e^{-0,00924\,x}$ et $Y = \ln y$, on obtient le tableau :

$X_i = e^{-0,00924\,x_i}$	1	0.895	0.824	0.758	0.554	0.464	0.431	0.401
$Y_i = \ln y_i$	2.380	2.361	2.342	2.332	2.309	2.296	2.288	2.281

a) Donner une équation de la droite de régression de Y en X obtenue par la méthode des moindres carrés
b) En déduire que l'on peut modéliser une expression de y en fonction de x sous la forme suivante :
$y = \exp\left(a\,e^{-0,00924\,x} + b\right)$ où a et b sont deux réels à déterminer
c) A l'aide de cet ajustement, quel record du 100 mètres peut-on prévoir en 2010 ?
d) Calculer la limite en $+\infty$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression suivante
$f(t) = \exp\left(0.154\,e^{-0.00924\,t} + 2.221\right)$
e) Que peut-on en conclure, en utilisant ce modèle, quand aux records du cent mètres masculin à très long terme

Exercice 12

Le tableau ci-dessous donne l'évolution du nombre de milliers d'emplois salariés dans le secteur du textile en France, entre 2000 et 2006

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5	6
Nombre de milliers d'emplois salariés y_i	118	113	106	98	89	81	75

1) On pose $z = \ln y$
a) Recopier et compléter le tableau suivant en arrondissant les valeurs de z_i au millième

x_i	0	1	2	3	4	5	6
z_i	4.771						

b) Déterminer une équation de la droite d'ajustement de z en x obtenue par la méthode des moindres carrés (aucune justification n'est exigée, les calculs seront effectués à la calculatrice et les coefficients seront arrondis au millième)
c) En déduire une relation entre y et x de la forme $y = A\,e^{Bx}$, A étant arrondi l'unité et B au millième
2) En supposant que cet ajustement reste valable pour les années suivantes, donner une estimation du nombre de milliers d'emplois salariés dans le secteur textile en 2008

Exercice 13

La cote d'une voiture d'occasion est donnée dans le tableau suivant :

Année de mise en circulation	2003	2004	2005	2006	2007
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5
Cote y_i en €	4100	4500	5100	5800	6700

1) Le plan est muni d'un repère orthogonal. Les unités graphiques sont en abscisses : 2 cm pour un an, en ordonnées : 1 cm pour 1000 €. Représenter le nuage de points $M_i\left(x_i, y_i\right)$
2) Les points n'étant pas parfaitement alignés, on pose $z = \ln y$
a) Recopier et compléter le tableau suivant :

x_i	1	2	3	4	5
z_i					

Les valeurs de z_i seront données sous forme décimale approchée à 10^{-3} près par défaut
b) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre x et z. Un ajustement affine est-il justifié ?
c) Donner une équation de la droite de régression D et z en x
d) Calculer la valeur de z donnée par l'équation précédente pour l'année 2010. En déduire une estimation de la cote de cette voiture de l'année 2010. (On donnera une valeur arrondie à 100 € près)

Correction des exercices

Exercice 1

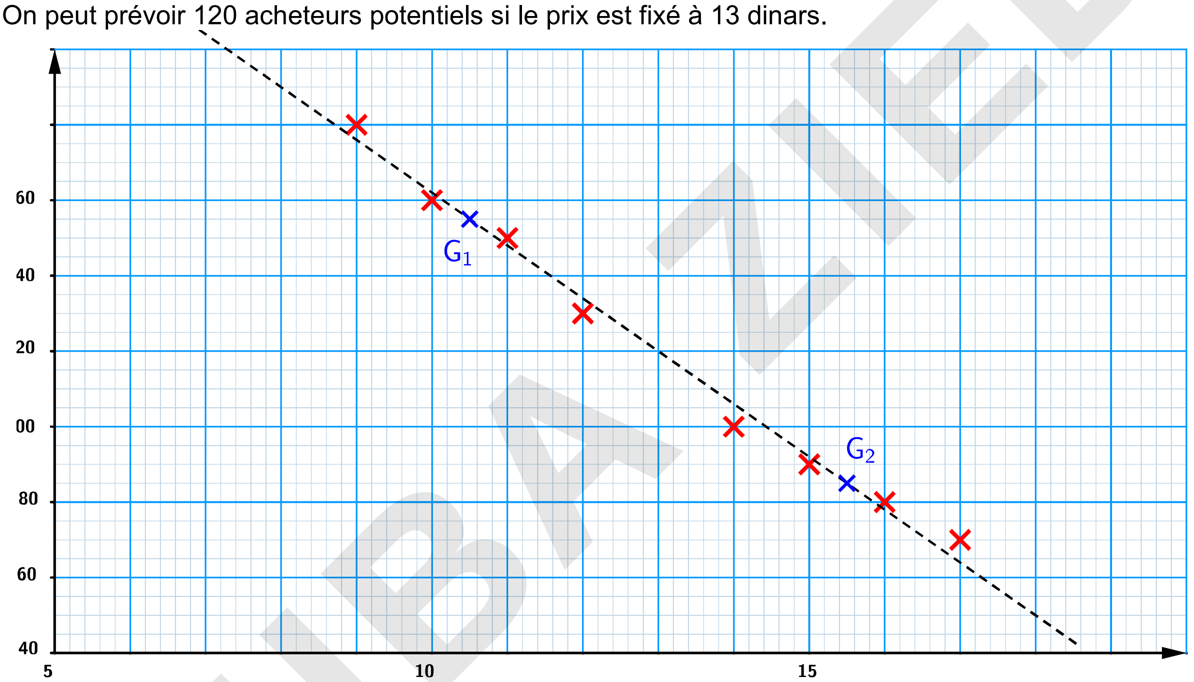
1) Partageons le nuage de points en deux nuages dont les effectifs sont à peu près égaux, puis cherchons G_1 et G_2 les points moyens respectifs de chaque nuage :

$\overline{x_1} = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} x_i = 10.5$, $\overline{y_1} = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} y_i = 155$, $\overline{x_2} = \frac{1}{4}\sum_{i=5}^{8} x_i = 15{,}5$, $\overline{y_2} = \frac{1}{4}\sum_{i=5}^{8} y_i = 85$

donc $G_1(10.5,155)$ et $G_2 = (15.5,85)$

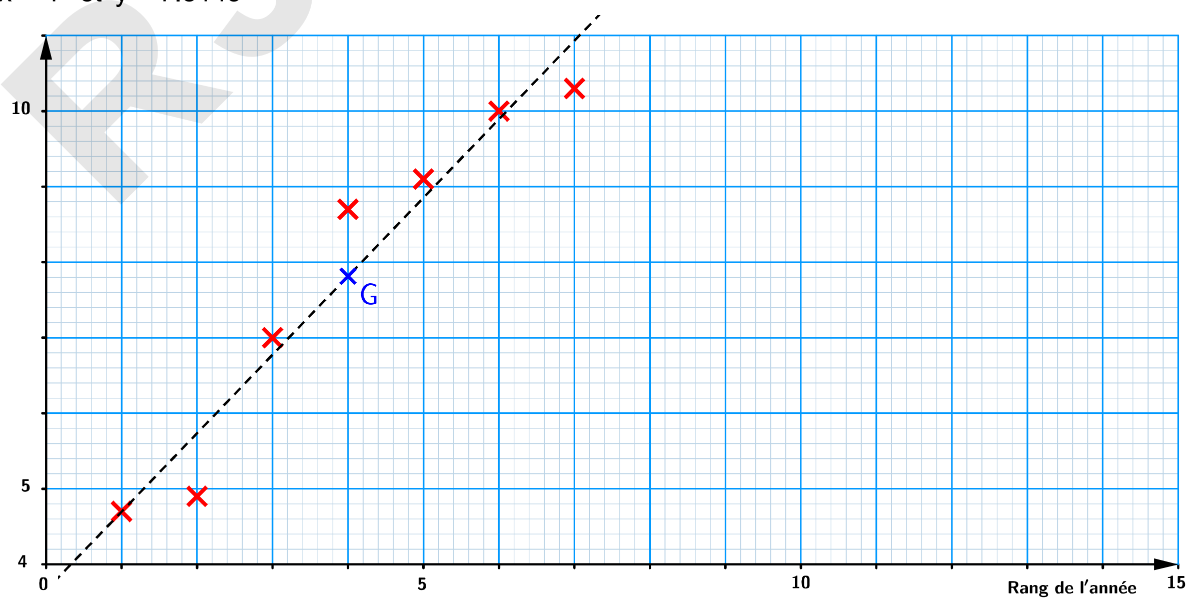
L'équation de la droite (G_1G_2) s'écrit sous la forme $y = \frac{\overline{y_1} - \overline{y_2}}{\overline{x_1} - \overline{x_2}}(x - \overline{x_1}) + \overline{y_1} = -14x + 302$

2) Le prix maximum pour qu'il y ait au moins 50 acheteurs potentiels est de 18 dinars (graphiquement c'est l'abscisse du point de la droite de Mayer dont l'ordonnée est 50)
3) On peut prévoir 120 acheteurs potentiels si le prix est fixé à 13 dinars.



Exercice 2

1) $\overline{x} = 4$ et $\overline{y} = 7.8143$



2) $G=(\overline{x},\overline{y})=(4,7.8143)$

3) La forme du nuage est allongée donc un ajustement affine recommandé.
$V(x)=4$ et $\text{cov}(x,y)=4.157$

Une équation de la droite de régression de y en est $y=ax+b$ où $a=\dfrac{\text{cov}(x,y)}{V(x)}=1.039$ et

$b=\overline{y}-a\overline{x}=3.657$

$$\boxed{y=1.039x+3.657}$$

4) En 2015, $x=9$ donc $y\simeq 13$
En 2030, $x=12$ donc $y\simeq 16.125$

Exercice 3

1) $\overline{x}=\dfrac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}x_i=48$ $\quad\overline{y}=\dfrac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}y_i=13.2$ $\quad V(x)=\dfrac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}x_i^2-\overline{x}^2=\dfrac{11880}{5}-2304=72$

$V(y)=\dfrac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}y_i^2-\overline{y}^2=\dfrac{879,5}{5}-174.24\simeq 1.66$ $\quad\text{cov}(x,y)=\dfrac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}x_iy_i-\overline{x}\,\overline{y}=\dfrac{3222}{5}-633.6=10.8$

Le coefficient de corrélation est $r=\dfrac{\text{cov}(x,y)}{\sigma_X\sigma_y}\simeq 0.9879$

r est très proche de 1 donc il y a forte corrélation entre x et y.
L'équation de la droite de régression de x en y est donnée par $y=ax+b$ avec :

$a=\dfrac{\text{cov}(x,y)}{V(x)}=0.15$ et $b=\overline{y}-a\overline{x}=13,2-0.15\times 48=6$ c'est-à-dire $y=0.15x+6$

2) Un patient de 30 ans devrait avoir une tension de $0.15\times 30+6=10.5$

Exercice 4

$\overline{x_1}=\dfrac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}x_i=1.3$ $\quad\overline{y_1}=\dfrac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}y_i=12$ $\quad\overline{x_2}=\dfrac{1}{3}\sum_{i=4}^{6}x_i=1.6$ $\quad\overline{y_2}=\dfrac{1}{3}\sum_{i=4}^{6}y_i=\dfrac{29+a}{3}$

La droite de Mayer passe par les points $G_1(\overline{x_1},\overline{y_1})$ et $G_2(\overline{x_2},\overline{y_2})$ donc $\overline{y_2}=10\overline{x_2}-1$ c'est-à-dire

$\dfrac{29+a}{3}=10\times 1.6-1=15$ donc $a=16$

Exercice 5

1) Les points du nuage ont une forme allongée ce qui justifie l'utilisation d'un ajustement affine.

$\overline{X}=\dfrac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}x_i=1994.5$, $V(X)=\dfrac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}x_i^2-\overline{x}^2=8.25$, $\sigma_X=2.87228$

$\overline{Y}=\dfrac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}y_i=81.75$, $V(Y)=\dfrac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}y_i^2-\overline{y}^2=0.2705$, $\sigma_Y=0.52$

2) $\text{cov}(X,Y)=\dfrac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}x_iy_i-\overline{X}\,\overline{Y}=\dfrac{1630518.5}{10}-163050.375=1.475$ le coefficient de corrélation de X et Y est

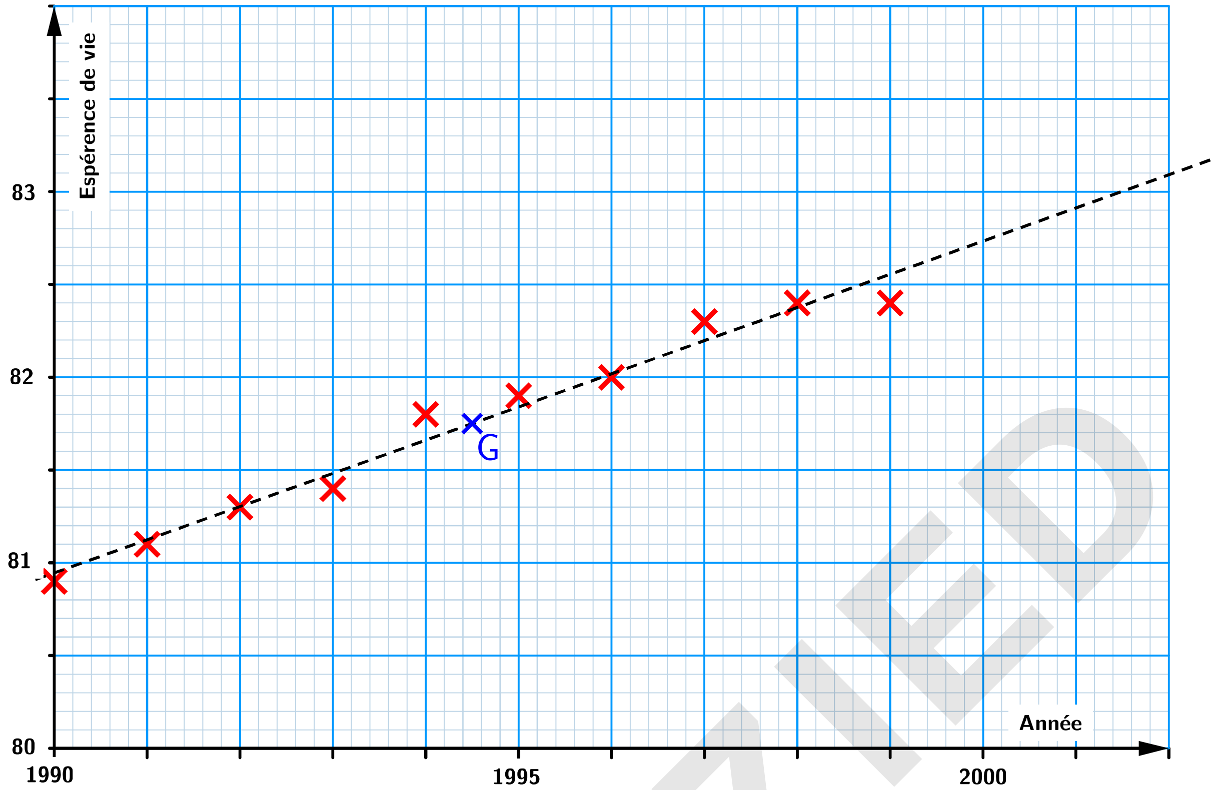
$r=\dfrac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma_x\sigma_y}=0.98737$

Le coefficient de corrélation est assez proche de 1 pour opter pour un ajustement affine

3) Soit Δ la droite de régression de X en Y, l'équation de Δ s'écrit donc sous la forme $y=ax+b$ avec

$a=\dfrac{\text{cov}(X,Y)}{V(X)}=0.17879$ et $b=\overline{Y}-a\overline{X}=-274.8424$ c'est-à-dire $\Delta : y=0.17879x-274.8424$

4) On peut estimer à $0.17879\times 2010-274.8424=84.52$ l'espérance de vie d'une femme de ce pays en 2010



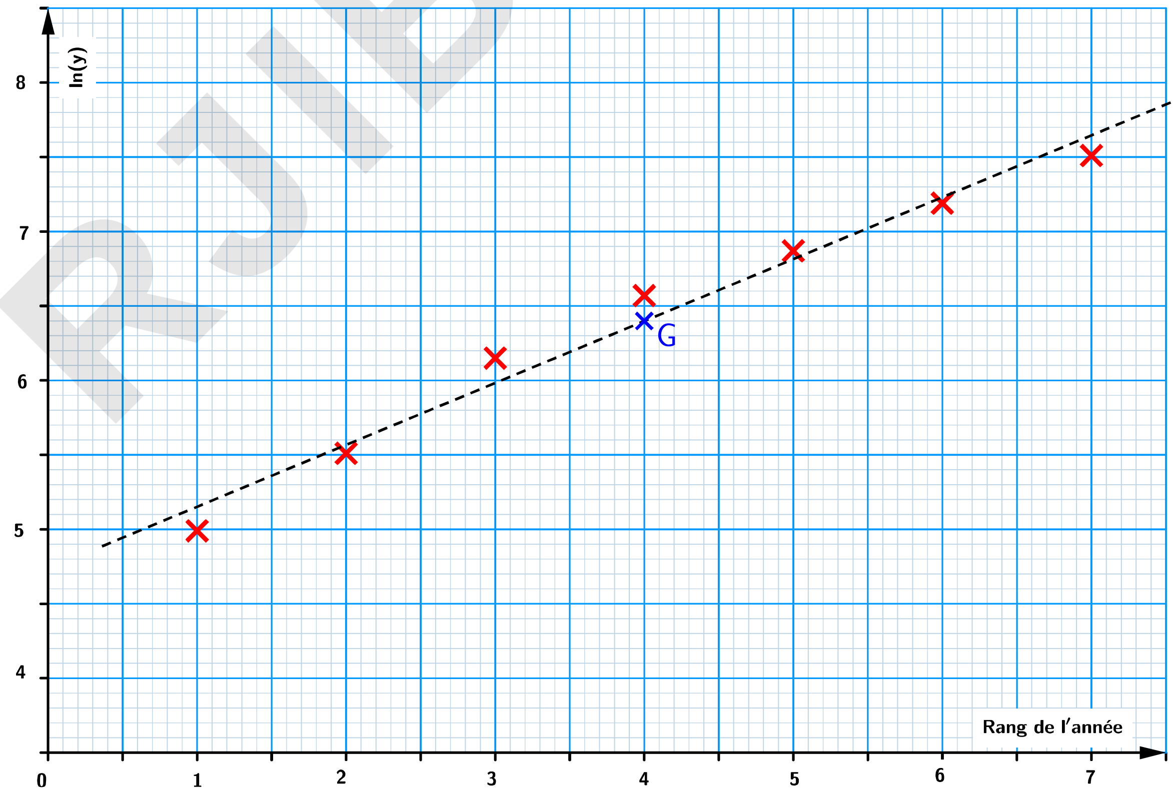
Exercice 6

1) a)

x	1	2	3	4	5	6	7
$z = \ln y$	4.99	5.51	6.15	6.57	6.87	7.19	7.51

b) $\overline{x} = 4$ $\overline{z} = 6.399$

c)



d) $V(x) = 4$ $\operatorname{cov}(x,z) = 1.663$

Une équation de la droite de régression linéaire D de z en x est donc $z = ax + b$ avec

$a = \dfrac{\text{cov}(x,z)}{V(x)} = 0.416 \approx 0.42$ et $b = \bar{z} - a\bar{x} = 6.399 - 0.416 \times 4 = 4.735 \approx 4.74$

$$\boxed{D : z = 0.42.x + 4.74}$$

2) a) $z = \ln y = 0.42x + 4.74$ donc $y = \exp(0.42x + 4.74) = \exp(0.42x) \times \exp 4 = e^{4.74}\, e^{0.42x} = 114,43\, e^{0.42x}$

b) La période $[2010, 2015[$ correspond à $x = 9$, on estime donc la dépense moyenne par an pendant cette période par $y = 114.43\, e^{0.42 \times 9} = 5013.87$ dinars.

Exercice 7

1) Le nuage de points a une forme allongée donc on peut opter à un ajustement affine

$\bar{X} = \dfrac{1}{7}\sum_{i=1}^{7} x_i = 13$, $V(X) = \dfrac{1}{7}\sum_{i=1}^{7} x_i^2 - \bar{X}^2 = \dfrac{1463}{7} - 169 = 40$, $\sigma_X = \sqrt{V(X)} = 6.3246$

$\bar{Y} = \dfrac{1}{7}\sum_{i=1}^{7} y_i = 3.97$, $V(Y) = \dfrac{1}{7}\sum_{i=1}^{7} y_i^2 - \bar{Y}^2 = \dfrac{110.985}{7} - 15.7722 \simeq 0.083$, $\sigma_X = \sqrt{V(X)} = 0.2877$

2) $\text{cov}(X,Y) = \dfrac{1}{7}\sum_{i=1}^{7} x_i y_i - \overline{XY} = \dfrac{373.45}{7} - 51.629 = 1.721$ le coefficient de corrélation de X et Y est donc

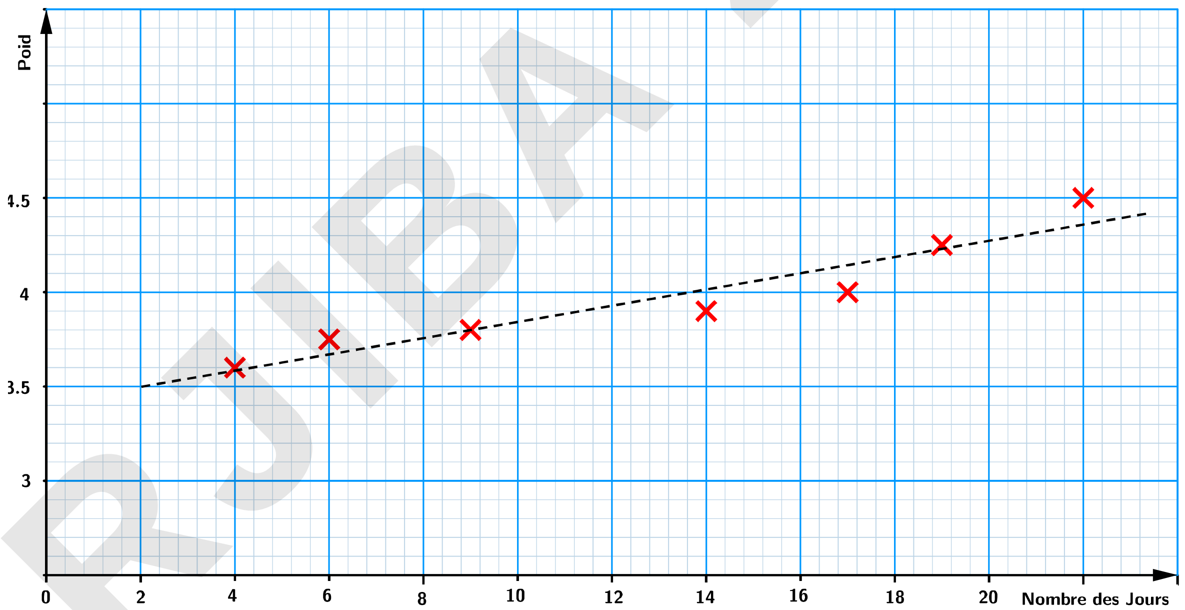
$r = \dfrac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \simeq 0.946$. r est assez proche de 1 donc il y a forte corrélation linéaire entre X et Y

3) $\text{cov}(X,Y) = 1.721$. Une équation de la droite de régression de Y en X s'écrit sous la forme $y = a\,x + b$ avec

$a = \dfrac{\text{cov}(X,Y)}{V(X)} = \dfrac{1.721}{40} = 0.043$ et $b = \bar{Y} - a\bar{X} = 3.9714 - 0.043 \times 13 = 3.41$ c'est-à-dire $y = 0.04\,x + 3.41$

4) a) $X = 30$ donc $Y = 0.04 \times 30 + 3.41 = 4.61$

b) $Y = 3.85$ donc $3.85 = 0.04X + 3.41$ et par suite $X = \dfrac{3.85 - 3.41}{0.04} = 11$



Exercice 8

1) $\bar{X} = \dfrac{1}{7}\sum_{i=1}^{7} x_i = 4$ et $\bar{Y} = \dfrac{1}{7}\sum_{i=1}^{7} y_i = 8$ donc $G(4,8)$

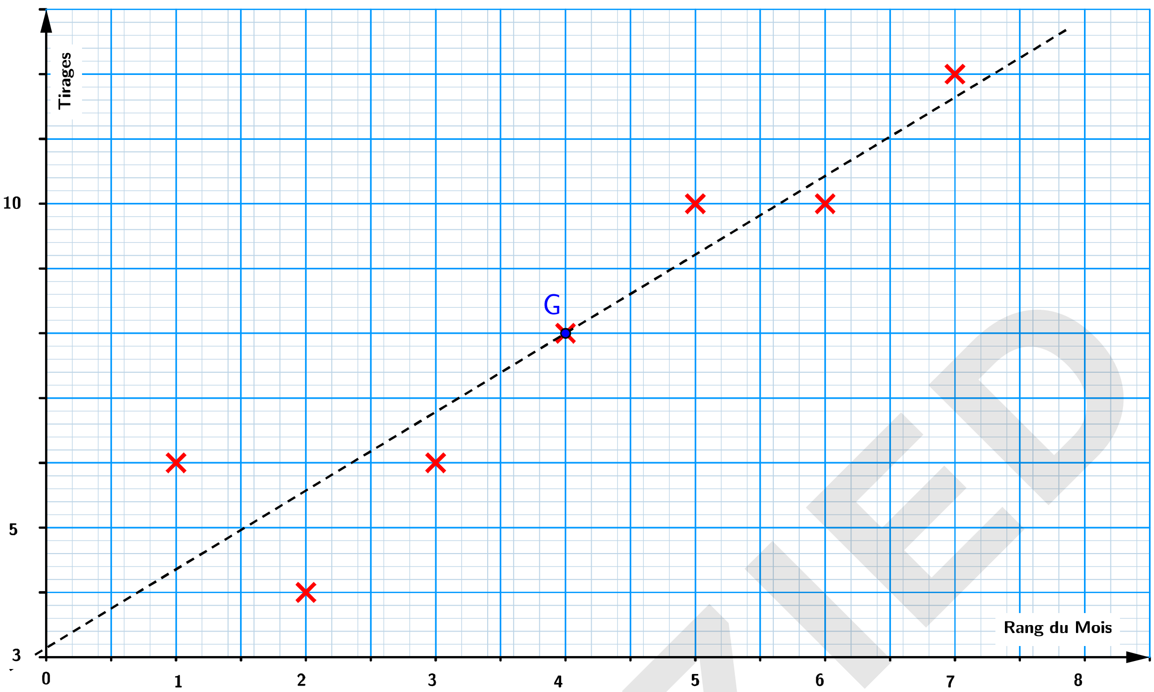
2) $\text{cov}(X,Y) = \dfrac{1}{7}\sum_{i=1}^{7} x_i y_i - \overline{XY} = \dfrac{258}{7} - 32 = 4.857$

$V(X) = \dfrac{1}{7}\sum_{i=1}^{7} x_i^2 - \bar{X}^2 = \dfrac{140}{7} - 16 = 4$ et $V(Y) = \dfrac{1}{7}\sum_{i=1}^{7} y_i^2 - \bar{Y}^2 = \dfrac{496}{7} - 64 = 6.857$

- La droite de régression de Y en X a pour équation $y = ax + b$ avec $a = \dfrac{\text{cov}(X,Y)}{V(X)} = \dfrac{4.857}{4} \simeq 1.214285$

et $b = \bar{Y} - a\bar{X} \simeq 3.14$ c'est-à-dire $y = 1.21x + 3.14$

- La droite de régression de X en Y a pour équation : $x = a'y + b'$ avec $a' = \dfrac{cov(X,Y)}{V(Y)} = 1.21425$ et $b' = \overline{X} - a'\overline{Y} \simeq -5.714$ c'est-à-dire $x = 1.21y - 5.71$



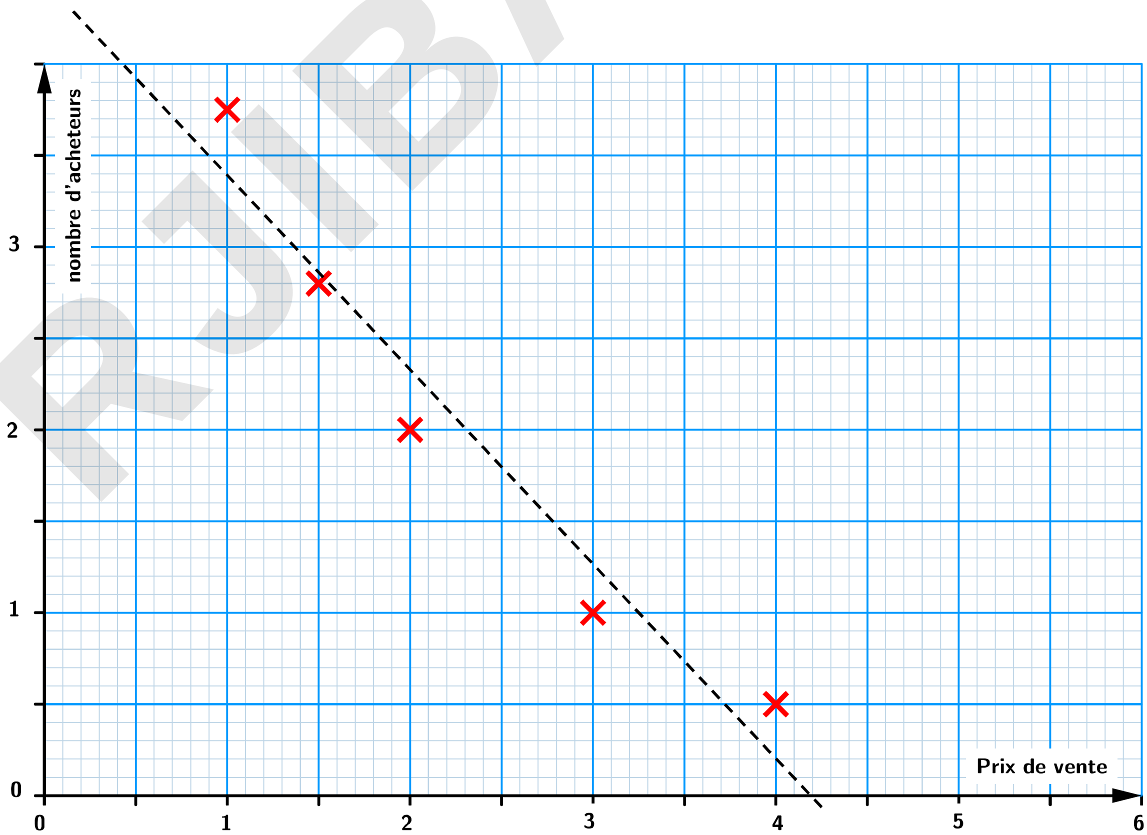
3) Le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y est $r = \dfrac{cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \dfrac{4.857}{2 \times \sqrt{6.857}} = 0.9274$

r est très proche de 1 donc un ajustement linéaire est fortement justifié

4) $x = 10$ donc $y = 1.21 \times 10 + 3.14 = 8.96$: Lors du dixième mois il y aura 8.96 milliers d'exemplaires

Exercice 9

1)



2) $\overline{x} = 2.3$, $\overline{y} = 2.01$, $V(x) = 1.16$ et $cov(x,y) = -1.233$

a) La droite de régression de y en x a pour équation $y = ax + b$ avec $a = \dfrac{\text{cov}(x,y)}{V(x)} = \dfrac{-1.233}{1.16} \simeq -1.06$ et

$b = \overline{y} - a\overline{x} = 2.01 + 1.06 \times 2.3 \simeq 4.45$ c'est-à-dire $y = -1.06x + 4.45$

c) On estime le nombre d'acheteurs potentiels pour un produit vendu 2.50 Dinars à :

$$y = -1.06 \times 2.5 + 4.45 = 1.8 \text{ mille acheteurs}$$

Exercice n° 10

$D : y = -0.7x + 5.6$ et $D' : x = -0.8y + 2$

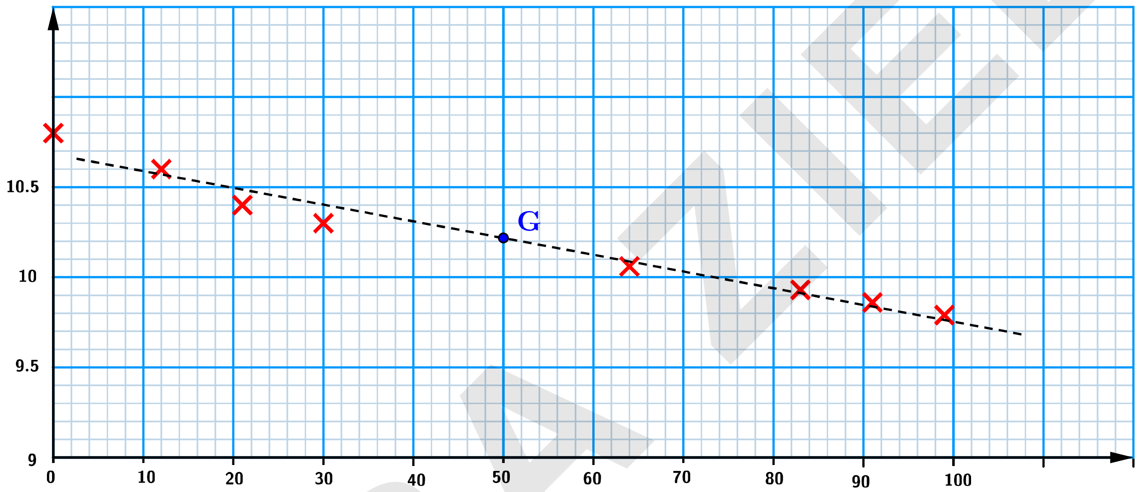
Le point moyen G est l'intersection des droites D et D' :

On a donc $\begin{cases} \overline{y} = -0.7\overline{x} + 5,6 \\ \overline{y} = -0.8\overline{x} + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{y} = -0.7\overline{x} + 5.6 \\ 0.1\overline{x} + 3.6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{y} = 5.6 + 0.7 \times 36 = 30.8 \\ \overline{x} = -36 \end{cases}$

et par suite $G(-36, 30.8)$

Exercice 11

1) a)



b) La forme du nuage de points peut laisser penser qu'un ajustement affine peut être envisagé, cependant on ne peut pas l'utiliser pour tirer des prévisions à long terme car sinon on trouvera après un certain nombre d'années un records nulle ce qui est illogique.

2) a) $\overline{X} = 0.666$, $\overline{Y} = 2.324$, $V(X) = 0.047$, $\text{cov}(X,Y) = 0.00725$

Une équation de la droite de régression de Y en X est $Y = aX + b$ avec $a = \dfrac{\text{cov}(X,Y)}{V(x)} \simeq 0.154$ et

$b = \overline{Y} - a\overline{X} = 2.324 - 0.154 \times 0.666 \simeq 2.221$

$$Y = 0.154\,X + 2.221$$

b) $Y = 0.154\,X + 2.221 \Leftrightarrow \ln y = 0.154\,e^{-0.00924\,x} + 2.221 \Leftrightarrow y = \exp\left(0.154\,e^{-0.00924\,x} + 2.221\right)$

c) En 2010, $x = 110$ donc on prévoit un record de $y = \exp\left(0.154\,e^{-0.00924 \times 110} + 2.221\right) \simeq 9.745$

d) $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} \exp\left(0.154\,e^{-0.00924t} + 2.221\right) = e^{2.221} \simeq 9.217$

e) En se basant sur ce modèle, on peut conclure que les records du cent mètres masculin sera, à très long terme, égal à 9.217

Exercice 12

1) a)

x_i	0	1	2	3	4	5	6
z_i	4.771	4.727	4.663	4.585	4.489	4.394	4.317

b) $\overline{x} = 3$, $\overline{z} = 4.564$, $V(x) = 4$ et $\text{cov}(x,z) = -0.314$

La droite de régression de z en x a pour équation $z = ax + b$ avec $a = \dfrac{\text{cov}(x,y)}{V(x)} = \dfrac{-0.314}{4} \simeq -0.079$ et

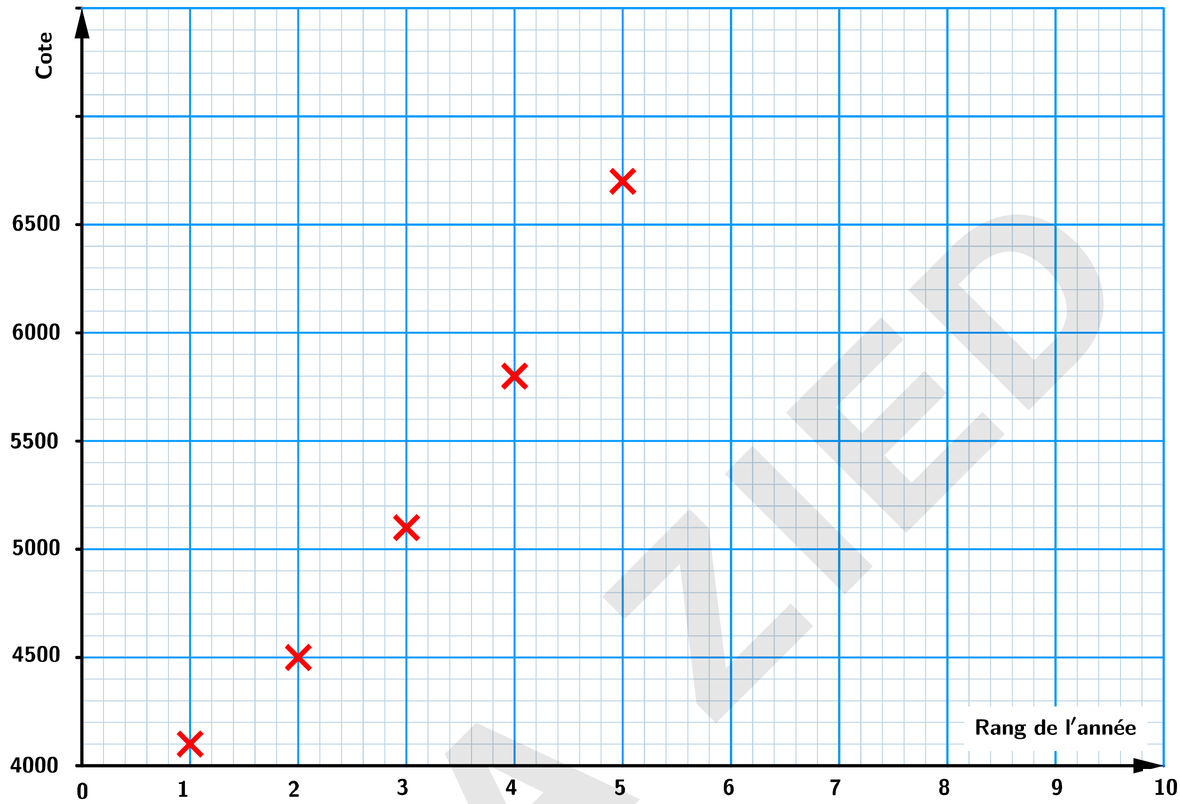
$b = \overline{z} - a\overline{x} = 4.564 + 3 \times (-0.079) \simeq 4.328$ c'est-à-dire $z = -0.079x + 4.8$

c) $z = \ln y = -0.079x + 4.8$ donc $y = e^{-0.079x+4.8} = e^{4.8} \times e^{-0.079x} \simeq 122 \times e^{-0.079x}$

2) En 2008, $x = 8$. On estime donc le nombre de milliers d'emplois salariés dans le domaine textile à $y = 122 \times e^{-0.079\times 8} \simeq 64.85$

Exercice 13

1)



2) a)

x_i	1	2	3	4	5
z_i	8.32	8.41	8.54	8.67	8.81

b) $\bar{x} = 3$, $\bar{z} = 8.549$, $V(x) = 2$, $\sigma_x = 1.414$, $V(z) = 0.031$, $\sigma_z = 0.176$ et $\operatorname{cov}(x,z) = 0.247$

Le coefficient de corrélation de z en x est :

$$r = \frac{\operatorname{cov}(x,y)}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{0.247}{1.414 \times 0.176} = 0.993$$

Le coefficient de corrélation est très proche de 1 donc un ajustement affine est largement justifié.

c) Une équation de la droite de régression de x en z est $z = ax + b$ avec $a = \frac{\operatorname{cov}(x,z)}{V(x)} = \frac{0.247}{2} \simeq 0.124$ et

$b = \bar{z} - a\bar{x} = 8.549 - 0.124 \times 3 = 8.177$

$$\boxed{z = 0.124x + 8.177}$$

d) En 2010, $x = 8$ donc $z = 0.124 \times 8 + 8.177 = 9.169$

La cote y de cette voiture en 2010 est donc tel que $\ln y = 9.169$ c'est à dire $y = e^{9.169} \simeq 9600$ €

Chapitre 09

Probabilité

Rappel de cours

Dénombrement

- Le cardinal d'un ensemble fini E désigne le nombre d'éléments de E
- Soit A et B deux parties de E :
  - $\operatorname{card}(A \setminus B) = \operatorname{card}(A) - \operatorname{card}(A \cap B)$
  - $\operatorname{card}(\overline{A}) = \operatorname{card}(E) - \operatorname{card}(A)$, $\overline{A}$ désigne le complémentaire de A
  - $\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B) - \operatorname{card}(A \cap B)$
- Le nombre d'arrangement de p éléments d'un ensemble à n éléments est : $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$
- Le nombre d'applications (p-liste ou p-uplet) d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments est égale à n^p
- Le nombre des combinaisons de p éléments d'un ensemble à n éléments est : $C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

	Les éléments peuvent être répétés	Les éléments sont distincts
On tient compte de l'ordre	**Nombre d'applications**	**Arrangements**
On ne tient pas compte de l'ordre		**Combinaisons**

- Le nombre des parties d'un ensemble E à n éléments est : $\operatorname{card}(\mathcal{P}(E)) = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k = 2^n$
- Tableau de Pascal :

	p = 0	p = 1	p = 2	p = 3	p = 4			
n = 0	$C_0^0 = 1$							
n = 1	$C_1^0 = 1$	$C_1^1 = 1$						
n = 2	$C_2^0 = 1$	$C_2^1 = 2$	$C_2^2 = 1$					
n = 3	$C_3^0 = 1$	$C_3^1 = 3$	$C_3^2 = 3$	$C_3^3 = 1$				
n = 4	$C_4^0 = 1$	$C_4^1 = 4$	$C_4^2 = 6$	$C_4^3 = 4$	$C_4^4 = 1$			
n = 5	$C_5^0 = 1$	$C_5^1 = 5$	$C_5^2 = 10$	$C_5^3 = 10$	$C_5^4 = 5$	$C_5^5 = 1$		
n = 6	$C_6^0 = 1$	$C_6^1 = 6$	$C_6^2 = 15$	$C_6^3 = 20$	$C_6^4 = 15$	$C_6^5 = 6$	$C_6^6 = 1$	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n						$C_n^p + C_n^{p+1} =$		
n + 1							C_{n+1}^{p+1}	

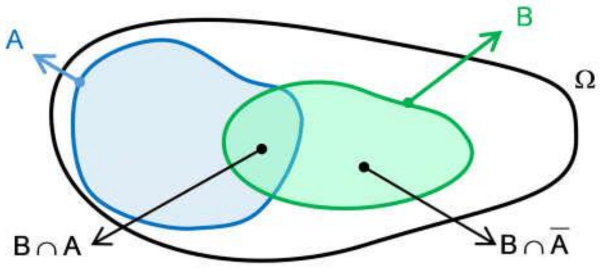
- Formule de binôme de Newton : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k a^k b^{(n-k)}$

Probabilité

- Soit Ω un univers fini, $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω, p une probabilité sur $\mathcal{P}(\Omega)$ et A, B deux événements. On a :
  - $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$ $\quad p(\Omega) = 1$ $\quad p(\varnothing) = 0$
  - Si $A \subset B$ alors $p(A) \le p(B)$
  - $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ (Formule de Poincaré)

- Si p est une probabilité uniforme ou une équiprobabilité on a : $p(A)=\dfrac{\text{card}A}{\text{card}\Omega}$

- A et B sont incompatibles si $A\cap B=\varnothing$ et dans ce cas on a : $p(A\cup B)=p(A)+p(B)$

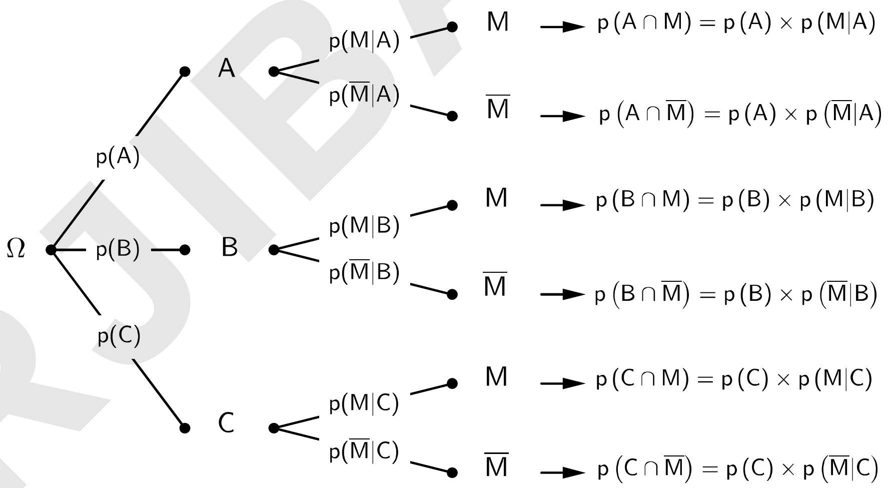


Probabilité conditionnelle

- Soit A et B deux événements aléatoires avec $p(B)\neq 0$. On appelle probabilité conditionnelle de A sachant B, le rapport : $p(A\mid B)=\dfrac{p(A\cap B)}{p(B)}$
- A et B sont indépendants si, et seulement si, $p(A\cap B)=p(A)\times p(B)$

Le principe des probabilités composées

- Soit A et B deux événements tels que $p(A)\neq 1$ et $p(A)\neq 0$ alors on a :
$$p(A\cap B)=p(A)\times p(B\mid A)=p(B)\times p(A\mid B)$$
- Soit A et B deux événements tels que $p(A)\neq 0$ et $p(B)\neq 0$ alors on a :
$$p(A\cap B\cap C)=p(A)\times p(B\mid A)\times p(C\mid A\cap B)$$
- Un arbre de probabilité est un schéma permettant de résumer une expérience aléatoire connaissant des probabilités conditionnelles, cette présentation permet de rendre plus efficace le calcul de probabilité :
Si on considère par exemple une probabilité p sur un univers Ω, A, B, C et M quatre évènements tels que A, B, C forment une partition de Ω c'est à dire A, B et C sont incompatibles et leur réunion est Ω voilà l'arbre probabiliste que l'on peut construire :



Le principe des probabilités totales

- Si A et B sont deux événements tels que $p(A)\neq 1$ et $p(A)\neq 0$ alors on a :
$$p(B)=p(A)\times p(B\mid A)+p(\overline{A})\times p(B\mid\overline{A})$$

Formule de Bayes (Probabilités de causes)

- Si A et B sont deux événements tels que $p(B)\neq 1$, $p(B)\neq 0$ et $p(A)\neq 0$ alors on a :
$$p(B\mid A)=\frac{p(B)\times p(A\mid B)}{p(B)\times p(A\mid B)+p(\overline{B})\times p(A\mid\overline{B})}$$

Variables aléatoires discrètes

- $\sum_{x_i \in \Omega} p(\{X = x_i\}) = 1$
- L'espérance mathématique de X est $E(X) = \overline{X} = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n$
- La variance de X est le réel positif $V(X) = E((X) - \overline{X})^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i p_i\right)^2 = E(X^2) - \overline{X}^2$
- L'écart-type de X est le réel positif $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$
- Si X indique le gain algébrique réalisé dans un jeu, alors on dit que le jeu est :
  - Favorable ou gagnant si et seulement si $E(x) > 0$
  - Défavorable ou perdant si, et seulement si, $E(X) < 0$
  - Equitable si, et seulement si, $E(X) = 0$

Loi de Bernoulli

- Soit une épreuve dont l'univers Ω possède exactement deux issues, l'une est appelée succès notée S et l'autre appelée échec notée $\overline{S}$. Si X est la variable aléatoire qui vaut 1 s'il y a succès, 0 sinon, alors X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = p(X = 1) = p(S)$. La loi de Bernoulli se note $\mathscr{B}(1,p)$
- Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(1,p)$ alors $E(X) = p$ et $V(X) = p(1-p)$

Loi Binomiale

- On répète n fois de suite et dans les mêmes conditions une épreuve de Bernoulli de paramètre p. La variable aléatoire X qui vaut le nombre de succès obtenus suit une loi Binomiale de paramètre n et p. La loi Binomiale se note $\mathscr{B}(n,p)$
- Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$ alors :
  - $p(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ pour tout $k \in \{0, 1, 2, ... ,n\}$
  - $E(X) = n \times p$ et $V(X) = n \times p \times (1-p)$

Attention !

- Ne pas confondre entre événements indépendants et événement incompatibles.
- Deux événements de probabilité non nulle ne peuvent être incompatibles et indépendants en même temps
- Toute probabilité est comprise entre 0 et 1
- La somme des probabilités des événements élémentaires est égale à 1
- Ne pas confondre entre $p(A | B)$ et $A \cap B$: $p(A | B)$ est la probabilité de A lorsque B est déjà réalisé et $p(A \cap B)$ la probabilité de la réalisation de A et B en même temps.

Les exercices

Exercice 1

Une enquête est faite auprès des 2000 élèves d'un lycée sans internat, afin de savoir s'ils disposent d'un ordinateur personnel. Dans ce lycée, 46% des élèves sont demi-pensionnaires. L'enquête révèle:

- d'une part que 40% des élèves de ce lycée disposent d'un ordinateur chez eux
- d'autre part que parmi les lycéens disposant d'un ordinateur personnel, 432 ne sont pas demi-pensionnaires

1) Recopier et compléter le tableau d'effectifs suivant :

	demi-pensionnaire	non demi-pensionnaire	total
lycéen ayant un ordinateur			
lycéen n'ayant pas d'ordinateur			
total			2000

2) On choisit au hasard un élève du lycée. On considère les événements suivants:
   D : « L'élève est demi-pensionnaire »
   O : « L'élève dispose d'un ordinateur personnel »
   a) Déterminer les probabilités des événements D, O et $D \cap O$
   b) Les événements D et O sont-ils indépendants ?
   c) Déterminer $p(D \cup O)$
   d) Déterminer $p(D \mid O)$

Exercice 2

Un magasin vend des salons de jardin. Une enquête statistique a montré que :

- 10% des personnes qui entrent dans le magasin achètent une table
- parmi les personnes qui achètent une table, 80% achètent un lot de chaises
- parmi les personnes qui n'achètent pas de table, 10% achètent un lot de chaises

Une personne entre dans le magasin
On note T l'évènement : « La personne achète une table »
On note C l'évènement : « La personne achète un lot de chaises »

1) Traduire à l'aide d'un arbre pondéré la situation décrite ci-dessus.
2) Montrer que la probabilité que la personne achète un lot de chaises est égale à 0.17
3) Quelle est la probabilité que la personne n'achète pas de table sachant qu'elle a acheté un lot de chaises ?
4) Les évènements T et C sont-ils indépendants ? Justifier la réponse

Exercice 3

Dans un magasin spécialisé en ordinateurs portables, les clients ont le choix entre :

- deux tailles d'écrans différentes, 10 pouces ou 13 pouces
- deux systèmes d'exploitation différents, Windows ou Linux

Selon le responsable du magasin :

- 60% des clients optent pour un modèle 10 pouces
- 45% des clients achetant un modèle 10 pouces ne choisissent pas Windows
- 80% des clients achetant un modèle 13 pouces choisissent Windows

1) Présenter les données fournies par le responsable sur un arbre pondéré, en renseignant la probabilité de chacune des branches
2) Un client souhaite acheter un ordinateur portable : quelle est la probabilité qu'il choisisse un modèle 13 pouces équipé de Windows?
3) Un client souhaite acheter un ordinateur portable : quelle est la probabilité qu'il choisisse le système d'exploitation Windows?
4) Un client sort du magasin avec un ordinateur portable équipé de Windows : est-il juste d'affirmer qu'il y a plus d'une chance sur deux pour que ce client ait porté son choix sur un modèle 13 pouces?

Exercice 4

Une enquête a montré que :

- avant de passer l'épreuve théorique du permis de conduire (c'est-à-dire le code), 75% des candidats ont travaillé très sérieusement cette épreuve
- lorsqu'un candidat a travaillé très sérieusement, il obtient le code dans 80% des cas

- lorsqu'un candidat n'a pas beaucoup travaillé, il n'obtient pas le code dans 70% des cas

On interroge au hasard un candidat qui vient de passer l'épreuve théorique (On rappelle que les résultats sont connus dès la fin de l'épreuve). On note T l'événement : «Le candidat a travaillé très sérieusement» et R l'événement : «Le candidat a réussi le code»

Les probabilités seront données sous forme décimale, arrondies éventuellement au millième

1) Traduire les données à l'aide d'un arbre pondéré
2) a) Calculer la probabilité de l'événement «Le candidat a travaillé très sérieusement et il a obtenu le code»
   b) Montrer que la probabilité $p(R)$ qu'un candidat réussisse à l'épreuve théorique est égale à 0.675
3) Le candidat interrogé vient d'échouer. Quelle est la probabilité qu'il ait travaillé très sérieusement ?

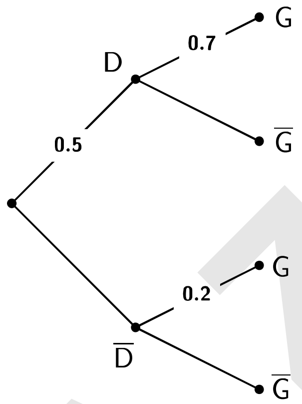
Exercice 5

Une salle de jeu comporte deux consoles identiques proposant le même jeu. Un jour l'une des deux est déréglée. Les joueurs ne peuvent savoir laquelle des deux est déréglée.

Ce jour-là, un joueur choisit au hasard l'une des deux consoles et il joue une partie sur cette console. On note:

- D l'événement " le joueur choisit la console déréglée " et $\overline{D}$ l'événement contraire
- G l'événement " le joueur gagne la partie " et $\overline{G}$ l'événement contraire

Cette situation aléatoire est modélisée par l'arbre incomplet suivant, dans lequel figure certaines probabilités



Ainsi, 0,7 est la probabilité que le joueur gagne sachant qu'il a choisi une console déréglée

1) Compléter cet arbre
2) Calculer la probabilité de l'événement " le joueur choisit la console déréglée et il gagne "
3) Calculer la probabilité de l'événement " le joueur choisit la console non déréglée et il gagne "
4) Montrer que la probabilité que le joueur gagne est égale à 0.45
5) Calculer la probabilité que le joueur ait choisit la console déréglée sachant qu'il a gagné

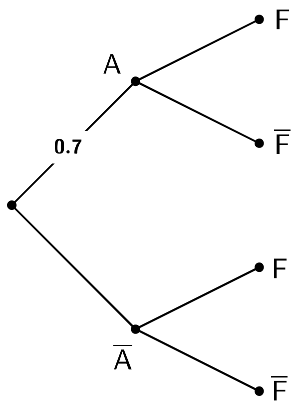
Exercice 6 BAC [session principale 2010]

Lors d'un séminaire, on a constaté que 70% des participants parlent l'anglais, 63% parlent français et 42% parlent à la fois l'anglais et le français

Un journaliste veut interviewer au hasard l'un des participants à ce séminaire. On désigne par A et F les événements suivants :

A : « le participant choisi pour l'interview parle l'anglais »
F : « le participant choisi pour l'interview parle le français »

1) Justifier que $p(F \mid A) = 0.6$. En déduire la valeur de $p(\overline{F} \mid A)$
2) Justifier que $p(F \cap \overline{A}) = 0.21$
3) Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant :



4) Quelle est la probabilité que le participant interviewé ne parle ni l'anglais ni le français ?

Exercice 7

Une réunion rassemble 20 personnes : 12 femmes et 8 hommes. On sait que 20% des femmes fument ainsi que 40% des hommes

1) Une personne quitte la réunion. Quelle est la probabilité que cette personne soit occupée à fumer ?
2) Une personne quitte la réunion en fumant. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'une femme ?

Exercice 8

On suppose que 3 entreprises X, Y et Z fabriquent trois types de microprocesseurs utilisés dans les ordinateurs se partagent le marché à raison de 25% pour X, 35% pour Y, 40% pour Z. Les pourcentages de commandes non conformes sont 5% pour les microprocesseurs de X, 4% pour ceux de Y et 2% pour ceux de Z. Dans un lot constitué de microprocesseurs dans les proportions indiquées pour X, Y et Z, on prélève un microprocesseur

1) Quelle est la probabilité qu'il soit non conforme ?
2) Sachant que le microprocesseur présente un défaut de fabrication, quelle est la probabilité qu'il soit du type X ?

Exercice 9

Il y a 4% d'absentéisme chez les employés travaillant le jour, 8% chez ceux qui travaillent le soir et 22% chez ceux qui travaillent de nuit. Sachant qu'il y a 80% des employés qui travaillent de jour, 10% qui travaillent de soir et 10% qui travaillent de nuit, Déterminer la probabilité qu'un employé donné travaille de jour sachant qu'il était absent du travail

Exercice 10

En hiver, Monsieur Prudent sort de chez lui chaussé de bottes 8 fois sur 10. Il les met systématiquement lorsqu'il neige, et une fois sur trois lorsqu'il ne neige pas. Quelle est la probabilité qu'il ne neige pas sachant qu'on vient de croiser Monsieur Prudent avec ses bottes ?

Exercice 11

Un sondage effectué à propos de la construction d'un barrage a donné les résultats suivants :

- 65% des personnes sont contre la construction
- parmi les personnes qui sont contre cette construction, 70% sont des écologistes
- parmi les personnes qui sont pour la construction, 20% sont écologistes

On note C l'événement « la personne concernée est contre la construction », D l'événement contraire, E l'événement « la personne concernée est écologiste » et F l'événement « la personne concernée est contre la construction et n'est pas écologiste »

1) Calculer les probabilités $p(C), p(E|C)$ et $p(E|D)$
2) a) Calculer la probabilité qu'une personne soit contre la construction et soit écologiste
   b) Calculer la probabilité qu'une personne soit pour la construction et soit écologiste
   c) En déduire la probabilité qu'une personne soit écologiste
3) Calculer la probabilité $p(C|E)$
4) Montrer que $p(F) = 0.195$. On choisit au hasard 5 personnes. Quelle est la probabilité qu'au moins une d'elles soit contre la construction et ne soit pas écologiste ?

Exercice 12

Une urne A contient une boule rouge et trois boules vertes. Une urne B contient deux boules rouges et deux boules noires. Les boules sont indiscernables au toucher

1) On dispose d'un dé à 6 faces, parfaitement équilibré, numéroté de 1 à 6. On le lance une fois, si l'on obtient un multiple de 3, on tire au hasard une boule de l'urne A, sinon on tire au hasard une boule de l'urne B
   a) Calculer la probabilité d'obtenir une boule noire
   b) Quelle est la couleur qui a la plus grande probabilité de sortir ?
   c) Quelle est la probabilité que la boule tirée provienne de l'urne B sachant qu'elle est rouge ?
2) On réunit toutes les boules dans une seule urne et on tire successivement trois boules que l'on pose chaque fois devant l'urne
   a) Montrer que la probabilité de l'évènement «la 3ème boule tirée est noire» vaut $\frac{1}{4}$
   b) Certains pensent que l'évènement «la première boule tirée est noire» a une probabilité supérieure à l'évènement «la troisième boule tirée est noire». Est-ce vrai ? Justifier

Exercice 13

Tous les résultats seront arrondis à 10^{-2} près
Une entreprise produit en grande quantités des stylos. La probabilité qu'un stylo présente un défaut est égale à

0.1

1) On prélève dans cette production, successivement et avec remise huit stylos. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de stylos présentant un défaut parmi les huit stylos prélevés
   a) On admet que X suit une loi de binomiale. Donner les paramètres de cette loi
   b) Calculer la probabilité des événements suivants :
      A : « il n'y a aucun stylo avec un défaut »
      B : « il y a au moins un stylo avec défaut »
      C : « il y a exactement deux stylos avec un défaut »
2) En vue d'améliorer la qualité du produit vendu, on décide de mettre en place un contrôle qui accepte tous les stylos sans défaut et 20% des stylos avec défaut. On prend un stylo dans la production. On note D l'événement « le stylo présente un défaut » et E l'événement « le stylo est accepté »
   a) Construire un arbre traduisant les données de l'énoncé
   b) Calculer la probabilité qu'un stylo soit accepté au contrôle
   c) Justifier que la probabilité qu'un stylo ait un défaut sachant qu'il a été accepté au contrôle est égale à 0.022 à 10^{-3} près
3) Après le contrôle, on prélève, successivement et avec remise, huit stylos parmi les stylos acceptés. Calculer la probabilité qu'il n'y ait aucun stylo avec défaut dans ce prélèvement de huit stylos. Comparer ce résultat avec la probabilité de l'événement A calculée à la question 1) b). quel commentaire peut-on faire ?

Exercice 14

Les questions 1) et 2) sont indépendantes. On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible.
Une urne U_1 contient 4 jetons blancs et 3 noirs et une urne U_2 contient 17 jetons blancs et 18 noirs

1) On jette un dé cubique dont chaque face a la même probabilité d'apparaître. Si le 6 apparaît, on tire un jeton de l'urne U_1 sinon on tire un jeton de l'urne U_2
   a) Déterminer la probabilité de tirer un jeton blanc (On considérera les événements A : "On a obtenu 6 en jetant le dé" et B : "On obtient un jeton blanc"
   b) On a tiré un jeton blanc ; Calculer la probabilité pour qu'il provienne de U_1
   c) On a tiré un jeton noir ; Calculer la probabilité pour qu'il provienne de U_2
2) On tire successivement et sans remise les 7 jetons de l'urne U1. Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur k si le premier jeton blanc apparaît au k-ième tirage. Donner la loi de probabilité de X, puis calculer son espérance mathématique et son écart-type

Exercice 15

Dans une classe de trente élèves sont formés un club photo et un club de théâtre. Le club photo est composé de 10 membres, le club théâtre de 6 membres. Il y a deux élèves qui sont membres des deux clubs à la fois

1) On interroge un élève de la classe pris au hasard. On appelle P l'événement : « l'élève fait partie du club photo » et T l'événement : « l'élève fait partie du club théâtre ». Montrer que les événements P et T sont indépendants.
2) Lors d'une séance du club photo, les 10 membres sont tous présents. Un premier élève est tiré au sort. Il doit prendre la photo d'un autre membre du club qui sera lui aussi tiré au sort
   a) On appelle T_1 l'événement : « Le premier élève appartient au club théâtre ». Calculer $p(T_1)$
   b) On appelle T_2 l'événement « L'élève pris en photo appartient au club théâtre ». Calculer $p(T_2 \mid T_1)$ puis $p(T_2 \mid \overline{T_1})$. En déduire $p(T_2 \cap T_1)$ et $p(T_2 \cap \overline{T_1})$
   c) Calculer $p(T_2)$
3) Toutes les semaines on recommence de façon indépendante la séance de photographie avec tirage au sort du photographe et du photographié. Le même élève peut être photographié plusieurs semaines de suite. Calculer la probabilité qu'au bout de 4 semaines aucun membre du club théâtre n'ait été photographié

Exercice 16

Pour entretenir en bon état de fonctionnement ses installations de chauffage, une société immobilière fait contrôler les chaudières de son parc de logements pendant l'été. On sait que 20% des chaudières sont sous garantie. Parmi les chaudières sous garantie, la probabilité qu'une chaudière soit défectueuse est de $\frac{1}{100}$.

Parmi les chaudières qui ne sont plus sous garantie, la probabilité qu'une chaudière soit défectueuse est de $\frac{1}{10}$

On appelle G l'événement : "la chaudière est sous garantie" et D l'événement : "la chaudière est défectueuse"

1) Calculer la probabilité des évènements suivants :
   A : « la chaudière est garantie et est défectueuse »
   B : « la chaudière est défectueuse »
2) Dans un logement la chaudière est défectueuse. Montrer que la probabilité qu'elle soit sous garantie est de

$\frac{1}{41}$

3) Le contrôle est gratuit si la chaudière est sous garantie. Il coûte 80 DT si la chaudière n'est plus sous garantie et n'est pas défectueuse. Il coûte 280 DT si la chaudière n'est plus sous garantie et est défectueuse. On note X la variable aléatoire qui représente le coût du contrôle d'une chaudière. Déterminer la loi de probabilité de X et son espérance mathématique.
4) Au cours de la période de contrôle, on a trouvé 5 chaudières défectueuses. Quelle est la probabilité qu'au moins l'une d'entre elles soit sous garantie ?

Exercice 17

Le nombre de poste de télévision vendus dans un magasin au cours d'une semaine définit un aléa numérique X dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0.1	0.1	0.2	0.2	0.3	0.1

1) Calculer l'espérance mathématique de X
2) Le bénéfice réalisé pour la vente d'un poste est 80 dinars
   On désigne par Y l'aléa numérique donnant réalisé par le magasin, pendant une semaine, pour la vente de poste de télévision
   a) Donner la loi de probabilité de Y
   b) Quel est le bénéfice moyen réalisé par le magasin pour la vente de postes de télévision pendant une semaine ?
3) Tous les postes de télévisions sont garantis pour deux ans. La probabilité pour qu'un poste de télévision n'ait pas de panne pendant la période de garantie est 0.9. On suppose, durant une semaine, que les cinq postes de télévision sont vendus
   Calculer la probabilité qu'un seul poste tombe en panne pendant la période de garantie

Exercice 18

Dans un supermarché, trois producteurs « a », « b » et « c » fournissent respectivement 25%, 35% et 40% des pommes vendues. Certaines de ces pommes sont hors calibre, dans les proportions suivantes : 5% pour le producteur « a », 4% pour le producteur « b » et 1% pour le producteur « c ».
On prend une pomme au hasard et on définit les événements suivants :

A : "La pomme vient du producteur « a »"
B : "La pomme vient du producteur « b »"
C : "La pomme vient du producteur « c »"
D : "La pomme est hors calibre »

Les résultats seront donnés à 10^{-4} près.

1) Traduire les données de l'énoncé en utilisant les notations des probabilités et tracer un arbre pondéré illustrant la situation
2) Calculer $p(D)$
3) Quelle est la probabilité qu'une pomme vienne du producteur « a » sachant qu'elle est hors calibre ?
4) Calculer la probabilité qu'une pomme vienne du producteur « c » sachant qu'elle n'est pas hors calibre

Exercice 19

Dans cet exercice les résultats seront donnés sous forme décimale à 10^{-3} près
Dans une population donnée, 15% des individus ont une maladie Ma. Parmi les individus atteints de la maladie M_a, 20% ont une maladie M_b et parmi les individus non atteints de la maladie M_a, 4% ont la maladie M_b

1) On prend un individu au hasard et on désigne respectivement par A et B les événements suivants :
   A : " l'individu est atteint de la maladie M_a "
   B : " l'individu est atteint de la maladie M_b "
   $\overline{A}$ désigne l'événement contraire de A, $p_A(B)$ désigne la probabilité de "B sachant A" c'est à dire la probabilité conditionnelle de B par rapport à A
   a) Donnez les valeurs de $p(A)$, $p_A(B)$ et $p_{\overline{A}}(B)$
   b) Calculez $p(B\cap A)$ et $p(B\cap\overline{A})$. Déduisez-en $p(B)$
   c) Calculez $p_B(A)$
2) On prend 10 individus au hasard dans cette population et on désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de ceux ayant la maladie M_a et la maladie M_b
   a) Quelle est la loi de probabilité de X ? (Donnez, en fonction de k, la probabilité $p(X=k)$, où $0\le k\le 10$)

b) Déterminez la probabilité de l'événement "Deux individus au plus sont atteints de la maladie M_a et la maladie M_b "

Exercice 20

Une salle de spectacle propose pour la saison des abonnements pour 4 ou 5 spectacles. Dans la population des abonnés la répartition est la suivante:

- 43.5% ont choisi l'abonnement 4 spectacles
- 33% ont choisi l'abonnement 5 spectacles
- Le reste a choisi l'abonnement 6 spectacles

D'autre part, 65% des abonnés sont des jeunes de moins de 25 ans, et dans cette population, la répartition est différente :

- 40% ont choisi l'abonnement 4 spectacles
- 40% ont choisi l'abonnement 5 spectacles
- Le reste a choisi l'abonnement 6 spectacles

On interroge un abonné au hasard. On note A l'événement : " l'abonné interrogé a moins de 25 ans ". Ainsi, la probabilité $p(A)$ de cet événement est 0.65. On note B l'événement : "l'abonné interrogé a choisi 5 spectacles".

Pour tout événement V, on note $\overline{V}$ l'événement contraire de V

1) a) Quelle est la probabilité que l'abonné interrogé ait 25 ans ou plus?
   b) Sachant que l'abonné interrogé a moins de 25 ans, quelle la probabilité qu'il ait choisi 5 spectacles?
   c) Décrire l'événement $A \cap B$ et démontrer que la probabilité de cet événement est égale à 0,26
2) a) Démontrer que la probabilité $p(\overline{A} \cap B)$ est égale à 0.07
   b) En déduire la probabilité conditionnelle de B sachant que $\overline{A}$ est réalisé
3) L'abonnement pour 4 spectacles coût 50 DT, celui pour 5 spectacles coûte 60 DT, et celui pour 6 spectacles coûte 70 DT. On appelle X la variable aléatoire égale à la somme dépensée par l'abonné interrogé.
   a) Donner la loi de probabilité de X en complétant le tableau suivant:

x_i	50	60	70
$p(X = x_i)$			

   b) Calculer l'espérance mathématique de X

Correction des exercices

Exercice 1

1)

	demi-pensionnaire	non demi-pensionnaire	total
lycéen ayant un ordinateur	368	432	800
lycéen n'ayant pas d'ordinateur	552	648	1200
total	920	1080	2000

2) a) $p(D)=\dfrac{920}{2000}=\dfrac{53}{50}=0.46$, $p(O)=\dfrac{800}{2000}=\dfrac{2}{5}=0.4$ et $p(D\cap O)=\dfrac{368}{2000}=\dfrac{23}{125}=0.184$

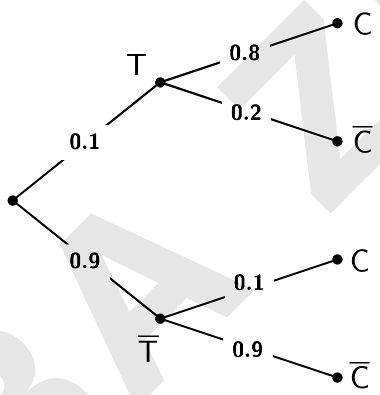
b) $p(D)\times p(O)=0.4\times 0.46=0.184=p(D\cap O)$ donc D et O sont indépendants

c) $p(D\cup O)=p(D)+p(O)-p(D\cap O)=0.46+0.4-0.184=0.676$

d) D et O sont indépendants donc $p(D\mid O)=p(D)=0.46$

Exercice 2

1) $p(T)=0.1$, $p(C\mid T)=0.8$ et $p(C\mid \overline{T})=0.1$



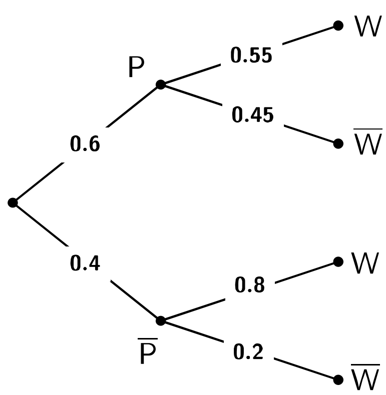
2) $p(C)=p(C\mid T)p(T)+p(C\mid \overline{T})p(\overline{T})=0.1\times 0.8+0.9\times 0.1=0.17$

3) $p(\overline{T}\mid C)=\dfrac{p(C\mid \overline{T})p(\overline{T})}{p(C)}=\dfrac{0.1\times 0.9}{0.17}=\dfrac{9}{17}\simeq 0.53$

4) $p(C\cap T)=p(C\mid T)p(T)=0.8\times 0.1=0.08\neq p(C)p(T)=0.17\times 0.1=0.017$ donc T et C ne sont pas indépendants

Exercice 3

1) Notons P : "le client choisit un modèle 10 pouces" et P : "le client choisit un modèle Windows"



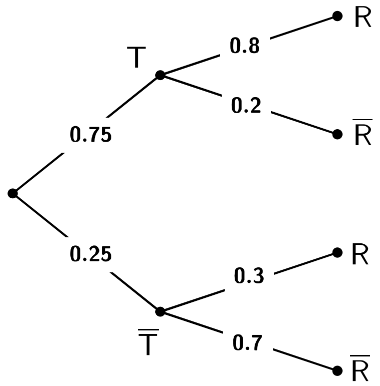
2) $p(W\cap \overline{P})=p(W\mid \overline{P})p(\overline{P})=0.8\times 0.4=0.32$

3) $p(W)=p(W\mid P)p(P)+p(W\mid \overline{P})p(\overline{P})=0.55\times 0.6+0.8+0.4=0.33+0.32=0.65$

4) $p(\overline{P} \mid W) = \dfrac{p(W \mid \overline{P})p(\overline{P})}{p(W)} = \dfrac{0.8 \times 0.4}{0.65} = \dfrac{32}{65} = 0.492 < \dfrac{1}{2}$ donc il a moins d'une chance sur 2 pour que ce client ait porté son choix sur un modèle 13 pouces.

Exercice 4

1)



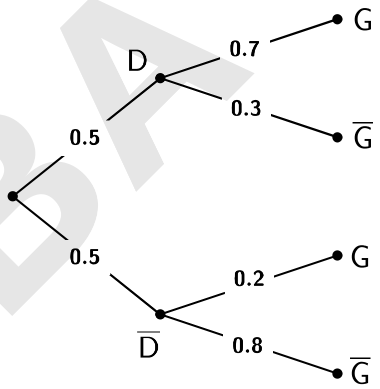
2) a) $p(T \cap R) = p(R \mid T)p(T) = 0.8 \times 0.75 = 0.6$

b) $p(R) = p(R \mid T)p(T) + p(R \mid \overline{T})p(\overline{T}) = 0.8 \times 0.75 + 0.3 \times 0.25 = 0.675$

3) $p(T \mid \overline{R}) = \dfrac{p(\overline{R} \mid T)p(T)}{p(\overline{R})} = \dfrac{0.2 \times 0{,}75}{1 - p(R)} = \dfrac{0.2 \times 0.75}{1 - 0.675} = \dfrac{6}{13} \simeq 0.46$

Exercice 5

1)



2) $p(G \cap D) = p(G \mid D)p(D) = 0.7 \times 0.5 = 0.35$

3) $p(G \cap \overline{D}) = p(G \mid \overline{D})p(\overline{D}) = 0.2 \times 0.5 = 0.1$

4) $p(G) = p(G \cap D) + p(G \cap \overline{D}) = 0.35 + 0.1 = 0.45$

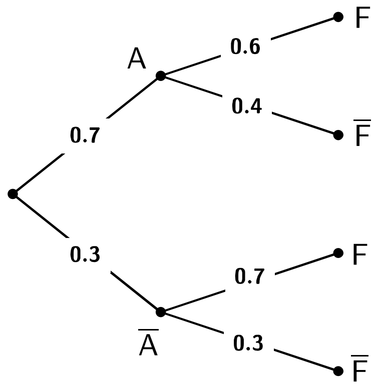
5) $p(D \mid G) = \dfrac{p(G \mid D)p(D)}{p(G)} = \dfrac{0.7 \times 0.5}{0.45} = \dfrac{7}{9} \simeq 0.778$

Exercice 6

1) $p(F \mid A) = \dfrac{p(F \cap A)}{p(A)} = \dfrac{0.42}{0.7} = 0.6$ et $p(\overline{F} \mid A) = 1 - p(F \mid A) = 1 - 0.6 = 0.4$

2) $p(F \cap \overline{A}) = p(F) - p(F \cap A) = 0.63 - 0.42 = 0.21$

3) $p(F \mid \overline{A}) = \dfrac{p(F \cap \overline{A})}{p(\overline{A})} = \dfrac{0.21}{0.3} = 0.7$



4) $p\left(\overline{F}\cap\overline{A}\right)=p\left(\overline{F}\,|\,\overline{A}\right)p\left(\overline{A}\right)=0,3\times0,3=0,09$

Exercice 7

1) Formule des probabilités totales :

$$P(f)=P\left((H\cap f)\cup(F\cap f)\right)=P(H)P(f\,|\,H)+P(F)P(f\,|\,F)=\frac{12}{20}\times\frac{20}{100}+\frac{8}{12}\times\frac{40}{100}=0,28$$

2) Probabilité recherchée est $\dfrac{0,6\times0,2}{0,6\times0,2+0,4\times0,4}=0,43$

Exercice 8

1) A l'aide d'un arbre de probabilités à nouveau nous obtenons :

$$0,25\times0,05+0,35\times0,04+0,4\times0,02=0,0345$$

2) $\dfrac{0,25\times0,05}{0,25\times0,05+0,35\times0,04+0,40\times0,02}=0,3623$

Exercice 9

On considère les événements B_1 : « L'employé travaille de jour », B_2 : « L'employé travaille de soir », B_3 : « L'employé travaille de nuit » et A : « L'employé est absent »

On a $p(A\,|\,B_1)=0,04$, $p(A\,|\,B_2)=0,08$, $p(A\,|\,B_3)=0,22$, $p(B_1)=0,8$, $p(B_2)=0,1$ et $p(B_3)=0,1$

La formule de Bayes donne :

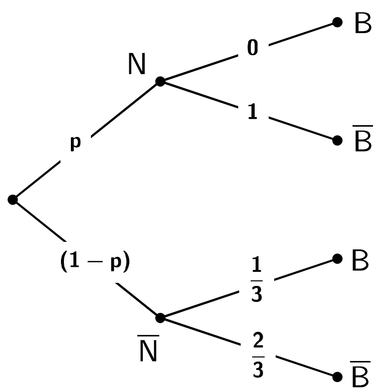
$$p(B_1\,|\,A)=\frac{p(B_1)p(A\,|\,B_1)}{p(A\,|\,B_1)p(B_1)+p(A\,|\,B_2)p(B_2)+p(A\,|\,B_3)p(B_3)}=\frac{0,8\times0,04}{0,8\times0,04+0,1\times0,08+0,1\times0,22}=\frac{16}{31}$$

Exercice 10

On note B l'événement « M. Prudent met ses bottes » et N l'événement « il neige ».

L'énoncé donne $p(B)=\dfrac{8}{10}=\dfrac{4}{5}$, $p(B\,|\,N)=1$ et $p\left(B\,|\,\overline{N}\right)=\dfrac{1}{3}$ donc $p\left(\overline{B}\,|\,\overline{N}\right)=\dfrac{2}{3}$

Notons $p=p(N)$, on en déduit l'arbre pondéré suivant :



Ainsi $p(B)=p(N\cap B)+p\left(\overline{N}\cap B\right)=p(N)\times p(B\,|\,N)+p\left(\overline{N}\right)\times p\left(B\,|\,\overline{N}\right)=p\times1+(1-p)\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{4}{5}$

donc $p+(1-p)\times\frac{1}{3}=\frac{4}{5} \Leftrightarrow \frac{2}{3}p+\frac{1}{3}=\frac{4}{5} \Leftrightarrow \frac{2}{3}p=\frac{4}{5}-\frac{1}{3}=\frac{7}{15} \Leftrightarrow p=\frac{7}{10}$

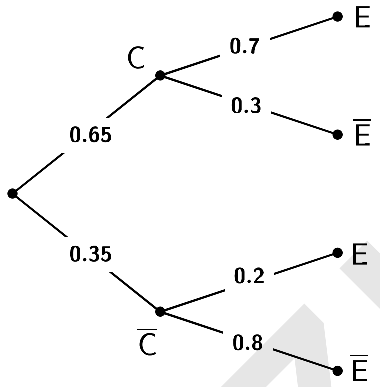
donc $p(N)=\frac{7}{10}$ et $p(\overline{N})=\frac{3}{10}$

On cherche $p(\overline{N}\mid B)$

$$p(\overline{N}\mid B)=\frac{p(\overline{N})\times p(B\mid\overline{N})}{p(B)}=\frac{\frac{3}{10}\times\frac{1}{3}}{\frac{4}{5}}=\frac{1}{10}\times\frac{5}{4}=\frac{1}{8}$$

Exercice 11

1) $p(C)=0,65 \quad p(E\mid C)=0,7 \quad p(E\mid D)=0,2$



2) La probabilité qu'une personne soit contre la construction et soit écologiste est :
$p(C\cap E)=p(E\mid C)p(C)=0,7\times0,65=0,455$
La probabilité qu'une personne soit pour la construction et soit écologiste est :
$p(E\cap D)=p(D)p(E\mid D)=0,35\times0,2=0,07$
La probabilité qu'une personne soit écologiste est :
$p(E)=p(E\cap C)+p(E\cap D)=0,455+0,07=0,525$

3) $p(C\mid E)=\dfrac{p(E\mid C)p(C)}{p(E)}=\dfrac{0,7\times0,65}{0,525}=\dfrac{13}{15}\simeq0,867$

4) $F=\overline{E}\cap C$ donc $p(F)=p(\overline{E}\cap C)=p(C)p(\overline{E}\mid C)=0,65\times0,3=0,195$
Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre des personnes qui sont contre la construction et ne sont pas écologistes. X suit une loi binomiale de paramètres $p=p(F)=0,195$ et $n=5$ et par suite la probabilité qu'au moins une des personnes soit contre la construction et ne soit pas écologiste est
$p(X\geq1)=1-p(X=0)=1-C_5^0\times p^0\times(1-p)^5=1-(1-0,195)^5\simeq0,662$

Exercice 12

1) Avec un dé il y a deux multiples de 3 : 3 et 6 ; on a donc la probabilité $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ et la probabilité $\frac{2}{3}$ de ne pas avoir de multiple de 3
   a) La probabilité d'obtenir une boule noire est alors :
   $p(N)=p(\text{mult de }3)\times p_A(N)+p(\text{pas mult de }3)\times p_B(N)=\frac{1}{3}\times0+\frac{2}{3}\times\frac{2}{4}=\frac{1}{3}$
   b) $p(R)=p(\text{mult de }3)\times p_A(R)+p(\text{pas mult de }3)\times p_B(R)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\times\frac{2}{4}=\frac{5}{12}$
   $p(V)=p(\text{mult de }3)\times p_A(V)+p(\text{pas mult de }3)\times p_B(V)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}+\frac{2}{3}\times0=\frac{3}{12}$
   Le rouge est donc la couleur qui a la plus grande probabilité de sortir.
   c) La probabilité que la boule vienne de B sachant qu'elle est rouge est :
   $$p_R(B)=\frac{p(B\cap R)}{p(R)}=\frac{2}{3}\times\frac{2}{4}\times\frac{12}{5}=\frac{4}{5}$$

2) On réunit toutes les boules dans une seule urne et on tire successivement trois boules que l'on pose chaque fois devant l'urne
   a) On a les possibilités suivantes : $N\overline{N}N$, $\overline{N}NN$, $\overline{N}\,\overline{N}N$; on ne remet pas la boule dans l'urne donc :

$p(\overline{N}\overline{N}N)=p(\overline{N})p(\overline{N})p(N)=\frac{6}{8}\times\frac{5}{7}\times\frac{2}{6}=\frac{5}{28}$, $p(\overline{N}NN)=p(\overline{N})p(N)p(N)=\frac{6}{8}\times\frac{2}{7}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{28}$, de même pour $p(N\overline{N}N)$; au total cela donne bien $\frac{1}{4}$

b) Non, ce sont des probabilités identiques… $p(N)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$

Exercice 13

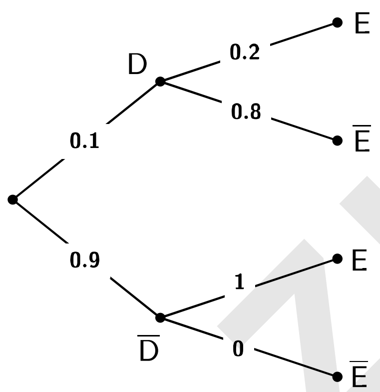
1) a) X est une loi binomiale de paramètre $n=8$ et $p=0,1$

b) $p(A)=p(X=0)=C_8^0\times(0,1)^0\times(0,9)^8=(0,9)^8\simeq 0,43$

$p(B)=p(X\geq 1)=1-p(X=0)=1-(0,9)^8\simeq 0,57$

$p(C)=p(X=2)=C_8^2\times(0,1)^2\times(0,9)^6=28\times(0,1)^2\times(0,9)^6\simeq 0,15$

2) a) Traduisons la situation par un arbre :



b) La formule des probabilités totales permet d'écrire :

$$p(E)=p(D\cap E)+p(\overline{D}\cap E)=p(D)p(E\,|\,D)+p(\overline{D})p(E\,|\,\overline{D})=0,1\times 0,2+0,9\times 1=0,92$$

La probabilité qu'un stylo soit accepté au contrôle est 0,92

c) La probabilité demandé est $p(D\,|\,E)$ or $p(D\,|\,E)=\frac{p(E\cap D)}{p(E)}=\frac{p(D)p(E\,|\,D)}{p(E)}=\frac{0,1\times 0,2}{0,92}\simeq 0,022$

La probabilité qu'un stylo ait un défaut sachant qu'il a été accepté au contrôle est 0,022 à 10^{-3} près

3) Notons Y le nombre de stylos ayant un défaut après le contrôle. La variable aléatoire Y est régie par un schéma de Bernoulli. En effet,

- 8 expériences identiques et indépendantes sont effectuées
- chaque expérience a deux issues : « le stylo a un défaut » avec une probabilité $p=0,022$ ou « le stylo n'a pas de défaut » avec une probabilité $1-p=0,978$

La variable aléatoire Y suit donc une loi binomiale de paramètres $n=8$ et $p=0,022$

La probabilité demandée est $p(Y=0)=C_8^0\times(0,022)^0\times(0,978)^8=0,84$ à 10^{-2} près

Ainsi la probabilité est passée de $0,43$ avant le contrôle à $0,84$ après le contrôle. Cette probabilité a nettement augmentée et le contrôle semble efficace

Exercice 14

1) a) $p(A)=\frac{1}{6}$, $p(\overline{A})=\frac{5}{6}$, $p(B\,|\,A)=\frac{4}{7}$, $p(B\,|\,\overline{A})=\frac{17}{35}$

D'après la loi des probabilités totales on a :

$$p(B)=p(A\cap B)+p(\overline{A}\cap B)=p(A)p(B\,|\,A)+p(\overline{A})p(B\,|\,\overline{A})=\frac{4}{7}\times\frac{1}{6}+\frac{17}{35}\times\frac{5}{6}=\frac{1}{2}$$

b) $p(A\,|\,B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}=\frac{p(A)p(B\,|\,A)}{p(B)}=\frac{1}{6}\times\frac{4}{7}\times 2=\frac{4}{21}$

c) De même on a :

$$p(\overline{A}\,|\,\overline{B})=\frac{p(\overline{A}\cap\overline{B})}{p(\overline{B})}=\frac{p(\overline{A})p(\overline{B}\,|\,\overline{A})}{p(\overline{B})}=\frac{p(\overline{A})\left(1-p(B\,|\,\overline{A})\right)}{p(\overline{B})}=\frac{\frac{5}{6}\times\left(1-\frac{17}{35}\right)}{\frac{1}{2}}=\frac{5}{6}\times\frac{18}{35}\times 2=\frac{6}{7}$$

2) Ensemble des valeurs de X : $\{1,2,3,4\}$

k	1	2	3	4
$p(X=k)$	$\frac{4\times 6!}{7!}=\frac{4}{7}$	$\frac{3\times 4\times 5!}{7!}=\frac{2}{7}$	$\frac{4\times 3\times 2\times 4!}{7!}=\frac{4}{35}$	$\frac{3!\times 4!}{7!}=\frac{1}{35}$

$E(X)=1\times\frac{4}{7}+2\times\frac{2}{7}+3\times\frac{4}{35}+4\times\frac{1}{35}=\frac{8}{5}$ $\quad E(X^2)=1\times\frac{4}{7}+2^2\times\frac{2}{7}+3^2\times\frac{4}{35}+4^2\times\frac{1}{35}=\frac{16}{5}$

$Var(X)=\frac{16}{5}-\left(\frac{8}{5}\right)^2=\frac{16}{25}$ $\quad \sigma(X)=\frac{4}{5}$

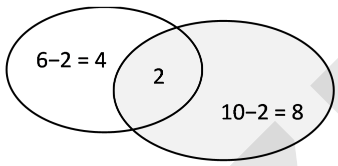
Exercice 15

1) $p(P)=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$, $p(T)=\frac{6}{30}=\frac{1}{5}$, $p(T_2\cap T_1)=P(T_2\mid T_1)p(T_1)=\frac{1}{9}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{45}$

On a alors $p(P\cap T)=\frac{2}{30}=\frac{1}{15}$ et $p(P)\times p(T)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{15}$ donc les événements sont indépendants.

Ceci est un pur hasard de calcul, si vous changez par exemple le nombre d'élèves dans la classe ça ne marche plus ….

2) Lors d'une séance du club photo, les 10 membres sont tous présents. Un premier élève est tiré au sort. Il doit prendre la photo d'un autre membre du club qui sera lui aussi tiré au sort



a) $p(T_1)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$, $p(T_2\mid T_1)=\frac{1}{9}$: il reste à tirer un membre du club théâtre parmi les neuf restants

$P(T_2\mid\overline{T_1})=\frac{2}{9}$: Si $\overline{T_1}$ est réalisé le premier élève ne fait pas de théâtre, il reste deux choix parmi 9 restants

$p(T_2\cap T_1)=p(T_2\mid T_1)p(T_1)=\frac{1}{9}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{45}$ $\quad p(T_2\cap\overline{T_1})=p(T_2\mid\overline{T_1})\,p(\overline{T_1})=\frac{2}{9}\times\frac{4}{5}=\frac{8}{45}$

b) Avec les probabilités totales, on a : (Le calcul aurait pu se faire directement avec un arbre)

$p(T_2)=p((T_1\cap T_2)\cup(\overline{T_1}\cap T_2))=p(T_1\cap T_2)+p(\overline{T_1}\cap T_2)=p(T_2\mid T_1)p(T_1)+p(T_2\mid\overline{T_1})p(\overline{T_1})$

$=\frac{1}{45}+\frac{8}{45}=\frac{9}{45}=\frac{1}{5}$

3) Loi binomiale : $n=4$, $p=1-p(T_2)=\frac{4}{5}$ La probabilité cherchée est, en posant X le nombre de fois où l'élève photographié n'appartient pas au club théâtre $p(X=4)=C_4^4\times p^4\times(1-p)^0=\frac{4^4}{5^4}=\frac{256}{625}$

Exercice 16

1) Le texte donne $p(G)=0{,}2$, $p(D|G)=0{,}01$, $p\left(D|\overline{G}\right)=0{,}1$

$p(A)=p(G\cap D)=p(G)\times p(D|G)=0{,}2\times 0{,}01=0{,}002$

$p(D)=p(G\cap D)+p(\overline{G}\cap D)=p(G)\times p(D|G)+p(\overline{G})\times p(D|\overline{G})=0{,}002+0{,}8\times 0{,}1=0{,}082$

2) On cherche $p(G|D)=\frac{p(D\cap G)}{p(D)}=\frac{0{,}002}{0{,}082}=\frac{2}{82}=\frac{1}{41}$

3) X peut prendre les valeurs 0, 80 ou 280 :

$p(X=0)=p(G)=0{,}2$

$p(X=80)=p(\overline{G}\cap\overline{D})=p(\overline{G})p(\overline{D}|\overline{G})=0{,}8\times(1-0{,}1)=0{,}72$

$p(X=280)=p(\overline{G}\cap D)=p(\overline{G})p(D|\overline{G})=0{,}8\times 0{,}1=0{,}08$

$E(X)=0{,}2\times 0+0{,}72\times 80+0{,}08\times 280=80$

4) Soit N le nombre de chaudières sous garantie parmi les chaudières défectueuses : N suit une loi binomiale de paramètres $n=5$ et $p=p(G|D)=\frac{1}{41}$

La probabilité cherchée est :

$$p(N \geq 1) = 1 - p(N=0) = 1 - C_5^0 \times p^0 \times (1-p)^5 = 1 - \left(1 - \frac{1}{41}\right)^5 = 1 - \left(\frac{40}{41}\right)^5 \approx 0{,}116$$

Exercice 17

1) $E(X) = 0 \times 0.1 + 1 \times 0.1 + 2 \times 0.2 + 3 \times 0.2 + 4 \times 0.3 + 5 \times 0.1 = 2.8$
2) $Y(\Omega) = \{0, 80, 160, 240, 320, 400\}$

$y_i = 80x_i$	0	160	240	320	400
$p(Y = y_i)$	0,1	0,1	0,2	0,2	0,3

Le bénéfice moyen réalisé par le magasin pour la vente de postes de télévision pendant une semaine est $E(Y) = E(80X) = 80 \times E(X) = 224$

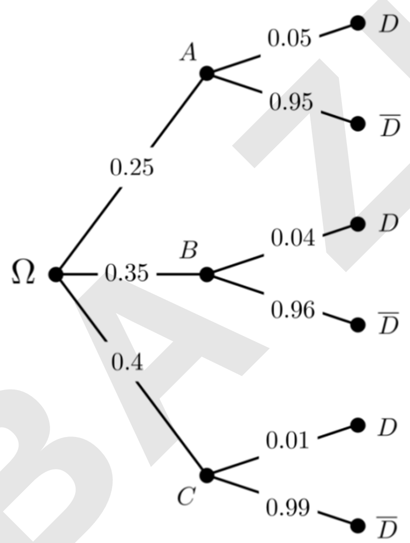
3) Soit Z le nombre des postes vendus qui tombent en panne pendant la période de garantie. Z est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres $p = 0.1$ et $n = 5$

La probabilité qu'un seul poste tombe en panne pendant la période de garantie est donc :

$$p(Z=1) = C_5^1 (0.1)^1 \times (0.9)^4 = 5 \times 0.1 \times (0.9)^4 = 0.32805$$

Exercice 18

1) Les pommes sont choisies au hasard donc les tirages sont équiprobables. On en déduit l'arbre pondéré :



2) En multipliant les probabilités sur les branches débouchant sur D :

$$\begin{aligned} p(D) &= p(A \cap D) + p(B \cap D) + p(C \cap D) = p(A) \times p(D \mid A) + p(B) \times p(D \mid B) + p(C) \times p(D \mid C) \\ &= 0.25 \times 0.05 + 0.35 \times 0.04 + 0.4 \times 0.01 \\ &= 0.0305 \end{aligned}$$

3) La probabilité qu'une pomme vienne du producteur « a » sachant qu'elle est hors calibre est $p(A \mid D)$

Comme $p(D) \neq 0$ alors :

$$p(A \mid D) = \frac{p(A) \times p(D \mid A)}{p(D)} = \frac{0.25 \times 0.05}{0.0305} = \frac{0.0125}{0.0305} \simeq 0.4098$$

4) La probabilité qu'une pomme vienne du producteur « a » sachant qu'elle est hors calibre est $p(C \mid D)$

Comme $p(D) \neq 0$ alors :

$$p(C \mid \overline{D}) = \frac{p(C) \times p(\overline{D} \mid C)}{p(\overline{D})} = \frac{0.99 \times 0.4}{1 - p(D)} = \frac{0.99 \times 0.4}{0.9695} \simeq 0.4085$$

Exercice 19

1) a) $p(A) = 0{,}15$, $p(B \mid A) = 0{,}2$, $p(B \mid \overline{A}) = 0{,}04$

b) On sait que $p(B \cap A) = p(A) \times p(B \mid A) = 0{,}15 \times 0{,}2 = 0{,}03$ de même, $p(B \cap \overline{A}) = 0{,}85 \times 0{,}04 = 0{,}034$

car $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$

D'après la loi des Probabilités Totales, on a donc :

$$p(B) = p(B \cap A) + p(B \cap \overline{A}) = 0,03 + 0,034 = 0,064$$

c) $p(A \mid B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)} = \dfrac{0,03}{0,064} = 0,46875$

2) Dans cette question, on est obligé de supposer que les choix sont indépendants les uns des autres, sinon, on ne peut pas répondre aux questions.

a) Dans ce cas, si X est la variable aléatoire correspondant au nombre d'individus atteints des maladies M_a et M_b , alors X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,03$. Donc, pour tout k compris entre 0 et 10, on a : $p(X = k) = C_{10}^{k} \times (0,03)^{k} \times (0,97)^{10-k}$

b) En particulier, on cherche $p(X \leq 2)$.
Comme X prend des valeurs entières entre 0 et 10, on a donc :

$$\begin{aligned} p(X \leq 2) &= p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) \\ &= (0,97)^{10} + 10 \times (0,03)^{1} \times (0,97)^{9} + 45 \times (0,03)^{2} \times (0,97)^{8} \\ &\simeq 0,997235 \end{aligned}$$

Exercice 20

1) Il faut commencer par traduire en langage des probabilités les hypothèses de l'énoncé. A étant l'événement "moins de 25 ans" et B l'événement "a choisi 5 spectacles", l'énoncé nous dit que: $p(A) = 0,65$ car 65% des abonnés ont moins de 25 ans. $p(B) = 0,33$ car 33% des abonnés ont choisi l'abonnement 5 spectacles

a) La probabilité qu'un abonné ait 25 ans ou plus est donc : $1 - 0,65 = 0,35$

b) $p(B \mid A) = 0,4$ car 40% des abonnés de moins de 25 ans ont choisi l'abonnement 5 spectacles.

c) $p(A \cap B) = p(A \mid B)p(A) = 0,4 \times 0,65 = 0,26$. L'événement $A \cap B$ est l'événement " l'abonné a moins de 25 ans ET a choisi 5 spectacles ".

2) a) On sait que $p(B) = p(A \cap B) + p(\overline{A} \cap B)$ donc $p(\overline{A} \cap B) = 0,33 - 0,26 = 0,07$

b) $p(B \mid \overline{A}) = \dfrac{p(B \cap \overline{A})}{p(\overline{A})} = \dfrac{0,07}{0,35} = 0,2$

3) a) D'après les hypothèses de l'énoncé, on sait que 43,5% ont choisi l'abonnement 4 spectacles. Donc $p(X = 50) = 0,435$. De même, $p(X = 60) = 0,33$ et $p(X = 70) = 1 - 0,435 - 0,33 = 0,235$. D'où le tableau de la loi de probabilité de X :

x_i	50	60	70
$p(X = x_i)$	0,435	0,33	0,235

b) $E(X) = 0,435 \times 50 + 0,33 \times 60 + 0,235 \times 70 = 58$

Chapitre 10

Graphes

Rappel de cours

Vocabulaire

- Un **graphe** est constitué d'un nombre fini de sommets et d'arêtes
- L'**ordre** d'un graphe est le nombre de sommets de ce graphe
- Le **degré** d'un sommet est le nombre d'arêtes ayant ce sommet pour extrémité
- Dans un graphe, deux sommets liés par une arête sont dits **adjacents**
- Un sommet est **isolé** s'il n'est adjacent à aucun autre sommet
- On appelle **graphe pondéré**, un graphe dont les arêtes ont été affectées d'un nombre appelé poids
- Une **chaîne** est une suite alternée de sommets et d'arêtes
- Une chaine est dite **fermée** si son origine et son extrémité sont confondues
- La **longueur** d'une chaine est le nombre d'arêtes qui la composent
- Le **poids d'une chaîne** est la somme des poids des arêtes qui constituent la chaîne
- La **distance** entre deux sommets est la plus courte longueur des chaînes qui les relient
- Un **cycle** est une chaîne dont les arêtes sont distinctes et dont l'origine et l'extrémité sont confondues
- Une chaîne **eulérienne** est une chaîne empruntant une fois et une seule chaque arête du graphe
- Un cycle **eulérien** est un cycle empruntant une fois et une seule chaque arête du graphe
- Un graphe est **connexe** si pour toute paire de sommets du graphe il existe une chaîne les reliant
- Un **graphe complet** est un graphe dans lequel chaque sommet est adjacent à tous les autres. Un graphe complet d'ordre n est noté K_n (en hommage à Kuratowski)
- Un **sous-graphe** d'un graphe G est un graphe dont les sommets et les arêtes sont des sommets et des arêtes de G

Lemme de poignées de main

La somme des degrés des sommets d'un graphe est égale à deux fois le nombre des arêtes de ce graphe

Théorèmes d'Euler

- Un graphe connexe admet une chaîne eulérienne si, et seulement si, tous ses sommets sont de degré pair sauf éventuellement deux d'entre eux
- Un graphe connexe admet un cycle eulérien si, et seulement si, tous ses sommets sont de degré pair

Coloration d'un graphe

- Une **coloration** d'un graphe consiste en l'attribution de couleurs aux sommets, de telle sorte que deux sommets adjacents n'aient jamais la même couleur
- Le **nombre chromatique** d'un graphe G, noté $\gamma(G)$, est le nombre minimum de couleurs nécessaires à sa coloration, c'est à dire le plus petit nombre de couleurs permettant de colorier tous les sommets du graphe sans que deux sommets adjacents soient de la même couleur
- Le nombre chromatique de K_n est exactement n
- Le nombre chromatique d'un graphe est supérieur ou égal à l'ordre de tous ses sous-graphes complets
- Le nombre chromatique d'un graphe est inférieur ou égal à $r+1$, où r est le plus grand degré de ses sommets

Algorithme de coloration de WELSH et POWELL

Cet algorithme permet d'obtenir une assez bonne coloration d'un graphe, c'est à dire une coloration n'utilisant pas un trop grand nombre de couleurs. Cependant il n'assure pas que le nombre de couleurs utilisé soit minimum

Étape 1 : Classer les sommets du graphe dans l'ordre décroissant de leur degré, et attribuer à chacun des sommets son numéro d'ordre dans la liste obtenue. On obtient une liste ordonnée de sommets X_1, X_2, …, X_n tels que : $\text{degré}(X_1) \geq \text{degré}(X_2) \geq ... \geq \text{degré}(X_n)$

Étape 2 : En parcourant la liste dans l'ordre, attribuer une couleur non encore utilisée au premier sommet non encore coloré, et attribuer cette même couleur à chaque sommet non encore coloré et non adjacent à un sommet de cette couleur

Étape 3 : S'il reste des sommets non colorés dans le graphe, revenir à l'étape 2. Sinon, la coloration est terminée

Graphe orienté

- Un graphe orienté est un graphe où chaque arrête est orienté c'est-à-dire qu'elle ne peut être parcourus que dans un seule sens
- Une arête orienté est appelé **arc**
- Une **boucle** est une arête dont l'extrémité et l'origine sont les mêmes
- Une **chaine orienté** ou un **chemin** est une suite d'arcs tel que l'extrémité de chacun soit l'origine du suivant
- Un **cycle orienté** ou un **circuit** est une chaine orientée fermée composée d'arc tous distincts
- Un graphe orienté connexe est eulérien si, et seulement si, pour tout sommet il y a autant d'arcs sortant que d'arcs rentrant
- Un graphe orienté G possède une chaine eulérienne si et seulement si pour tout sommet X de G on a $d^+(X)=d^-(X)$ sauf pour deux sommets exactement A et B on a $d^+(A)=d^-(A)+1$ et $d^+(A)=d^-(A)-1$.
  $d^+(X)$ et $d^-(X)$ désignent respectivement le nombre d'arêtes orientés sortant et rentrant à X

Matrice associée à un graphe

- Soit G un graphe dont les sommets sont $S_1,\dots,S_n$. la matrice associée au graphe G est la matrice $A=(a_{ij})$ avec a_{ij} est le nombre d'arêtes allant de S_i à S_j

Nombre d'arêtes rentrant à S_j

$$A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Nombre d'arêtes sortant de S_i

Nombre d'arêtes allant de S_i à S_j

- La somme de tous les termes de la matrice associée à un graphe non orienté est égale à la somme des degrés des sommets de ce graphe
- La matrice associée à un graphe non orienté est symétrique par rapport à sa diagonale

Distance de deux sommets

- Le nombre des chaines de longueur n joignant le sommet i au sommet j d'un graphe est égale au terme a_{ij} de la matrice A^n où A est la matrice associée à ce graphe
- La **distance de deux sommets** distincts est la longueur de la plus courte chaine joignant ces deux sommets
- La distance est infinie s'il n'existe pas de chaine joignant les deux sommets
- La distance d'un sommet à lui-même est nulle
- La distance entre deux sommets distinct i et j est le plus petit entier naturel $n \geq 1$ tel que le terme d'indice i,j de A^n est non nul
- Le **diamètre d'un graphe** est la plus grande des distances entre deux sommets du graphe
- Le diamètre d'un graphe est le plus petit entier naturel n tel que la matrice $(A+Id)^n$ ait tous ses termes strictement positifs, A étant la matrice associée à ce graphe et Id est la matrice unité

Algorithme de DIJKSTRA-MOOR

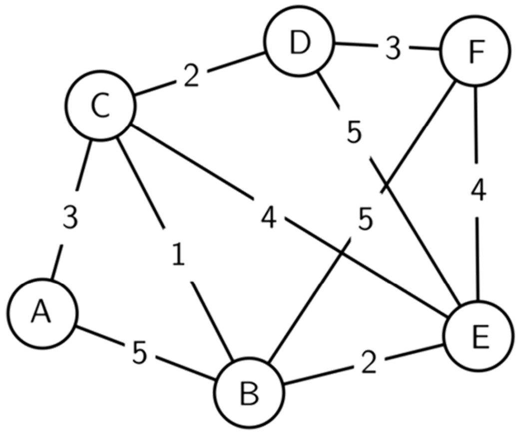
<u>Étape 1</u> : On affect le coefficient 0 à l'origine et le coefficient ∞ à tous les autres sommets. On sélectionne le sommet de plus petit coefficient et on raye toutes les autres cases de la colonne du sommet sélectionné (ici A).

<u>Étape 2</u> : On affecte les sommets adjacents à A le poids de l'arrête qui le relie à A et le coefficient ∞ à tous les autres sommets. On sélectionne le sommet de plus petit coefficient et on raye toutes les autres cases de la colonne du sommet sélectionné.

<u>Étape 3</u> : On affecte les sommets non sélectionnés du poids de l'arrête qui le relie au dernier sommet sélectionné tant que le poids totale est inférieur au poids accumulé dans l'étape précédente. Dans le cas contraire on garde le poids accumulé dans l'étape précédente. On sélectionne le sommet de plus petit coefficient et on raye toutes les autres cases de la colonne du sommet sélectionné.

<u>Étape 4</u> : On répète l'étape 3) tant qu'il y a des sommets non sélectionné ou des sommets qui ne sont pas affectés de plus petit coefficient.

<u>Étape 5</u> : La chaine du poids minimal se lit à l'envers.



A	B	C	D	E	F	On garde
0	∞	∞	∞	∞	∞	A
	0+5 5 (A)	0+3 3 (A)	∞	∞	∞	C
	3+1 4 (C)		3+2 5 (C)	3+4 7 (C)	∞	B
			5 (C)	4+2 6 (B)	4+5 9 (B)	D
				6 (B)	5+3 8 (D)	E
					6+4 10 (E)	F

Graphe probabiliste

- Un **graphe probabiliste** est un graphe orienté et pondéré dont la somme des poids des arêtes orienté sortant de chaque sommet vaut 1.

Matrice de transition – Etat stable

- On appelle **matrice de transition** d'un graphe probabiliste à n sommets, la matrice carrée d'ordre n dont le terme figurant à la i^{ème} ligne et la j^{ème} colonne est égal au poids de l'arête allant du sommet i au sommet j, si elle existe, et à 0 sinon.
- Une matrice de transition est une matrice à termes positifs dont la somme des éléments de chaque ligne est égale à 1
- Soit P_n la matrice ligne décrivant l'état probabiliste à l'étape n, P_0 est la matrice ligne décrivant l'état probabiliste à l'état initial et M la matrice de transition du graphe probabiliste alors $P_n = P_0 \times M^n$
- Pour tout graphe probabiliste d'ordre 2 dont la matrice de transition ne comporte pas de zéro, l'état P_n à l'étape n converge vers un état stable P indépendante de l'état principal P_0 avec P est l'unique solution du système $X \times M = X$ où $X = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ avec $x + y = 1$

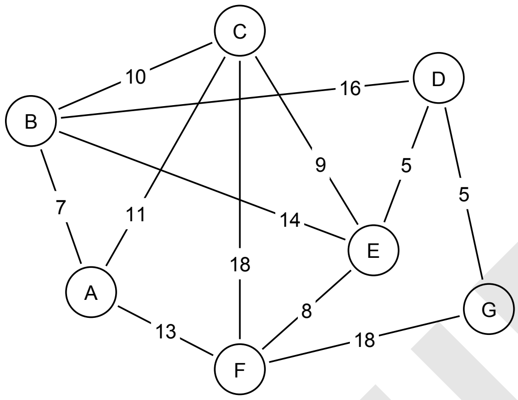
Attention !

- Ne pas oublier que la matrice ligne décrivant un état probabiliste est une matrice dont les termes sont tous positives et leurs somme est égal à 1
- Ne pas croire que la somme des éléments de chaque colonne d'une matrice de transition est égale à 1 seule la somme des éléments de chaque ligne est égale à 1

Les exercices

Exercice 1

Une grande ville a mis en place un système de location de bicyclettes en libre-service. Un abonné peut ainsi louer une bicyclette dans une station puis la déposer dans n'importe quelle station de son choix. La ville compte sept stations de location nommées A, B, C, D, E, F et G. Les stations sont reliées entre elles par une piste cyclable et les temps de parcours en minutes sont indiqués sur le graphe ci-dessous.



1) Philippe, cycliste très prudent, décide de visiter cette ville en n'empruntant que des pistes cyclables
   a) A-t-il la possibilité d'effectuer un parcours empruntant une fois et une seule toutes les pistes cyclables ? Justifier
   b) A la fin de ce parcours, pourra-t-il rendre sa bicyclette dans la station de départ ? Justifier la réponse
2) On appelle M la matrice associée à ce graphe. On donne deux matrices N et T :

$$N = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 8 & 5 & 5 & 9 & 2 \\ 9 & 6 & 10 & 7 & 10 & 6 & 4 \\ 8 & 10 & 5 & 8 & 10 & 9 & 4 \\ 5 & 7 & 5 & 2 & 8 & 4 & 5 \\ 5 & 10 & 10 & 8 & 6 & 11 & 2 \\ 9 & 6 & 9 & 4 & 11 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 4 & 5 & 2 & 6 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 8 & 5 & 5 & 9 & 1 \\ 9 & 6 & 10 & 6 & 10 & 6 & 4 \\ 8 & 10 & 8 & 4 & 10 & 9 & 4 \\ 5 & 7 & 5 & 2 & 8 & 4 & 5 \\ 5 & 8 & 10 & 8 & 6 & 11 & 0 \\ 9 & 6 & 9 & 4 & 11 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 4 & 5 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

   a) Une des deux matrices N ou T est la matrice M^3. Sans calculs, indiquer quelle est la matrice M^3. Justifier
   b) Philippe a loué une bicyclette à la station F et l'a rendue à la station E. Au cours de son déplacement, il a emprunté exactement trois pistes. Combien de trajets différents a-t-il pu suivre?
3) Le lendemain, il envisage de rejoindre le plus rapidement possible la station G en partant de la station A
   A l'aide d'un algorithme, déterminer un tel parcours et donner alors le temps nécessaire pour l'effectuer

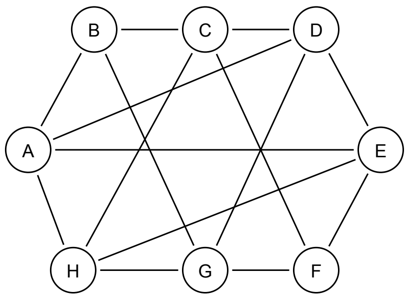
Exercice 2

On considère la matrice M carrée d'ordre 5 : $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1) a) Construire le graphe G associé à la matrice M. On appellera A, B, C, D et E les sommets
   b) Ce graphe est-il connexe? Est-il complet? Justifier votre réponse
2) a) Donner le degré de chacun des sommets du graphe G
   b) En déduire le nombre d'arêtes du graphe G
3) On donne $M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
   a) Combien y a-t-il de chaîne de longueur 2 reliant les sommets B et D? Les écrire
   b) Quel est le nombre de chaîne de longueur 2 partant de B sans y revenir ?
4) a) Le graphe G admet-il une chaîne eulérienne? Justifier soigneusement votre réponse et, dans l'affirmative, donner une telle chaîne
   b) Le graphe G admet-il un cycle eulérien? Justifier

Exercice 3

On considère le graphe suivant :



1) Le graphe est-il connexe ?
2) Le graphe admet-il des chaînes eulériennes ? Si oui, en préciser une
3) Justifier la non-existence d'un cycle eulérien pour le graphe. Quelle arête peut-on alors ajouter à ce graphe pour obtenir un graphe contenant un cycle eulérien ?
4) Soit M la matrice associée à ce graphe (Les sommets sont pris dans l'ordre alphabétique). On donne la matrice

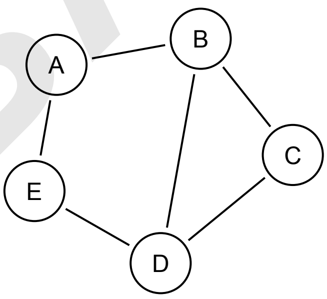
$$M^3 = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 3 & 12 & 7 & 8 & 3 & 12 \\ 10 & 0 & 11 & 1 & 8 & 1 & 11 & 1 \\ 3 & 11 & 0 & 14 & 3 & 11 & 0 & 14 \\ 12 & 1 & 14 & 2 & 12 & 1 & 14 & 2 \\ 7 & 8 & 3 & 12 & 4 & 10 & 3 & 12 \\ 8 & 1 & 11 & 1 & 10 & 0 & 11 & 1 \\ 3 & 11 & 0 & 14 & 3 & 11 & 0 & 14 \\ 12 & 1 & 14 & 2 & 12 & 1 & 14 & 2 \end{pmatrix}$$

Déterminer le nombre de chaînes de longueur 3 partant du sommet G et aboutissant au sommet E. Citer alors toutes ces chaînes

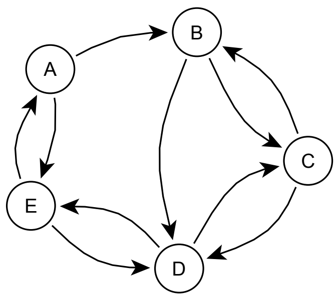
Donner un encadrement du nombre chromatique X du graphe. Déterminer ce nombre chromatique, en explicitant clairement la démarche

Exercice 4

1) Dans un parc, il y a cinq bancs reliés entre eux par des allées. On modélise les bancs par les sommets A, B, C, D, E et les allées par les arêtes du graphe G ci-contre :



   a) On désire peindre les bancs de façon que deux bancs reliés par une allée soient toujours de couleurs différentes. Donner un encadrement du nombre minimal de couleurs nécessaires et justifier. Déterminer ce nombre
   b) Est-il possible de parcourir toutes les allées de ce parc sans passer deux fois par la même allée?
2) Une exposition est organisée dans le parc. La fréquentation devenant trop importante, on décide d'instaurer un plan de circulation : certaines allées deviennent à sens unique, d'autres restent à double sens. Par exemple la circulation dans l'allée située entre les bancs B et C pourra se faire de B vers C et de C vers B, alors que la circulation dans l'allée située entre les bancs A et B ne pourra se faire que de A vers B. le graphe G' ci-dessous modélise cette nouvelle situation :



a) Donner la matrice M associée au graphe G' (On ordonnera les sommets par ordre alphabétique)

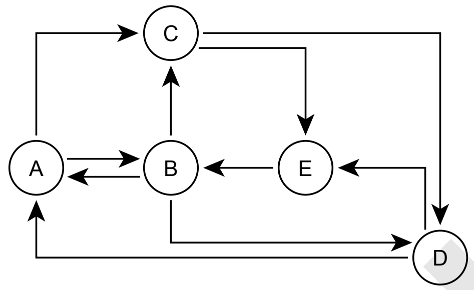
b) On donne $M^5 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 9 & 6 & 10 \\ 4 & 5 & 7 & 11 & 5 \\ 4 & 6 & 6 & 11 & 5 \\ 1 & 5 & 10 & 6 & 10 \\ 6 & 5 & 5 & 14 & 2 \end{pmatrix}$

Combien y a-t-il de chemins de longueur 5 permettant de se rendre du sommet D au sommet B ? Les donner tous

c) Montrer qu'il existe un seul cycle de longueur 5 passant par le sommet A. Quel est ce cycle ? En est-il de même pour le sommet B ?

Exercice 5

On considère le graphe G suivant :



1) Déterminer la matrice M du graphe G
2) a) Compléter le tableau suivant :

Sommet	A	B	C	D	E
d^+					
d^-					
$d^+ - d^-$					

b) Le graphe G possède-t-il un circuit Eulérien? Justifier

c) Le graphe admet-il des chaînes orientées Eulériennes? Si oui, en préciser une

3) a) Déterminer deux chemin de longueur 4 allant de A à E

b) Une des trois matrice K, P et Q est la matrice M^4. Indiquer laquelle est la matrice M^4 et justifier

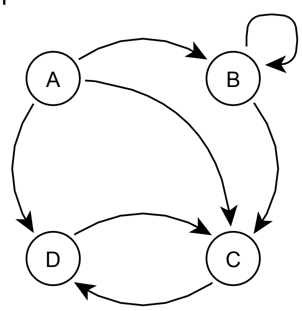
$K = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 5 & 6 & 4 \\ 3 & 1 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 5 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 5 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

c) Combien y a-t-il de chemins de longueur 4 permettant de se rendre :
- du sommet C au sommet B
- du sommet B au sommet C

d) Quel est le nombre des chaines orientées de longueur 4 :
- Partant de D
- Finissant en D

Exercice 6

On considère le graphe orienté G suivant :
1) Dénombrer, à partir du dessin, les chaines orientées de longueur 2 allant du sommet A au sommet C
2) Donner la matrice M associée à G
3) Retrouver le résultat de la question1, puis donner le nombre de chaînes de longueur 8 allant de B à D



Exercice 7 BAC [session de contrôle 2014]

On considère un graphe G, de sommets A, B, C, D et E dont la matrice associée est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1) a) Justifier que G est un graphe non orienté
   b) Représenter le graphe G et donner son ordre
2) Compléter le tableau suivant :

Sommet	A	B	C	D	E
Degré					

3) a) Donner un sous graphe complet d'ordre 3
   b) On note $\gamma(G)$ le nombre chromatique du graphe G. Justifier que $3 \le \gamma(G) \le 5$
4) Après avoir classé les sommets dans l'ordre de degré décroissant, colorier le graphe G et en déduire le nombre chromatique $\gamma(G)$

Exercice 8 BAC [session principale 2010]

On considère un graphe G de sommets A, B, C et D dont la matrice associée est $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1) Justifier que G est un graphe orienté
2) a) Recopier et compléter le tableau suivant où d^+ et d^- représentent respectivement le nombre d'arêtes sortantes et le nombre d'arêtes rentrantes

	A	B	C	D
d^+				
d^-				

   b) Le graphe G admet-il un cycle orienté eulérien ?
   c) Justifier que G admet une chaine orientées eulérienne
   d) Représenter le graphe G et donner un exemple d'une chaîne eulérienne
3) On donne $M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
   a) Combien de chaîne orientée de longueur 3 relient-elles le sommet B au sommet C ?
   b) Donner toutes les chaînes orientées de longueur 3 reliant B à C

Exercice 9

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et on désigne par G le graphe qui lui est associé.

1) a) Le graphe G est-il orienté ? Justifier
   b) Construire le graphe G. On appellera A, B, C, D et E les sommets.
   c) Ce graphe est-il connexe? Est-il complet? Justifier vos réponses.
2) a) Recopier et compléter le tableau suivant :

	A	B	C	D	E
d^+					
d^-					

   b) Le graphe G admet-il un chemin eulérien ? justifier soigneusement votre réponse.
3) On donne $M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
   a) Combien y a-t-il de chemin de longueur 3 allant de D à C ? Les écrire.

b) Quel est le nombre de chemin de longueur 3 arrivant à C ?

Exercice 10 BAC [Session de contrôle 2017]

La matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est associée à un graphe G de sommets A, B, C, D et E dans cet ordre.

1) a) Recopier et compléter le tableau suivant où d^+ et d^- représentent respectivement le nombre d'arrêtes sortantes et le nombre d'arrêtes rentrantes.

	A	B	C	D	E
d^+					
d^-					

b) Le graphe G admet-il un cycle eulérien? Expliquer.
c) Vérifier que G admet une chaine eulérienne
d) Représenter le graphe G et donner un exemple d'une chaine eulérienne

2) On donne $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Combien y a-t-il de chaines de longueur 2 reliant le sommet B au sommet E ?

Exercice 11

Dans un club de football, lors de longues séances de tirs au but, le gardien se comporte de la manière suivante :

- S'il a arrêté un tir, il arrête le suivant avec la probabilité de 0.5
- S'il a encaissé un but, il arrête le tir suivant avec la probabilité de 0.2

1) a) Représenter la situation à l'aide d'un graphe probabiliste
b) Donner la matrice de transition de ce graphe
2) Le gardien n'a pas arrêté le premier tir. Quelle est la probabilité qu'il arrête le troisième tir ?

Exercice 12

Dans une entreprise, lors d'un mouvement social, le personnel est amené à se prononcer chaque jour sur l'opportunité ou non du déclenchement d'une grève.
Le premier jour, 15% du personnel souhaite le déclenchement d'une grève. À partir de ce jour-là :

- Parmi ceux qui souhaitent le déclenchement d'une grève un certain jour, 35% changent d'avis le lendemain
- Parmi ceux qui ne souhaitent pas le déclenchement d'une grève un certain jour, 33% changent d'avis le lendemain

On note :

- g_n la probabilité qu'un membre du personnel souhaite le déclenchement d'une grève le jour n
- t_n la probabilité qu'un membre du personnel ne souhaite pas le déclenchement d'une grève le jour n
- $P_n\begin{pmatrix} g_n & t_n \end{pmatrix}$ la matrice qui traduit l'état probabiliste au nième jour

1) Déterminer l'état initial P_1
2) a) Tracer un graphe probabiliste traduisant les données de l'énoncé
a) Donner la matrice de transition M associée à ce graphe
3) Calculer le pourcentage de personnes favorables à la grève le 3éme jour
4) Soit $P\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ l'état probabiliste stable (On rappelle que $x + y = 1$)
a) Montrer que x et y vérifient l'équation $x = 0.65x + 0.33y$
b) Déterminer x et y (On arrondira les résultats à 10^{-3} près)
c) Interpréter le résultat

Exercice 13

Un guide touristique classe chaque année les hôtels d'une certaine région en deux catégories selon la qualité de leurs prestations. Les plus confortables sont classés dans la catégorie A, les autres dans la catégorie B. on constate que, chaque années, 5% des hôtels de la catégorie A sont relégués dans la catégorie B, alors que 20% des hôtels de la catégorie B sont promus dans la catégorie A

1) Dessiner un graphe décrivant cette situation
2) Ecrire la matrice de transition associée à ce graphe en respectant l'ordre alphabétique

3) En 2002, le classement était tel que le quart des hôtels étaient classées dans la catégorie A calculer l'état de l'année 2003, puis l'état de l'année 2004
4) L'état $\begin{pmatrix}0.5 & 0.5\end{pmatrix}$ est-il stable ? Justifier cette réponse
5) Trouver vers quel état converge ce système

Exercice 14

Dans le cadre de la structuration de son entreprise, afin de garantir la stabilité du nombre d'emplois, le directeur souhaite qu'à long terme plus de 82% de ses employés ne travaillent que le matin.
Pour cela, il décide que désormais :

- 20% des employés travaillant le matin une semaine donnée travaillent l'après-midi la semaine suivante
- 5% des employés travaillant l'après-midi une semaine donnée travaillent aussi l'après-midi la semaine suivante

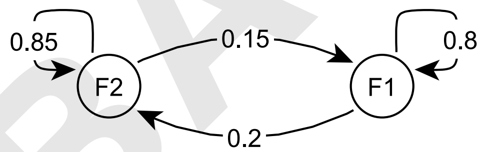
On note A : « l'employé travaille le matin » et B : « l'employé travaille l'après-midi »

1) a) Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B
   b) Ecrire la matrice de transition M de ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets
2) La semaine notée 0, semaine de la décision, 60% des employés travaillent le matin et les autres l'après-midi
   a) Donner la matrice ligne notée P_0 décrivant l'état initial des employés dans cette entreprise
   b) Calculer la probabilité qu'un employé travaille le matin lors de la semaine 2, deuxième semaine après la prise de la décision
3) Soit $P\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}$ l'état probabiliste stable
   a) Démontrer que x et y vérifient l'égalité $x = 0.8x + 0.95y$
   b) Déterminer x et y
   c) Le souhait du directeur de cette entreprise est-il réalisable ? Justifier la réponse

Exercice 15 BAC [session de contrôle 2016]

Un commerçant commande chaque semaine ses besoins auprès de l'un de deux fournisseurs F_1 et F_2. Le choix de l'un de deux fournisseurs d'une semaine à l'autre est modélisé par le graphe probabiliste (G) ci-après où :

- Le sommet F_1 désigne l'état : « La commande est passée auprès du fournisseur F_1 »
- Le sommet F_2 désigne l'état : « La commande est passée auprès du fournisseur F_2 »



1) a) Lorsque la commande est passée auprès du fournisseur F_1, quelle est la probabilité qu'elle le soit encore la semaine suivante ?
   b) Recopier et compléter la matrice de transition $M = \begin{pmatrix}0,85 & \dots \\ \dots & \dots\end{pmatrix}$ de ce graphe en prenant les sommets F_1 et F_2 dans cet ordre.
2) Pour tout entier naturel non nul n, on désigne par :
   - a_n la probabilité de l'évènement : « la semaine n la commande est passée auprès du fournisseur F_1 »
   - b_n la probabilité de l'évènement : « la semaine n la commande est passée auprès du fournisseur F_2 »
   - $P_n = \begin{pmatrix}a_n & b_n\end{pmatrix}$ la matrice ligne décrivant l'état probabiliste pour la semaine n.

   Vérifier que la matrice $P = \begin{pmatrix}\frac{4}{7} & \frac{3}{7}\end{pmatrix}$ traduit l'état stable de la situation.
3) On donne $P_1 = \begin{pmatrix}\frac{3}{7} & \frac{4}{7}\end{pmatrix}$ et on admet que pour tout entier naturel non nul n on a :

$$M^n = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}4+3(0.65)^n & 3-3(0.65)^n \\ 4-4(0.65)^n & 3+4(0.65)^n\end{pmatrix}$$

   a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $7P_1M^{n-1} = \begin{pmatrix}4-(0.65)^{n-1} & 3+(0.65)^{n-1}\end{pmatrix}$
   b) En déduire que pour tout entier naturel non nul n, $a_n - b_n = \frac{1-2(0.65)^{n-1}}{7}$
   c) Déterminer le rang de la semaine où, pour la première fois, la probabilité que le commerçant commande ses fournitures auprès du fournisseur F_1 dépasse la probabilité que le commerçant commande ses fournitures auprès du fournisseur F_2

Correction des exercices

Exercice 1

1) a)

sommet	A	B	C	D	E	F	G
degré	3	4	4	3	4	4	2

Tous les degrés sont pairs sauf A et D donc ce graphe possède une chaine Eulérienne et par suite c'est possible d'effectuer un parcours empruntant une et une seule fois toutes les pistes cyclables.

b) Le graphe représentant la situation possède une chaine Eulérienne mais pas de cycle Eulérien car il y en a des sommets de degré impairs et par suit il ne pourra pas rendre sa bicyclette à la station de départ.

2) a) $G-F-C-E$ est une chaine de longueur 3 reliant G à E donc le terme, de la matrice M^3, situé au 7ème ligne et 5ème colonne ne doit pas être nul : la matrice N est la matrice M^3

b) On a 11 trajets différents allant de la station F à la station E

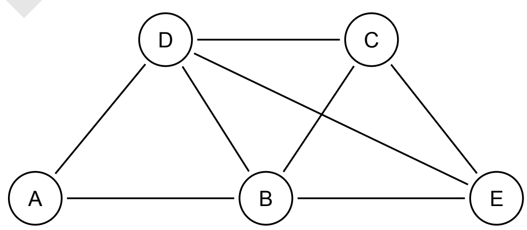
3) On utilisera l'algorithme de Dijkstra :

A	B	C	D	E	F	G	On garde
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	A
	7 7(A)	11 11(A)	∞	∞	13 13(A)	∞	B
		7+10 11(A)	7+16 23(B)	7+14 21(B)	∞ 13(A)	∞	C
			∞ 23(B)	11+9 20(C)	11+18 13(A)	∞	F
			∞ 23(B)	13+8 20(C)		13+18 31(F)	E
			20+5 23(B)			∞ 31(F)	D
						23+5 28(D)	G

Le plus petit parcours de A à G est $A-B-D-G$, le temps nécessaire pour effectuer ce parcours est 28min

Exercice 2

1) a)



b) Le graphe G est connexe : pour deux sommets quelconques du graphe il existe toujours une chaine les reliant. Le graphe G n'est pas complet puisque les sommets A et E ne sont pas adjacents.

2) a)

Sommet	A	B	C	D	E
Degré	2	4	3	4	3

b) Le nombre d'arête d'un graphe est égal à la moitié de la somme des degrés des sommets de ce graphe : le graphe G comporte 8 arêtes.

3) a) On a trois chaines de longueur 2 reliant B à D : $B-A-D$, $B-E-D$ et $B-C-D$

b) le nombre des chaines de longueur 2 allant de B sans y revenir est $1+2+3+2=8$

4) a) Tous les sommets sont de degré pair sauf deux, C et E, donc le graphe G possède une chaine Eulérienne : $C-D-A-B-D-E-B-C-E$

b) Le graphe G ne possède pas de cycle Eulérien car il y a des sommets de degrés impairs.

Exercice 3

1) Le graphe est connexe : pour deux sommets quelconques du graphe il existe toujours une chaine les reliant.
2)

Sommet	A	B	C	D	E	F	G	H
Degré	4	3	4	4	4	3	4	4

Tous les degrés sont pairs sauf deux donc ce graphe admet une chaine Eulérienne :

$$B-A-D-C-B-G-F-E-D-G-H-A-E-H-C-F$$

3) Deux sommets ont un degré impair donc ce graphe ne possède pas de cycle eulérien. En ajoutant une arête reliant B à F, tous les degrés seront pairs et ainsi le graphe aura un cycle eulérien.
4) On trois chaines de longueur 3 allant de G à E : $G-H-A-E$, $G-B-A-E$ et $G-D-A-E$
5) Soit γ le nombre chromatique de ce graphe :
   - $\gamma \leq 4+1$: Le nombre chromatique d'un graphe est supérieur à $r+1$ où r est le plus grand des degrés de ses sommets.
   - $3 \leq \gamma$: (ADE) est un sous graphe complet d'ordre 3

$3 \leq \gamma \leq 4+1$

Pour trouver la valeur de γ on utilise l'algorithme de Welsh et Powell

Sommet	Degré	Couleur
A	4	Rouge
C	4	Rouge
D	4	Bleu
E	4	Jaune
G	4	Rouge
B	3	Bleu
F	3	Bleu

donc $\gamma = 3$

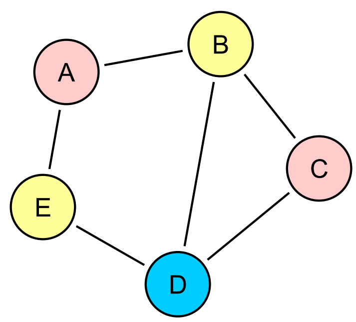
Exercice 4

1) a) $\{B,C,D\}$ est un sous graphe complet d'ordre 3 de G donc $\gamma(G) \geq 3$

   Le plus grand degré des sommet du graphe G est 3 donc $\gamma(G) \leq 3+1$

   et par suite $3 \leq \gamma(G) \leq 4$

Sommet	Couleur
A	Rouge
B	Jaune
C	Rouge
D	Bleu
E	Jaune



$\gamma(G) = 3$

   b) $A-B-C-D-E$ est une chaine contenant tous les sommets de G. Par conséquent, pour toute paire de sommets distincts, il existe une chaîne les reliant donc le graphe est connexe.
   Tous les sommets du graphe G sont de degré paire sauf B et D donc G possède une chaine eulérienne ce qui revient à dire qu'on peut parcourir toutes les allées de ce parc sans passer deux fois par la même allée.

2) a) La matrice associée au graphe G' est : $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

   b) Le nombre de chemins de longueur 5 permettant de se rendre du sommet D au sommet B est le terme situé à l'intersection de la ligne 5 et de la colonne 2 de la matrice M^5 :
   Il y a exactement 5 chemins de longueur 5 permettant de se rendre du sommet D au sommet B qui sont :

$D-E-A-E-A-B$, $D-E-A-B-C-B$, $D-C-B-D-C-B$, $D-E-D-E-A-B$ et $D-C-D-E-A-B$

c) Chercher un cycle de longueur 5 passant par le sommet A, revient à chercher un cycle de longueur 5 partant de A.
D'après la matrice M^5, il n'y a qu'une seule chaîne fermée de longueur 5 permettant en partant du sommet A de revenir au sommet A c'est : $A-B-C-D-E-A$. Tous les arcs de cette chaîne fermée sont distincts donc c'est un cycle.
$A-B-C-D-E-A$ est le seul cycle de longueur 5 passant par le sommet A.
D'après la matrice M^5, il y a 5 chaînes fermées de longueur 5 passant par le sommet B qui sont: $B-C-D-E-A-B$, $B-C-B-D-C-B$, $B-D-C-D-C-B$, $B-D-C-B-C-B$ et $B-D-E-D-C-B$. Or, deux chaînes fermées $B-C-B-D-C-B$ et $B-D-C-B-C-B$ ont des arcs orientés distincts. Il y a deux cycles de longueur 5 passant par le sommet B

Exercice 5

1) $M=\begin{pmatrix}0&1&1&0&0\\1&0&1&1&0\\0&0&0&1&1\\1&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\end{pmatrix}$

2) a)

Sommet	A	B	C	D	E
d^+	2	3	2	2	1
d^-	2	2	2	2	2
d^+-d^-	0	1	0	0	-1

b) Le graphe G ne possède pas de circuit Eulérien car (d^+-d^-) n'est pas nul pour tous les sommets
c) Le graphe G admet une chaîne orientée Eulérienne : $B-A-C-E-B-C-D-A-B-D-E$

3) a) $A-B-C-D-E$ et $A-B-A-C-E$
b) On a trouvé deux chemin de longueur 4 reliant A à E donc le terme figurant dans l'intersection de la première ligne et la cinquième colonne de la matrice M^4 doit être supérieur ou égale à 2 seule la matrice Q vérifie cette condition donc $M^4=Q$
c) On a un seul chemin de longueur 4 permettant de se rendre de C à B
On a 5 chemins de longueur 4 permettant de se rendre de B à C
d) Il y a 15 chaines orientées de longueur 4 partant de D et 16 chaines orientées de longueur 4 finissant en D

Exercice 6

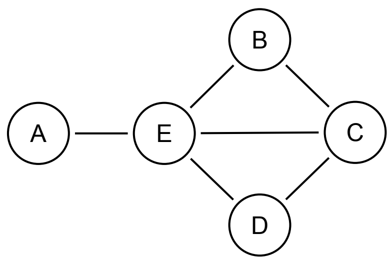
1) On a deux chemins de longueur 2 allant de A à C : $A\to B\to C$ et $A\to D\to C$

2) $M=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\0&1&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$

3) $M^2=\begin{pmatrix}0&1&\boxed{2}&1\\0&1&1&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ donc on a deux chemins de longueur 2 allant de A à C

Exercice 7

1) a) La matrice associée au graphe G est symétrique donc G est un graphe non orienté
b) G est un graphe d'ordre 5



2)

Sommet	A	B	C	D	E
Degré	1	2	3	2	4

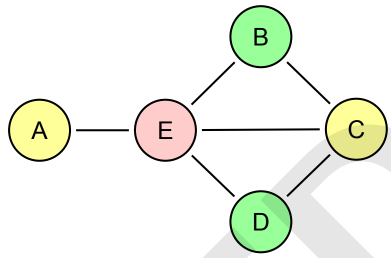
3) a) $\{B,C,E\}$ (ou $\{E,C,D\}$) est un sous graphe complet de G d'ordre 3

b) G possède un sous graphe complet d'ordre 3 donc $3 \leq \gamma(G)$ d'autre part l'ordre de G est 5 donc $\gamma(G) \leq 5$

$$3 \leq \gamma(G) \leq 5$$

c)

Sommet	Degré	Couleur
E	4	Rouge
C	3	Jaune
B	2	Vert
D	2	Vert
A	1	Jaune



$\gamma(G) = 3$

Exercice 8

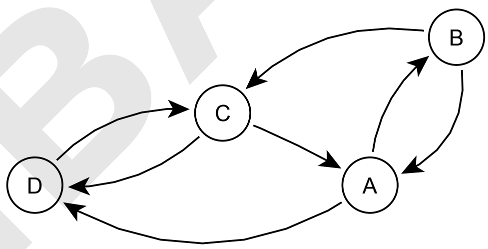
1) La matrice M n'est symétrique donc le graphe G est orienté

2) a)

	A	B	C	D
d^+	2	2	2	1
d^-	2	1	2	2
$d^+ - d^-$	0	1	0	-1

b) $d^+ - d^-$ est toujours nul sauf en B égal à 1 et en D égal à -1 donc le graphe G ne possède pas de circuit Eulérien cependant il possède un chemin Eulérien

d)



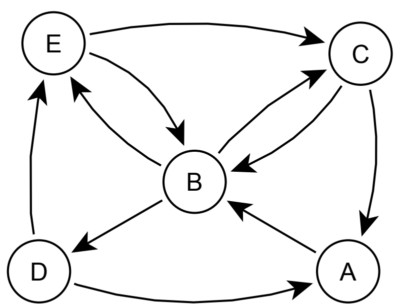
3) a) On a trois chemins reliant B à C

b) $B \to A \to D \to C$, $B \to C \to D \to C$ et $B \to A \to B \to C$

Exercice 9

1) a) La matrice M n'est pas symétrique donc le graphe G est orienté.

b)



c) G est connexe car deux sommets de G sont toujours reliés par une chaine. G n'est pas complet car C et D ne sont pas adjacents.

2) a)

	A	B	C	D	E
d^+	1	3	2	2	2
d^-	2	3	2	1	2
$d^+ - d^-$	-1	0	0	1	0

b) $d^+ - d^-$ est toujours nul sauf en A et D respectivement -1 et 1 et par suite le graphe G possède un chemin eulérien.

3) a) On a 2 chemins de longueur 3 allant de D à C à savoir : $D - A - B - C$ et $D - E - B - C$

b) On a 10 chemins de longueur 3 arrivant à C

Exercice 10

1) a)

	A	B	C	D	E
d^+	2	2	1	2	1
d^-	2	1	1	2	2

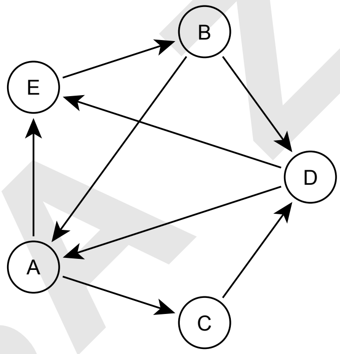
b) Le graphe G n'admet pas de cycle eulérien car $d^+(B) \neq d^-(B)$

c)

	A	B	C	D	E
$d^+ - d^-$	0	1	0	0	-1

Donc G possède une chaine eulérienne

d)

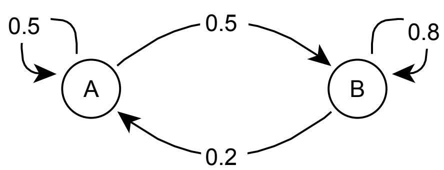


2) $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \boxed{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Il y a deux chaines de longueur 2 reliant le sommet B au sommet E

Exercice 11

1) a) Soit A l'événement : « Le gardien arrête un tir » et B l'événement : « Le gardien encaisse un but ». Le graphe probabiliste de représentation de la situation est donc :



b) La matrice de transition de ce graphe est : $M = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$

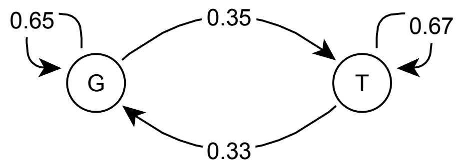
2) La matrice de l'état après le premier tir est $P_1 = (0.2 \quad 0.8)$ donc la matrice de l'état après le deuxième tir est : $P_2 = P_1 \times M = (0.2 \quad 0.8)\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} = (0.26 \quad 0.74)$

donc la probabilité pour qu'il arrête le troisième tir est 0.26

Exercice 12

1) Le premier jour, 15% du personnel souhaite le déclenchement d'une grève. D'où $P_1 = \begin{pmatrix} 0.15 & 0.85 \end{pmatrix}$
2) Il s'agit de représenter à l'aide d'un graphe, l'évolution au cours du temps d'un système pouvant être dans l'état G (gréviste) ou l'état T (non gréviste). D'un jour sur l'autre :
Parmi ceux qui souhaitent le déclenchement d'une grève un certain jour, 35% changent d'avis le lendemain.
    - La probabilité de passer de l'état G à l'état T est donc 0.35
    - La probabilité de rester dans l'état G est 0.65

   Parmi ceux qui ne souhaitent pas le déclenchement d'une grève un certain jour, 33% changent d'avis le lendemain.
    - La probabilité de passer de l'état T à l'état G est 0.33
    - La probabilité de rester dans l'état T est donc 0.67



La matrice de transition associée à ce graphe est donc $M = \begin{pmatrix} 0.65 & 0.35 \\ 0.33 & 0.67 \end{pmatrix}$

3) $P_3 = P_1 \times M^2 = \begin{pmatrix} 0{,}15 & 0{,}85 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}65 & 0{,}35 \\ 0{,}33 & 0{,}67 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0.15 & 0.85 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.538 & 0.462 \\ 0.4356 & 0.5644 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.45096 & 0.54904 \end{pmatrix}$
45,096% des personnes sont favorables à la grève le 3ème jour
4) La matrice de transition M ne comportant pas de 0, l'état P_n converge vers un état stable P indépendant de l'état initial.
P est solution de l'équation $P = P \times M$ avec $x + y = 1$

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.65 & 0.35 \\ 0.33 & 0.67 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0.65x + 0.33y \\ y = 0.35x + 0.67y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0.35x - 0.33y = 0 \\ 0.33y - 0.35x = 0 \end{cases}$$

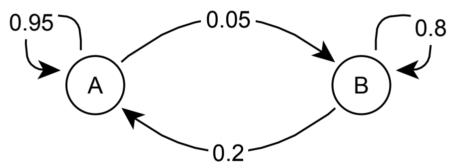
Ainsi x et y vérifient l'équation $x = 0.65x + 0.33y$
x et y sont solutions du système :

$$\begin{cases} x = 0.65x + 0.33y \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0.65x + 0.33(1 - x) \\ y = 1 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0.68x = 0.33 \\ y = 1 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{0.33}{0.68} \\ y = 1 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{33}{68} \simeq 0.485 \\ y = \dfrac{35}{68} \simeq 0.515 \end{cases}$$

L'état P_n converge vers un l'état stable $P = \begin{pmatrix} 0.485 & 0.515 \end{pmatrix}$ indépendamment de l'état initial. Si les conditions de mobilisation ne changent pas, la grève n'a pas lieu, le pourcentage de ceux qui souhaitent la grève se stabilisant autour de 48.5%

Exercice 13

1)



2) La matrice de transition du graphe est $M = \begin{pmatrix} 0.95 & 0.05 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$
3) L'état initial, en 2002, est $P_0 = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.75 \end{pmatrix}$

   L'état en 2003 est donc $P_1 = P_0 \times M = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.75 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.95 & 0.05 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3875 & 0.6125 \end{pmatrix}$

   L'état en 2004 est $P_2 = P_1 \times M = \begin{pmatrix} 0.3875 & 0.6125 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.95 & 0.05 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.490625 & 0.509375 \end{pmatrix}$
4) $\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.95 & 0.05 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.575 & 0.425 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$ n'est pas un état stable
5) Soit $P = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ avec $x + y = 1$, l'état stable de ce système.

$$\begin{cases}P = P\times M\\ x+y=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0.95 & 0.05\\ 0.2 & 0.8\end{pmatrix}\\ x+y=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = 0.95x+0.2y\\ y = 0.05x+0.8y\\ x+y=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0.05x-0.2y=0\\ x+y=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5x-20y=0\\ x+y=1\end{cases}$$

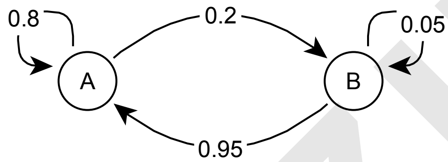
$$\Leftrightarrow \begin{cases}x-4y=0\\ x+y=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=0.08\\ y=0.2\end{cases}$$

Cela signifie qu'au bout d'un grand nombre d'années, 80% des hôtels seront classés dans la catégorie A, 20% seront dans la catégorie B

Exercice 14

1) Il s'agit de représenter un système pouvant se trouver dans deux états A et B par un graphe dont les sommets sont les états du système.
   20% des employés travaillant le matin une semaine donnée travaillent l'après-midi la semaine suivante alors $p(B\mid A)=0.2$
   5% des employés travaillant l'après-midi une semaine donnée travaillent aussi l'après-midi la semaine suivante alors $p(A\mid B)=1-0.05=0.95$



2) La matrice de transition de ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets est :
$$M=\begin{pmatrix}0.8 & 0.2\\ 0.95 & 0.05\end{pmatrix}$$
3) La semaine de la décision, 60% des employés travaillent le matin et les autres l'après-midi alors $P_0=\begin{pmatrix}0.6 & 0.4\end{pmatrix}$
   La deuxième semaine après la prise de décision, l'état probabiliste est :
$$P_2=P_0\times M^2=\begin{pmatrix}0.6 & 0.4\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}0.8 & 0.2\\ 0.95 & 0.05\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0,8 & 0,2\\ 0,95 & 0,05\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}0.6 & 0.4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.83 & 0.17\\ 0.8075 & 0.1925\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.821 & 0.179\end{pmatrix}$$
   La probabilité qu'un employé travaille le matin la deuxième semaine après la prise de décision est égale à 0.821
4) La matrice de transition M ne comportant pas de 0, l'état P_n converge vers un état stable P indépendant de l'état initial
$$P=P\times M \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.8 & 0.2\\ 0.95 & 0.05\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}x=0.8x+0.95y\\ y=0.2x+0.05y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=0.8x+0.95y\\ 0.95y=0.2x\end{cases}$$
   Ainsi x et y vérifient l'équation $x=0.8x+0.95y$
   $P=\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}$ est un état probabiliste donc x et y vérifient l'égalité $x+y=1$. D'où x et y sont solutions du système :
$$\begin{cases}x=0.8x+0.95y\\ x+y=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0.2x-0.95y=0\\ x+y=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1.15x=0.95y\\ x+y=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{19}{23}\\ y=\dfrac{4}{23}\end{cases}$$
   L'état de probabilité stable est donc $P=\begin{pmatrix}\frac{19}{23} & \frac{4}{23}\end{pmatrix}$
   À partir d'un certain nombre de semaines, environ 82.6% des employés travailleront le matin. Le souhait du directeur de cette entreprise est donc réalisable.

Exercice 15

4) a) Lorsque la commande est passée auprès du fournisseur F_1, la probabilité qu'elle le soit encore la semaine suivante est 0.85
   c) $M=\begin{pmatrix}0.85 & 0.15\\ 0.2 & 0.8\end{pmatrix}$
5) $P\times M=\begin{pmatrix}\frac{4}{7} & \frac{3}{7}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.85 & 0.15\\ 0.2 & 0.8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{7}\times0.85+\frac{3}{7}\times0.2 & \frac{4}{7}\times0.15+\frac{3}{7}\times0.8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{7} & \frac{3}{7}\end{pmatrix}=P$

donc P traduit bien l'état stable de la situation.

6) a) $7P_1M^{n-1}=\begin{pmatrix}\frac{3}{7} & \frac{4}{7}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4+3(0.65)^{n-1} & 3-3(0.65)^{n-1}\\ 4-4(0.65)^{n-1} & 3+4(0.65)^{n-1}\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}\frac{12}{7}+\frac{9}{7}(0.65)^{n-1}+\frac{16}{7}-\frac{16}{7}(0.65)^{n-1} & \frac{9}{7}-\frac{9}{7}(0.65)^{n-1}+\frac{12}{7}+\frac{16}{7}(0.65)^{n-1}\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}4-(0.65)^{n-1} & 3+(0.65)^{n-1}\end{pmatrix}$

b) $P_n=\begin{pmatrix}a_n & b_n\end{pmatrix}=P_1\times M^{n-1}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}4-(0.65)^{n-1} & 3+(0.65)^{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4-(0.65)^{n-1}}{7} & \frac{3+(0.65)^{n-1}}{7}\end{pmatrix}$

$a_n-b_n=\frac{4-(0.65)^{n-1}}{7}-\frac{3+(0.65)^{n-1}}{7}=\frac{1-2(0.65)^{n-1}}{7}$

c) $a_n\geq b_n \Leftrightarrow a_n-b_n\geq 0 \Leftrightarrow \frac{1-2(0.65)^{n-1}}{7}\geq 0 \Leftrightarrow 1-2(0.65)^{n-1}\geq 0 \Leftrightarrow 2(0.65)^{n-1}\leq 1 \Leftrightarrow (0.65)^{n-1}\leq \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow (n-1)\ln(0.65)\leq \ln\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow n-1\geq \frac{\ln\frac{1}{2}}{\ln(0.65)}$

$\Leftrightarrow n\geq 1-\frac{\ln 2}{\ln(0.65)}\simeq 2.6$

$\Leftrightarrow n\geq 3$

La probabilité que le commerçant commande ses fournitures auprès du fournisseur F_1 dépasse la probabilité que le commerçant commande ses fournitures auprès du fournisseur F_2 pour la première fois la troisième semaine.

Annexe 1

Calcul dans IR

Calcul dans R

Puissances

On a pour tous réels a et b non nuls et pour tous entiers relatifs non nuls m et n :

- $a^0 = 1$
- $(a \times b)^n = a^n \times b^n$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$
- $a^1 = a$
- $(a^m)^n = a^{n\times m}$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{(m-n)}$
- $a^m \times a^n = a^{(m+n)}$
- $a^{-1} = \frac{1}{a}$

Produits remarquables

On a pour tous réels a et b :

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
- $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$
- $(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 + b^3$

Valeur absolue

- $\begin{cases} |x| = x & \text{si } x \geq 0 \\ |x| = -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$
- Pour tout réel $a \geq 0$, $|x| = a \Leftrightarrow x = a$ ou $x = -a$
- Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y$ ou $x = -y$

Racine carrée

On a pour tous réels a et b et pour tout entier naturel n :

- $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$, pour $a, b \geq 0$
- $(\sqrt{a})^2 = a$, pour $a \geq 0$
- $\sqrt{a^2} = |a|$ pour $a \in \mathbb{R}$
- $\sqrt{a^n} = (\sqrt{a})^n$ pour $a \geq 0$
- $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ pour $a \geq 0$ et $b \geq 0$

Equation du second degré

Soit l'équation $(E): ax^2+bx+c$ avec a, b et c trois réels tel que $a \neq 0$

On appelle discriminant de l'équation (E) le réel $\Delta = b^2-4ac$

Signe de Δ	Solutions de (E)	Factorisation de ax^2+bx+c	Exemple
$\Delta > 0$	▪ Deux solutions distinctes $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ▪ $S_{\mathbb{R}}=\{x_1,x_2\}$	$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$	$2x^2+2x-12=0$ $\Delta=2^2-4\times2\times(-12)=4+96=100$ $x_1=\frac{-2+\sqrt{100}}{4}=\frac{-2+10}{4}=2$ $x_2=\frac{-2-\sqrt{100}}{4}=\frac{-12}{4}=-3$ ▪ $S_{\mathbb{R}}=\{-3,2\}$ ▪ $2x^2+2x-12=2(x-2)(x+3)$
$\Delta = 0$	▪ Solution double $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$ ▪ $S_{\mathbb{R}}=\left\{-\frac{b}{2a}\right\}$	$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$	$4x^2+4x+1=0$ $\Delta=4^2-4\times4\times1=16-16=0$ ▪ $S_{\mathbb{R}}=\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ ▪ $4x^2+4x+1=4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$
$\Delta < 0$	▪ Pas de solution ▪ $S_{\mathbb{R}}=\varnothing$	ax^2+bx+c n'est pas factorisable	$x^2+x+1=0$ $\Delta=1^2-4\times1\times1=1-4=-3$ ▪ $S_{\mathbb{R}}=\varnothing$ ▪ x^2+x+1 n'est pas factorisable

Etude de signe

Cas d'un binôme du premier degré

Soit a et b deux réels tel que $a \neq 0$. L'équation $ax+b=0$ possède une seule racine $x_0=-\frac{b}{a}$

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
Signe de $ax+b$		Signe de $(-a)$	0	Signe de a	

Cas d'un trinôme du second degré

Soit a, b et c trois réels tel que $a \neq 0$. On désigne par Δ le discriminant du trinôme ax^2+bx+c

➢ **Si $\Delta > 0$:** l'équation $ax^2+bx+c=0$ possède deux racines x_1 et x_2

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
Signe de ax^2+bx+c		Signe de a	0	Signe de $(-a)$	0	Signe de a	

➢ **Si $\Delta = 0$:** l'équation $ax^2+bx+c=0$ possède une racine double x_0

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
Signe de ax^2+bx+c		Signe de a	0	Signe de a	

➢ **Si $\Delta < 0$:** l'équation $ax^2+bx+c=0$ ne possède pas de racine

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de ax^2+bx+c		Signe de a	

Attention !

- Ne pas oublier que $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$
- Ne pas oublier que $\sqrt{a^2} \neq a$ en fait $\sqrt{a^2} = a$ si $a \geq 0$ et $\sqrt{a^2} = -a$ si $a < 0$
- Ne pas simplifier un quotient par une quantité sans vérifier que cette quantité est non nulle

Annexe 2

Calculatrices Sharp

Calculatrices Sharp

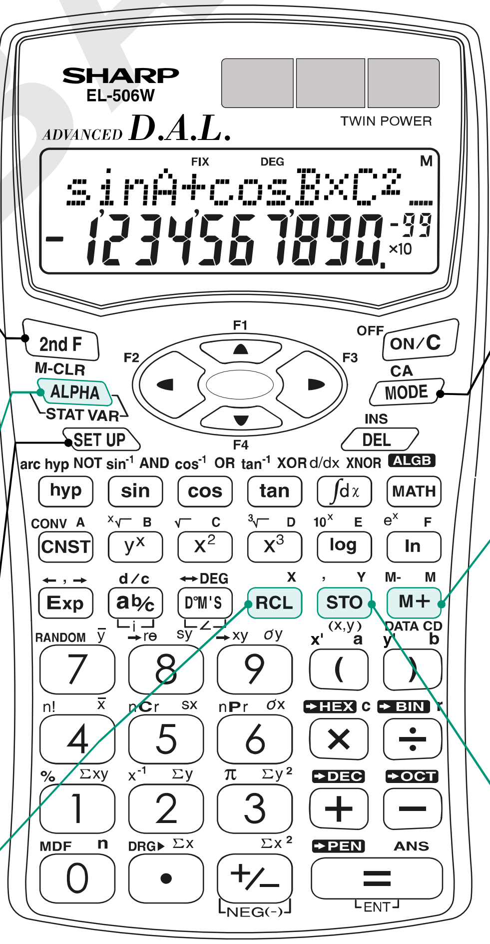
Le principe de fonctionnement et le système de notation des calculatrices Sharp sont les mêmes, dans certains modèles la disposition du clavier est différente. D'autres modèles peuvent présenter plus ou moins de fonctions et de modes de fonctionnements.

Principe de fonctionnement

- Pour utiliser les fonctions gravées en orangé au-dessus des touches, vous devez d'abord appuyer sur la touche 2ndF, avant la touche de fonction.
- Lorsque vous sélectionnez la mémoire, appuyez d'abord sur ALPHA.
- Les fonctions gravées en gris à côté des touches sont accessibles pour des modes spécifiques.

Touche		Fonction	Séquence
e^x F ln		Utiliser la fonction ln : appuyer directement	ln
		Utiliser la fonction exp : appuyez d'abord sur 2ndF	2ndF e^x
		Spécifier la mémoire F : appuyez d'abord sur ALPHA	ALPHA F
M- M M+ DATA CD	Mode **NORMAL**	Ajouter à M : appuyer directement	M+
		Soustraire de M : appuyez d'abord sur 2ndF	2ndF M+
		Spécifier la mémoire M : appuyez d'abord sur ALPHA	ALPHA M+
	Mode **STAT**	Ajouter la ou les valeurs statistiques : appuyer directement	DATA
		Supprimer la valeur active : appuyez d'abord sur 2ndF	2ndF CD
		Spécifier la mémoire M : appuyez d'abord sur ALPHA	ALPHA M+

Sharp EL-506W



2ndF
Appuyer sur cette touche pour avoir accès aux fonctions gravés en jaune au-dessus des touches

ALPHA
Utiliser cette touche pour rappeler le contenu de la mémoire ou des valeurs statistiques (gravés en vert au-dessus des touches)

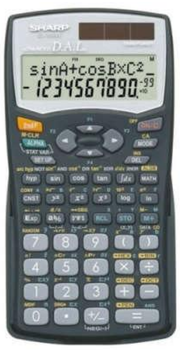
SET UP
Utiliser cette touche pour changer le type d'unité angulaire et du système de notation utilisés

RCL
Utiliser cette touche pour rappeler le contenu de la mémoire ou des variables statistiques (gravés en vert au-dessus des touches)

Mode
Utiliser cette touche pour changer le mode de fonctionnement de la calculatrice. Six modes disponibles : NORMAL, STAT, EQN, CPLX, MAT et LIST

M+
En mode normal : Utiliser cette touche pour ajouter une valeur donnée à la valeur enregistrée dans la mémoire M
En mode Statistique : DATA Utiliser cette touche pour enregistrer les données statistiques introduites par la touche STO

STO
En mode normal : Utiliser cette touche pour enregistrer une valeur donnée dans l'une des mémoires A, B, C, D, E, F, X, Y et M
En mode Statistique : (x,y) Utiliser cette touche pour introduire la donnée y d'une série double ainsi que la fréquence des données x et y

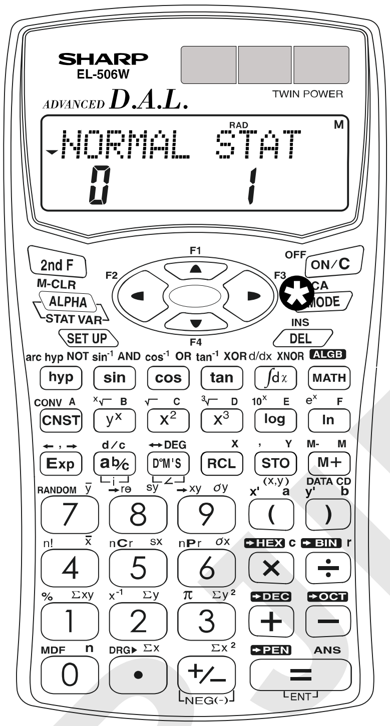


▶ Mode Statistique

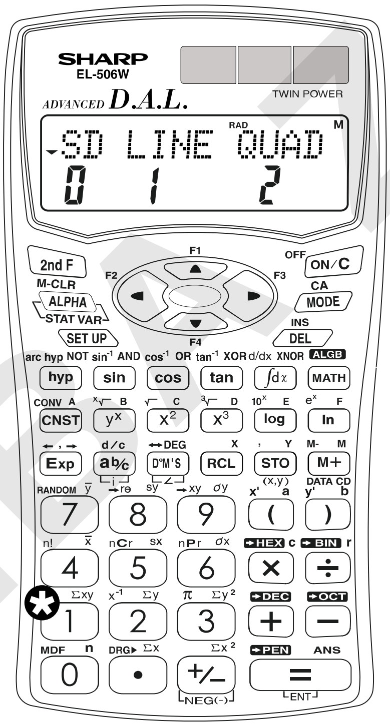
- On peut choisir parmi plusieurs modes de fonctionnement : NORMAL, STAT, EQN, CPLX, MAT et LIST (les modes varient selon le modèle)
  - ➢ Appuyer sur la touche MODE
  - ➢ Utiliser les touches ◀ et ▶ pour parcourir les modes
  - ➢ Appuyer sur le chiffre qui correspond au mode STAT (selon modèle) : MODE 1
- Le mode STAT comporte plusieurs sous-modes (selon modèle) :

	Sous-mode	Type de régression	Equation
Série statistique simple	**SD**		
Série statistique double	**LINE**	Linéaire (affine)	$y = a + bx$
	QUAD	Quadratique	$y = a + bx + cx^2$
	EXP	Exponentielle	$y = a e^{bx}$
	LOG	Logarithmique	$y = a + b \ln x$
	PWR	Puissance	$y = a x^b$
	INV	Inverse	$y = a + \frac{b}{x}$

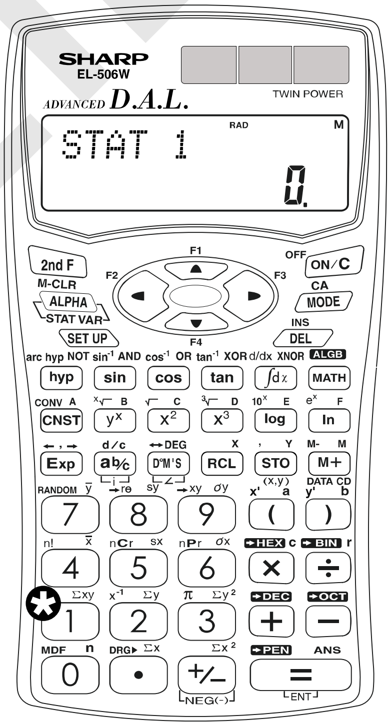
  - ➢ Appuyer sur le chiffre qui correspond au sous-mode **LINE** : 1
  - ➢ **STAT** apparait en haut de l'afficheur de la calculatrice



MODE



1



1

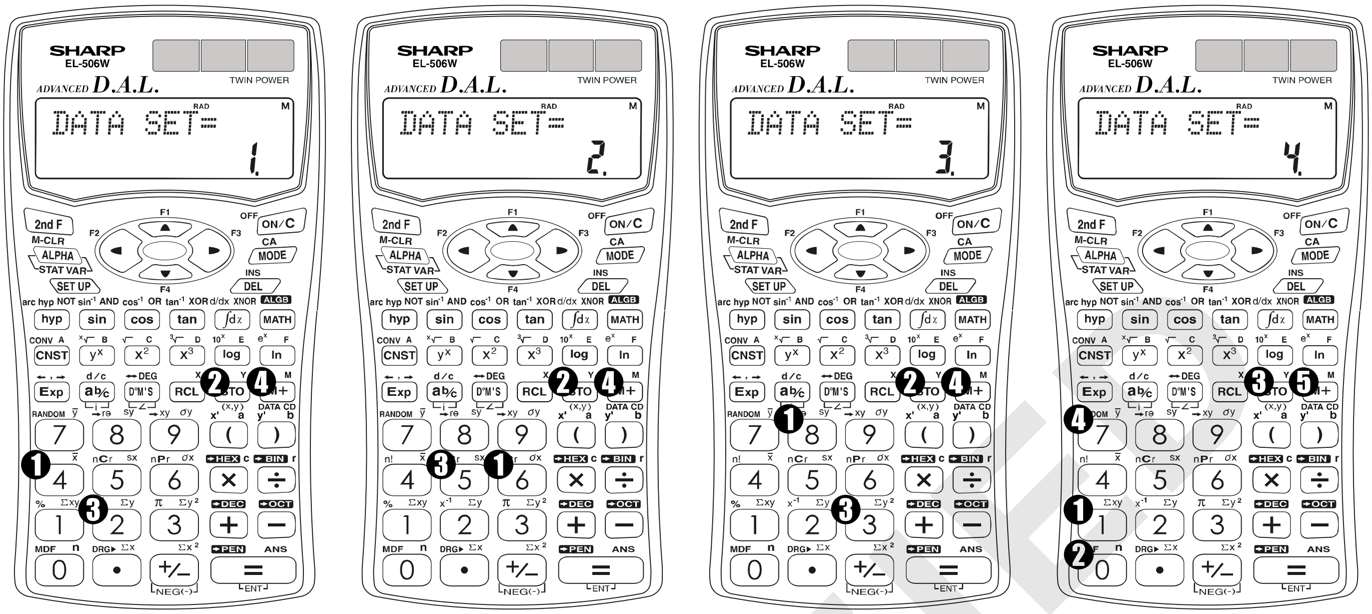
- Si on choisit un autre mode statistique à double variables (QUAD, EXP, LOG, PWR ou INV) alors on peut toujours calculer les moyennes ($\bar{x}$ et $\bar{y}$), les écart-types (σ_X et σ_Y), les sommes (Σx, Σy et Σxy) et l'effectif total n mais il faut faire attention car :
  - ➢ le coefficient de corrélation r ne sera plus calculable
  - ➢ les valeurs de a et b ne correspondront pas aux coefficients de la droite de régression de y en x
- Pour savoir quel mode statistique a été choisis, on appuie sur la touche ON/C la calculatrice affiche donc le mot STAT suivie du nombre correspondant au sous-mode statistique choisis : STAT 1 pour le mode STAT LINE

▶ Entrée des données d'une série statistique double

- Pour entrer les données d'une série statistique (x_i, y_i) :
  - ➢ On règle la calculatrice sur le mode **STAT**, sous-mode **LINE** : MODE 1 1
  - ➢ On fait entrer la série colonne par colonne : x_i (x,y) y_i DATA

- Considérons la série (x, y) suivante :

x_i	4	6	8	10
y_i	2	5	3	7



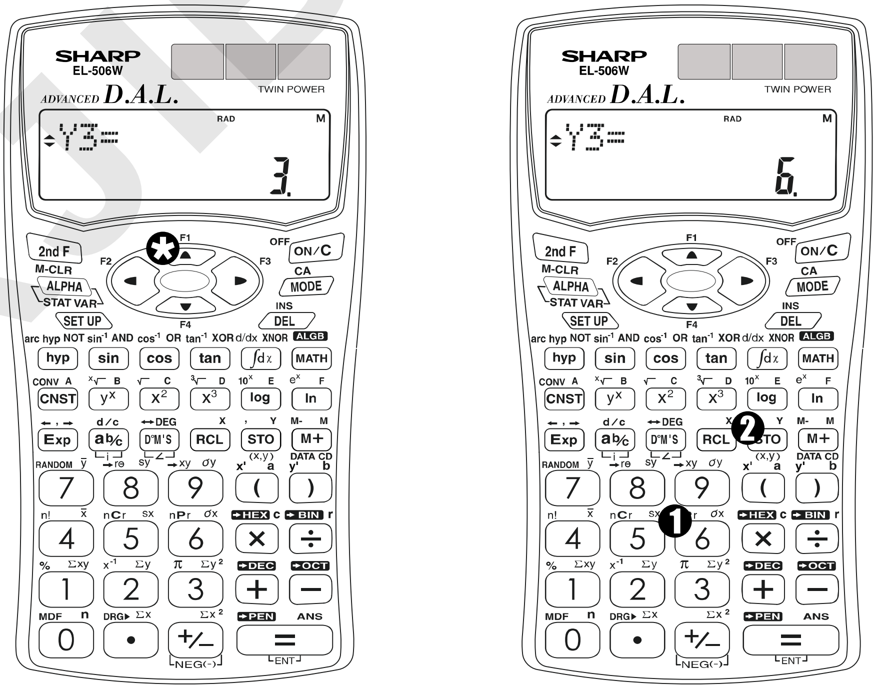
4 (x,y) 2 DATA | 6 (x,y) 5 DATA | 8 (x,y) 3 DATA | 10 (x,y) 7 DATA

- Pour ajouter une autre colonne : Appuyer sur ON/C puis x_i (x,y) y_i DATA

► Correction des données

- Pour corriger une donnée :
  - ➢ Avant la touche DATA : il suffit de frapper la touche ON/C puis entrer les données correctes
  - ➢ Après la touche DATA :
    1. Utiliser les touches ▲ ▼ pour parcourir les données enregistrées.
    2. Afficher l'élément à corriger.
    3. Entrer la valeur correcte.
    4. Appuyer sur DATA

Pour changer la valeur de y_3 de 3 à 6



Utiliser ▲ ▼ pour afficher la valeur y_3 | 6 DATA

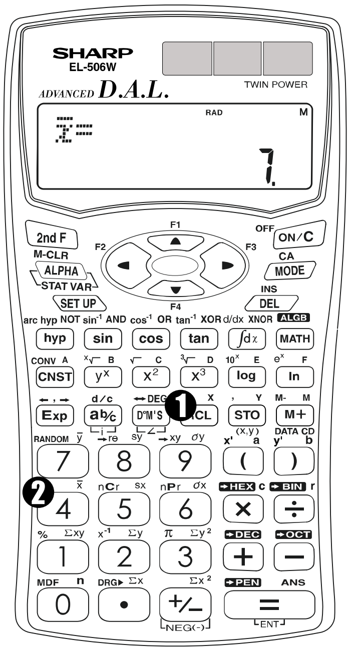
- La valeur Ni est l'effectif du couple (x_i, y_i). Dans le cas d'une série statistique double donnée par un tableau à deux lignes on a toujours $Ni = 1$

▶ Suppression des données

- Pour effacer une colonne :
  1. Utiliser les touches ▲ ▼ pour parcourir les données enregistrées
  2. Afficher un élément de la colonne à supprimer
  3. Appuyer sur 2ndF puis CD
- Pour effacer toutes les données : 2ndF CA
- Lorsqu'on change le mode de fonctionnement de la calculatrice toutes les données statistiques seront effacées

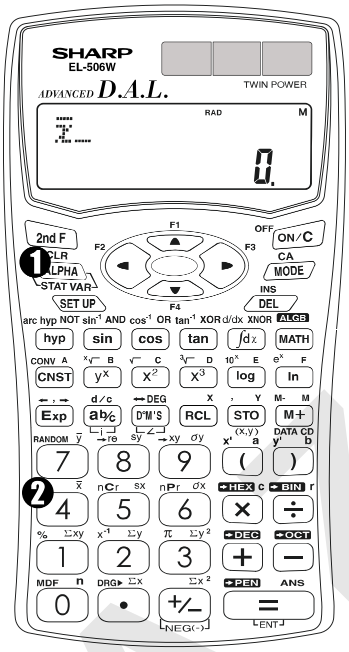
▶ Calcul des paramètres statistiques

- Pour calculer les paramètres statistiques on utilise les touches ALPHA et RCL



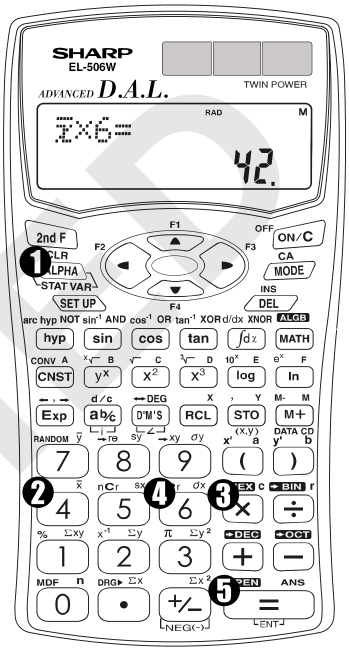
RCL $\overline{x}$

L'utilisation de la touche RCL permet d'afficher directement la valeur numérique du paramètre cherché



ALPHA $\overline{x}$

Lorsque on utilise la touche ALPHA il faut appuyer sur = pour afficher la valeur numérique

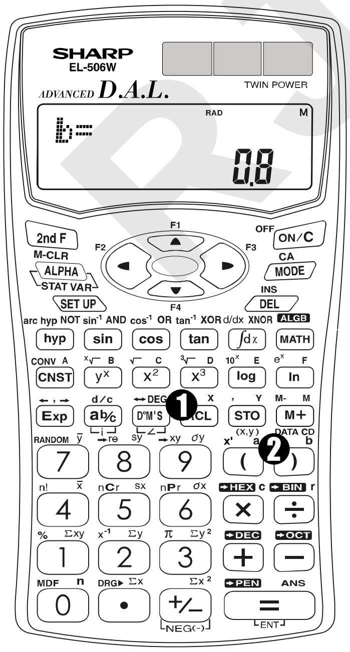


ALPHA $\overline{x}$ × 6 =

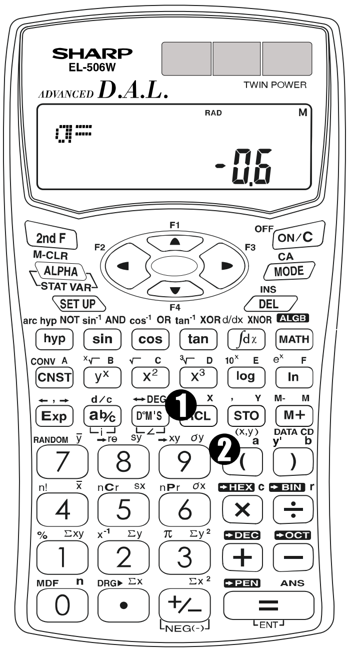
C'est plus pratique d'utiliser la touche ALPHA lorsque on veut utiliser le paramètre dans un autre calcul

▶ Equation de la droite de régression de y en x

- Une fois le mode statistique LINE est actif, la calculatrice permet de trouver une équation de la droite de régression de y en x sous la forme $y = bx + a$



RCL b



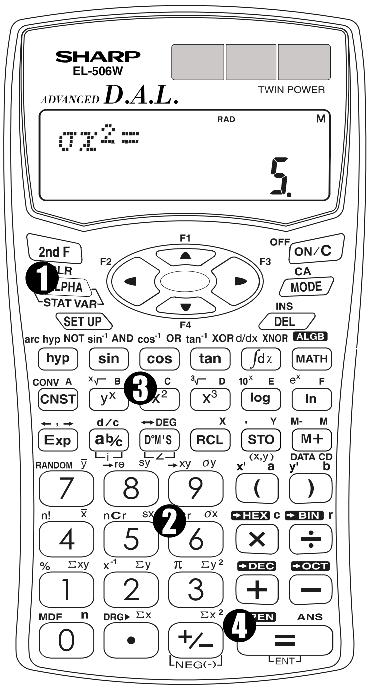
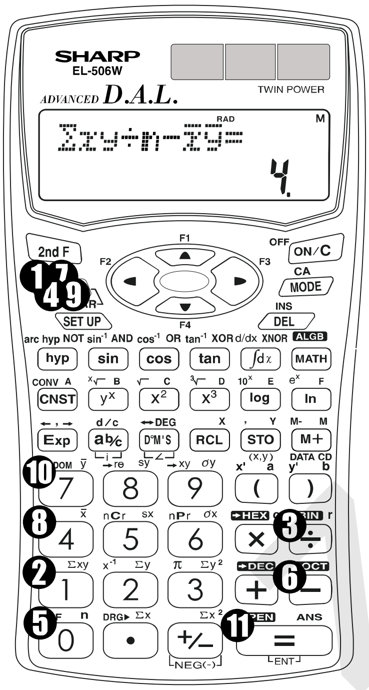
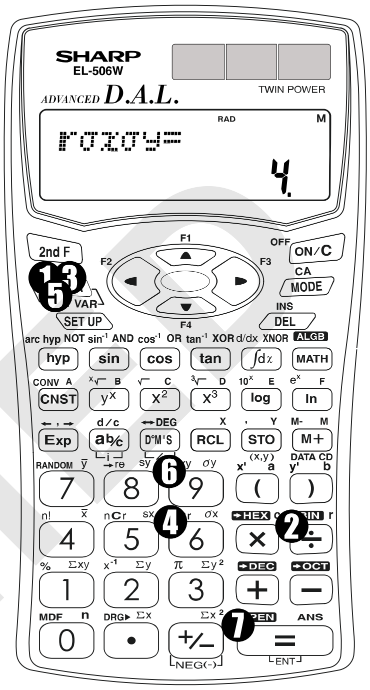
RCL a

La droite de regression de y en x a pour équation :

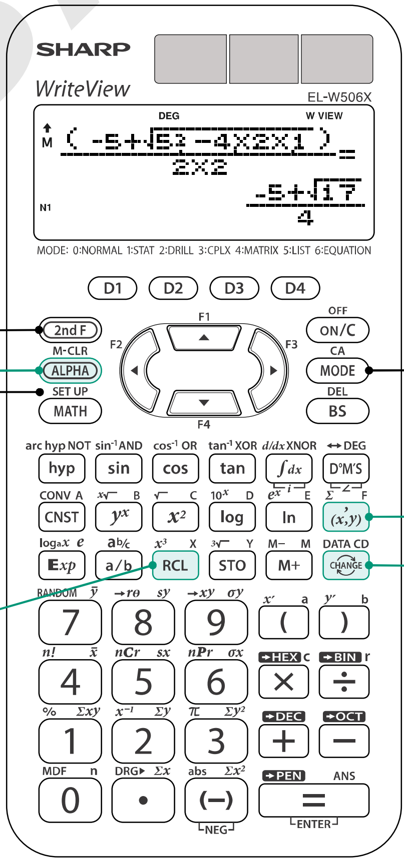
$\boxed{y = 0.8\,x - 0.6}$

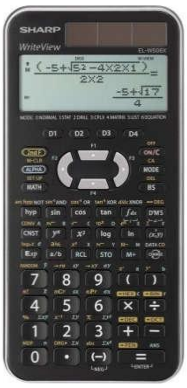
► Variance et covariance

- La calculatrice ne permet pas de calculer directement la variance et la covariance, il faut effectuer le calcul manuellement en utilisant les formules du cours

Variance	Covariance	
$V(x) = \sigma_X^2$	$\operatorname{cov}(x,y) = \frac{1}{n}\sum x_i y_i - \overline{x}\,\overline{y}$	$\operatorname{cov}(x,y) = r \times \sigma_X \sigma_Y$
		
ALPHA σx x^2 =	ALPHA Σxy ÷ ALPHA n − ALPHA $\overline{x}$ ALPHA $\overline{y}$ =	ALPHA r ALPHA σx ALPHA σy =

Sharp EL-W506X





2ndF
Appuyer sur cette touche pour avoir accès aux fonctions gravés en jaune au-dessus des touches

ALPHA
Utiliser cette touche pour rappeler le contenu de la mémoire ou des valeurs statistiques (gravés en vert au-dessus des touches)

SET UP
Utiliser cette touche pour changer le type d'unité angulaire et du système de notation utilisés

RCL
Utiliser cette touche pour rappeler le contenu de la mémoire ou des variables statistiques (gravés en vert au-dessus des touches)

MODE
Utiliser cette touche pour changer le mode de fonctionnement de la calculatrice. Six mode disponibles: NORMAL, STAT, DRILL, CPLX, LIST MATRIX, et EQUATION

(x,y)
En mode NORMAL : ,
Utiliser cette touche pour séparer les données utilisées pour l'entrée des données à double variable
En mode Statistiques : (x,y)
Utiliser cette touche pour séparer les valeurs de x, y et l'effectif lors de l'entrée des séries statistiques

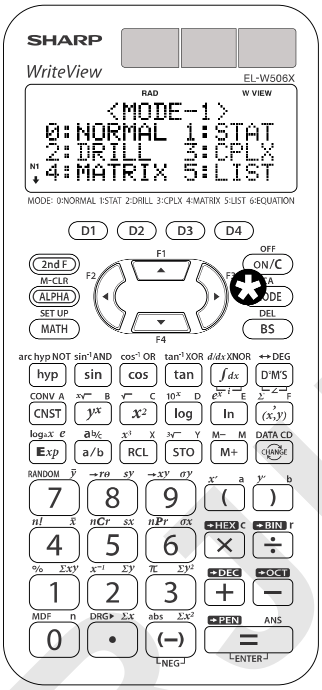
CHANGE
En mode NORMAL :
Utiliser cette touche pour changer la forme d'affichage du résultat : forme décimale, forme fractionnaire ou forme mixte
En mode Statistique : DATA
Utiliser cette touche pour enregistrer les données statistiques introduites par la touche (x,y)

▶ Mode Statistique

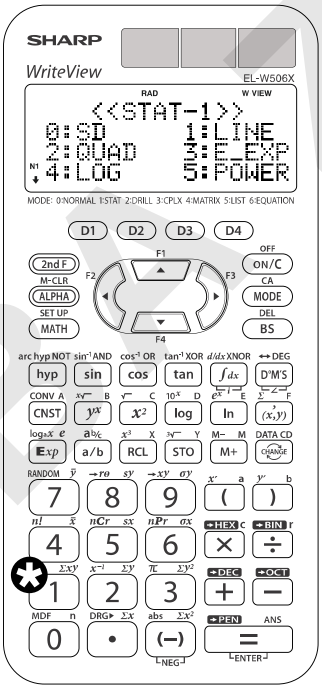
- On peut choisir parmi plusieurs modes de fonctionnement : NORMAL, STAT, DRILL, CPLX, MATRIX, LIST et EQUATION (les modes varient selon le modèle)
  - ➢ Appuyer sur la touche MODE
  - ➢ Utiliser les touches ▼ et ▲ pour parcourir la liste des modes disponibles
  - ➢ Appuyer sur le chiffre qui correspond au mode STAT (selon modèle) : MODE 1
- Le mode STAT comporte plusieurs sous-modes (selon modèle) :

	Sous-mode	Type de régression	Equation
Série statistique simple	**SD**		
Série statistique double	**LINE**	Linéaire (affine)	$y = a + bx$
	QUAD	Quadratique	$y = a + bx + cx^2$
	E_EXP	Exponentielle de base e	$y = a.e^{bx}$
	LOG	Logarithmique	$y = a + b\ln x$
	POWER	Puissance	$y = a\,x^b$
	INV	Inverse	$y = a + \dfrac{b}{x}$
	G_EXP	Exponentiel de base b	$y = a.b^x$

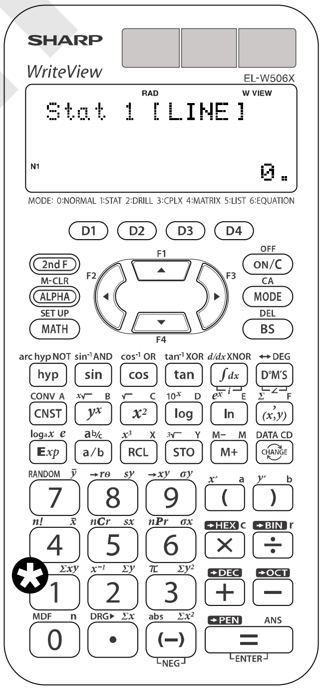
- ➢ Appuyer sur le chiffre qui correspond au sous-mode **LINE** : 1
- ➢ Stat 1 [LINE] s'affiche à l'écran de la calculatrice



MODE



1



1

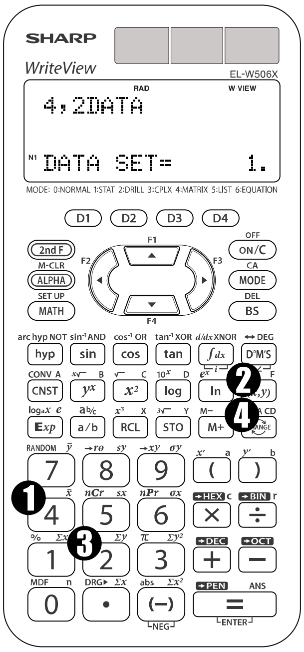
- Si on choisit un autre mode statistique à double variables (QUAD, E_EXP, LOG, POWER, INV ou G_EXP) alors on peut toujours calculer les moyennes ($\bar{x}$ et $\bar{y}$), les écart-types (σ_X et σ_Y), les sommes (Σx, Σy et Σxy) et l'effectif total n mais il faut faire attention car :
  - ➢ le coefficient de corrélation r ne sera plus calculable
  - ➢ les valeurs de a et b ne correspondront pas aux coefficients de la droite de régression de y en x
- Pour savoir quel mode statistique a été choisis, on appuie sur la touche ON/C la calculatrice affiche donc le mot Stat suivie du nombre correspondant au sous-mode statistique choisis et le nom du sous-mode entre crochets : Stat 1 [LINE] pour le sous-mode LINE

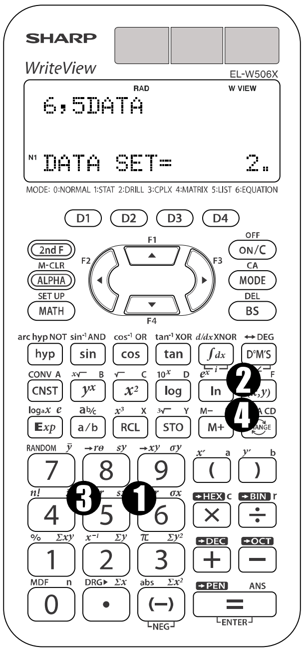
▶ Entrée des données d'une série statistique double

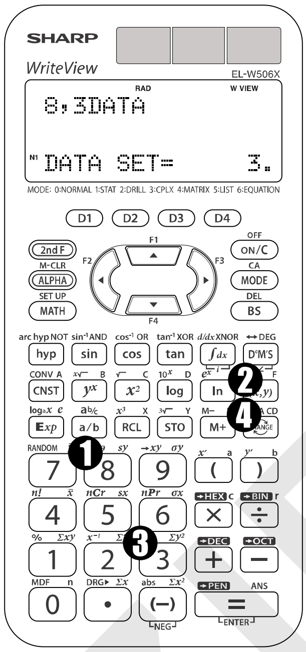
- Pour entrer les données d'une série statistique (x_i, y_i) :
  - ➢ On règle la calculatrice sur le mode **Stat 1 [LINE]** : MODE 1 1
  - ➢ On fait entrer la série colonne par colonne : x_i (x,y) y_i DATA

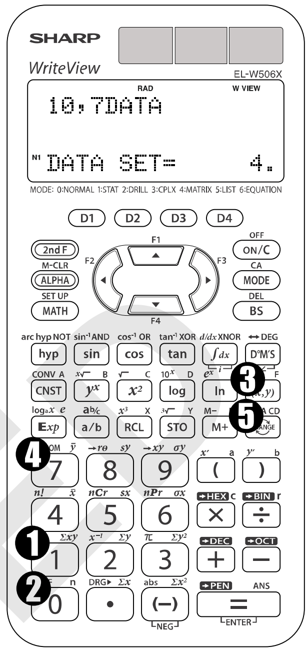
- Considérons la série (x, y) suivante :

x_i	4	6	8	10
y_i	2	5	3	7









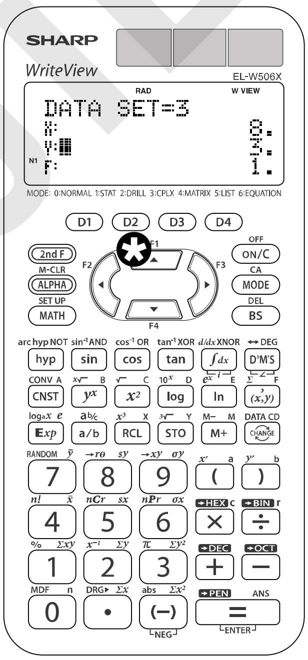
4 (x,y) 2 DATA	6 (x,y) 5 DATA	8 (x,y) 3 DATA	10 (x,y) 7 DATA

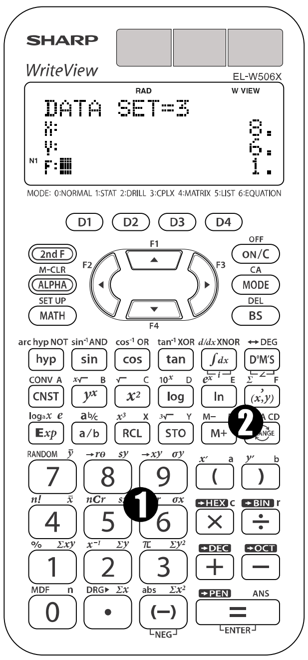
- Pour ajouter une autre colonne : Appuyer sur ON/C puis x_i (x,y) y_i DATA

▶ Correction des données

- Pour corriger une donnée :
  - ➢ Avant la touche DATA : il suffit de frapper la touche ON/C puis entrer les données correctes
  - ➢ Après la touche DATA :
    1. Utiliser les touches ▲ ▼ pour parcourir les données enregistrées.
    2. Afficher l'élément à corriger.
    3. Entrer la valeur correcte.
    4. Appuyer sur DATA

Pour changer la valeur de y_3 de 3 à 6





Utiliser ▲ ▼ pour afficher la valeur y_3 Le ▦ doit être en face de la valeur à corriger	6 DATA

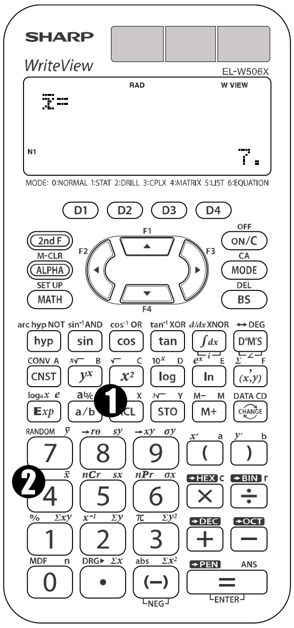
- La valeur F est l'effectif du couple (x_i, y_i). Dans le cas d'une série statistique double donnée par un tableau à deux lignes on a toujours $F = 1$

▶ Suppression des données

- Pour effacer une colonne :
  1. Utiliser les touches ▲ ▼ pour parcourir les données enregistrées
  2. Afficher la colonne à supprimer
  3. Appuyer sur 2ndF puis CD
- Pour effacer toutes les données : 2ndF CA
- Lorsqu'on change le mode de fonctionnement de la calculatrice toutes les données statistiques seront effacées

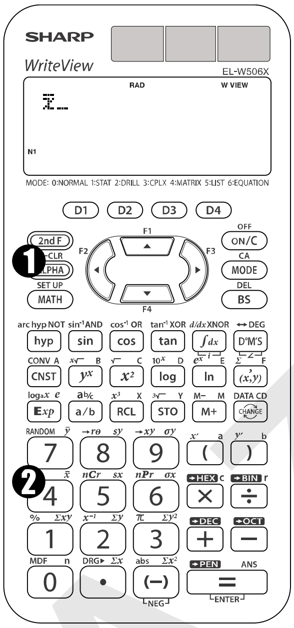
▶ Calcul des paramètres statistiques

- Pour calculer les paramètres statistiques on utilise les touches ALPHA et RCL



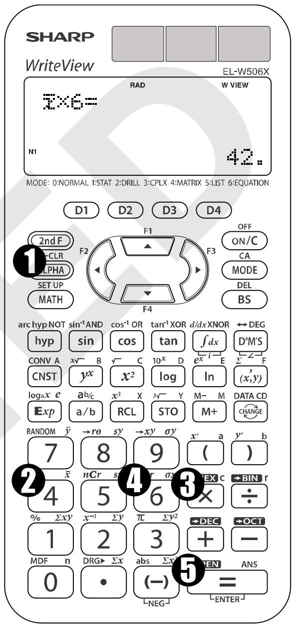
RCL $\bar{x}$

L'utilisation de la touche RCL permet d'afficher directement la valeur numérique du paramètre cherché



ALPHA $\bar{x}$

Lorsque on utilise la touche ALPHA il faut appuyer sur = pour afficher la valeur numérique

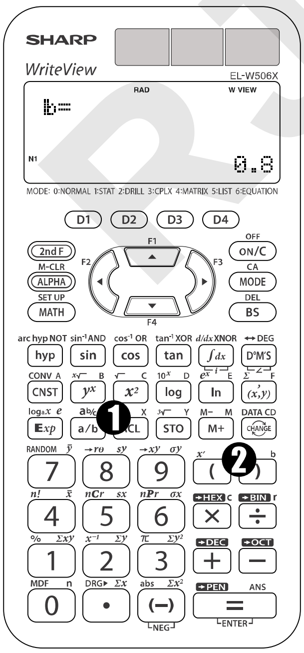


ALPHA $\bar{x}$ × 6 =

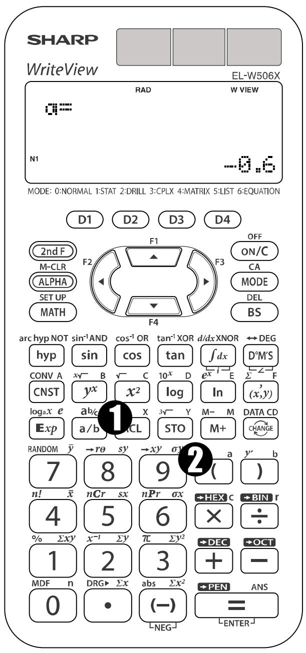
C'est plus pratique d'utiliser la touche ALPHA lorsque on veut utiliser le paramètre dans un autre calcul

▶ Equation de la droite de régression de y en x

- Une fois le mode statistique LINE est actif, la calculatrice permet de trouver une équation de la droite de régression de y en x sous la forme $y = bx + a$



RCL b



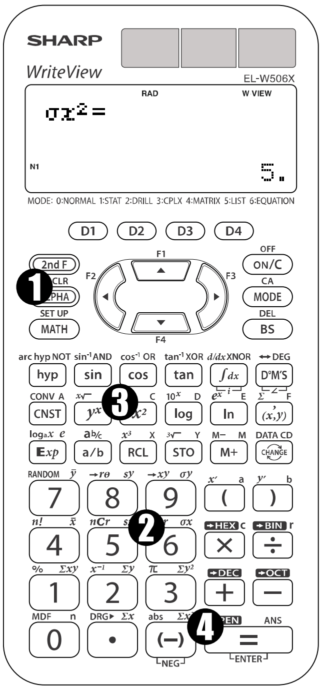
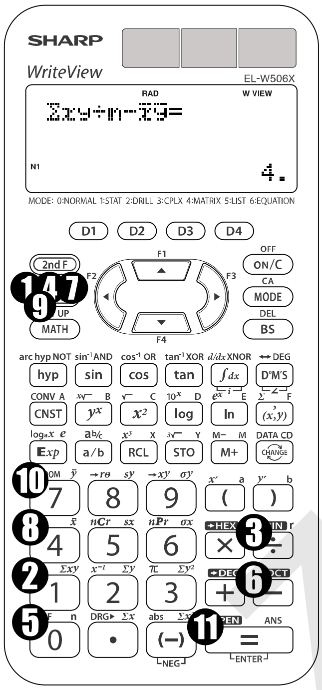
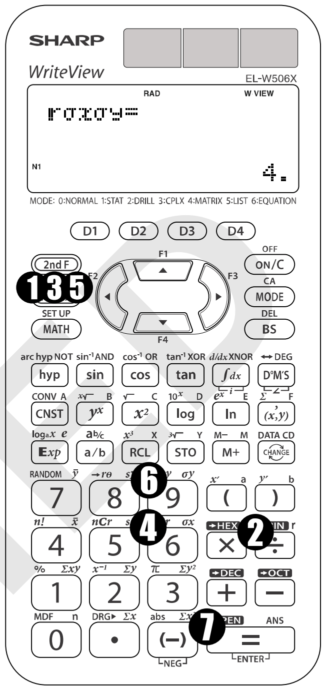
RCL a

La droite de regression de y en x a pour équation :

$\boxed{y = 0.8\,x - 0.6}$

▶ Variance et covariance

- La calculatrice ne permet pas de calculer directement la variance et la covariance, il faut effectuer le calcul manuellement en utilisant les formules du cours

Variance	Covariance	
$V(x) = \sigma_x^{\,2}$	$\operatorname{cov}(x, y) = \frac{1}{n}\sum x_i y_i - \bar{x}\,\bar{y}$	$\operatorname{cov}(x, y) = r \times \sigma_x \sigma_y$
		
ALPHA σx x^2 =	ALPHA Σxy ÷ ALPHA n − ALPHA $\bar{x}$ ALPHA $\bar{y}$ =	ALPHA r ALPHA σx ALPHA σy =

Attention !

- Ne pas confondre σ_x et s_x, l'écart-type est $\sigma_x \rightarrow$ 6
- Lorsque on cherche la droite de régression de y en x d'équation $y = ax + b$ ne pas oublier que les coefficients calculés par la calculatrice correspond à une équation de type $y = a + bx$ c'est-à-dire la valeur de a calculée par la calculatrice correspond au coefficient b de l'équation et la valeur de b calculée par la calculatrice correspond au coefficient a de l'équation