TRAVAUX DIRIGES : FONCTION LOGARITHME NEPERIENS Tle D

EXERCICE 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est 2 cm.
On considère la fonction f dérivable et définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2}{e} - x\ln x \quad si\ x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

. On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative f.

Partie A : étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = \frac{2x}{e} - 1 - \ln x$.

1- Calcule $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

2- Etudie le sens de variation de g puis dresse son tableau de variation.

3- a) Justifie que sur $\left]\frac{1}{e}; \frac{e}{2}\right[$, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α.
Donne un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.

b) Calcule $g(e)$ puis déduis des questions précédentes que :
$\forall x \in\ ]0; \alpha[\ \cup\ ]e; +\infty[,\ g(x) > 0$ et $\forall x \in\ ]\alpha; e[,\ g(x) < 0$.

Partie B : étude de la fonction f

1- a) Etudie la continuité de f en 0.

b) Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Donne une interprétation graphique des résultats.

2- Etudie la dérivabilité de f en 0. Interprète graphiquement le résultat obtenu.

3- a) Démontre que $\forall \in\ ]0; +\infty[,\ f'(x) = g(x)$.

b) Déduis de la partie A. 3.b), le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.

4- Donne le sens de variation de f puis dresse son tableau de variation.

5- a) Démontre que $f(\alpha) = \alpha - \frac{\alpha^2}{e}$.

b) Trace $(\mathcal{C})$. (On prendra $\alpha = 0.5$ et $f(\alpha) = 0.4$).

Partie C : étude d'une bijection

Soit h la restriction de f à l'intervalle $[e; +\infty[$.

1- Justifie que h est une bijection de $[e; +\infty[$ dans un intervalle K que l'on précisera.

2- On désigne par h^{-1} la bijection réciproque de h et $(\mathcal{C}')$ sa courbe représentative.

a) Calcule $h(e)$ et $h'(e)$. h^{-1} est-elle dérivable en 0 ?

b) Dresse le tableau de variation de h^{-1}.

c) Construis $(\mathcal{C}')$ dans le même graphique que $(\mathcal{C})$.

EXERCICE 2

Partie A

On considère la fonction g dérivable sur $]-\infty; 2[$ et définie par : $g(x) = 2 - (2 - x)\ln(2 - x)$.

1) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} g$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} g$.
2) Etudier le sens de variation de g, puis dresser son tableau de variation.
3) Démontrer que l'équation : $g(x) = 0$ admet une unique solution α comprise entre $-0{,}4$ et $-0{,}3$.
4) Justifier que : $\begin{cases} \forall\, x \in\,]-\infty; \alpha[\,, & g(x) < 0 \\ \forall\, x \in\,]\alpha\,; 2[\,, & g(x) > 0 \end{cases}$

Partie B

On considère la fonction f dérivable sur $]-\infty; 2[$ et définie par : $f(x) = x[1 - \ln(2 - x)]$.
On appelle (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé *(O, I, J)*.
Unité graphique : 2cm.

1) Justifier que : $f(\alpha) = \frac{\alpha^2}{2-\alpha}$.
2) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} f$, puis interpréter graphiquement si possible ces limites.
3) Démontrer que *(C)* admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction celle de la droite *(OJ)*.
4) a- Vérifier que : pour tout élément de $]-\infty; 2[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{2-x}$

   b- Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
5) Justifier que la droite *(T)* d'équation $y = 2x - 1$, est tangente à *(C)* au point *K(1 ; 1)*. $[La\ courbe\ (C)\ est\ au - dessus\ de\ la\ droite\ (T)]$
6) Tracer la droite *(T)* et la droite *(D)* d'équation $x = 2$ puis construire la courbe *(C)*.

Partie C

Soit h la fonction de $[0\,; 2[$ vers $[0\,;\, +\infty[$ définie par : $h(x) = f(x)$.

1) Démontrer que la fonction h est une bijection.
2) Donner le tableau de variation de la bijection réciproque h^{-1} de h.
3) On note (C') la courbe représentative de h^{-1} . Construire la courbe (C') dans le même repère que (C).