

Série :Barycentre et Produit scalaire

Exercice 1 :

On donne un triangle ABC. On désigne par : E le barycentre de (B,3) et (C,5) ; F le barycentre (C,5) et (A,2) .
G le point de concours (AE) et (BF) H le point de concours (CG) et (AB).

Démontrer que G est milieu de [HC]

Exercice 2 :

Soit ABC un triangle isocèle de sommet A. I est le milieu de [BC], H le projeté orthogonal de I sur (AC) et J le milieu de [IH]. Démontrer que les droites (AJ) et (BH) sont perpendiculaires :

- En s'appuyant sur le produit scalaire.
- En introduisant le milieu K de [HC] et en démontrant que J est l'orthocentre du triangle AIK.

Exercice 3 :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- Calculer la distance du point A à la droite (D) dans les cas suivants.

$$a) (D) : y = -3x + 4 \quad \text{et} \quad A(3, -1) \quad b) (D) : \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 1 - 4t \end{cases} \quad \text{et} \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- m étant un paramètre réel et soit $(D_m) : mx - (2m + 1)y + m - 3 = 0$

- Calculer la distance d(m) du point A(1,1) à (D_m) .
- Déterminer (D_m) sachant que d(m)=1.

Exercice 4 :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. $A(-2; -1)$, $B(-4; 3)$ et $C(-3; 6)$

Donner une équation cartésienne du cercle circonscrit au triangle ABC en précisant son centre et son rayon.

Exercice 5 :

Soit (O, I, J) un repère orthonormé, On considère $A(2, -1)$, $B(3, -2)$ et $C(0, 1)$.

- Démontrer analytiquement que l'ensemble ζ des points M(x, y) tels que $\frac{MA}{MB} = 2$ est un cercle.
Préciser son centre et son rayon.
- Déterminer analytiquement les ensembles des points suivants :
 - $C_1 = \{ M(x, y) / MA^2 + 2MB^2 + MC^2 = 13 \}$
 - $C_2 = \{ M(x, y) / MA^2 - 2MB^2 + MC^2 = 13 \}$
 - $C_3 = \{ M(x, y) / \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} \}$
 - $C_4 = \{ M(x, y) / \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = -1 \}$

Exercice 6 :

A et B sont deux points tels que AB=3cm.

Déterminer l'ensemble des points M du plan dans les cas suivants :

$$a) 2MA^2 - MB^2 = 3 \quad b) \overrightarrow{AB} \cdot (2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) = -3 \quad c) (2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}) = 0 \quad d) \frac{MA}{MB} = 2$$

Exercice 7 :

ABC, un triangle tel que BC= 4cm, $\hat{B} = \frac{\pi}{6}$ et $\hat{C} = \frac{3\pi}{4}$.

Soit f l'application du plan dans IR définie par : $f(M) = MB^2 - 3MC^2$

- Calculer AB et AC
- Calculer f(A), f(B) et f(C)
- Déterminer k pour la ligne de niveau k de f passe par : a) le milieu I de BC b) le point A

Exercice 8 :

Soit ABC, un triangle équilatéral et φ l'application qui à tout point M du plan associe le réel :

$$\varphi(M) = MA^2 + 2MB^2 - MC^2. \text{ On pose } \|\overrightarrow{AB}\| = a \text{ avec } a > 0$$

- 1) Soit G défini par : $\overrightarrow{GB} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}$. Calculer GA^2 , GB^2 et GC^2 en fonction a
- 2) Déterminer les réels α , β et δ tels que G soit le barycentre du système $\{(A, \alpha), (B, \beta), (C, \delta)\}$
- 3) Trouver et représenter l'ensemble Γ des points M satisfaisant à : $\varphi(M) = a^2$.

Exercice 9 :

Soit ABC un triangle isocèle de sommet A tel que : $BC = 2a$ et $AB = AC = 3a$ où $a > 0$.

Soit G le barycentre des points (A, 2) (B, 3) (C, 3). Soit I le milieu de [BC], J le milieu de [AI].

- 1) Montrer que G est le milieu de [IJ].
- 2) M étant un point du plan, calculer en fonction de MG et de a : $2MA^2 + 3MB^2 + 3MC^2$
- 3) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : $2MA^2 + 3MB^2 + 3MC^2 = 18a^2$
- 4) Déterminer l'ensemble E des points M du plan tels que : $2MA^2 + 3MB^2 + 3MC^2 = 22a^2$
- 5) Montrer que les droites (BC), (AB) et (AC) ont, chacune, un unique point commun avec E
Que représente le point G pour le triangle ABC

Compléments exercices dans livre CIAM 1SM

Barycentre : N 26-27-30-31 Page 21

Ligne de Niveau : N 20-21-22 Page 21

Cercle : N 20-21-24-30 Page 59