PREPA BAC
SESSION : 2024

MATHÉMATIQUES

Fomesoutra.com ça soutra !

Cette épreuve comporte deux (02) pages numérotées 1/2 et 2/2.
L'usage de la calculatrice scientifique est autorisé.

FICHE (EQUATIONS DIFFERENTIELLE)

Exercice 1

Parmi les équations suivantes, indique celles qui sont des équations différentielles.

1) $(E): 2y^2 + y = 2$; 2) $(E): y' + 4 = 0$; 3) $(E): y^2 = 1$;
4) $(E): y'' + 2y' + y = 5$; 5) $(E): y + 3 = 0$.

Exercice 2

Résous sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1) $y' + 2y = 0$ 2) $7y' = 3y$

Exercice 3

Résous sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y' + 2y = 6$.

Exercice 4

Résous sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y'' - 4y = 0$.

Exercice 5

Résous sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y'' + 4y = 0$.

Exercice 7

1. Résous sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $y'' + 25y = 0$.
2. Détermine la solution f de (E) qui vérifie : $f(0) = 1$ et $f'\left(\frac{\pi}{5}\right) = -2$.

Exercice 8

Pour chacune des équations différentielles suivantes, détermine la solution vérifiant la condition donnée :

a. $y' = -2y$, $f(0) = 1$.

b. $y' - (\ln 2)y = 0$, $f(2) = \frac{1}{2}$.

Exercice 9

On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = e^{-2x}$.

1. Vérifie que la fonction g telle que $g(x) = (x+1)e^{-2x}$ est une solution de (E).
2. Démontre qu'une fonction $h + g$ est solution de (E) si et seulement si la fonction h est solution de l'équation différentielle (E'): $y' + 2y = 0$.
3. Détermine les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E').
4. a) Déduis des questions précédentes, les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E).
   b) Détermine la solution f de (E) vérifiant la condition $f(0) = -2$.

Exercice 10

On considère l'équation différentielle(E) : $y' + 3y = 2e^{-x}$.

1. Détermine le nombre réel m pour que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = me^{-x}$ soit solution de(E).
2. Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E'): $y' + 3y = 0$.
3. Démontre qu'une fonction $h - g$ est solution de (E') si et seulement si la fonction g est solution de (E).
4. Déduis des questions précédentes les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle(E).

Exercice 11

Soit θ la température d'un corps à l'instant t. La température ambiante est 30°C.

A chaque instant$t$, on pose : $x(t) = \theta(t) - 30$. On suppose que la fonction x est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie : $x' = -k^2x$ $(k \in \mathbb{R}^*)$. A l'instant$t = 0$, la température de ce corps est 70°C et au bout de 5 minutes, elle n'est plus que de 60°C.

1) Détermine$\theta(t)$, où t est mesuré en minutes.
2) Détermine la température de ce corps au bout de 20 minutes.

BONUS

Tableau récapitulatif

Types d'équations différentielles	Fonctions solutions
$y' + ay = 0, a \in \mathbb{R}$	$x \longmapsto ke^{-ax}, k \in \mathbb{R}$
$y' + ay = b, a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}^*$	$x \longmapsto ke^{-ax} + \frac{b}{a}, k \in \mathbb{R}$
$y'' = 0$	$x \longmapsto ax + b, \ a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$
$y'' - \omega^2 y = 0, \omega \in \mathbb{R}^*$	$x \longmapsto ae^{-\omega x} + be^{\omega x}, \ a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$
$y'' + \omega^2 y = 0, \omega \in \mathbb{R}^*$	$x \longmapsto a \cos \omega x + b \sin \omega x, \ a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$